Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2016

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** 0103 - 03/16
- **Fecha** 25 Ago 2016
- **Cont** Mecánica Relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
- **Youtube** www.youtube.com/watch?v=vdtZKNhPv1w
- **Archivo** a-2016-U01-C03-0825-mecanica-relativista

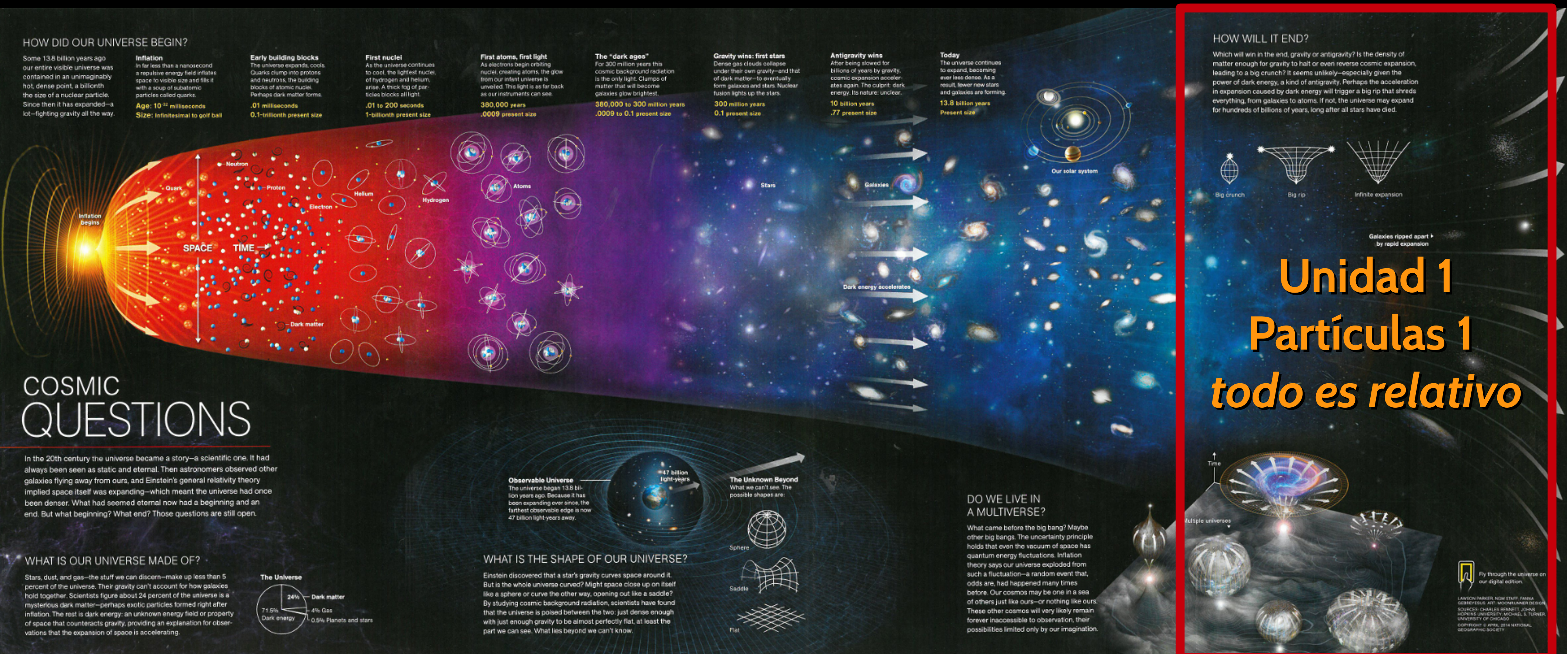
RIO NEGRO

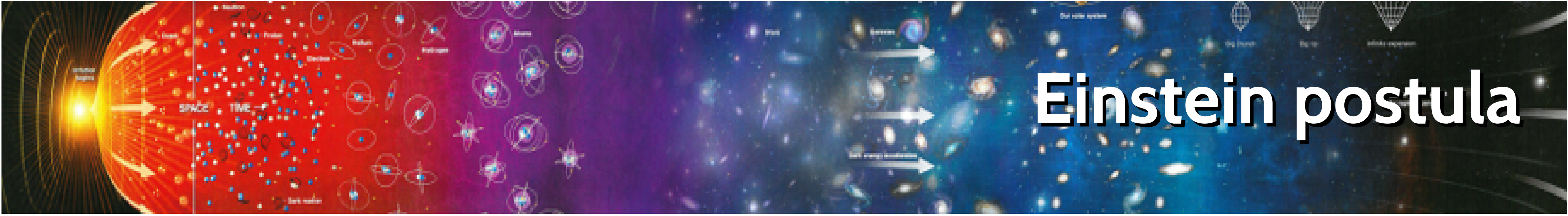
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2016

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** 0103 – 03/16
- **Fecha** 25 Ago 2016
- **Cont** Mecánica Relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
- **Youtube** www.youtube.com/watch?v=EIwGOOvSCCw
- **Archivo** a-2016-U01-C03-0825-mecanica-relativista

RIO NEGRO

Contenidos: un viaje en el tiempo





Einstein postula

- **El principio de la relatividad**

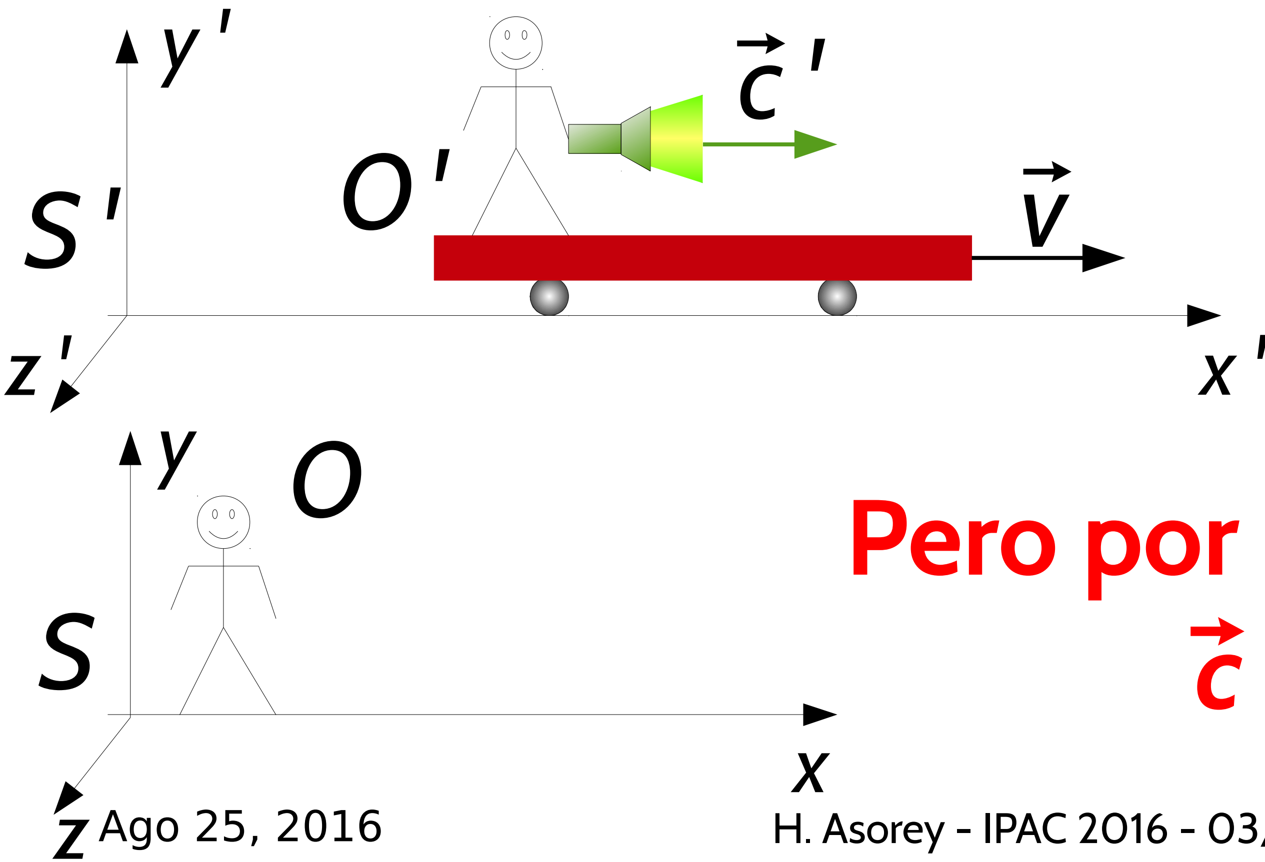
  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invariancia de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, c, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

Cambio pelota por linterna verde...

- El primer postulado es claro, es lo que venimos haciendo con Galileo sobre la invarianca.
- ¿Qué pasa con el segundo? Imaginemos lo siguiente:



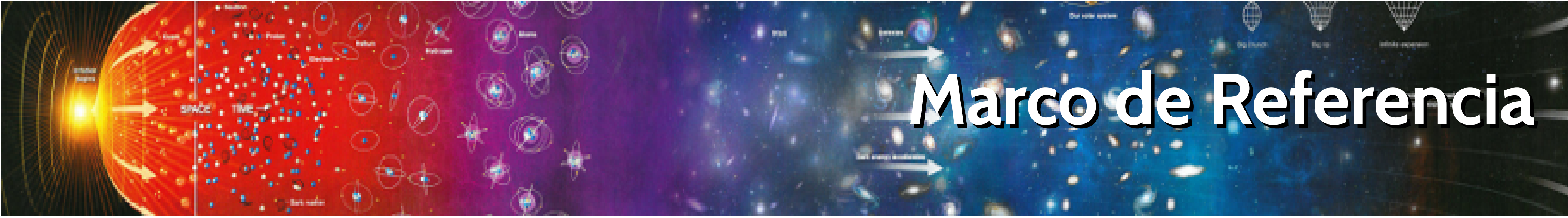
~~Por Galileo:~~

$$\cancel{\vec{c}\,'(t)=\vec{c}(t)-\vec{v}}$$

$$\cancel{\vec{c}(t)=\vec{c}\,'(t)+\vec{v}}$$

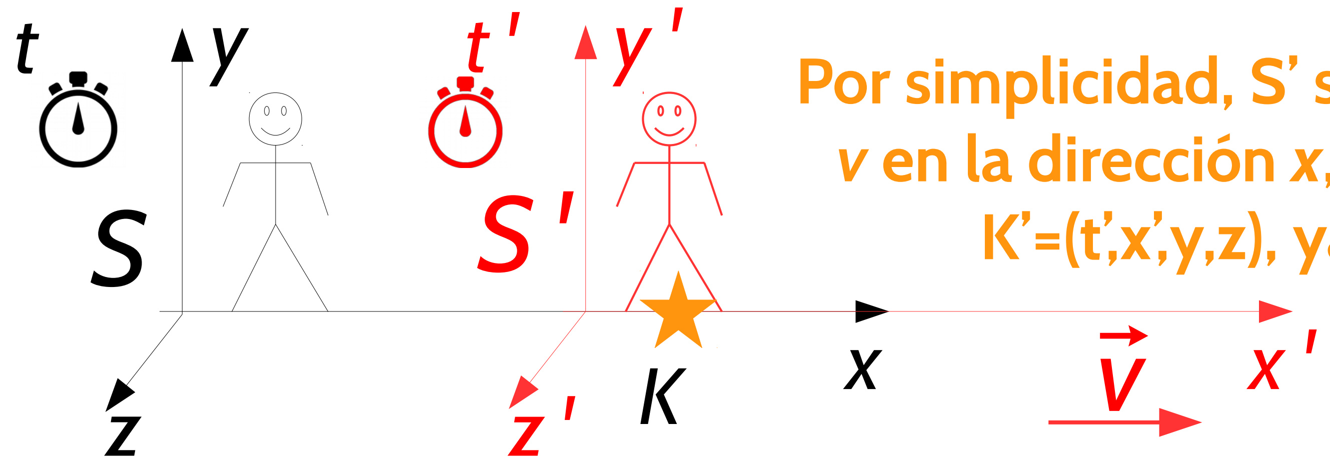
Pero por el 2do postulado

$$\vec{c}\,'=\vec{c}=\mathrm{cte}$$



Marco de Referencia

- **Marco de Referencia**
  sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj
- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**
- **Evento**
  es un punto en el espaciotiempo *K=(t,x,y,z)*



Por simplicidad, S' se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

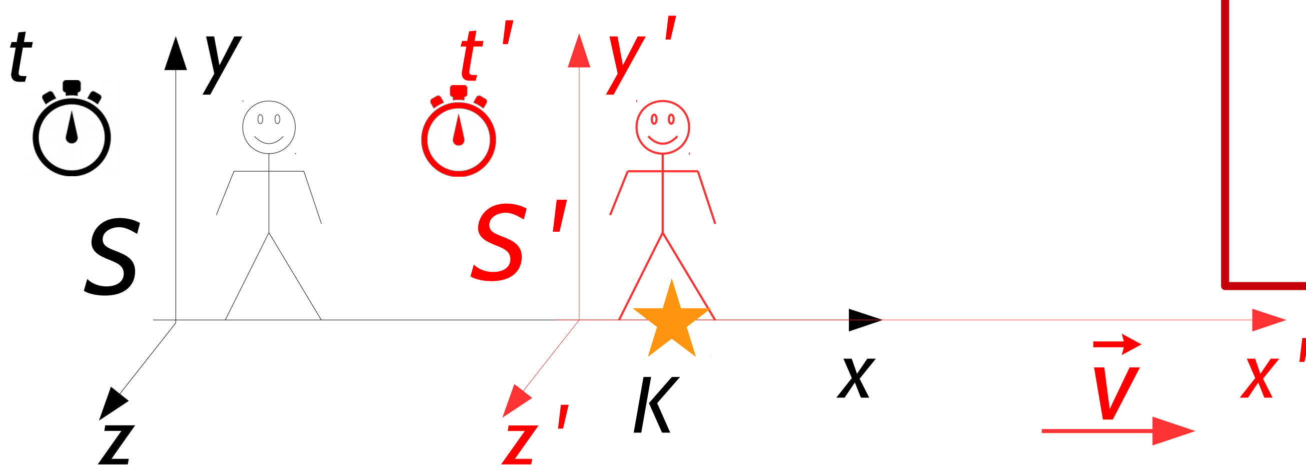
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\,x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v\,t\right)$$

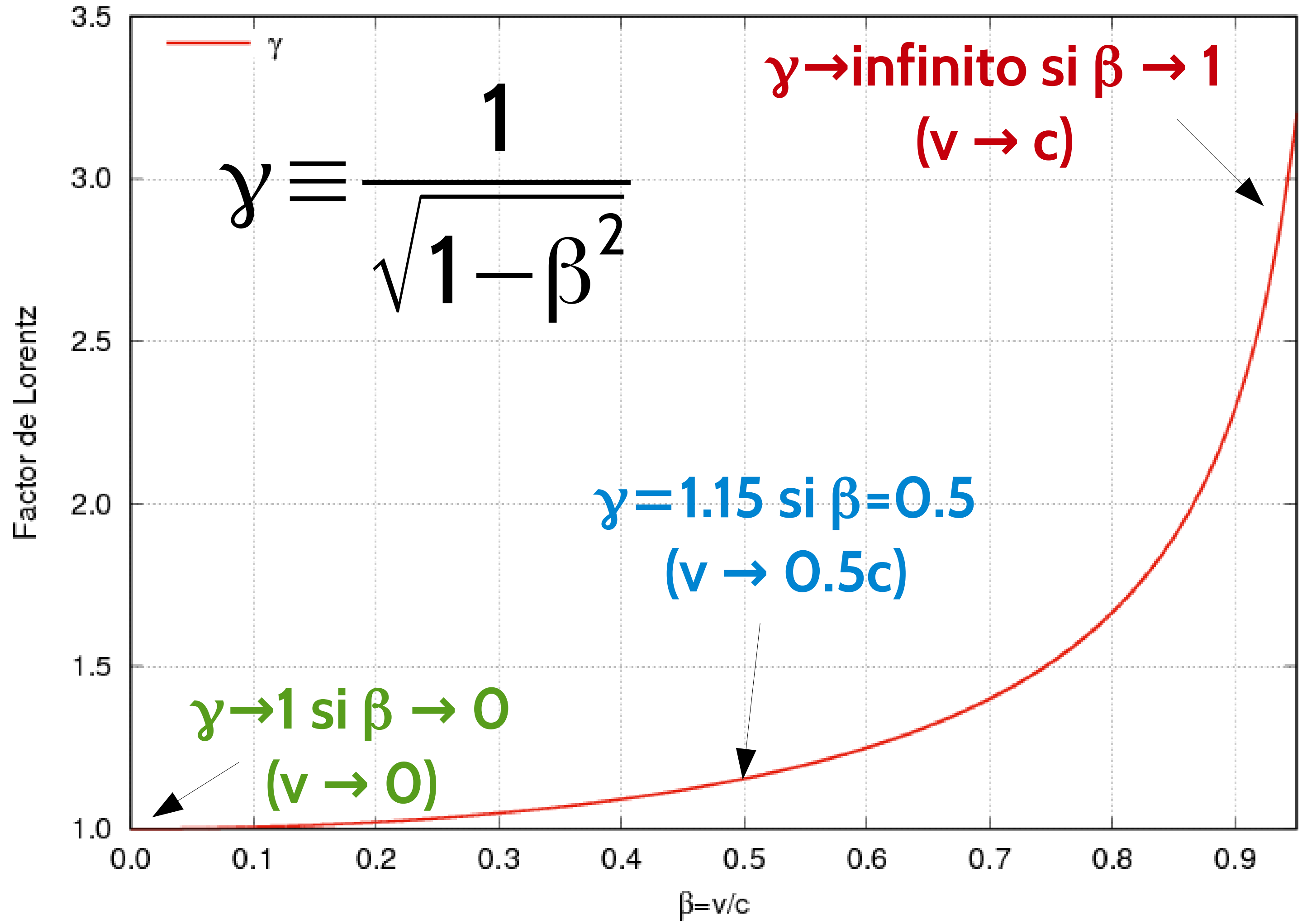
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$



- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



Aproximación Newtoniana, v → 0

- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \to 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right) \to t' \simeq t$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right) \to x' \simeq x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Si v → 0, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!

Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v \Delta t\right) \qquad \Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v \Delta t'\right)$$

Eventos simultáneos en un marco

$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0$ y eventualmente $\Delta x' = 0$

Eventos co-locales en un marco

$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0$ y eventualmente $\Delta t' = 0$

Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$

El muón

- **Muón**: decaen en electrones en un tiempo promedio de $\tau = 2.2\,\mu s$ $(2.2\times10^{-6}\,s)$.

  $\mu^- \to e^-\,\nu_\mu\,\bar{\nu}_e$

- velocidad típica $v = 0.99c \Rightarrow \beta = 0.99$

  $\Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \boxed{\gamma \simeq 7}$

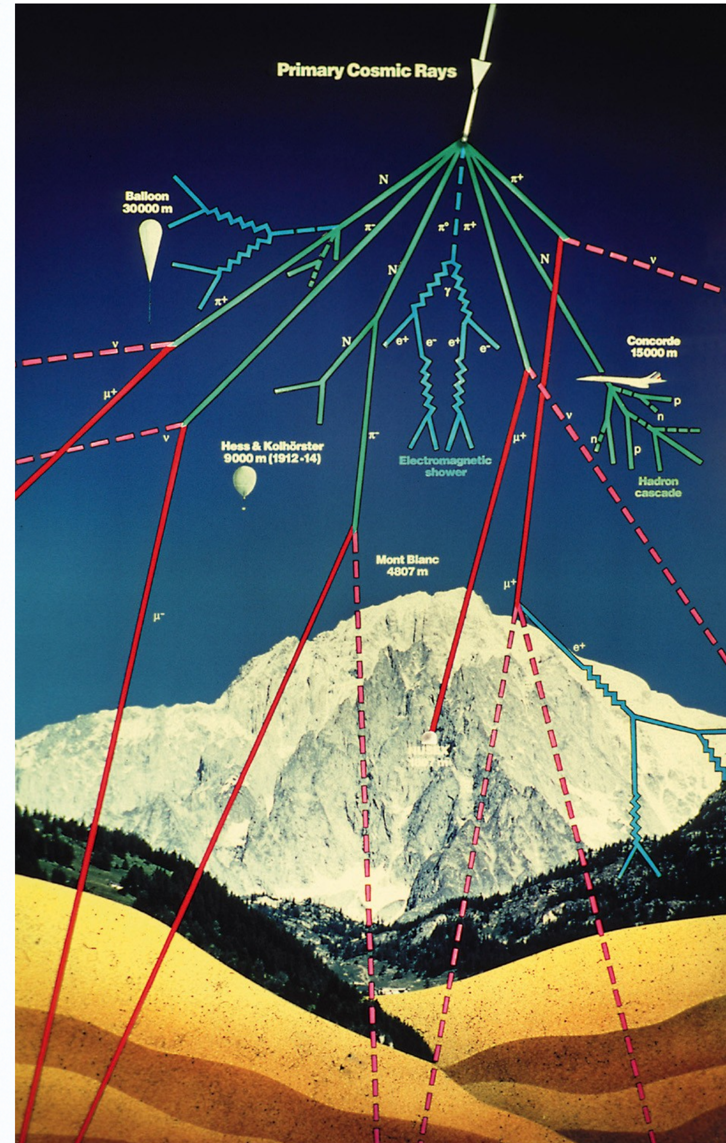
- Algún μ decae en $2\,\mu s$ (p. ej) $\Rightarrow$ este es en el marco de referencia del μ (t'). $\Rightarrow x' = t' c \beta = \boxed{594\,m = x'}$
- Esto es medido en S' ¿A cuánto corresponde esto en S?

  ya que $t'=0 \Rightarrow t=0$ (por construcción) tenemos:

  $x' = x/\gamma \Rightarrow x = x'\cdot\gamma \Rightarrow x = 7\cdot 594\,m \Rightarrow \boxed{x = 4158\,m}$

- ¿y el tiempo t? las cosas serán consistentes.
- Antes de decaer el muón recorre más de 4 km en nuestro marco de referencia.

Muones producidos en la atmósfera se observan en el piso

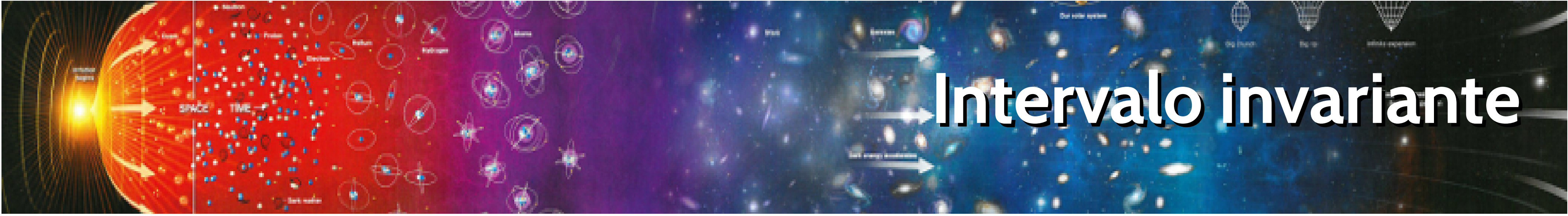


Regla de suma de velocidades

- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
  - **El observador en *S*, mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje *x* con velocidad *u=dx/dt***
  - **El observador en *S'*, verá que el objeto se mueve con velocidad *u'=dx'/dt'***

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$\text{Si } u \ll c \Rightarrow u' \simeq u - v. \qquad \text{Si } u = c \Rightarrow u' = c$$



Intervalo invariante

- La velocidad de la luz es invariante, entonces:

$$c=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt'} \text{ con } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ y } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

- Luego, para un fotón: $c\Delta t=\Delta r \rightarrow c^2(\Delta t)^2=(\Delta r)^2$

$$\rightarrow s^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2}^{\text{intervalo espaciotemporal}\equiv s^2}$$

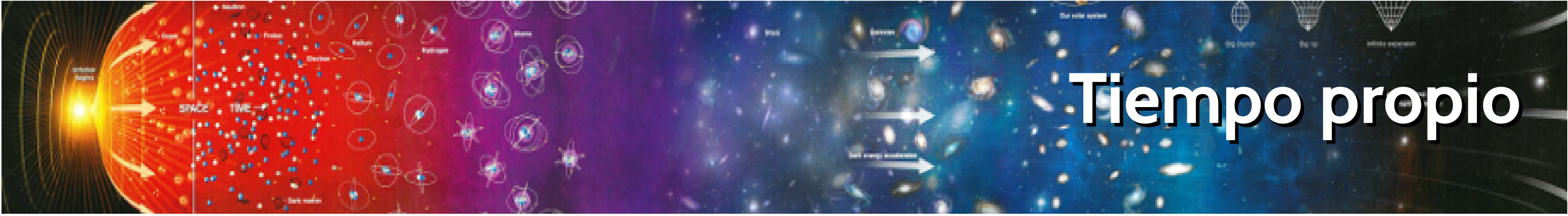
Convención:

+ - - -

$$\text{y } s'^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2}^{\text{intervalo espaciotemporal}\equiv s'^2}$$

- La invariancia de la velocidad de la luz implica (probar):

$$s^2=s'^2$$



Tiempo propio

- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "comovil".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

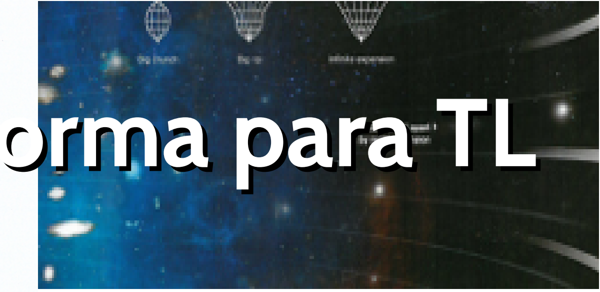
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

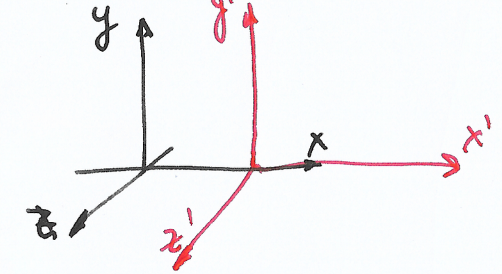
Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$

Otra forma para TL



Transformación de Lorentz. Otra forma.



- A $t=0$ los sistemas son co-locales
- A $t=0$ se enciende un foco puntual en el origen $S_0 = S_0'$.
- Como $c = c'$ ⇒ En ambos sistemas se debe formar la propagación de la luz

- El frente de onda será, en S: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$

  y en S': $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

Notar que así también se pueden construir los intervalos invariantes

- Como S' se mueve en la dirección $+x$ ⇒ $y=y'$ y $z=z'$ y sólo esperamos cambios en x y x': ⇒ $x'=\gamma(x-vt)$; $x=\gamma'(x'+vt')$
- γ es algún factor de contracción ⇒ Por el 1º postulado $\gamma=\gamma'$
- Por el segundo postulado, $c=c'$ ⇒ en la dirección $+x$: $ct=x$ y $ct'=x'$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(x-vt) \quad y \quad ct=\gamma(x'+vt')$$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(ct-vt) \quad y \quad ct=\gamma(ct'+vt')$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma}{c}(c-v)t \Rightarrow t'=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)t \Rightarrow t'=\gamma t(1-\beta)$$

$$y \quad t=\frac{\gamma}{\cancel{c}}\cancel{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)t' \Rightarrow t=\gamma(1+\beta)t'$$

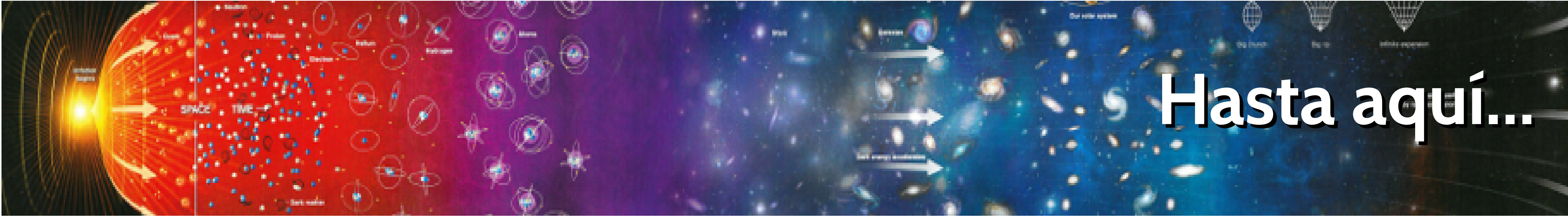
$$\Rightarrow t=\gamma(1+\beta)\gamma(1-\beta)t \Rightarrow 1=\gamma^2(1+\beta)(1-\beta) \Rightarrow \gamma^2=\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ y luego obtenemos las T.L.

Jugando con la velocidad de la luz

A slower speed of light
http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/

WARP: A Special Relativity Simulator
http://www.adamauton.com/warp/



Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Diálogo entre dos mundos: movimiento y fuerzas

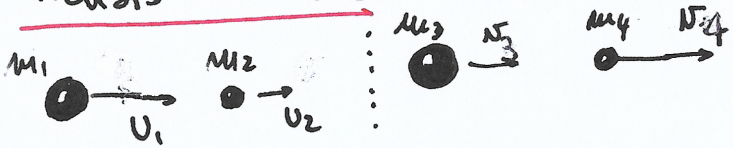
- Newton: - Un cuerpo sujeto a una fuerza constante *F* durante un tiempo *t* tendrá una velocidad $v=(F/m)t$ que aumenta con *t*
- Einstein: - Pero Isaac, ¡v<c siempre!
- N: ¿Qué? Vos estás equivocado Alberto ¿sino que pasa con mi 2da ley?

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- E: ¡Ahh! ¿Pero cuál *t* estarás usando en tu derivada? ¿En que marco de referencia?
- N: ¿Cómo? ¿el tiempo no es absoluto? ¿Acaso *t* no es el mismo para todos los observadores inerciales?
- E: Jejejeje.... (sonrisa con mirada pícara)

Colisiones (u es inicial, v es final, puede haber cambio de masa).

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 + m_4 v_4 \quad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \quad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa entre S y S') ⇒

En S'

$$\underbrace{m_1 u_1 + m_2 u_2}_{(1)} - (m_1 + m_2) V = \underbrace{m_3 v_3 + m_4 v_4}_{(1)} - V(m_3 + m_4)$$

⇒ $(m_1 + m_2) V = (m_3 + m_4) V$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1 + m_2 = m_3 + m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m v'$ (suponemos por ahora $v \parallel x$ por simpl. y $m = m'$) ⇒ (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por la relativista:

$$v_3' = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \quad (5)$$

⇒ reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) ¡no vale en general! ó tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.

Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad\qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

se ve que o bien:

  - No se conserva la cantidad de movimiento;
  - O bien, la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativistiva $\vec{p} = ?$

La conservación de *p* es un principio básico

- Al igual que nos pasó con *u*, debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

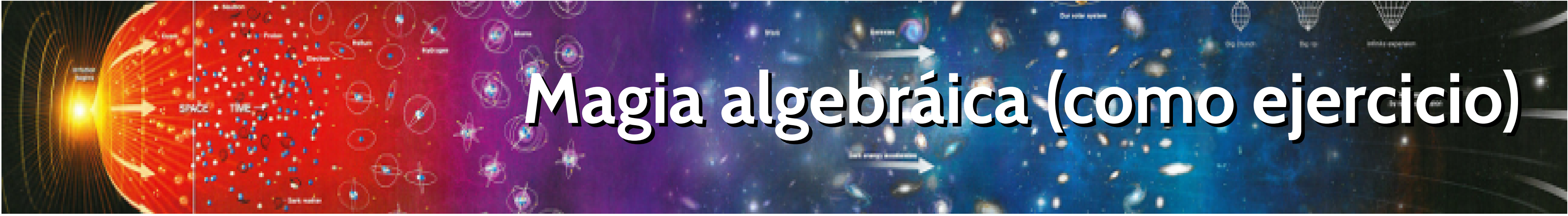
  Clásico: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}'=\frac{d}{dt}(m\vec{r}')$

  Correcto: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}'=\frac{d}{dt'}(m\vec{r}')$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

Cant. de movimiento relativista

$$\boxed{\vec{p}=m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$



Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec p$: $\boxed{\vec p = m\, d\vec r/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec r/d\tau)$? Recordando:

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec p} = m\frac{d\vec r}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec r}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec v\gamma}$$

Donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec v|/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec p = m\vec v\gamma}$$

Definimos $\gamma_i = (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_3 v_3\gamma_3 + m_4 v_4\gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1'\gamma_1' + m_2 v_2'\gamma_2' = m_3 v_3'\gamma_3' + m_4 v_4'\gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec p = m\gamma\vec v$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces mγ>m

Cumpliendo una vieja promesa de Física 1A

- Serie de Taylor para

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \dots$$

- y tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \Rightarrow \begin{matrix} n=-1/2 \\ \epsilon = -\beta^2 \ll 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

- Entonces para nuestro invariante tenemos:

$$\Rightarrow \gamma m = \frac{\cancel{\gamma}\, m}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq m + \frac{1}{2}m\beta^2 - \frac{3}{8}m\cdot\beta^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma m \simeq m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}m\, v^4/c^4$$

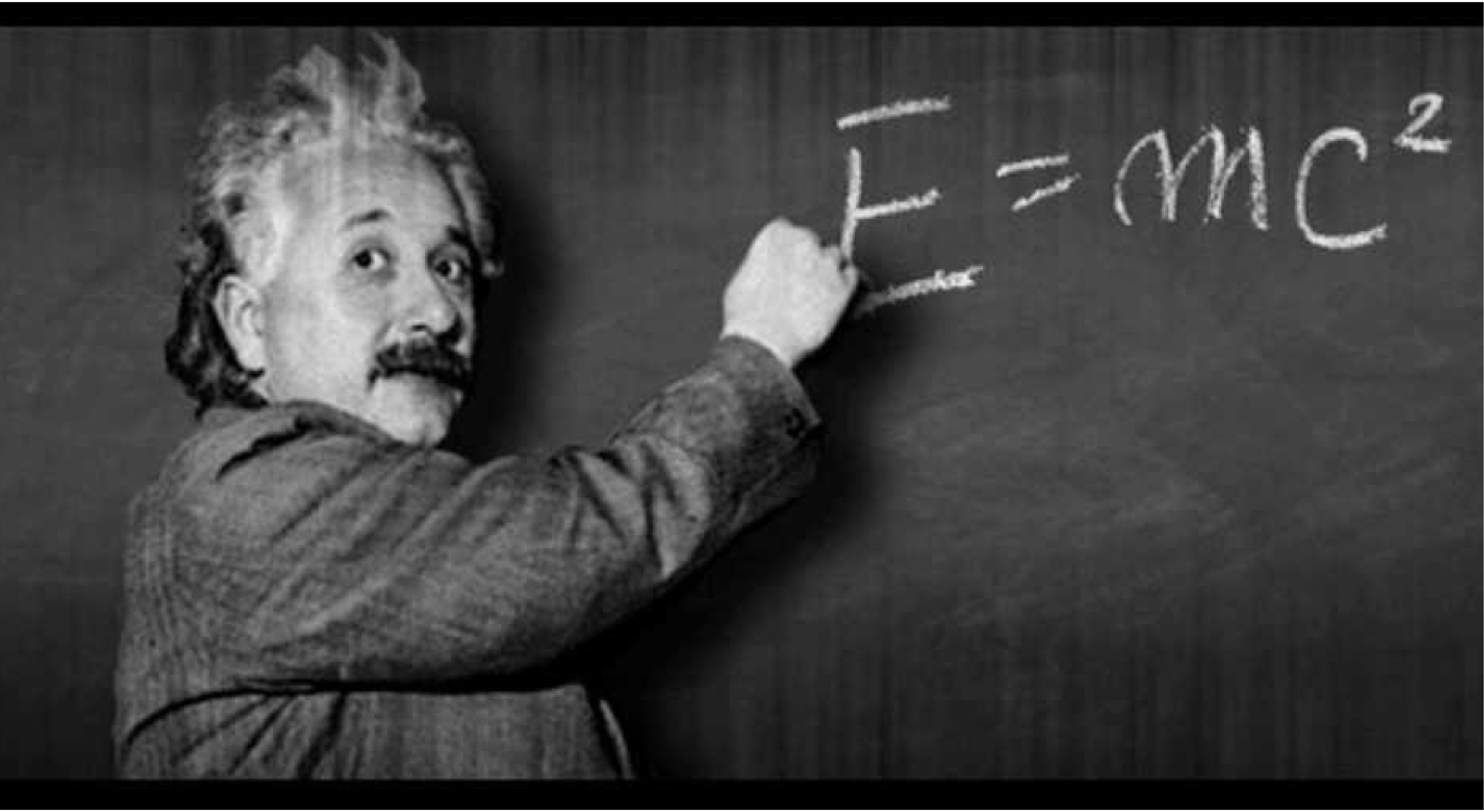
- Multiplicando ambos lados por c^2:

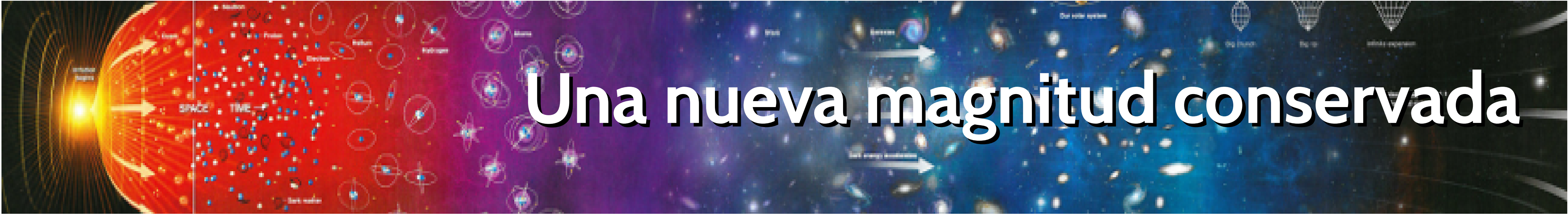
$$\gamma m c^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} - \frac{3}{8}m v^4/c^{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{c^2}$$

- y descartando el término $v^4/c^2 \ll 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\gamma m c^2 \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{energía}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{energía cinética}}} \Rightarrow \boxed{\gamma m c^2 = E}$$

Gracias Isaac, seguí participando....





Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación del impulso, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

La energía se conserva

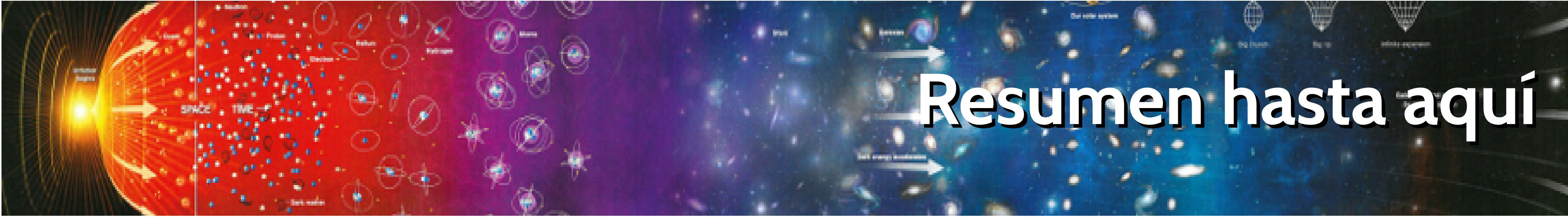
$$\boxed{E = \gamma m c^2 \simeq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

Energía cinética clásica

- Recordar que la energía de un cuerpo es $E = \gamma m c^2$
- $E = \frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c.

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética (en ausencia de otras interacciones)



Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2}$$

Invariante relativista

¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento

$$m=0 \rightarrow E^2-(pc)^2=(mc^2)^2 \Rightarrow E^2-(pc)^2=0$$

Cantidad de movimiento de partículas sin masa

$$\boxed{E=pc}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta:

λ=420 nm → E = hc/λ = 0.473 aJ (attojoules, atto=10^{-18})

→ p = 1.58 x 10^{-27} kg m/s

Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

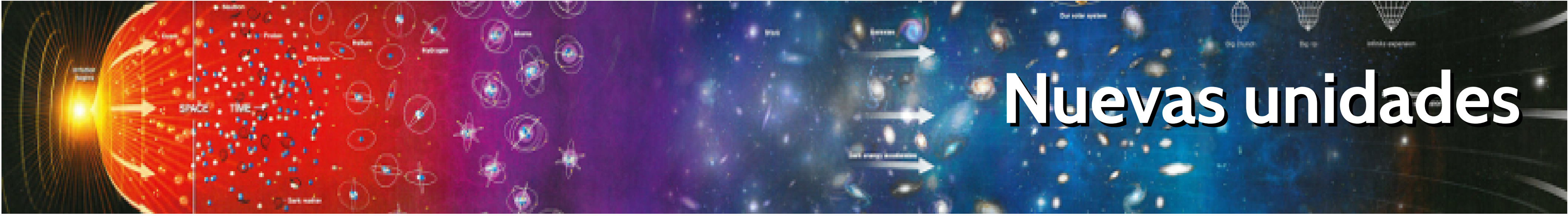
$$E = qV \rightarrow E = \left(1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(1\,\mathrm{V}\right) \rightarrow E = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt

$$\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas Visible R X Gamma Partículas C. Galáctico R.C. Gal R.C.E.G.



Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c^2

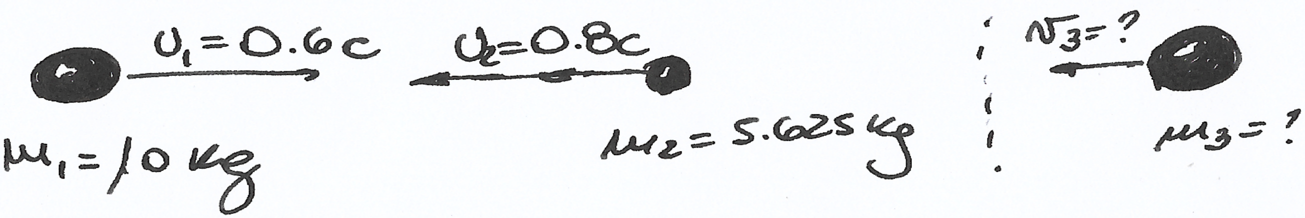
- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV

Choque inelástico: ¡¡$m_3>m_1+m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica:



Clásicamente diríamos: $m_3=15.625$ kg y $v_3=0.01>0.$

Relativísticamente:

$$\gamma_1=(1-\beta_1^2)^{-1/2}=1.25 \quad y \quad \gamma_2=(1-\beta_2^2)^{-1/2}=5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i=\sum p_i^i=\sum m_i\gamma_i v_i=10\,kg\cdot 1.25\cdot 0{,}6c+5.625\,kg\cdot\frac{5}{3}(-0.8c)$$

$$\Rightarrow p_T^i=7.5\,kgc-7.5\,kgc \Rightarrow p_T^i=0 \Rightarrow v_3=0.$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f=0.} \quad y \quad \gamma_3=1$$

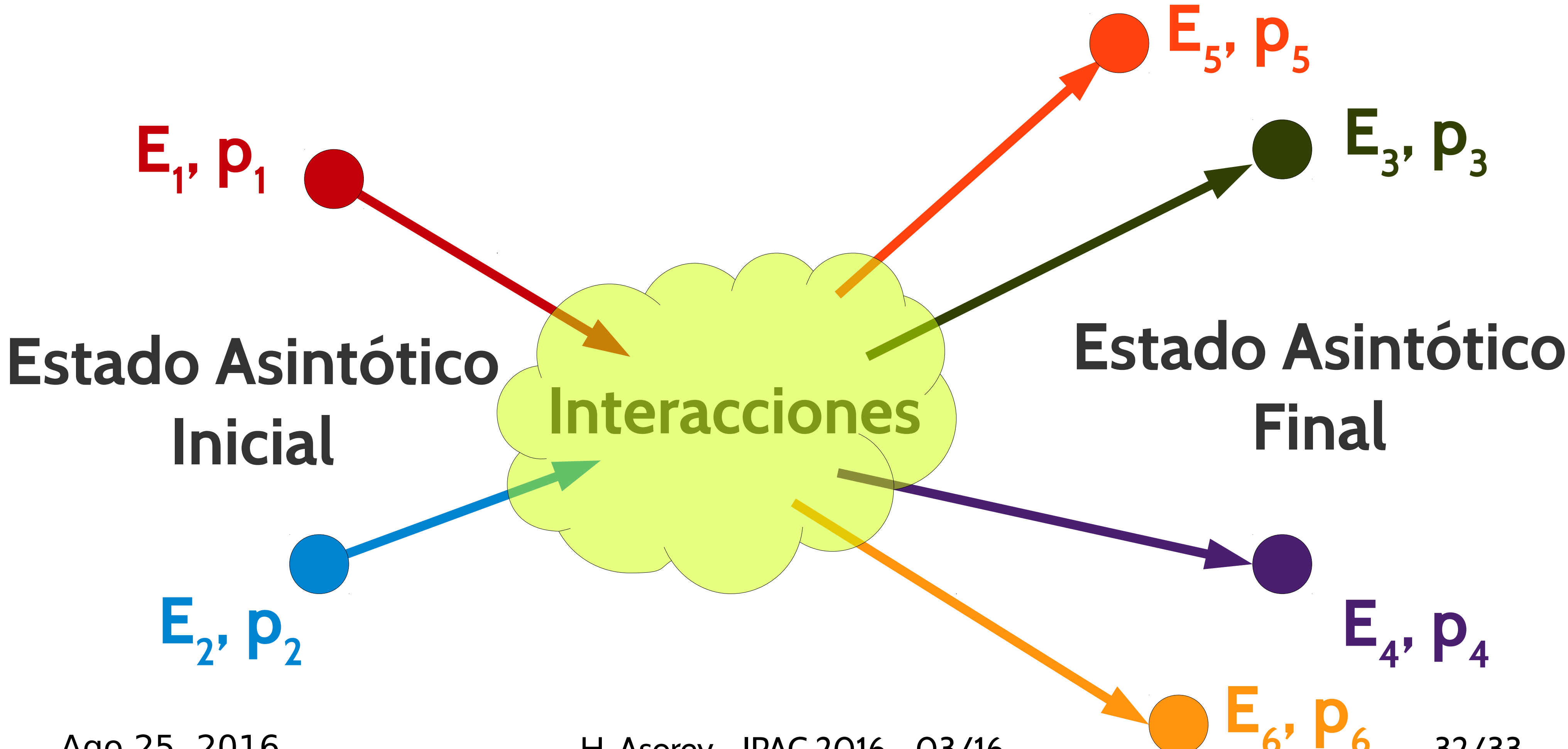
Conservación energía.

$$E_i=\sum m_i\gamma_i c^2 \Rightarrow E_i=E_f \Rightarrow 10\,kg\cdot 1.25+5.625\cdot 5/3=m_3\gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3=21.875\,kg \quad \Rightarrow m_3>m_1+m_2\ !!!$$

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} E^{\text{inicial}} &= \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} &= \sum_{k}^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{aligned}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}^{\,\text{inicial}} &= \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} &= \sum_{k}^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{aligned}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$