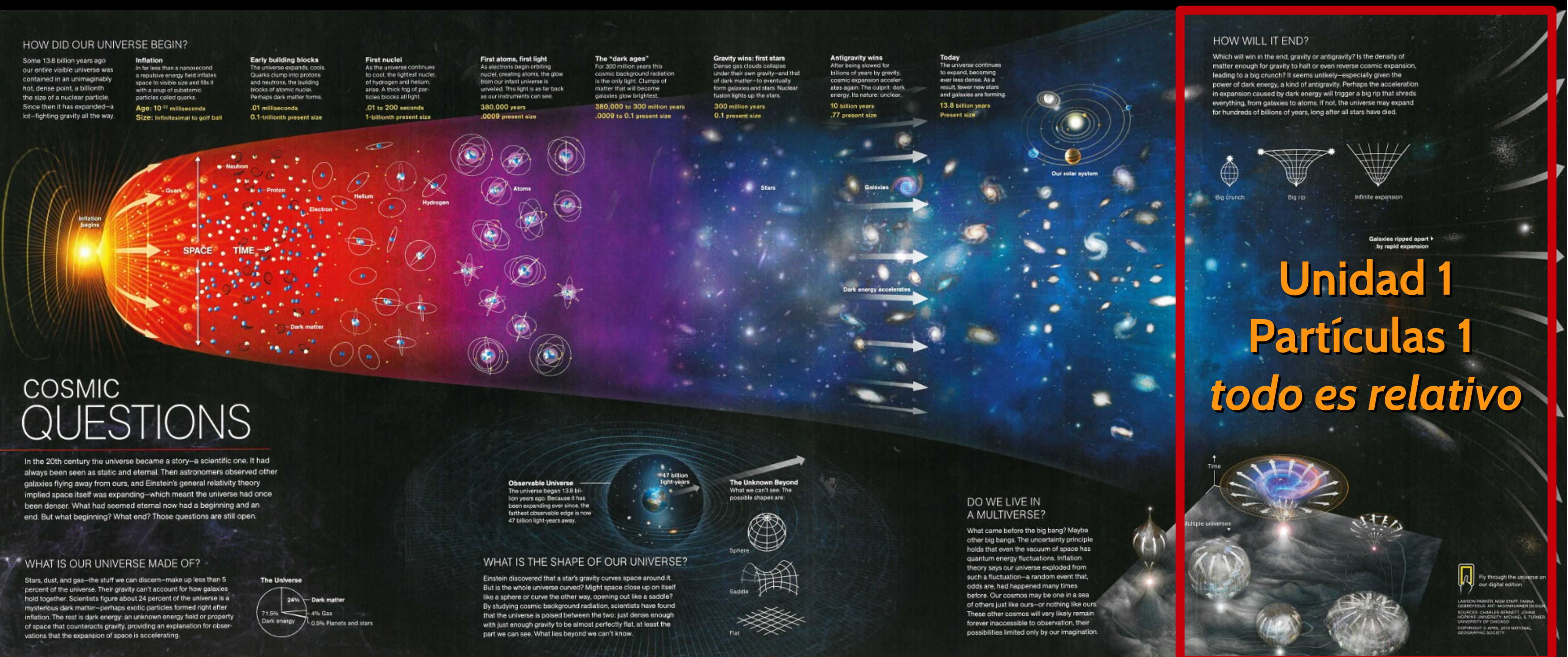
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2017

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C06 – 06
- **Fecha** 19 Sep 2017
- **Cont** Radiactividad
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
  www.facebook.com/fisicareconocida/

Contenidos: un viaje en el tiempo



Richard Feynman dijo

- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

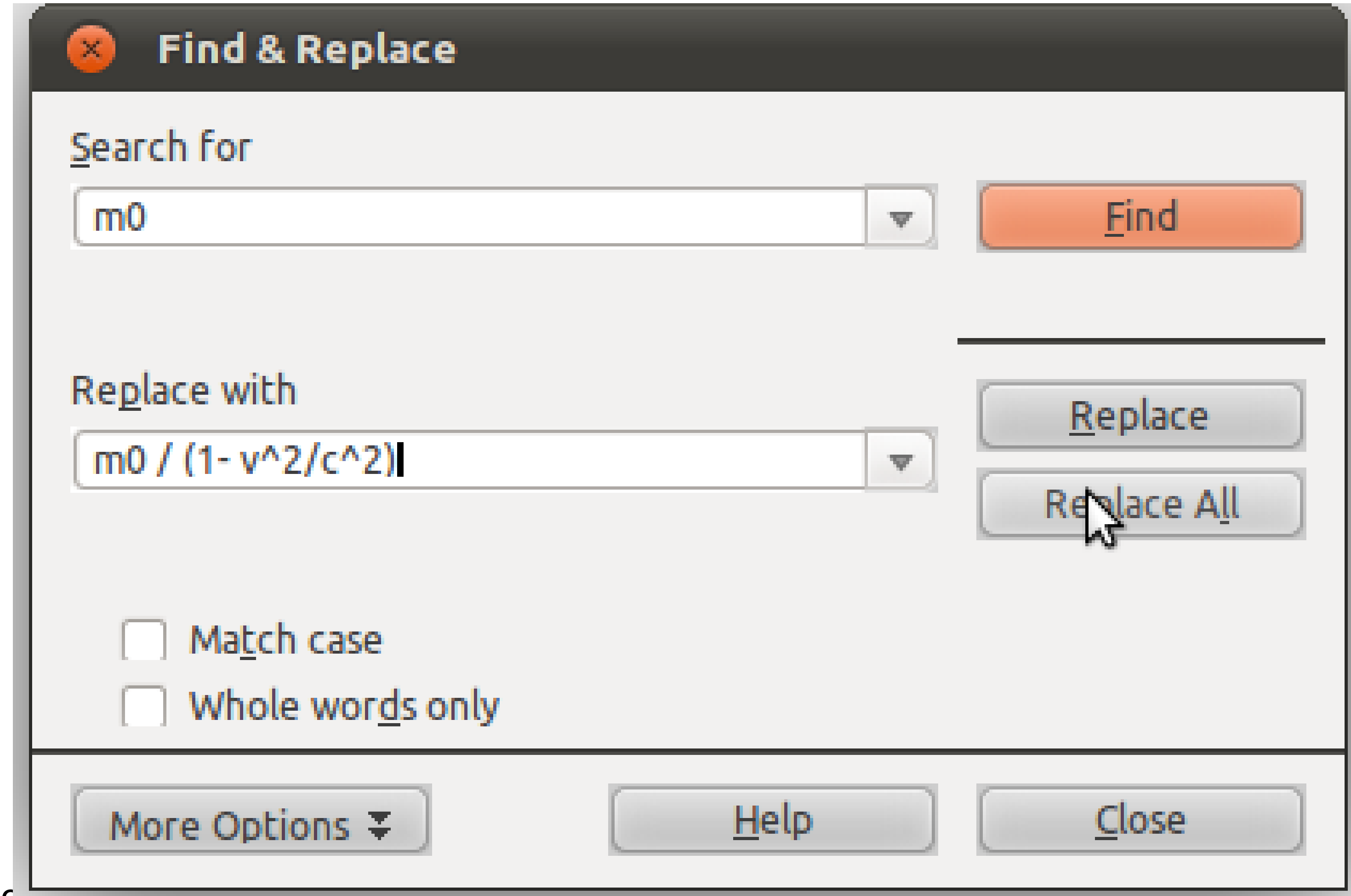
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- donde

$$m \rightarrow m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Aprendiendo relatividad en Windows

- Search & replace (CTRL+F)



Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación del impulso, una nueva magnitud conservada aparece naturalmente:

La energía se conserva

$$\boxed{E = \gamma m c^2 \simeq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

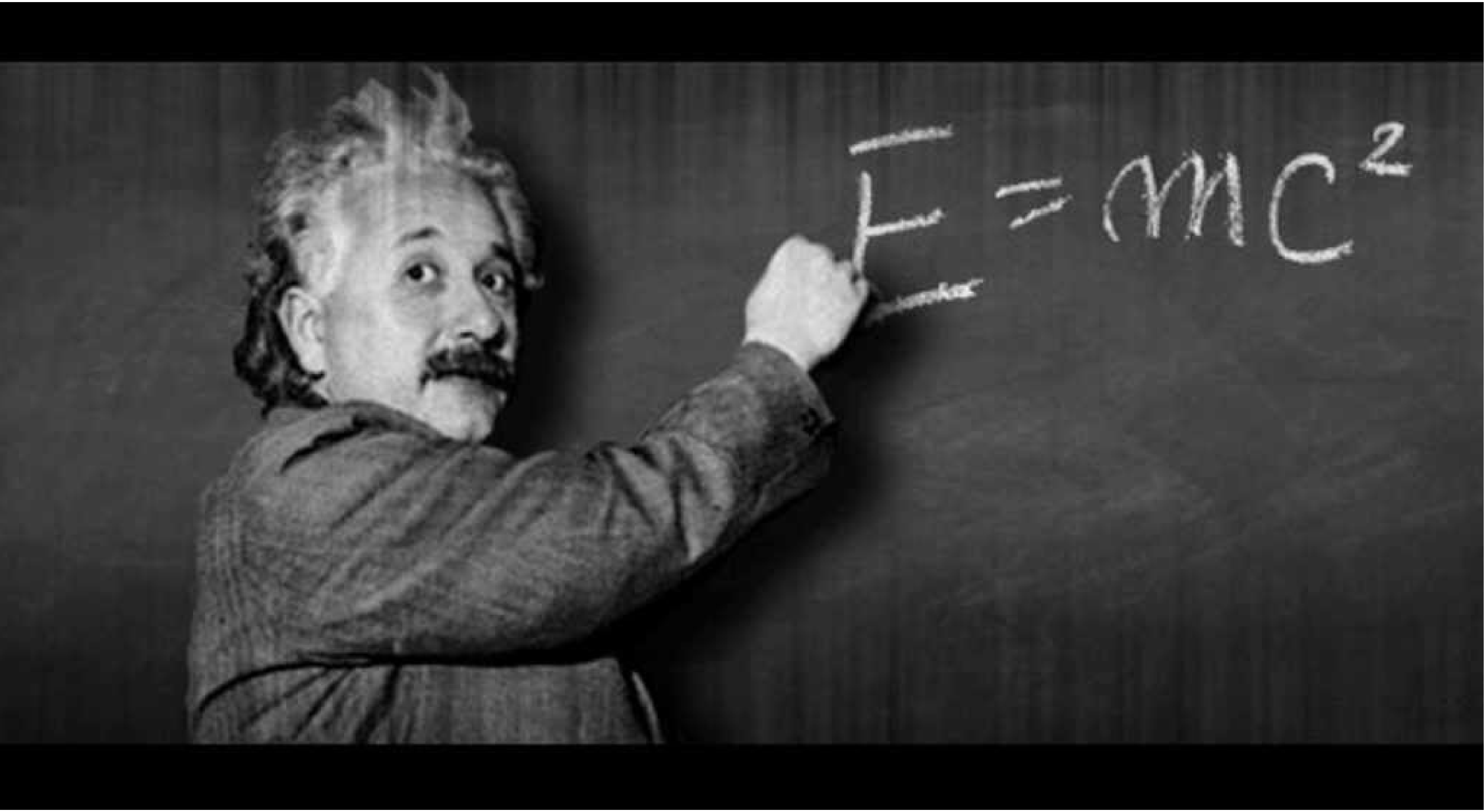
Energía cinética clásica

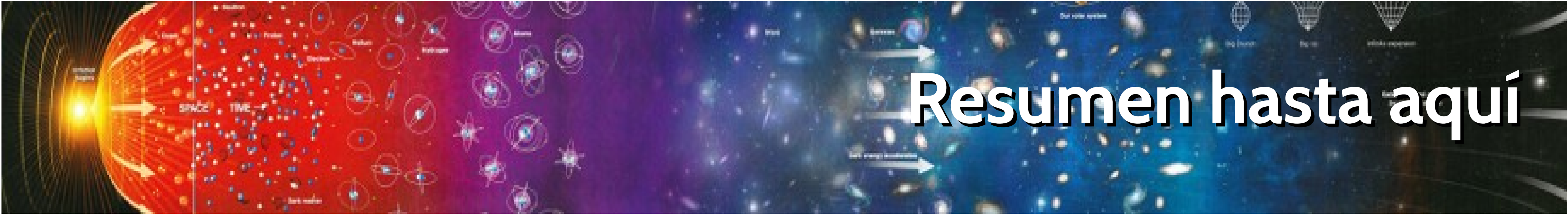
- Recordar que la energía de un cuerpo es $E = \gamma m c^2$
- $E = \frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c.

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética
(en ausencia de otras interacciones)

Gracias Isaac, seguí participando....





Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p}=\gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

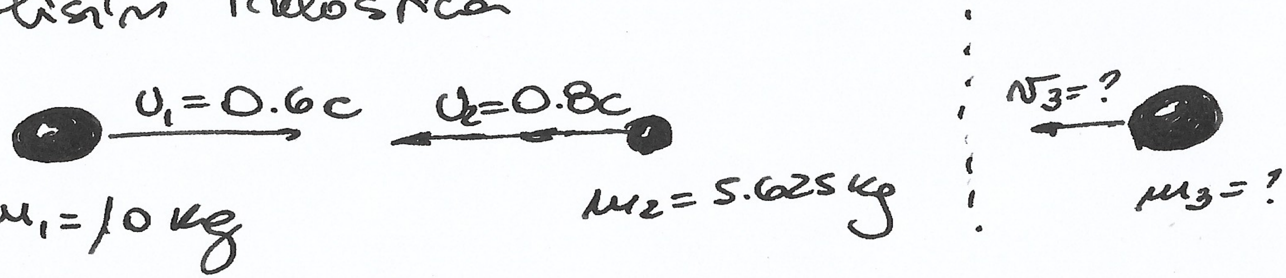
$$E=\gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2-(p c)^2=(m c^2)^2}$$

Invariante relativista

Colisión inelástica:



Clásicamente diríamos: $m_3=15.625\,kg$ y $v_3 = 0.01 \neq 0.$

Relativísticamente:

$$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2} = 1.25 \quad y \quad \gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$$

$$\Rightarrow p_T^i = \sum p_i^i = \sum m_i \gamma_i u_i = 10\,kg \cdot 1.25 \cdot 0{,}6c + 5.625\,kg \cdot \frac{5}{3}(-0.8c)$$

$$\Rightarrow p_T^i = 7.5\,kg\,c - 7.5\,kg\,c \Rightarrow p_T^i = 0 \Rightarrow v_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = 0.} \quad y \quad \gamma_3 = 1$$

Conservación energía.

$$E_i = \sum m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10\,kg \cdot 1.25 + 5.625 \cdot 5/3 = m_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow m_3 = 21.875\,kg \quad \Rightarrow m_3 > m_1 + m_2 \;!!!$$

Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} E^{\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{aligned}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}^{\,\text{inicial}} &= \sum_j^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} &= \sum_k^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{aligned}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

Comentario sobre unidades

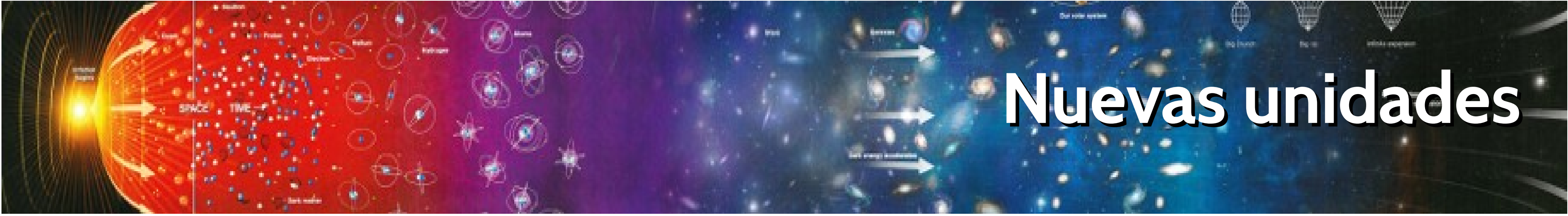
- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

$$E = qV \rightarrow E = (1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas **Visible** **R X** **Gamma** **Partículas** **C. Galáctico** **R.C. Gal** **R.C.E.G.**



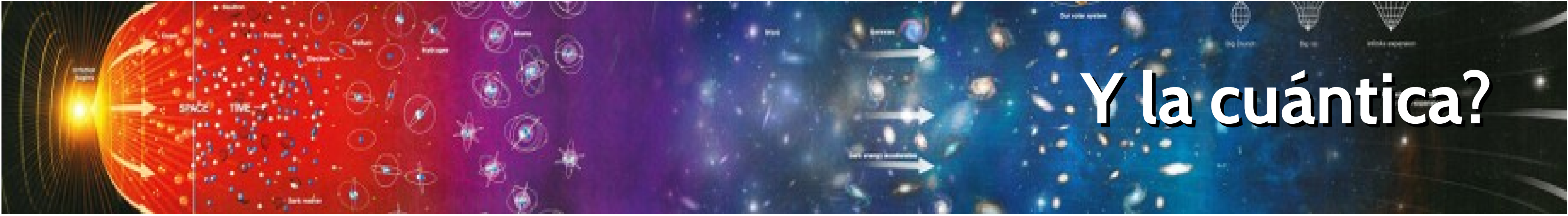
Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	m = E / c^2	eV/c^2

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV



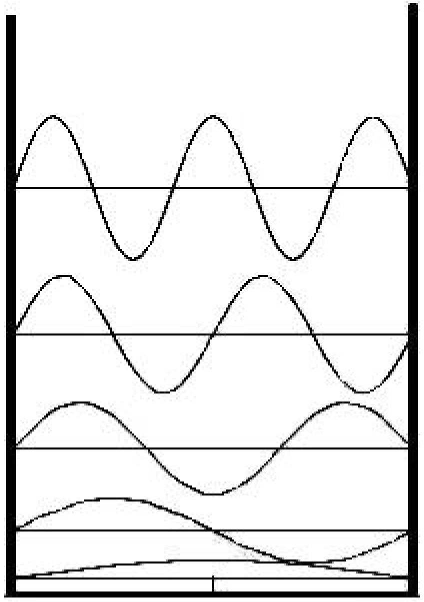
Y la cuántica?

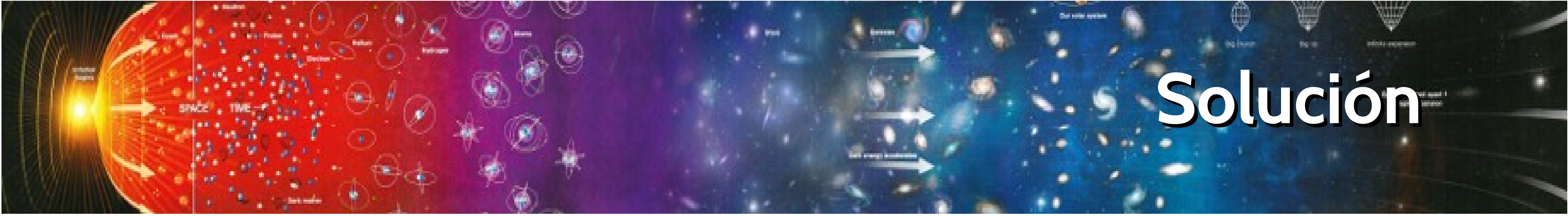
- También tenemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

- La relatividad anticipa estados con energía total negativa… → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Partícula en una caja

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8 m L^2} \right) n^2$$



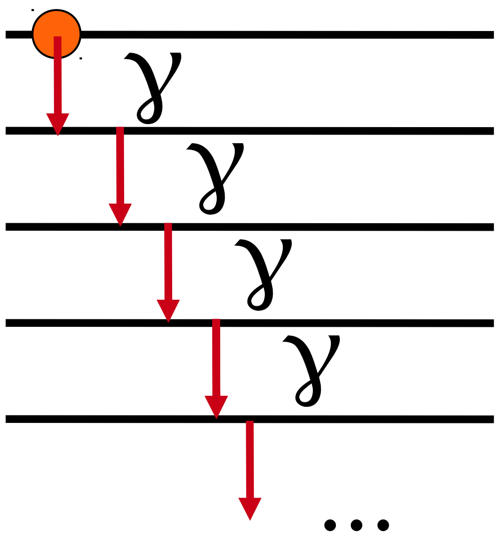


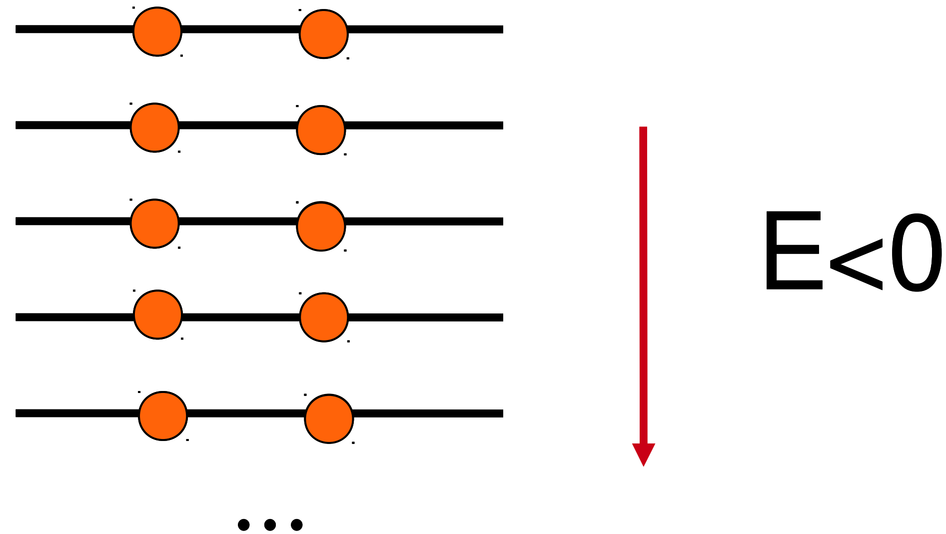
Solución

- Dirac (1928) obtiene la versión relativista de la ec. de Schrödinger y observa ese problema
- Propone que todos los estados de energía negativa están ocupados
- Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli
- Solución: el “vacío” es el estado en el cual todos los estados de energía negativos están llenos

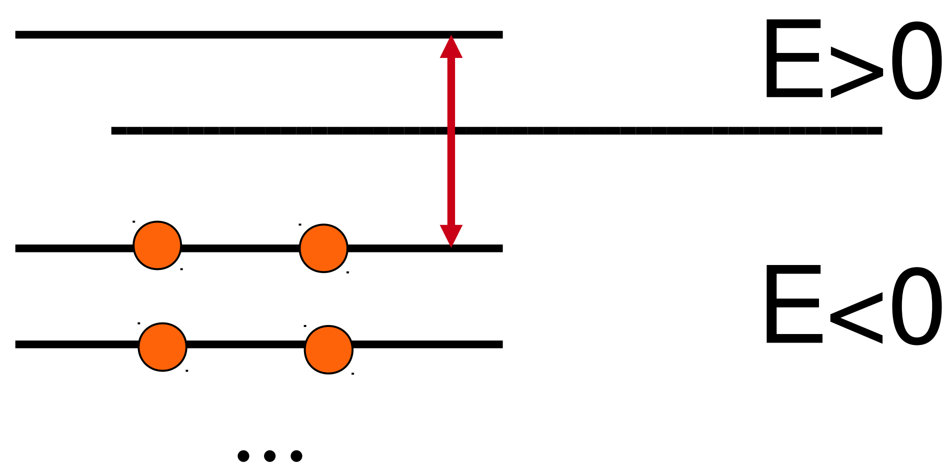
Felicidad

- No hay colapso porque no hay estados vacíos

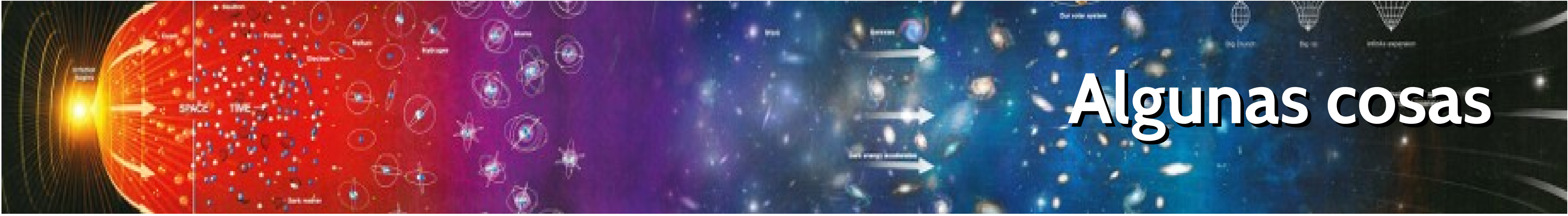




$$E = 2\,m\,c^2 = 1.022\,\mathrm{MeV}$$



$$E = \pm m\,c^2$$



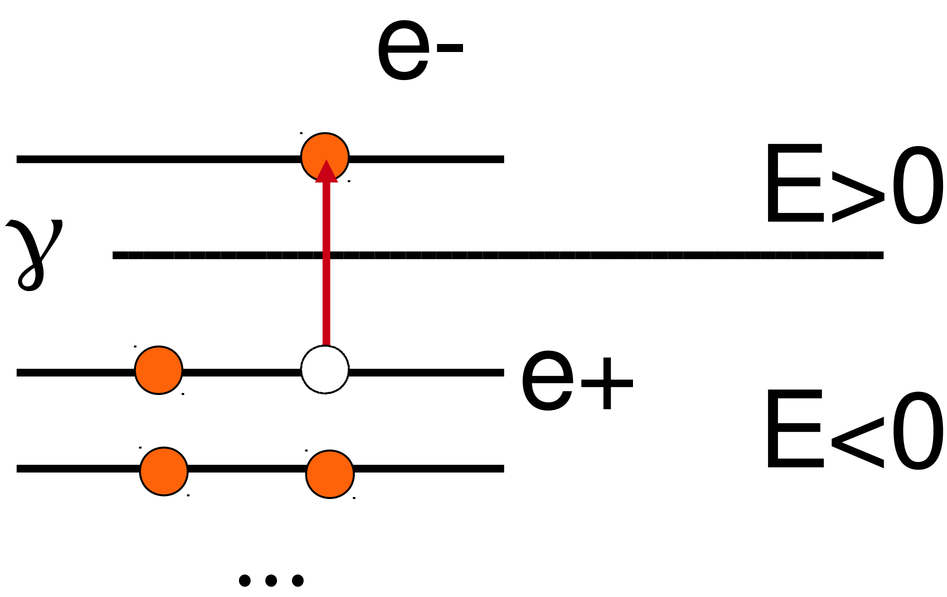
Algunas cosas

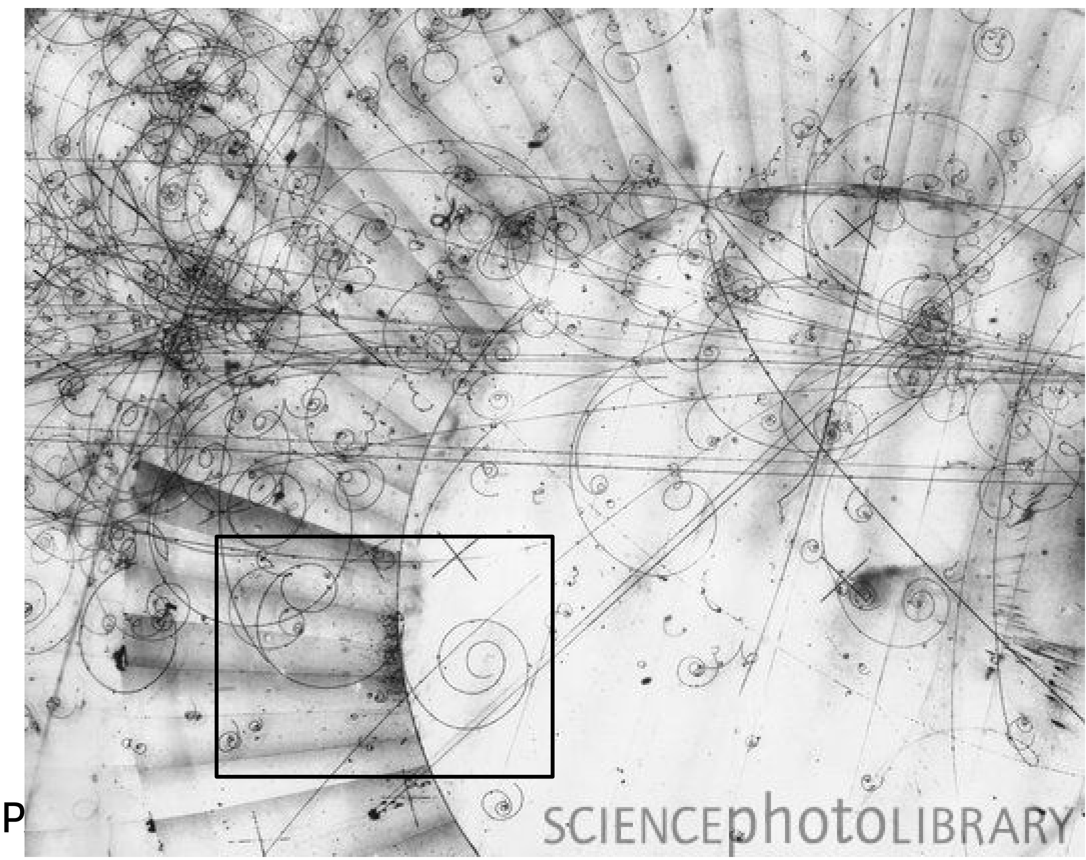
- El espacio está lleno con infinitas partículas
- Energía infinita
- Energía de punto 0 (como el oscilador armónico)

No olvidar que son Modelos

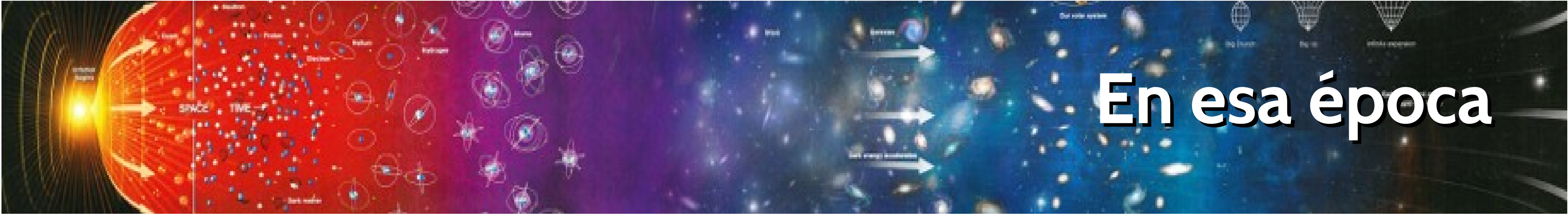
Materia-Antimateria

- En una interacción EM (scattering) es posible sacar un electrón del mar
- El "hueco" se ve como un electrón positivo



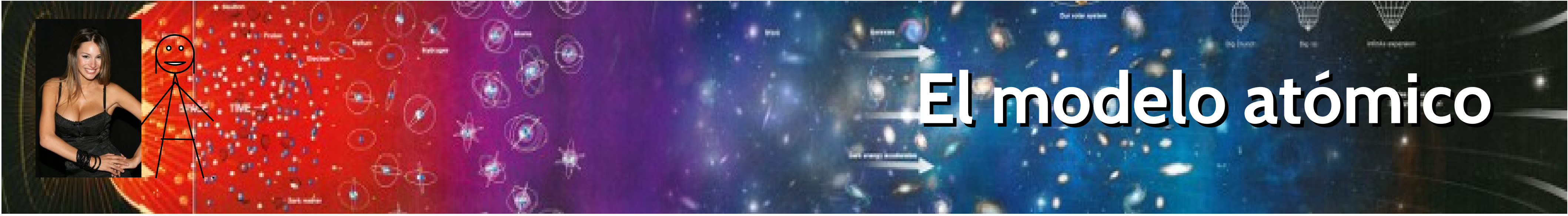


$$E_\gamma \geqslant 1.022\, MeV$$



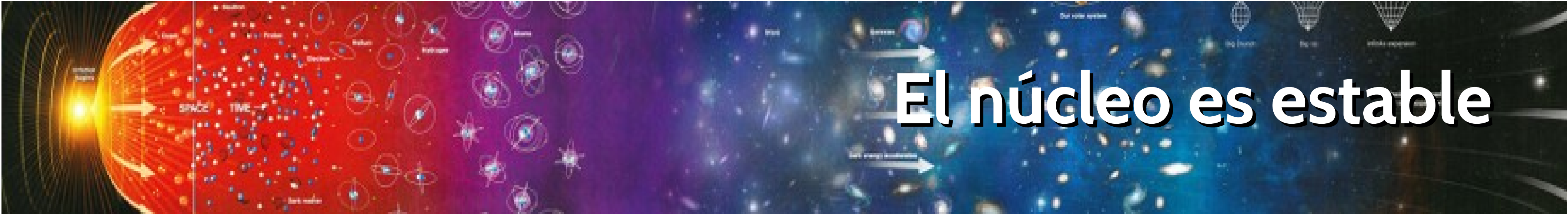
En esa época

- Se conocían cuatro partículas:
  - Protón (+)
  - Electrón (-)
  - Fotón (0) ← interacciones cargadas
  - Neutrón (0)
- Si existía el antielectrón, ¿por qué no un antiprotón?
- La idea del antineutrón es más compleja (sin carga)



El modelo atómico

- Un simple modelo atómico
- Radio atómico: a0 ~ 53 pm = 53000 fm
- Radio núcleo: f0 ~ 1.2 fm
- Relación: ~ 44200
- Núcleo 4 mm → electrones 177 m
- La naturaleza es escencialmente vacío



El núcleo es estable

- Tiene que haber una fuerza más fuerte que la fuerza eléctrica

$$F_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{e^2}{f_0^2}$$

$$F_E = 160\,N$$

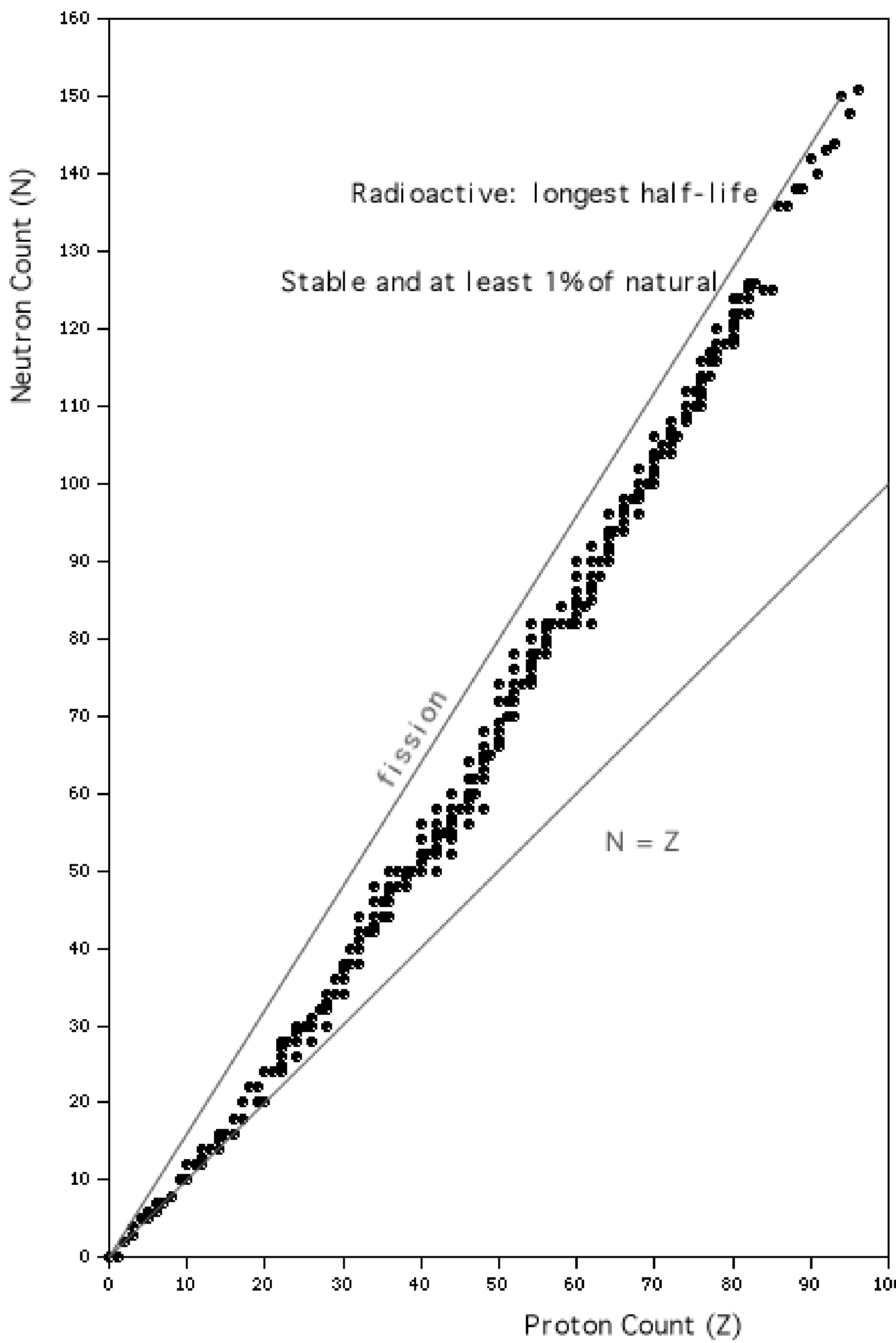
$$F_E = 1.2 \times 10^{36} F_G$$

Ayuda: En general el núcleo tiene más neutrones que protones

$$A = Z + N$$

$$N \geqslant Z$$

Tabla de nucléidos



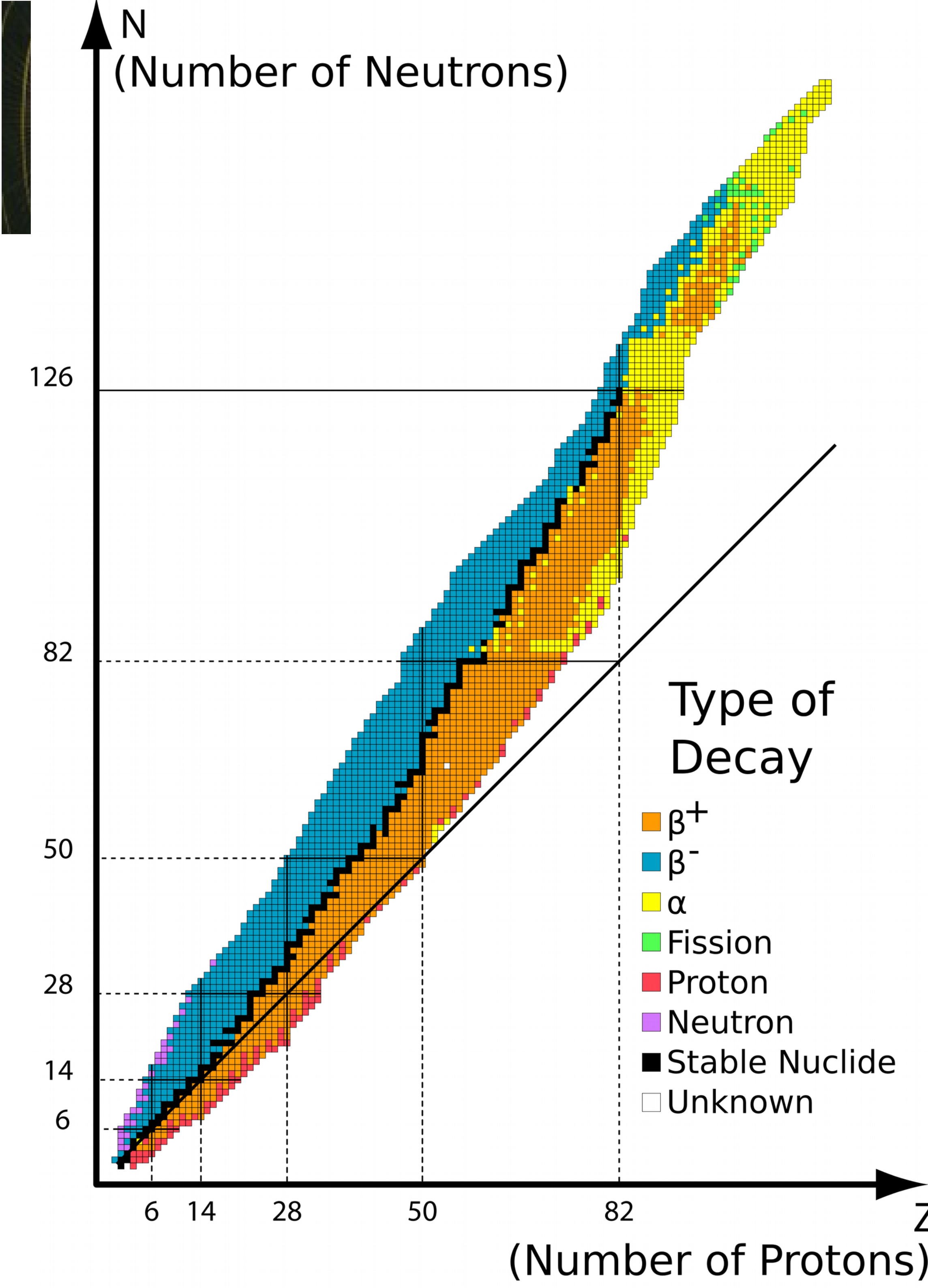
- $F_E \sim Z^2$
- Neutrones sin carga
- $^{1}H_{1}$ $^{4}He_{2}$ $^{238}U_{92}$

Los neutrones ayudan a la cohesión

Fuerza Fuerte

Matrimonio

Tabla de nucléidos



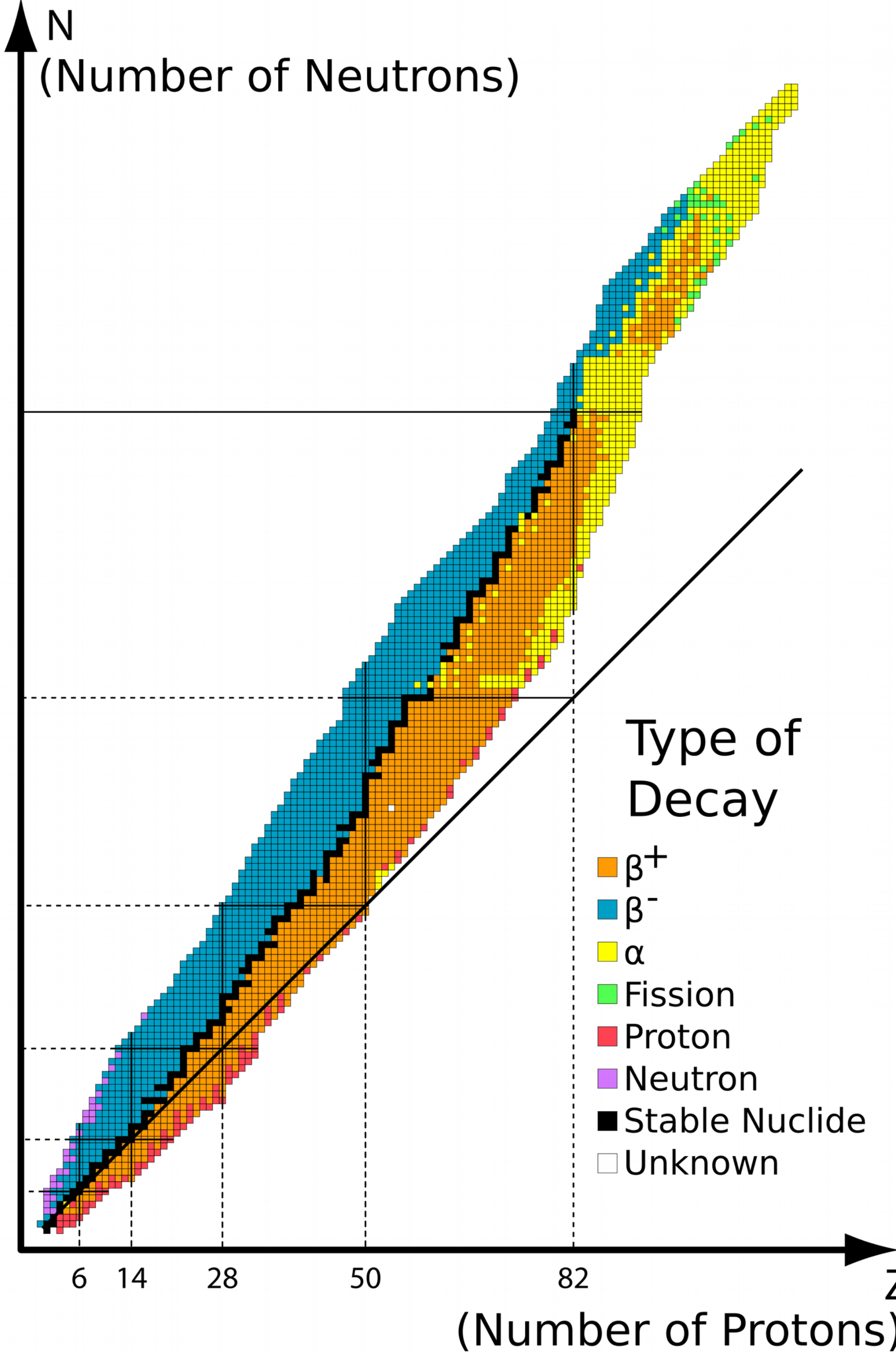


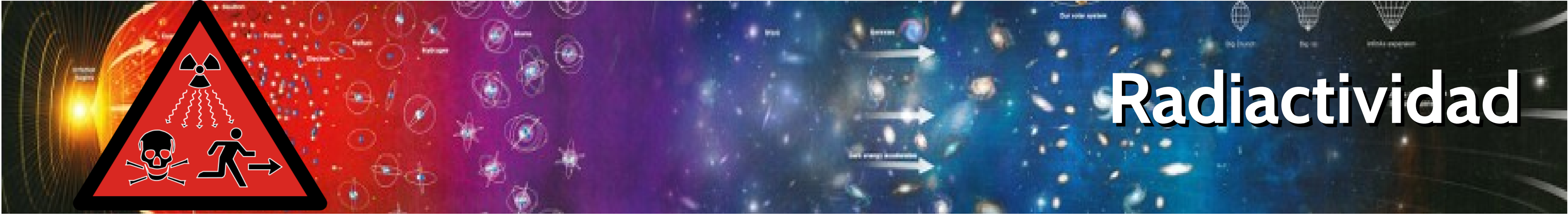
Tabla de nucléidos

- $F_E \sim Z^2$
- Neutrones sin carga eléctrica
- $^{1}H_{1}$ $^{4}He_{2}$ $^{208}Pb_{82}$

Los neutrones ayudan a la “cohesión” (estabilidad) de los núcleos

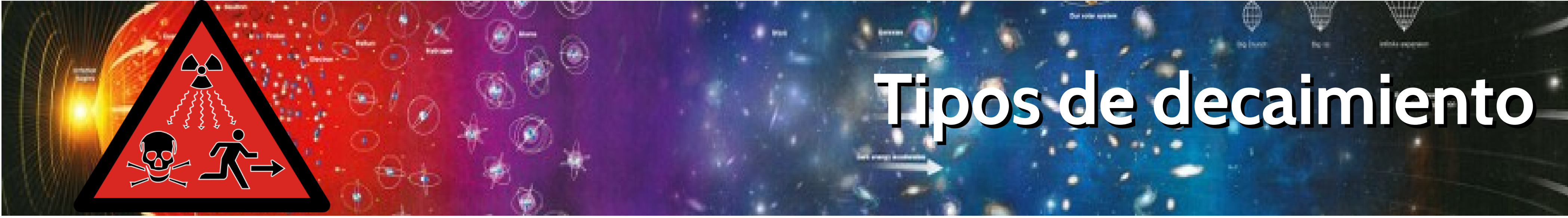
Fuerza Fuerte

Radiactividad



Radiactividad

- **Fenómeno físico** por el cual algunos elementos inestables **decaen** en otros más estables **emitiendo radiación ionizante** (Energías típicas: keV – MeV).
- **Tipos:**
  - **Alfa**: **emisión de un núcleo de Helio** (2 protones, 2 neutrones). Poca capacidad de penetración (las detiene un papel)
  - **Beta**: **emisión de un electrón o un positrón** (media capacidad de penetración: láminas metálicas delgadas)
  - **Gamma**: **emisión de un fotón de alta energía** (alta capacidad de penetración, hasta plomo)
  - Otros: neutrones, protones, fisión espontánea, fragmentación



Tipos de decaimiento

- **Emisión de partículas cargadas** (alfa, beta, protón, fisión, fragmentación): implican cambios en el número atómico
- **Emisión de neutrones**: cambios en el número másico
- **Emisión de fotones**: desexcitación nuclear
- En todo decaimiento **se libera energía, Q,** usualmente en forma de energía cinética de los productos del decaimiento. **El decaimiento ocurre si y sólo si Q>0**
- En general, ***Q* es igual a la diferencia de masa entre reactivos y productos.**

$$Q = \left(m_{\text{reactivos}} - m_{\text{productos}}\right) c^2$$

Ley de decaimiento radiactivo

- **Suceso cuántico y estadístico**: **no podemos saber cuando un átomo particular decaerá.**
- Se observa que para un elemento la **tasa de decaimiento es constante, λ.**

$$[\lambda] = s^{-1}$$

Ley de decaimiento radiactivo

+ Sea una muestra con N_0 núcleos inestables.

+ El núcleo tiene una tasa de decaimiento λ, $[\lambda] = s^{-1}$

$\Rightarrow \quad N_0 \xrightarrow{t} N(t) \qquad N(t) < N_0$ y $N(t) = N_0 + dN \Rightarrow dN < 0$

Luego, en un tiempo dt:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N} \qquad \left(\frac{dN}{dt} < 0\right)$$

Aplicamos el procedimiento usual para esta ecuación diferencial:

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + C$$

Siendo C la constante de integración. Luego:

$$e^{\ln N} = e^{-\lambda t + C} \Rightarrow N(t) = e^{-\lambda t} e^{C} \text{ y para } t=0,\ N(t)=N_0 \Rightarrow$$

$$N_0 = e^{-\lambda 0} e^{C} \Rightarrow e^{C} = N_0 .$$ Finalmente:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$ Ley de Decaimiento Radiactivo.

Ley de decaimiento radiactivo

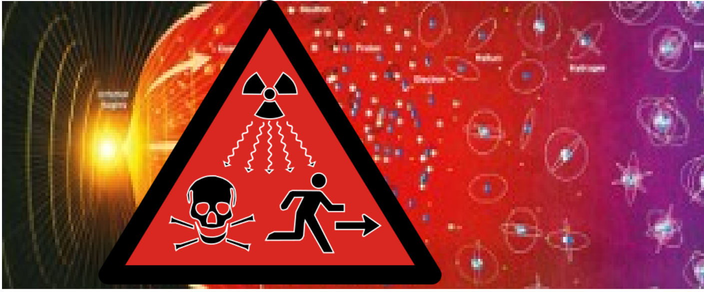
- **Suceso cuántico y estadístico**: **no podemos saber cuando un átomo particular decaerá.**
- Se observa que para un elemento la **tasa de decaimiento es constante, λ.**

$$[\lambda]=s^{-1}$$

- Luego, en una muestra con *N* átomos radiactivos, la tasa de decaimiento *dN/dt* será proporcional a *N*:

$$\frac{-dN}{dt}=-\lambda N \rightarrow \frac{dN}{N}=-\lambda\, dt \rightarrow \int \frac{dN}{N}=\int -\lambda\, dt$$

$$\rightarrow \ln N=-\lambda t+C \rightarrow N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$$



Ley de Decaimiento exponencial

- Ocurre con una **tasa de decaimiento constante λ**

$$N(t)=N_0 e^{-\lambda t} \qquad [\lambda]=s^{-1}$$

- A partir de λ, definimos la **vida media τ**

$$\tau\equiv\frac{1}{\lambda}\Rightarrow N(t)=N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [\tau]=s$$

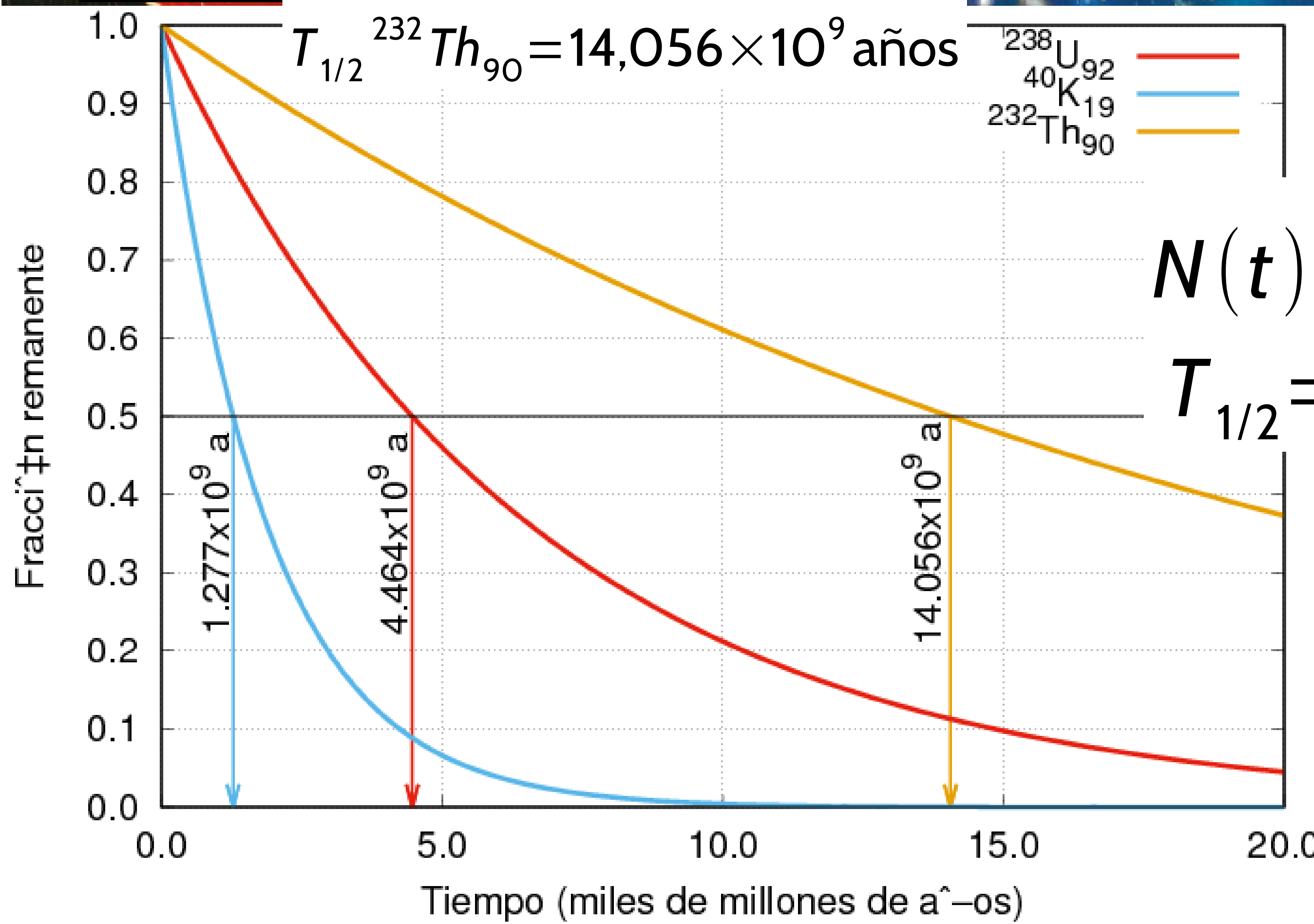
- Y además, el **período de semi-desintegración, como el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad del elemento en una muestra se reduzca a la mitad**

$$T_{1/2}\,\text{es tal que}\; N(T_{1/2})=\frac{N_0}{2}=N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}$$

$$\Rightarrow T_{1/2}=\ln(2)\,\tau$$

$$T_{1/2}\ {}^{40}K_{19} = 1{,}277 \times 10^{9}\ \text{años}$$
$$T_{1/2}\ {}^{238}U_{92} = 4{,}464 \times 10^{9}\ \text{años}$$
$$T_{1/2}\ {}^{232}Th_{90} = 14{,}056 \times 10^{9}\ \text{años}$$

$T_{1/2}$



$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$T_{1/2} = \ln(2)\,\tau$$

En un mol de $^{232}Th_{90}$, ¿Cuántos decaimientos se producen en un segundo?

+ Sea un mol de $^{232}_{142}Th_{90}$ ($\Rightarrow N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ átomos de Thorio)

+ La masa del mol es 232 g.

+ $T_{1/2} = 14{,}056 \times 10^9\,a = 4{,}43 \times 10^{17}\,s$

+ $T_{1/2} = \ln(2)\,\tau \Rightarrow \tau = T_{1/2}/\ln(2) \Rightarrow \tau = 6{,}39 \times 10^{17}\,s$

Con lo cual $\lambda = \dfrac{1}{\tau} = 1{,}56 \times 10^{-18}\,s^{-1}$

+ Luego cada segundo esperamos medir $\Delta N = N_0 \cdot \lambda$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -N_0 \cdot 1{,}56 \times 10^{-18}\,s^{-1} \quad \text{para el primer segundo}$$

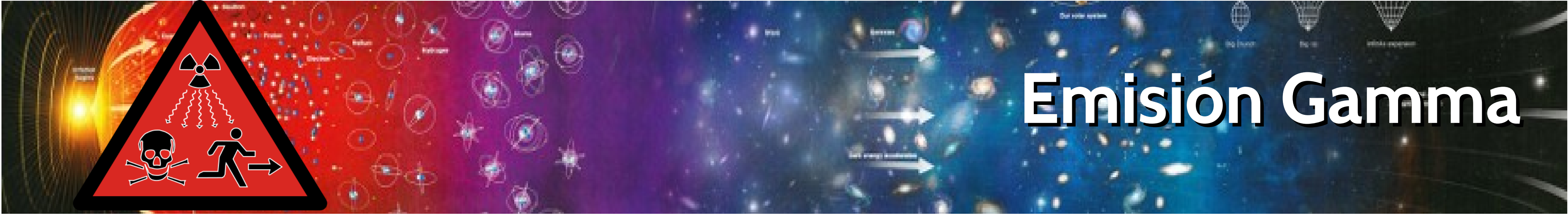
$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = -6{,}02 \times 10^{23} \cdot 1{,}56 \times 10^{-18}\,s^{-1}$$

$\boxed{\text{Aproximación valida si } \Delta t \ll \tau}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} \cong -10^6\,at/s \quad \text{para el primer segundo.}$$

Para tiempos largos $\Rightarrow N(t) = N_0\, e^{-t/\tau} \Rightarrow \Delta N = N(t) - N_0$

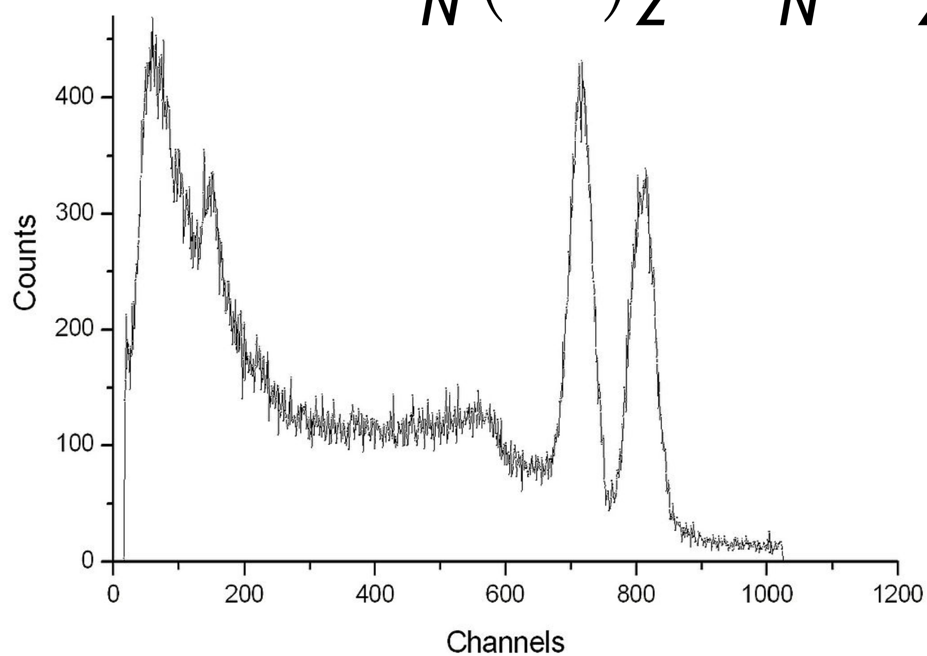
$\Rightarrow \Delta N = N_0\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \Rightarrow \Delta N \simeq -10^{+6}\,at$ para $t = 1\,s.$

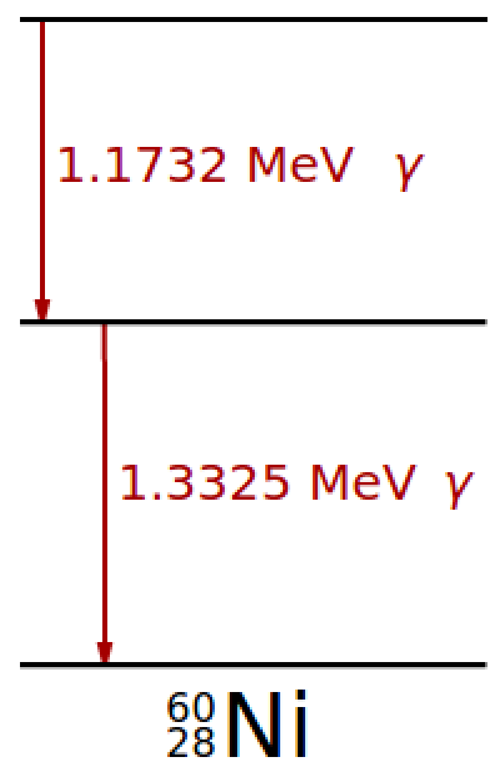


Emisión Gamma

- El núcleo tiene niveles de energía
- El núcleo en un estado excitado se desexcita a través de la emisión de un fotón (gamma) con energía igual a la diferencia de energía entre los estados inicial y final

$$ {}^{A}_{N}(X)^{*}_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N}X_{Z} + \gamma $$

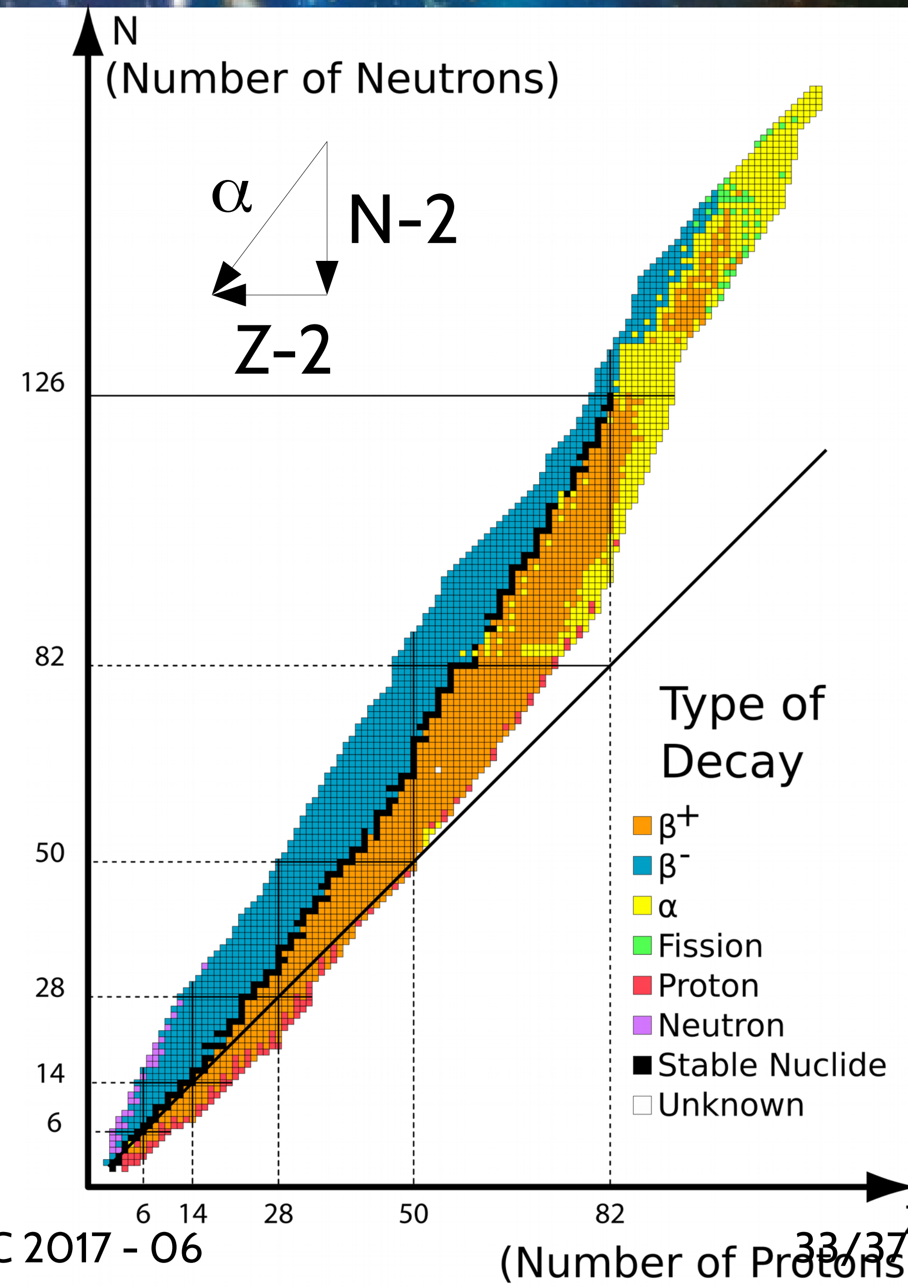




Decaimiento alfa

- Corresponde a la emisión espontánea de un núcleo de Helio ${}^{4}He_2$ (partícula alfa, 2 neutrones, 2 protones)
- El núcleo pierde dos protones → ¡otro elemento!

$$ {}^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A-4}_{N-2}Y_{Z-2} + \alpha + Q_{\alpha} $$



Decaimiento beta

- β^-: emisión de un **electrón**

$$ {}^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N-1}Y_{Z+1} + e^{-} + \bar{\nu}_{e} + Q_{\beta^-} $$

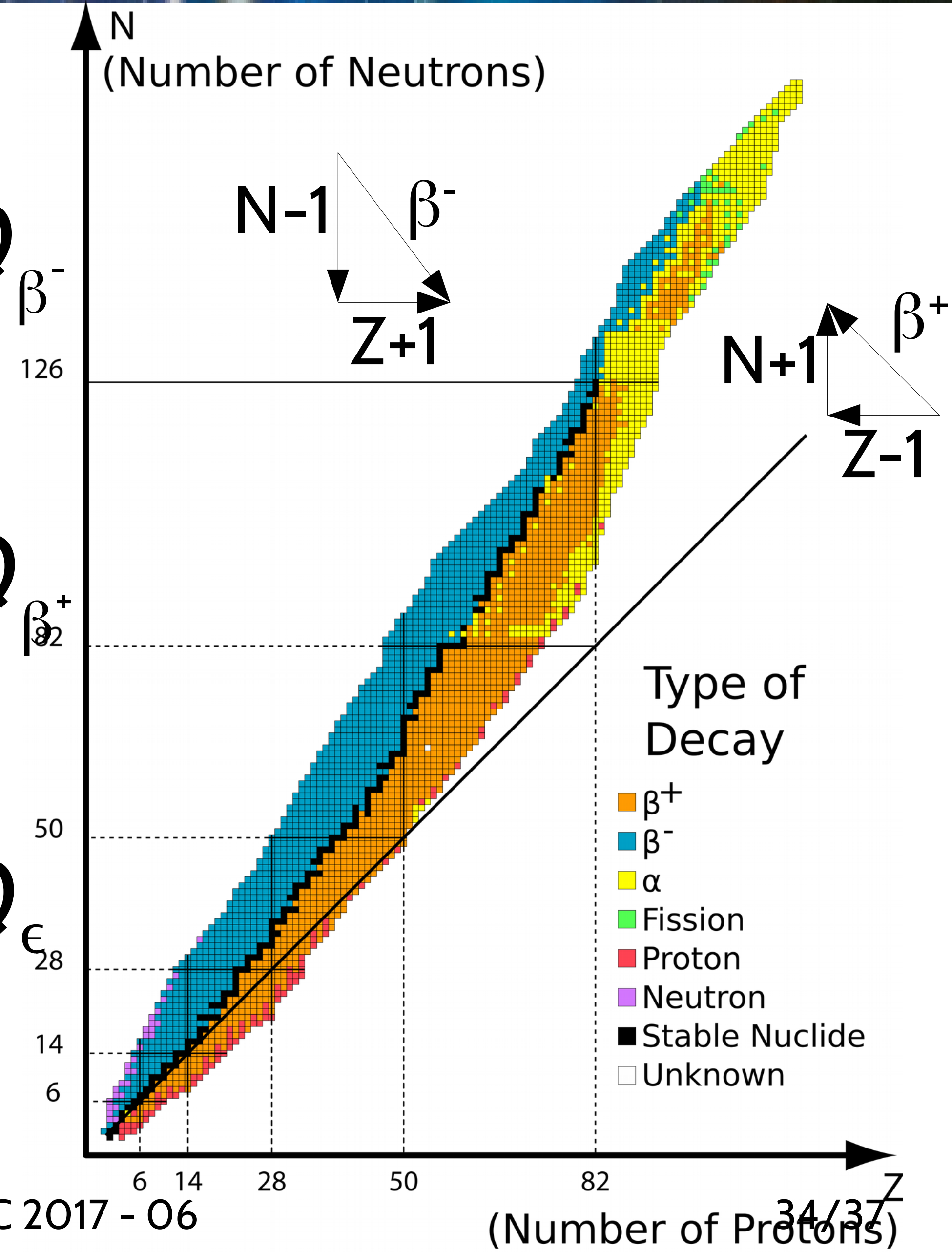
- β^+: emisión de un **positrón**

$$ {}^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N+1}Y_{Z-1} + e^{+} + \nu_{e} + Q_{\beta^+} $$

- ε: **captura electrónica**

$$ {}^{A}_{N}X_{Z} + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{N+1}Y_{Z-1} + \nu_{e} + Q_{\epsilon} $$

- **¿Que es ν_e?**



Decaimiento Beta: Energías

- Propuesta para el decaimiento beta del Bismuto-210

$$ {}^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^{-} + Q_{\beta^-} $$

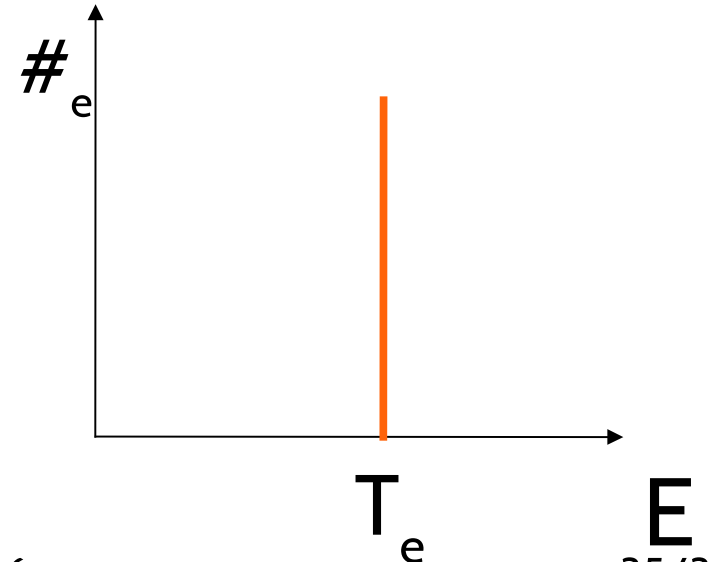
$$ \left(n \rightarrow p^{+} + e^{-} + Q_{\beta^-} \right) $$

- Luego, la energía liberada debería ser

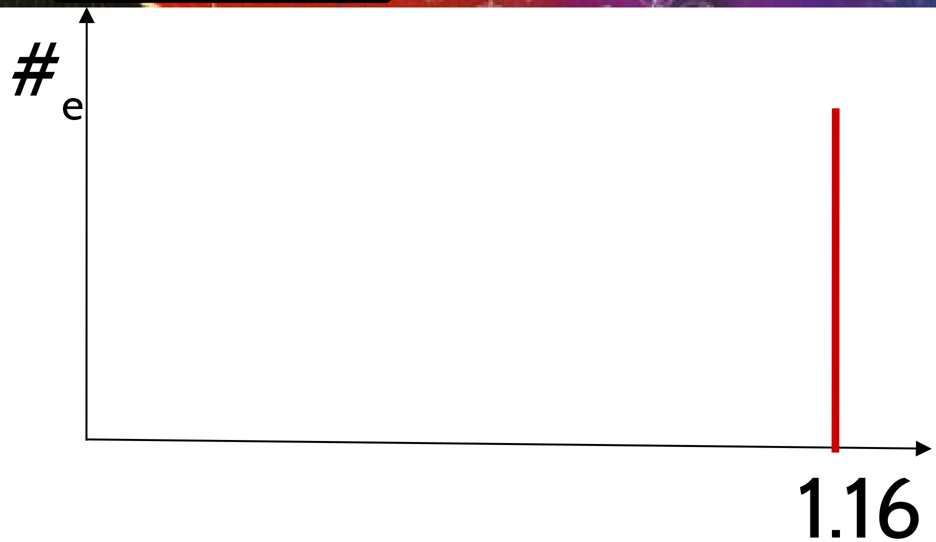
$$ m_{\mathrm{Bi}} c^2 = \left(m_{\mathrm{Po}} + m_e \right) c^2 + Q $$

$$ Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_e \right) c^2 \approx T_e $$

$$ T_e \simeq 1.16\,\mathrm{MeV} $$



La medición



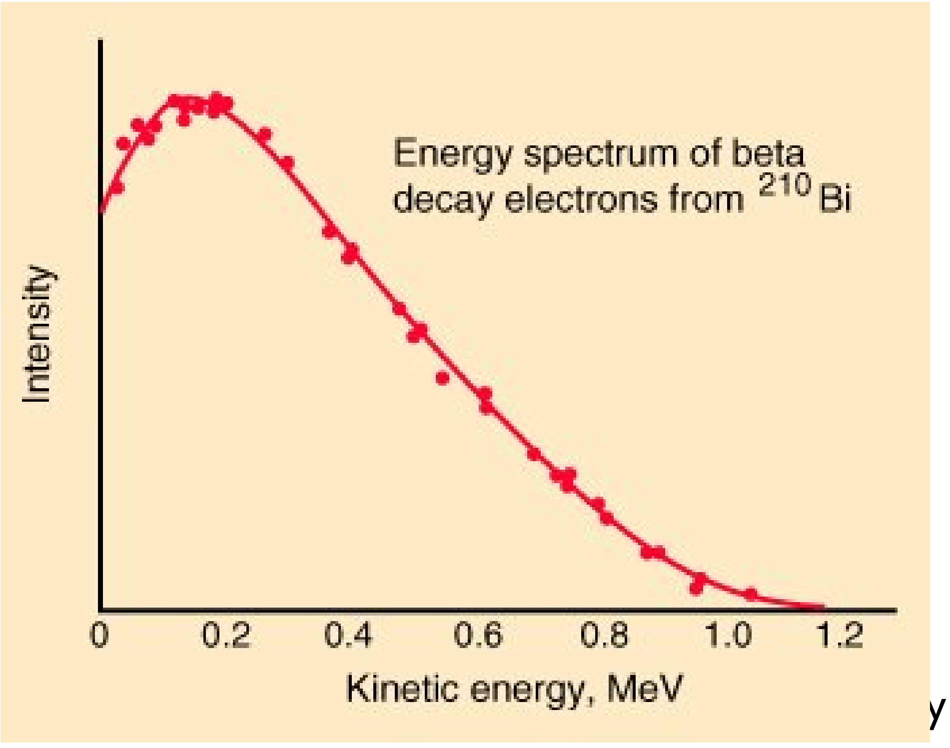
- Bohr: “La energía no se conserva”
- Pauli: La energía se conserva si existe otra partícula: “**neutrino**”
- Decaimiento beta correcto:

$$ {}^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^{-} + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-} $$

$$ \left(n \rightarrow p^{+} + e^{-} + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-} \right) $$

$$ Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_e - m_{\bar{\nu}_e} \right) c^2 $$

$$ Q \approx T_e + T_\nu $$



El electrón emitido, ¿es relativista?

Velocidad del electrón emitido en el decaimiento β del 210-Bi

$m_e = 0{,}511\ \mathrm{MeV}/c^2$ y la energía disponible $Q = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$

Supongamos que $T_e = Q \Rightarrow T_e = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$. Luego.

$$E = mc^2 + T_e \Rightarrow E = 0{,}511\ \frac{\mathrm{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} + 1{,}16\ \mathrm{MeV}$$

$$\Rightarrow E = 1{,}671\ \mathrm{MeV}.$$

Pero $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = E/mc^2 \Rightarrow \gamma = \dfrac{1{,}671\ \cancel{\mathrm{MeV}}}{0{,}511\ \dfrac{\cancel{\mathrm{MeV}}}{\cancel{c^2}}\ \cancel{c^2}} \Rightarrow \gamma = 3{,}27$

$$\boxed{\gamma = 3{,}27}$$

y $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - 1/\gamma^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow \beta = 0{,}952 \Rightarrow v_e = \beta c \Rightarrow \boxed{v_e = 0{,}952\,c}$$