



Universidad Nacional de Río Negro

Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2016

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 CO2
- **Fecha** 29 Ago 2018
- **Cont** Cinemática Relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** <https://asoreyh.github.io/unrn-ipac/>
- **Youtube** <https://goo.gl/UZJzLk>





Puntos de contacto

[View on GitHub](#) 

unrn-ipac

El curso de Astrofísica y Cosmología de la UNRN



Introducción a Partículas, Astrofísica y Cosmología - Segundo semestre de 2018

Asignatura del cuarto año de la carrera de Profesorado en Física [Universidad Nacional de Río Negro](#)

Las clases fueron realizados en [LibreOffice Impress](#), la herramienta de presentaciones de [LibreOffice](#). Para poder visualizar correctamente las clases, por favor descarguelo siguiendo el este enlace: [Descargue LibreOffice](#). En Windows, puede ser necesario descargar también la fuente [Cabin](#). Para facilitar la difusión, se incluyen también versiones de las clases en formato pdf. Para visualizarlo, podría necesitar descargar [Acrobat Reader](#).

Clases

[Guías de ejercicios](#)

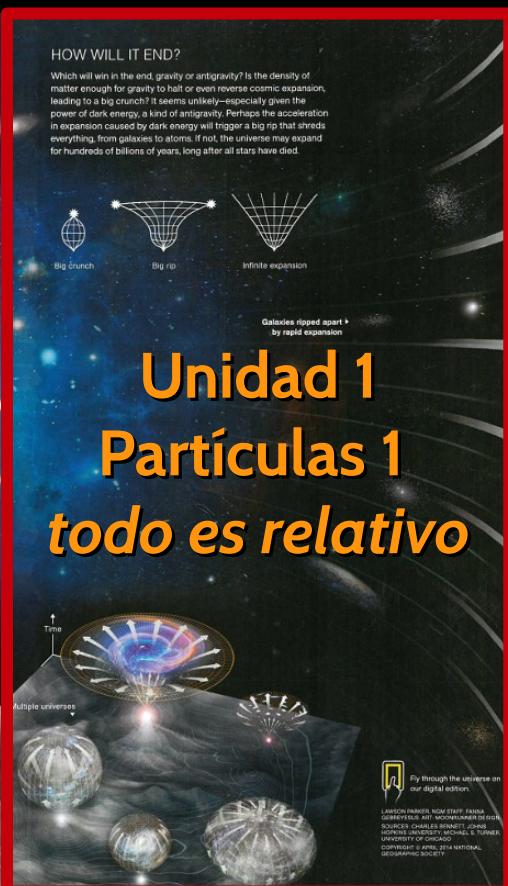
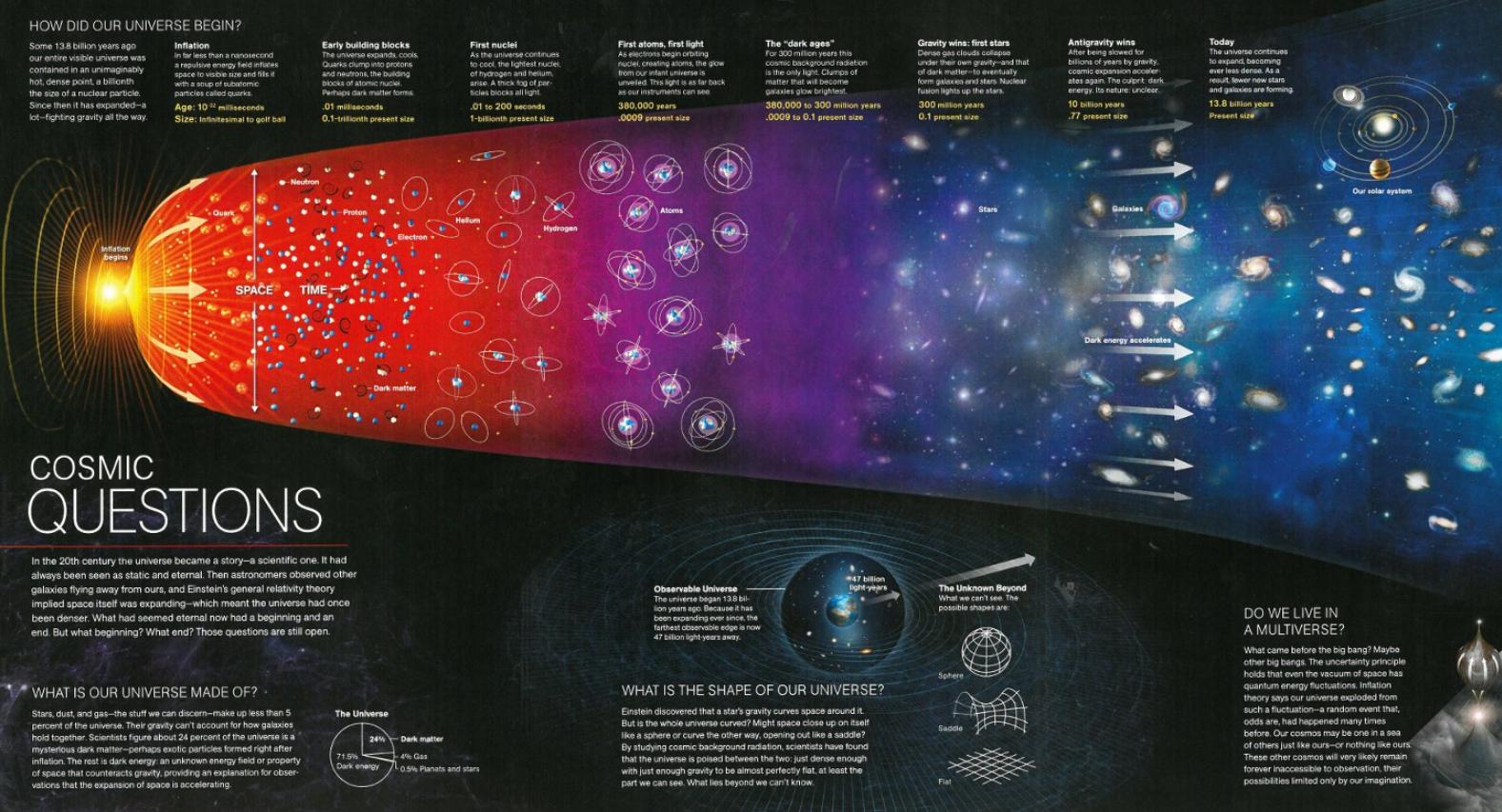


<https://asoreyh.github.io/unrn-ipac/>



IPAC2018

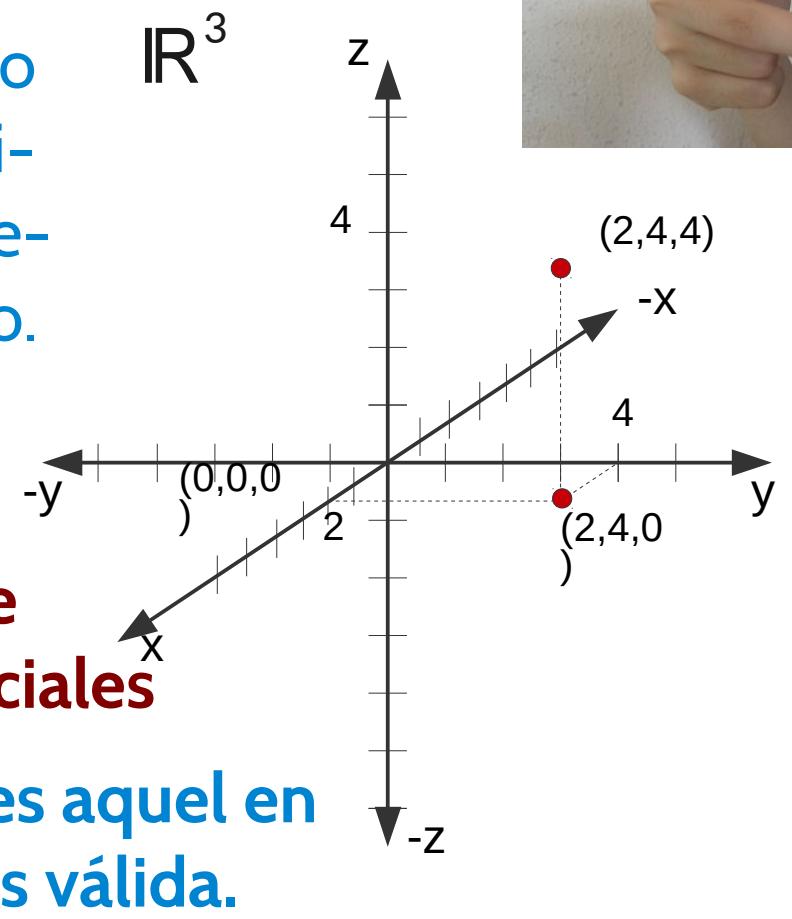
Contenidos: un viaje en el tiempo



Marco de referencia **inercial**

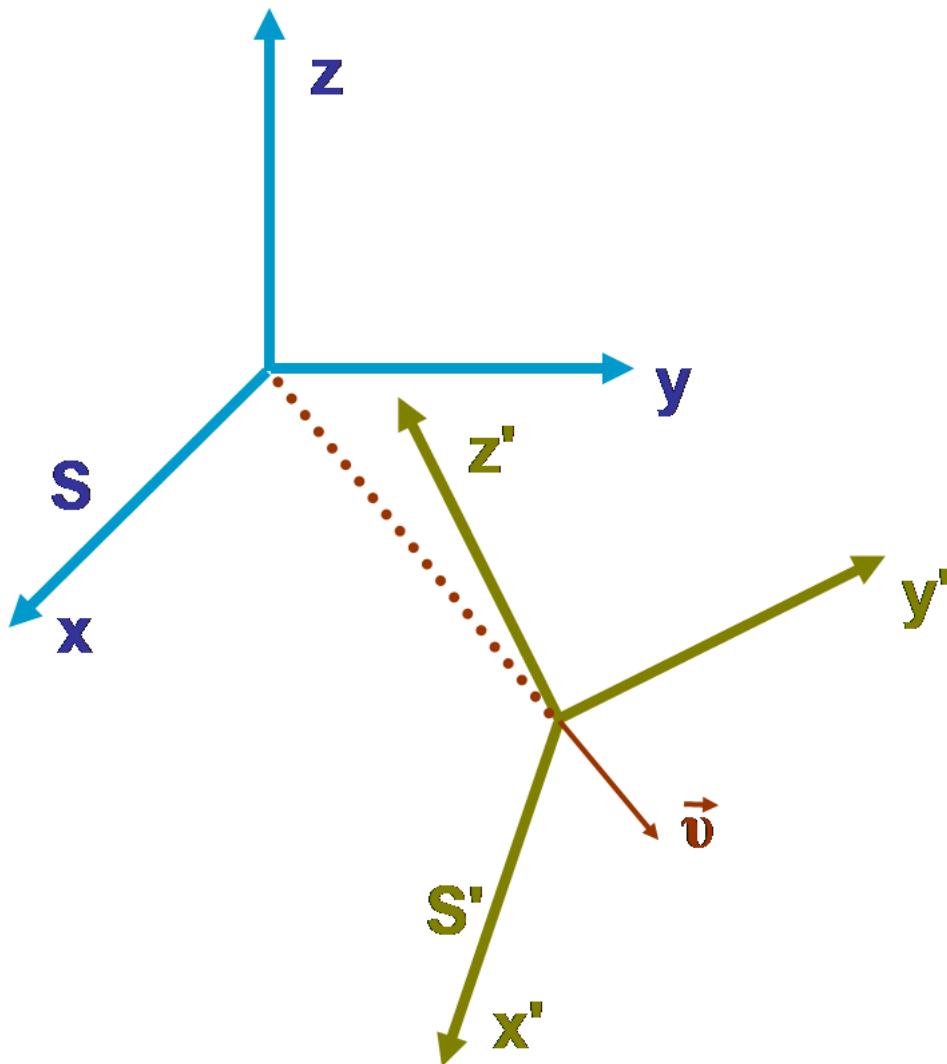
- **Marco de referencia inercial**

- Describe el espacio homogéneo (no hay lugares privilegiados) e isotrópicamente (no hay direcciones privilegiadas) e independiente del tiempo.
- Las leyes físicas tienen la “misma forma” en todo sistema inercial. Decimos que la física es **covariante frente a cambios de sistemas inerciales**
- Un sistema de referencia inercial es aquel en el que la primera ley de Newton es válida.



3-tupla: (x,y,z)

Relatividad de Galileo



- Sea un sistema S' que se mueve con velocidad constante v respecto a otro sistema S .
- Luego, un objeto en r , a tiempo t en S , tendrá posición $r'(t)$ dada por:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t$$



Pero entonces... Invariancia de Galileo

- Este último resultado es crucial, ya que si

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$

- Y suponemos que la masa m es un invariante, $m=m'$

$$m\vec{a}'(t) = m\vec{a}(t) \Rightarrow \vec{F}'(t) = \vec{F}(t)$$

- ¡La segunda ley de Newton no cambia frente a cambios entre sistemas de referencias inerciales! (la primera ya valía)
- **Si las leyes de la mecánica valen en un marco inercial, valen en todos**

- Para llegar a este importante resultado, dimos por sentado algo que no es trivial:

**En todos los casos, derivamos respecto a t ,
ya que en Galileo,
 $t=t' \rightarrow dt = dt'$**

- Esto parece obvio, pero ¡no lo es!
- Y además, sólo vale para las leyes de Newton, en el electromagnetismo, esto no vale (\rightarrow F-4B)
 \rightarrow Transformaciones de Lorentz (ya vienen)



Einstein postula

- **El principio de la relatividad:**

Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invarianza de la velocidad de la luz**

La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

... y paso a la historia



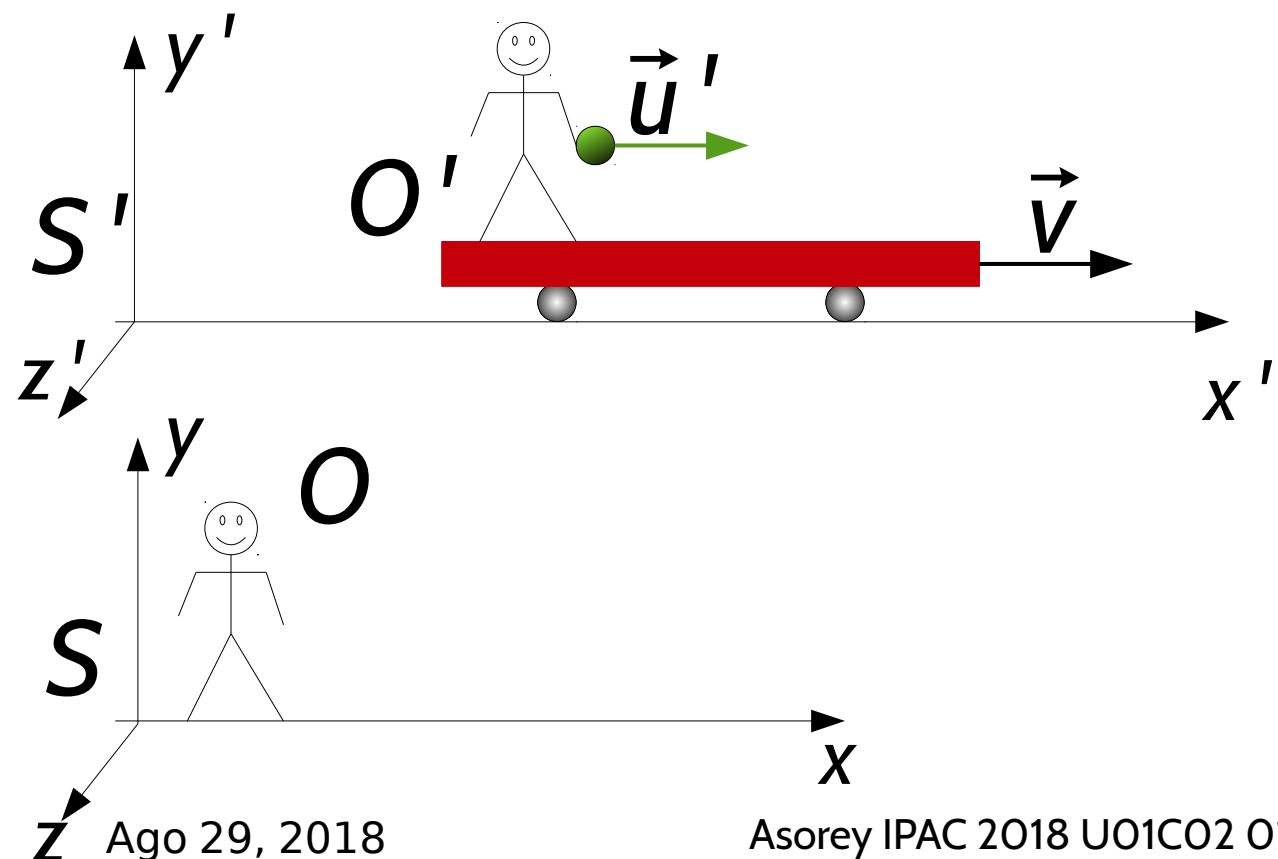
Cambio de paradigma 1

- El primer postulado modifica la definición de sistema inercial: ya no importa la inercia

“La debilidad del principio de inercia se encuentra en el hecho de que el mismo implica un argumento circular: una masa se mueve sin aceleración si está suficientemente lejos de otros cuerpos; y sabemos que la masa está suficientemente lejos de otros cuerpos sólo por el hecho de que se mueve sin aceleración” Albert Einstein, El significado de la relatividad

Entonces hagamos una prueba

- El primer postulado es claro, es lo que venimos haciendo con Galileo sobre la invariancia.



Por Galileo:

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}$$

$$\vec{u}(t) = \vec{u}'(t) + \vec{v}$$

Claramente
 $\vec{u}'(t) \neq \vec{u}(t)$

Cambio pelota por linterna verde...

- El primer postulado es claro, es lo que venimos haciendo con Galileo sobre la invariancia.
- ¿Qué pasa con el segundo? Imaginemos lo siguiente:



Cambio de paradigma 2

- Dado que la velocidad de la luz debe ser igual en ambos sistemas inerciales
- Y dado que uno se mueve respecto al otro, se anticipan problemas con la visión usual (de Galileo) de las cosas:

$$\vec{u} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \vec{u}' = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} \Rightarrow \vec{u}' \neq \vec{u} \rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \neq \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t}$$

- Esto no puede valer para la velocidad de la luz:

$$\vec{c} = \vec{c}'$$

en todos los sistemas inerciales

Cambio de paradigma 2

- La luz también se mueve en el espacio, entonces:

$$\vec{c} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \text{ y } \vec{c}' = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t}$$

- Pero por el segundo postulado

$$\vec{c} = \vec{c}' \rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t}$$

- Pero los desplazamientos “no deberían” ser iguales, ya que un sistema se mueve respecto al otro...
- ... o los intervalos temporales... (!!)

Marco de Referencia

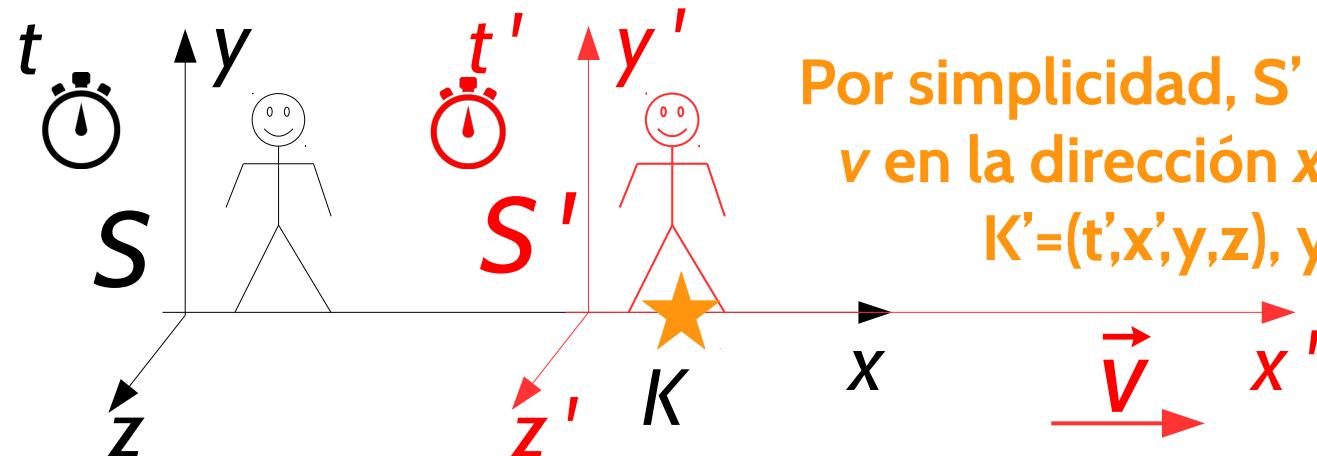
- **Marco de Referencia**

sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj

- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**

- **Evento**

es un punto en el espaciotiempo $K=(t,x,y,z)$



Por simplicidad, S' se mueve con velocidad v en la dirección x , entonces $K=(t,x,y,z)$ y $K'=(t',x',y,z)$, ya que $z'=z$ e $y'=y$

Transformaciones de Lorentz

- El mundo es así, y no como queremos que sea
- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia son

$$t' = \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} v x \right)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

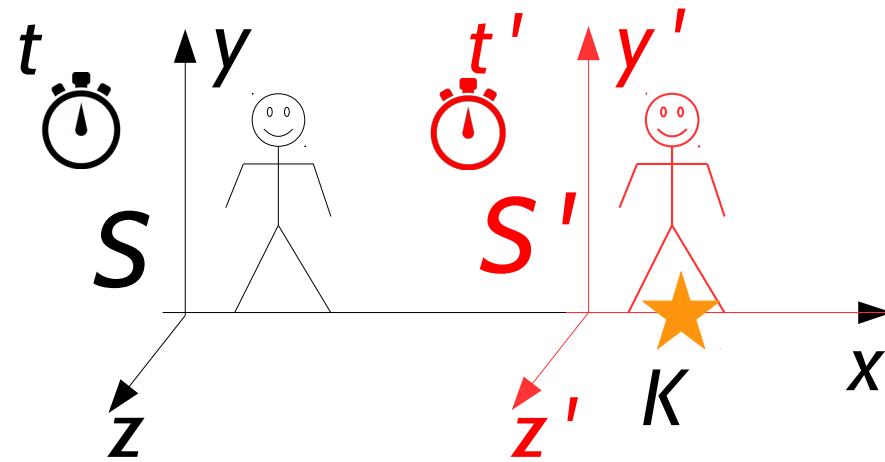
$$z' = z$$

- Simetría entre tiempo y espacio → **espaciotiempo**

Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad v en la dirección x , entonces $K=(t,x,y,z)$ y $K'=(t',x',y,z)$, ya que $z'=z$ e $y'=y$



$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma \left(x - vt \right)$$

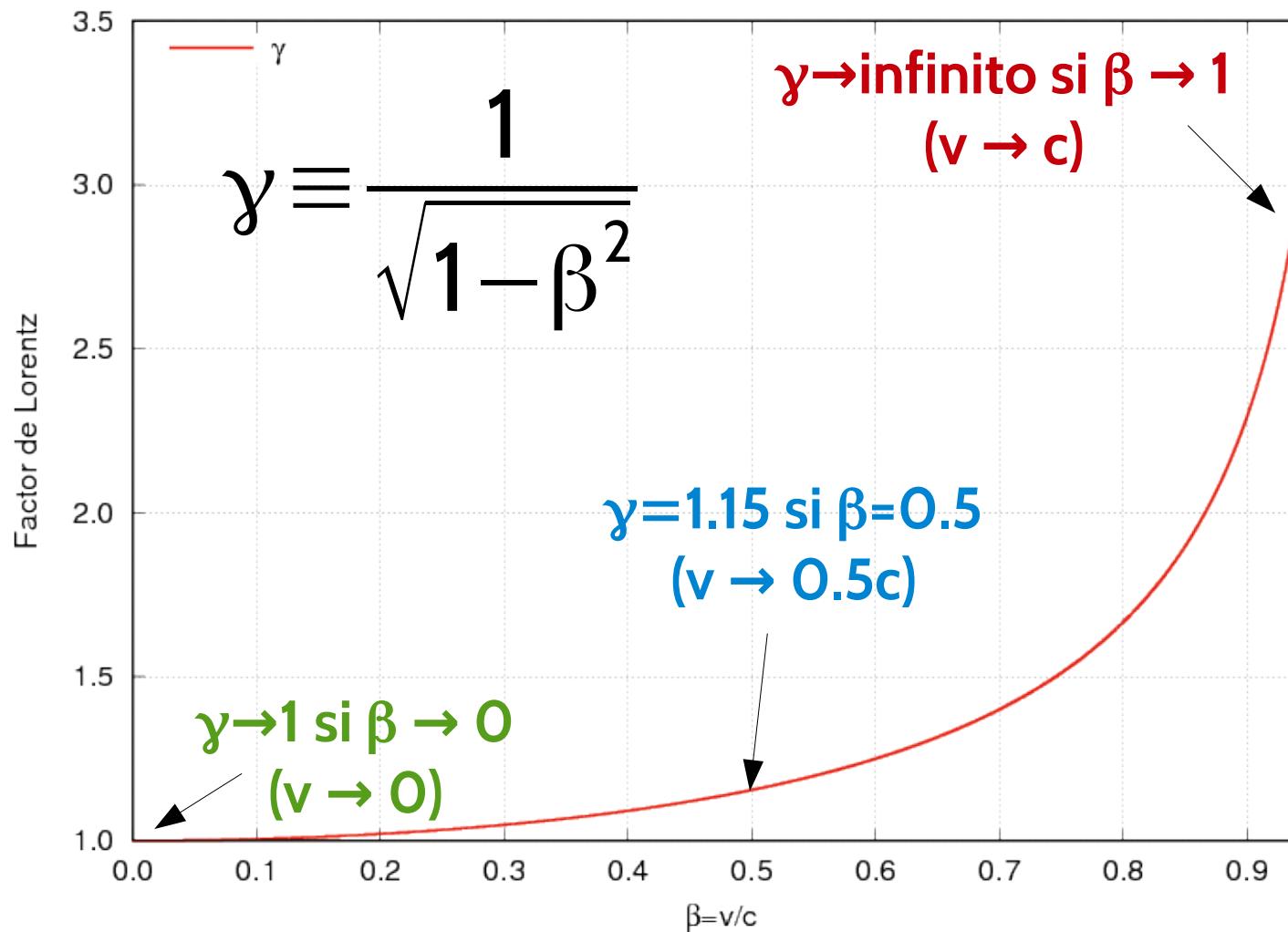
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



Aproximación Newtoniana, $v \rightarrow 0$

- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \rightarrow 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t' = \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} v x \right) \rightarrow t' \simeq t$$

$$x' = \gamma \left(x - v t \right) \rightarrow x' \simeq x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Si $v \rightarrow 0$, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!



Regla de suma de velocidades

- Vimos que, según nuestro amigo Galileo,

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}$$

Y aquí como $t=t'$ no tuvimos reparos en hacer la derivada

- **En el caso relativista debemos tener cuidado.**
- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
 - **El observador en S , mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje x con velocidad $u=dx/dt$**
 - **El observador en S' , verá que el objeto se mueve con velocidad $u'=dx'/dt'$**

- Recordando los expresos para Δx y Δt
 $y \Delta x'$ y $\Delta t' \Rightarrow$

$$dx' = \gamma(dx - v dt) \quad y \quad dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)}$$

y sacando dt en
factor común

$$u' = \frac{dx (dx/dt - v)}{dt (1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt})}$$

para $\frac{dx}{dt} = u$

$$\Rightarrow u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

• De igual forma con los inversos

$$u = \frac{\gamma(dx' + v dt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dx')} = \frac{dt' \left(\frac{dx'}{dt'} + v \right)}{dt' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)}$$

$$\Rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$



Velocidades

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

La velocidad de la luz es constante

- Casos límites.
- Sea $v \rightarrow 0$ (objeto lento) \Rightarrow

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$\Rightarrow u' = u - v$
Galileo si $v \rightarrow 0$
($u \ll c$)

- Sea $u = c$ (luz) \Rightarrow

Si $u \ll c \rightarrow u' = u - v$
¡Recupero Galileo! :-)

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c \frac{(1 - v/c)}{(1 - v/c)}$$

$$\Rightarrow u' = c$$

segundo principio!

Si $u = c \rightarrow u' = c$
¡Segundo postulado! :-)

Dos eventos K_1 y K_2 en el espaciotiempo

- Vistos desde los marcos S y S' , estos estarán en:

$$K_1 \quad S: (t_1, x_1, y_1, z_1); \quad S': (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$$

$$K_2 \quad S: (t_2, x_2, y_2, z_2); \quad S': (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$$

- Claramente, los intervalos espaciales y temporales son:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{y} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1$$

- Y como todo es lineal: **¡Importante! Esta es la forma en como percibimos distancias y periodos de tiempo!**

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right)$$

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x' \right)$$

$$\Delta x' = \gamma \left(\Delta x - v \Delta t \right)$$

$$\Delta x = \gamma \left(\Delta x' + v \Delta t' \right)$$

Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right)$$

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x' \right)$$

$$\Delta x' = \gamma \left(\Delta x - v \Delta t \right)$$

$$\Delta x = \gamma \left(\Delta x' + v \Delta t' \right)$$

Eventos simultáneos en un marco

$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0$ y eventualmente $\Delta x' = 0$

Eventos co-locales en un marco

$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0$ y eventualmente $\Delta t' = 0$



Dilatación temporal

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia
- Imaginen en S un reloj ($\rightarrow \Delta t = s$) en reposo $\rightarrow \Delta x = 0$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right) \rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \Delta t' = \gamma s$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta t' > \Delta t$

- Por ejemplo, $v = 259807 \text{ km/s}$
 $\rightarrow \beta = v/c = 0.866 \rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta t' = 2 s$

El intervalo medido en el marco S (reloj en reposo) dura 1 segundo.

El mismo intervalo visto en el marco en movimiento S' dura 2 segundos

Contracción espacial

- La distancia entre dos eventos (p.ej. la longitud de un objeto) no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia
- Imaginen una regla ($\rightarrow \Delta x = l$) en el sistema S. En el sistema S' se mide la distancia entre los extremos de la regla de manera simultánea ($\rightarrow \Delta t' = 0$)

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') \rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' \rightarrow \Delta x' = \Delta x / \gamma \rightarrow \Delta x' = \frac{l}{\gamma}$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta x' < \Delta x$

- Por ejemplo, $v = 259807 \text{ km/s} \rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta x' = l/2$

La longitud medida en el marco S' (reloj en movimiento) es menor que la longitud medida en el marco con el reloj en reposo



Dilatación temporal y Contracción espacial

- El **lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \text{ para eventos } \Delta x = 0$$

- La **distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \text{ para eventos } \Delta t' = 0$$

- Muón: decays into electrons over time intervals
of $\tau = 2.2 \mu s$ ($2.2 \times 10^{-6} s$).



- Velocity typical $v = 0.99 c \Rightarrow \beta = 0.99$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \boxed{\gamma \approx 7}$$

- Añadir μ decay in $z \mu s$ (p.ej) \Rightarrow este es en el marco de referencia del μ (t'). $\Rightarrow x' = t' c \beta \approx 594 m = x'$

- Esto es und from S' : ¿Acuñó corresponde esto a S ?
yo que $t' = 0 \Rightarrow t = 0$ (por construcción) tenemos:

$$x' = x/\gamma \Rightarrow x = x' \cdot \gamma \Rightarrow x = 7 \cdot 594 \mu s \Rightarrow x = 4158 \mu m$$

- y el tiempo t ? los cosas serán inconsistentes.

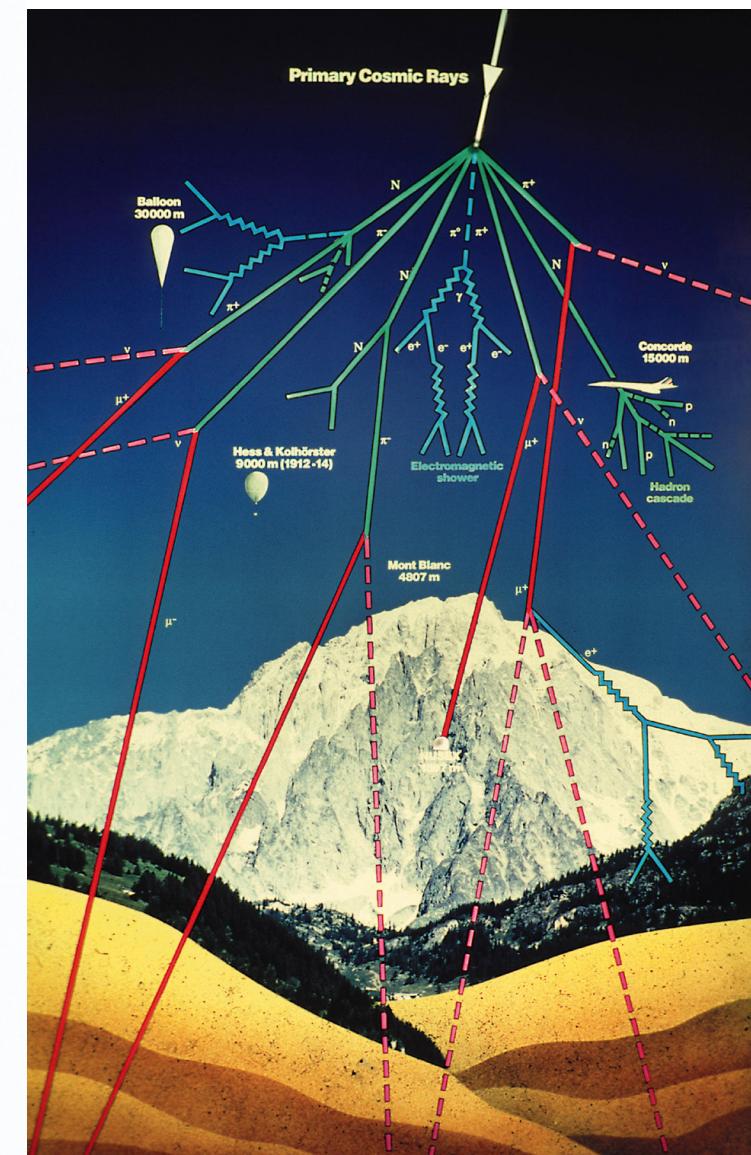
- Antes de decir el muón recorre más de 4 km en nuestro marco de referencia.



Muones producidos en la atmósfera se observan en el piso



El muón





Apéndice: Transformación de Lorentz



Apéndice: Transformaciones de Lorentz

Derivación “a la Einstein”

- Supongamos que el evento fue encender una linterna en $(0,0,0,0)$ apuntando en la dirección $+x$. Luego de un tiempo t , la luz se habrá desplazado una distancia:

$$x = ct \Rightarrow x - ct = 0$$

- En el sistema S' , tendremos (recordar, $c'=c$)

$$x' - ct' = 0$$

- Dado que están igualados a cero, los eventos ocurren en el mismo punto del espaciotiempo (no importa quien los vea), entonces:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

Derivación “a la Einstein”, 2

- Para un fotón viajando hacia +x:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

- Para un fotón viajando hacia -x:

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

Dencción

$$\left\{ \begin{array}{l} x' - ct' = \lambda(x - ct) \\ x' + ct' = \mu(x + ct) \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

Suando (1)+(2):

$$\begin{aligned} 2x' &= \lambda x - \lambda ct + \mu x + \mu ct \\ x' &= \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) x - \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \right) ct \end{aligned}$$

$$\boxed{x' = ax - bx ct} \quad (3)$$

Restando (1)-(2):

$$\begin{aligned} -2ct' &= \lambda x - \lambda ct - \mu x - \mu ct \\ ct' &= -\left(\frac{\lambda - \mu}{2} \right) x + \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) ct \end{aligned}$$

$$\boxed{ct' = ac t - bx} \quad (4)$$

Derivación “a la Einstein”, 3

- Visto desde S' , el origen está en $x'=0 \Rightarrow$

$$0 = ax - bct$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a} t$$

- y por lo tanto, la velocidad relativa entre S y S' es:

$$x = vt \Rightarrow v = \frac{bc}{a} \quad (5)$$

y a tiempo $t=0 \Rightarrow$

$$x' = ax \quad (6)$$

Derivación “a la Einstein”, 4, Importante

- Definimos el intervalo de distancia como

$$\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1$$

Ahora, por el postulado 1, la longitud de una regla en reposo en S' medida por O , debe ser igual a la longitud observada por O' de una regla que está en reposo en S .

$$\Rightarrow \Delta x' = \Delta x$$

- Entonces, si dos puntos en x' están separados por $\Delta x' = 1$, vistos desde S' a $t=0$, será

$$x' = ax \Rightarrow \Delta x' = a \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{a}} \quad (7)$$

- Consideremos ahora $t'=0$ (tiempo en s'), despejamos t desde la ecuación (4):

$$0 = act - bx \Rightarrow tac = bx$$

$$\Rightarrow t = \frac{b}{ac} x$$

- Reemplazando en (3)

$$x' = ax - b \cancel{t} \left(\frac{b}{ac} x \right) x$$

$$\Rightarrow x' = ax - \frac{b^2}{a} x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2 x - b^2 x}{a}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2 - b^2}{a} x \quad \text{Multiplico } a/a$$

$$\Rightarrow x' = a \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) x$$

$$\Rightarrow x' = a \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) x \quad y \text{ por (5)}$$

$$\Rightarrow x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x \quad \stackrel{\beta = v/c}{\Rightarrow} \boxed{x' = a(1 - \beta^2)x} \quad (8)$$



$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$x' = a(1 - \beta^2)x \quad (8)$$

Derivación “a la Einstein”, 6

- Luego, la relación de distancias será

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = a(1 - \beta^2)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = a(1 - \beta^2) \Delta x, \text{ y si } \Delta x = 1$$

$$\rightarrow \Delta x' = a(1 - \beta^2) \quad (9)$$

- Pero recordando $\Delta x' = \Delta x$, entonces (7)=(9):

$$\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \frac{1}{a} = a(1 - \beta^2) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Derivación “a la Einstein”, 7, Importante

- Y entonces

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- Definiendo:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10)$$

- Resulta (recordando además (5) y la def de beta:

$$a = \gamma, \quad y \quad b = \beta \gamma \quad (11)$$

- Entonces, reemplazando en (1) en (3) y (4):

$$x' = \alpha x - b c t \rightarrow x' = \gamma x - \gamma \beta c t$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

$$\gamma ct' = \gamma \alpha ct - \beta x \rightarrow ct' = \gamma ct - \beta \gamma x$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma ct}{\gamma} - \frac{\beta \gamma}{c} x$$

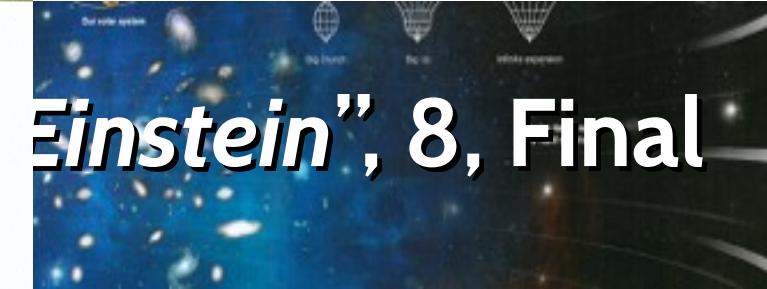
$$\Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\beta c}{c^2} x \right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

y finalmente:

\Rightarrow	$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$	Transformación de Lorentz
x'	$= \gamma \left(x - vt \right)$	
y'	$= y$	
z'	$= z$	



Einstein", 8, Final

Transformaciones de Lorentz

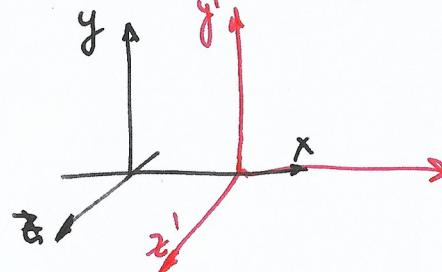
$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma \left(x - vt \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Transformación de Lorentz. Otra forma.



- A los dos sistemas con co-locales
- A lo se enciende un foco partiendo del origen $S_0 = S'_0$.
- Como $c=c'$ \Rightarrow En ambos sistemas se debe cumplir la postulación de la lumen
- El fronte de onda sección en S : $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

$$\text{y en } S': x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

- Como S' se mueve en la dirección $+x \Rightarrow y=y'$, $z=z'$ y solo se pierden cantidades en x y x' : $\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$; $x = \gamma'(x' + vt')$

- Y es algún factor de constante \Rightarrow Por el 1º postulado $\gamma = \gamma'$

- Por el segundo postulado, $c=c' \Rightarrow$ en la dirección $+x$: $ct = x \quad \text{y} \quad ct' = x'$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(x - vt) \quad \text{y} \quad ct = \gamma(x' + vt')$$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(ct - vt) \quad \text{y} \quad ct = \gamma(ct' + vt')$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma}{c}(c - v)t \Rightarrow t' = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)t \Rightarrow t' = \gamma t(1 - \beta)$$

$$\text{y} \quad t = \frac{1}{\gamma} + \left(1 - \frac{v}{c}\right)t' \Rightarrow t = \gamma(1 + \beta)t'$$

$$\Rightarrow t = \gamma(1 + \beta)\gamma(1 - \beta)t' \Rightarrow 1 = \gamma^2(1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{y luego obtener los T.L.}$$

Otra forma para TL



Notar que así también se pueden construir los intervalos invariantes