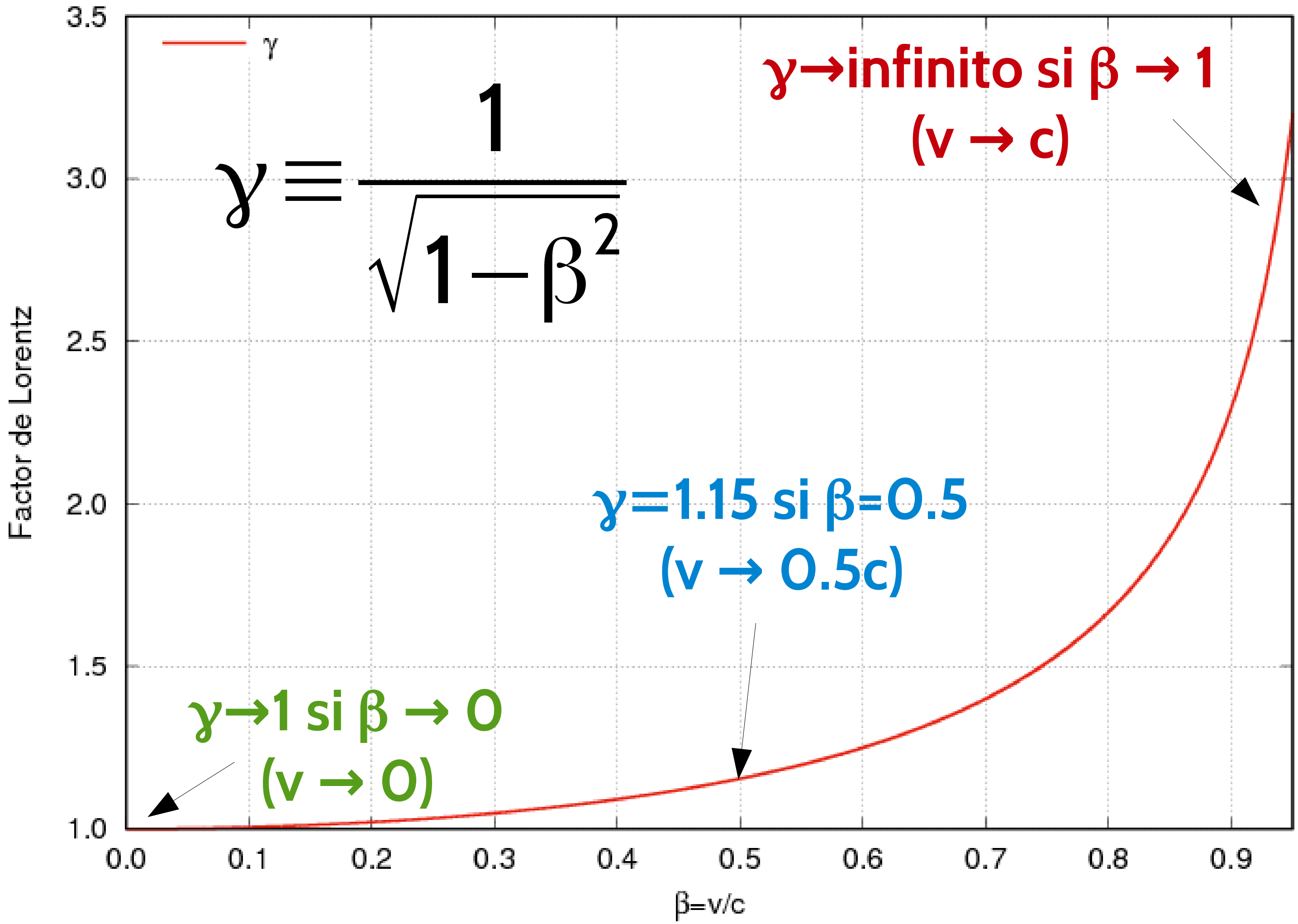
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2019

RIO NEGRO

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C04
- **Fecha** 04 Sep 2019
- **Cont** Diagnóstico
- **Cátedra** Asorey
- **Web** https://gitlab.com/asoreyh/unrn-ipac/

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



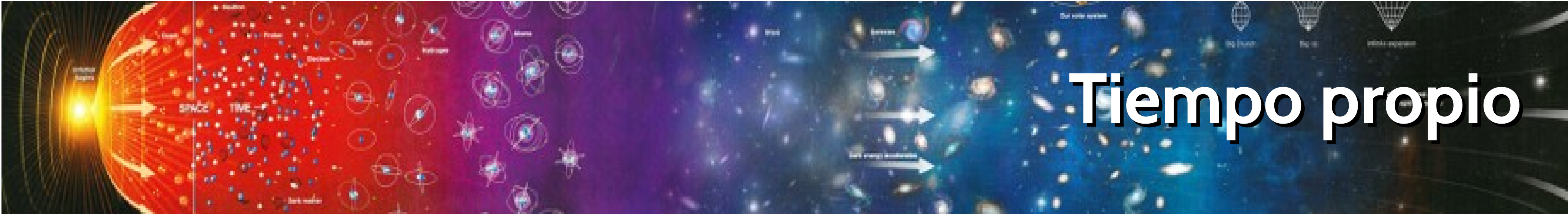
Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$



Tiempo propio

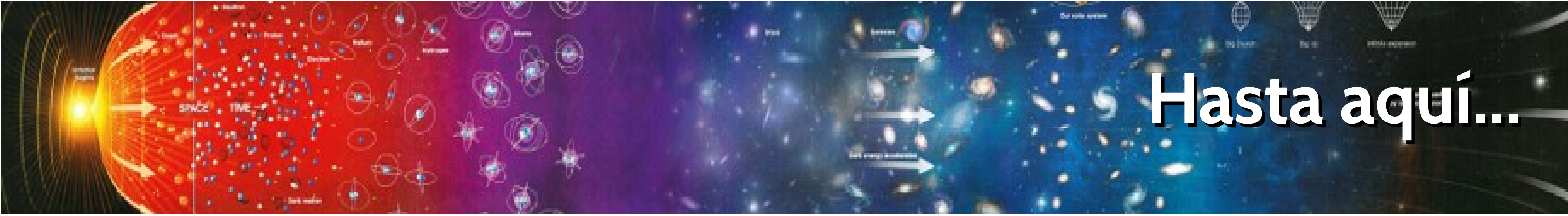
- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "**comóvil**".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$



Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec{p}$: $\boxed{\vec{p} = m\, d\vec{r}/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec{r}/d\tau)$? Recordando:

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{p}} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec{v}\gamma}$$

Donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec{v}|/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m\vec{v}\gamma}$$

Definimos $\gamma_i := (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = m_3 v_3 \gamma_3 + m_4 v_4 \gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1' \gamma_1' + m_2 v_2' \gamma_2' = m_3 v_3' \gamma_3' + m_4 v_4' \gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

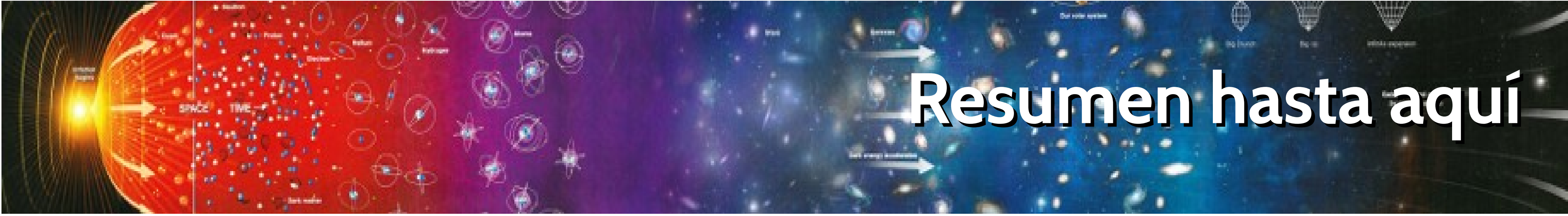
- Con la nueva definición de p,

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces $m\gamma > m$



Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p}=\gamma m\vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

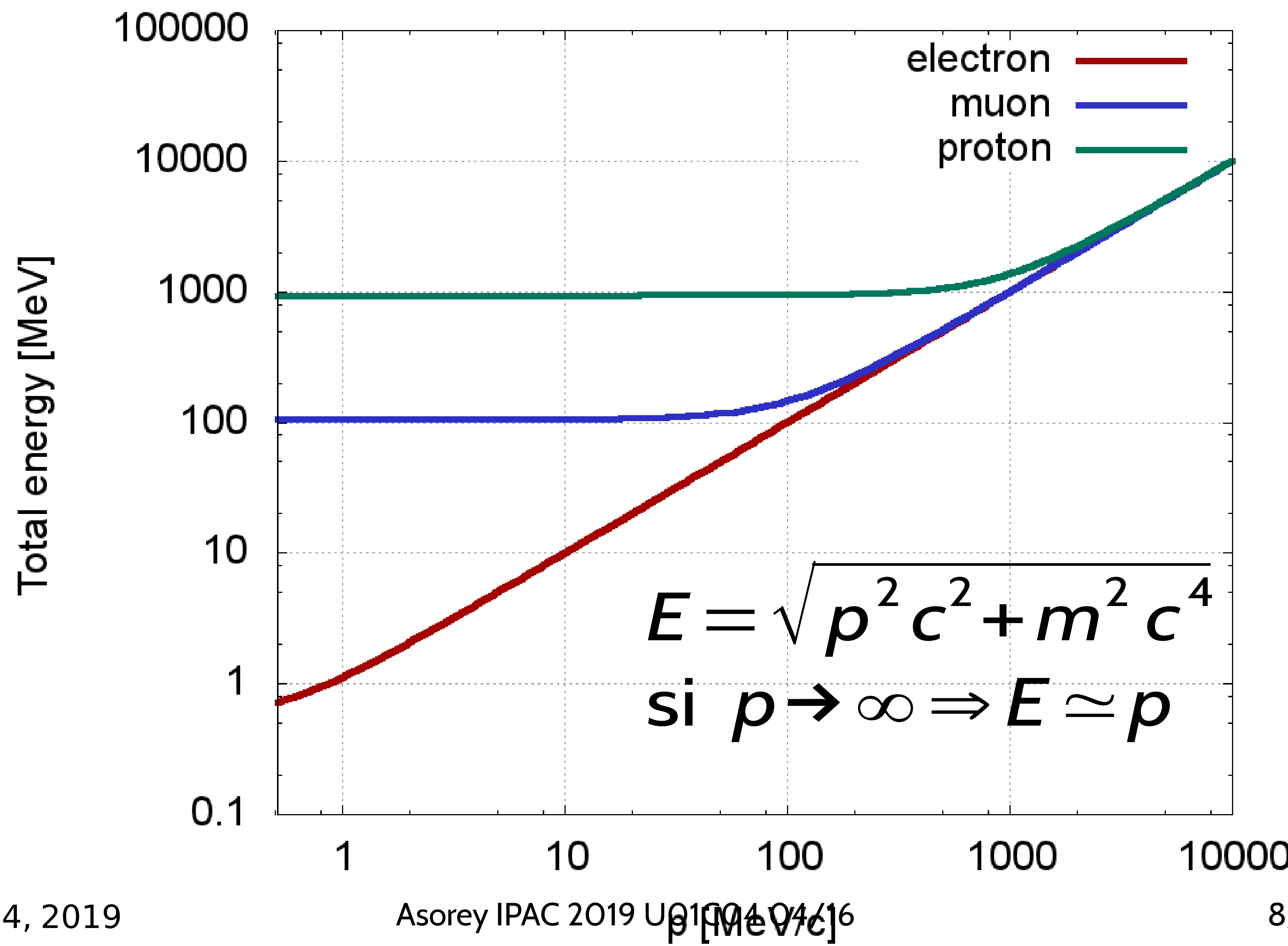
$$E=\gamma m c^2 \Rightarrow E_c=(\gamma-1) m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2-(p c)^2=(m c^2)^2}$$

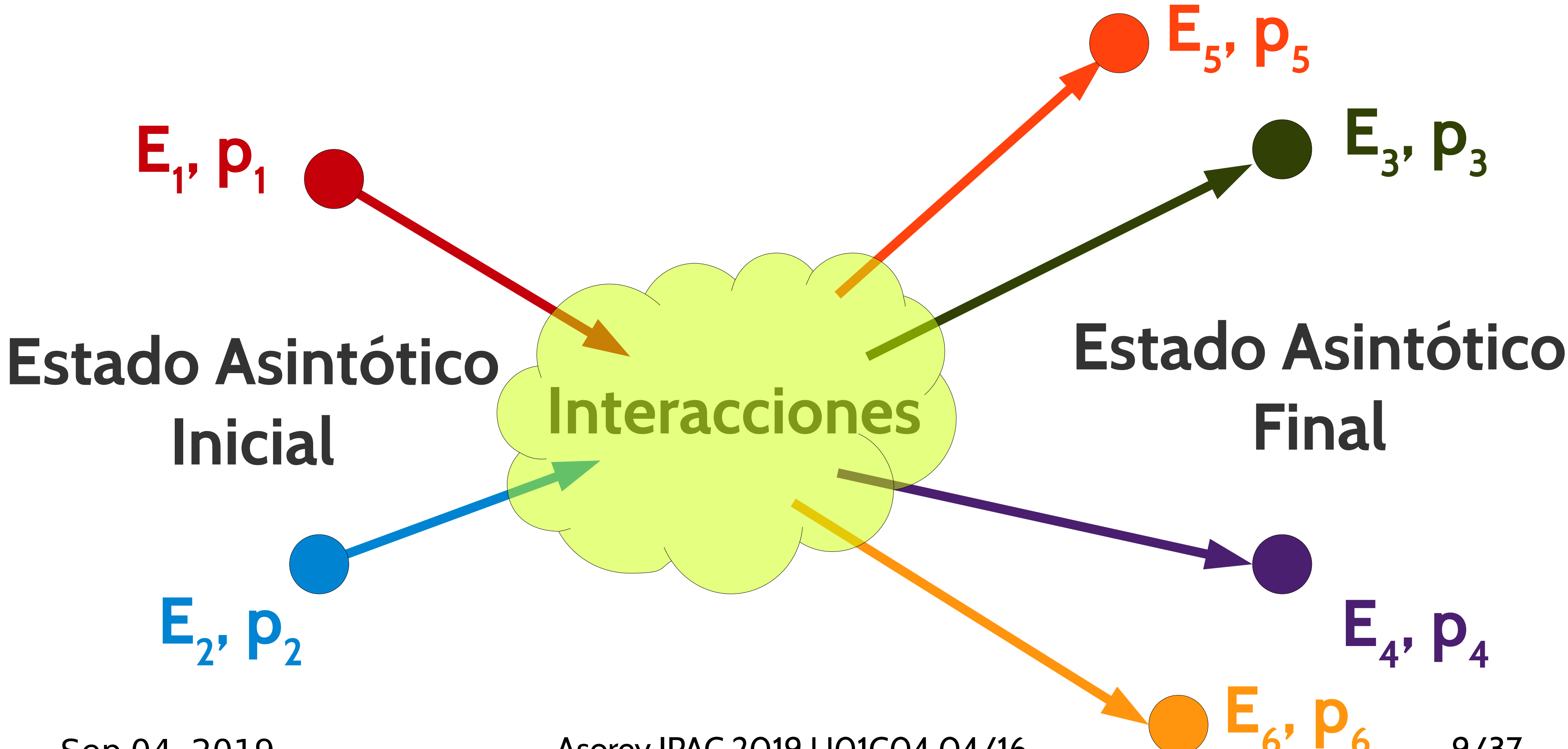
Invariante relativista

Mil palabras



¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



Así funciona la Naturaleza

- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{array}{l} E^{\text{inicial}} = \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} = \sum_{k}^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{array}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

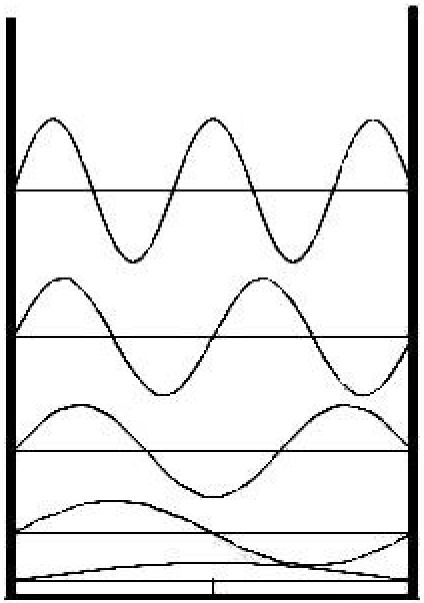
- **La cantidad de movimiento total se conserva**

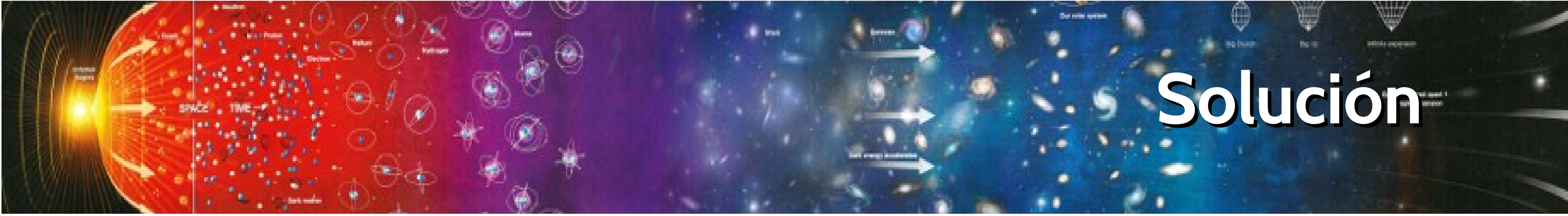
$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} = \sum_{k}^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{array}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

¿Cuántica + Relatividad?

- Del invariante $E^2-(pc)^2=(mc^2)^2 \rightarrow E^2=(pc)^2+(mc^2)^2 \rightarrow$
$$E=\pm\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}$$
- La relatividad anticipa estados con energía total negativa... → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Por ejemplo, para la partícula en una caja los estados están acotados a E>0:

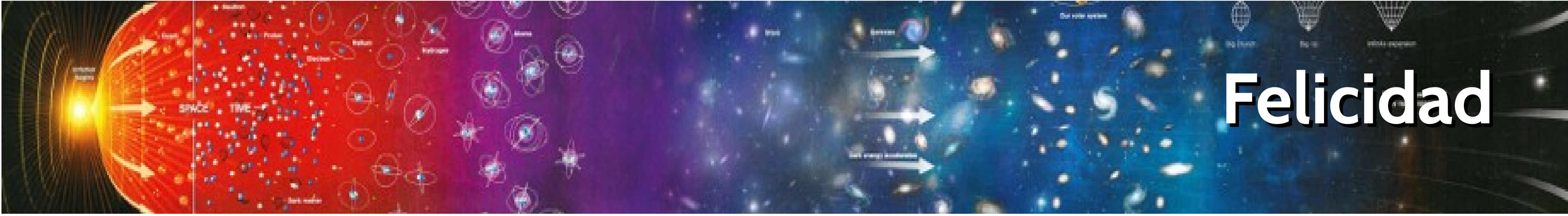
$$E_n=\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$$





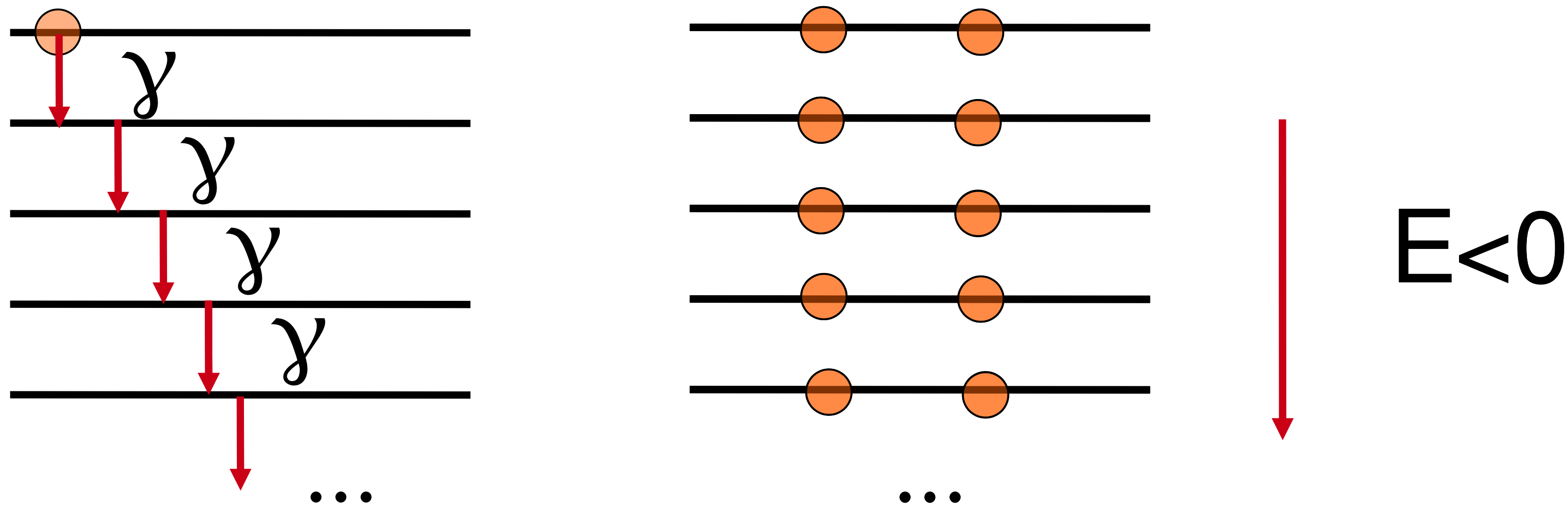
Solución

- Dirac (1928) obtiene la versión relativista de la ec. de Schrödinger y observa ese problema
- Propone que todos los estados de energía negativa están ocupados
- Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli
- **Solución**
  el "vacío" es el estado en el cual todos los estados de energía negativos están "llenos"

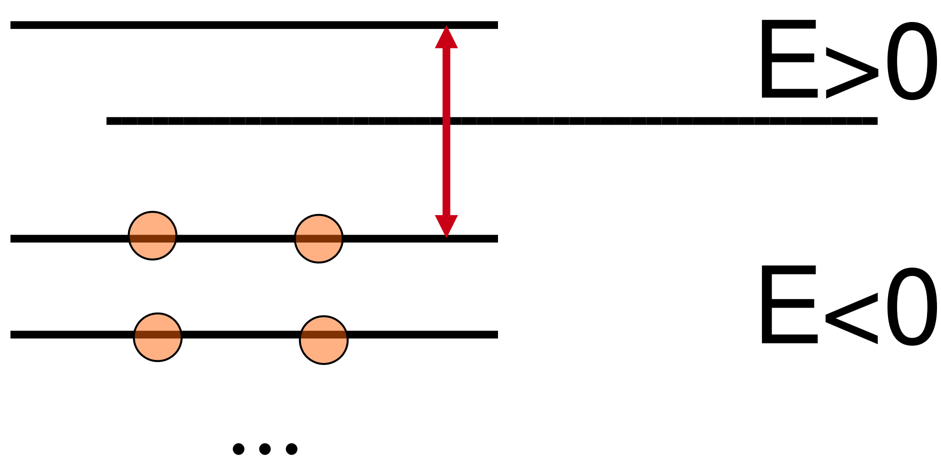


Felicidad

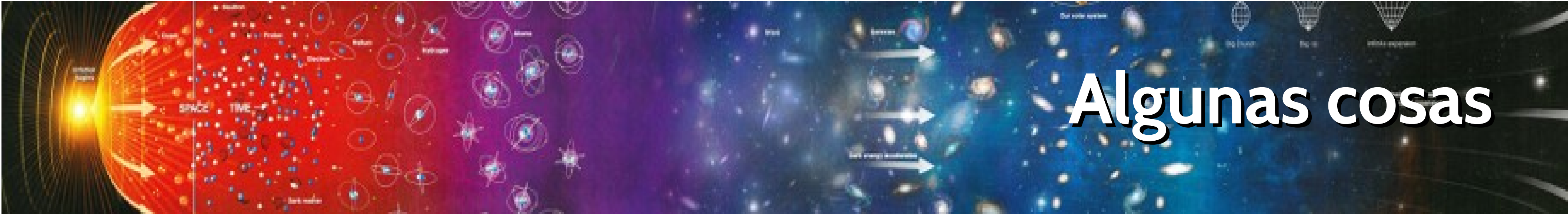
- No hay colapso porque no hay estados vacíos



$$E = 2mc^2 = 1.022\,\mathrm{MeV}$$



$$E = \pm mc^2$$



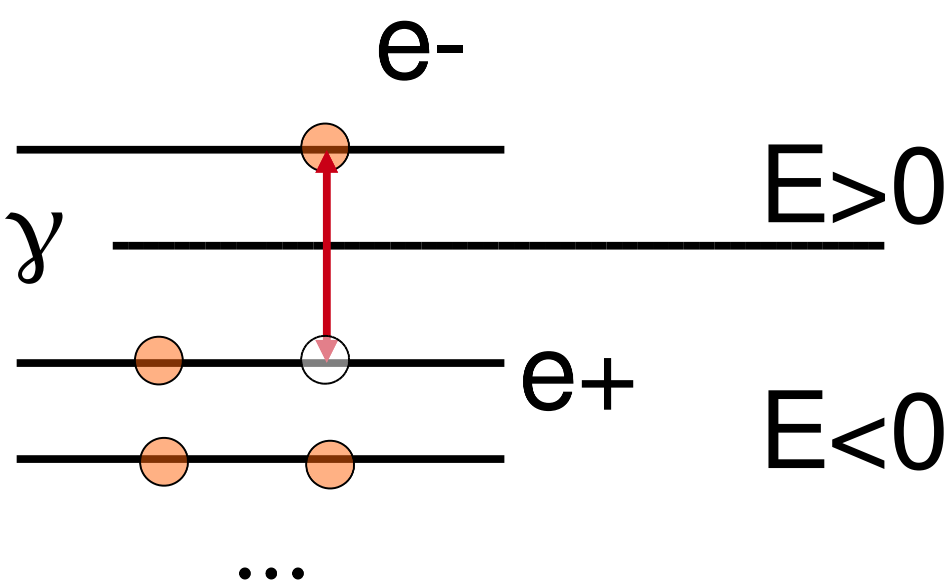
Algunas cosas

- El espacio está lleno con infinitas partículas
- Energía infinita
- Energía de punto 0 (como el oscilador armónico)

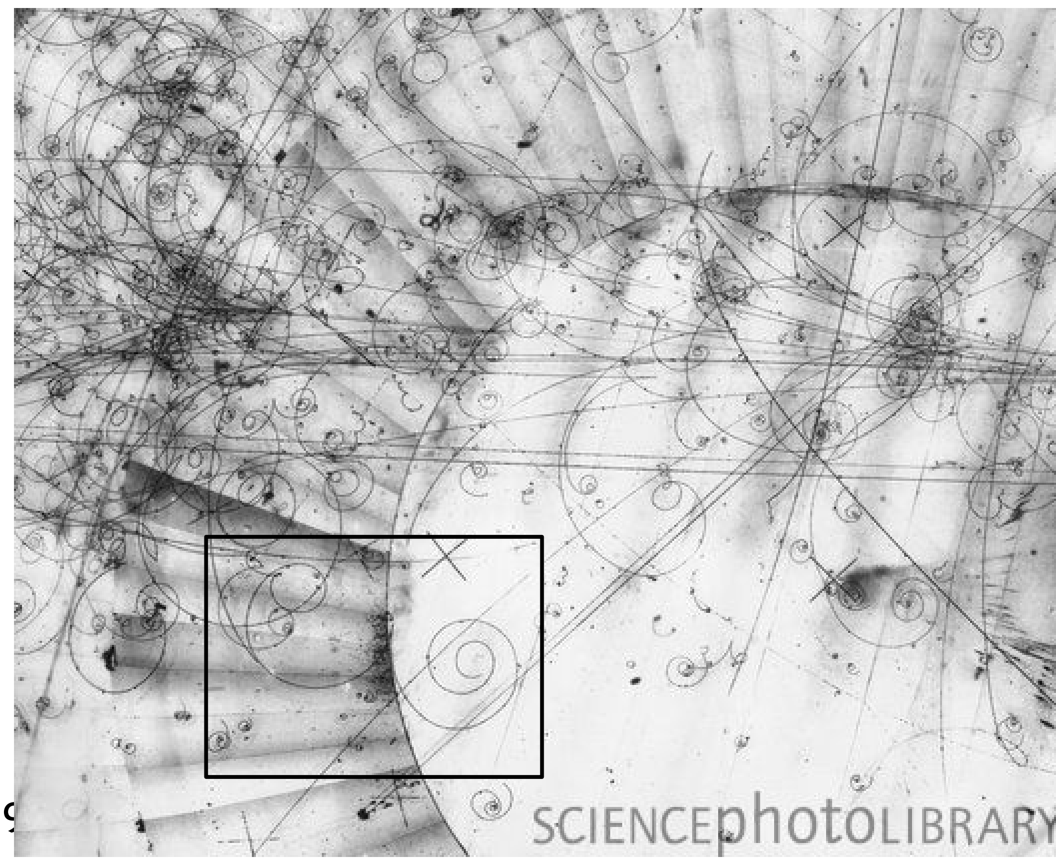
No olvidar que son Modelos

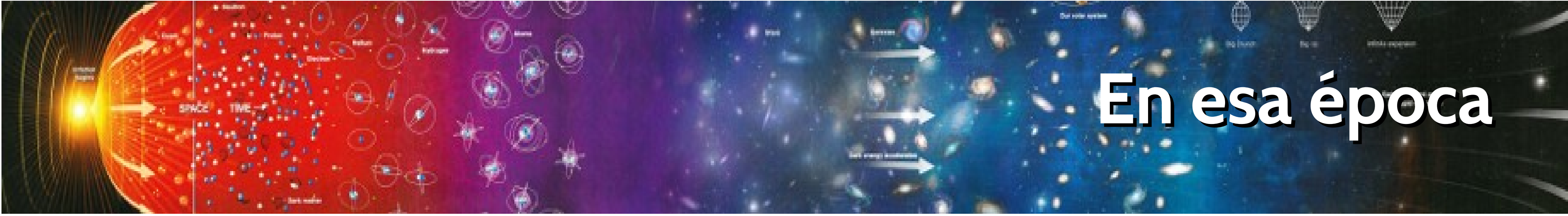
Materia-Antimateria

- En una interacción EM (scattering) es posible sacar un electrón del mar
- El “hueco” se ve como un electrón positivo



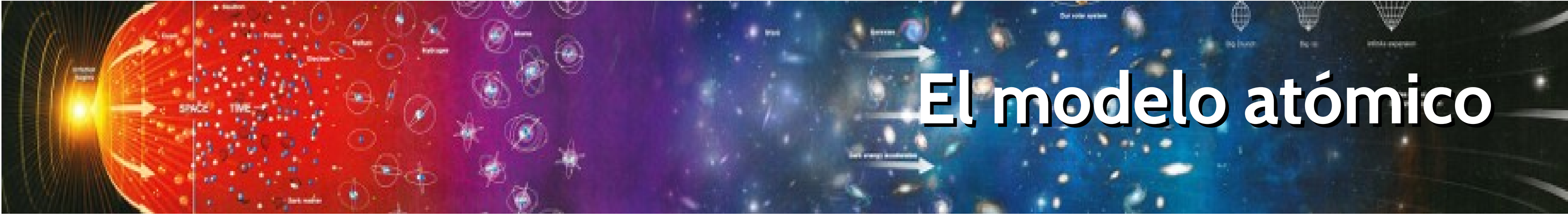
$$E_{\gamma} \geqslant 1.022\, MeV$$





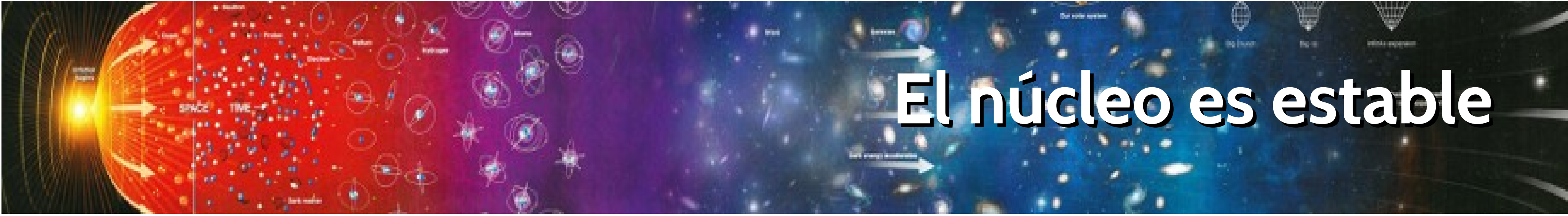
En esa época

- Se conocían cuatro partículas:
  - Protón (+)
  - Electrón (-)
  - Fotón (0) ← interacciones cargadas
  - Neutrón (0)
- Si existía el antielectrón, ¿por qué no un antiprotón?
- La idea del antineutrón es más compleja (sin carga)



El modelo atómico

- Un simple modelo atómico
- Radio atómico: a0 ~ 53 pm = 53000 fm
- Radio núcleo: f0 ~ 1.2 fm
- Relación: ~ 44200
- Núcleo 4 mm → electrones 177 m
- La naturaleza es escencialmente vacío



El núcleo es estable

- Tiene que haber una fuerza más fuerte que la fuerza eléctrica

$$F_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{e^2}{f_0^2}$$

$$F_E = 160\,N$$

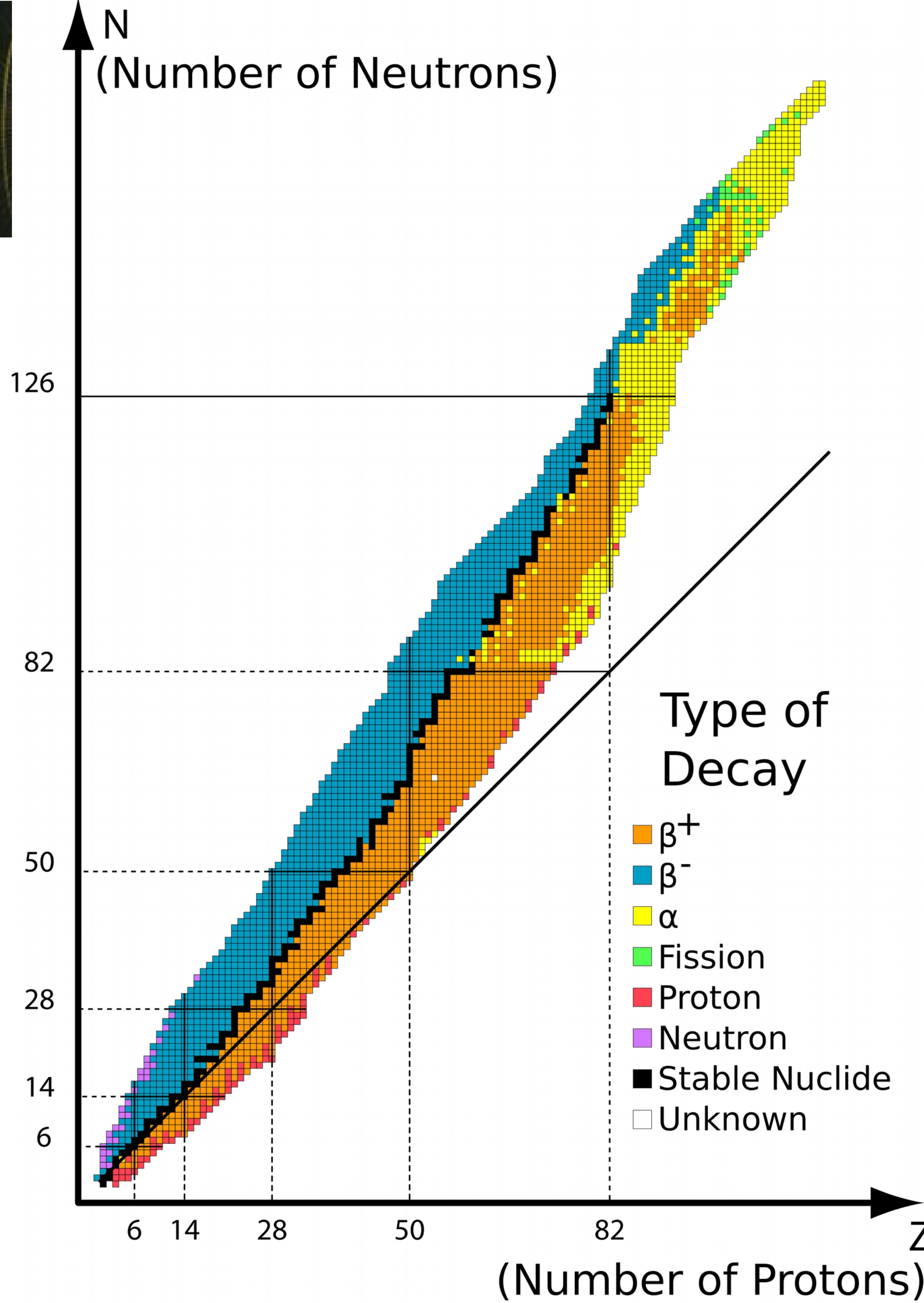
$$F_E = 1.2\times 10^{36}\,F_G$$

Ayuda: En general el núcleo tiene más neutrones que protones

$$A = Z + N$$

$$N \geqslant Z$$

Tabla de nucléidos



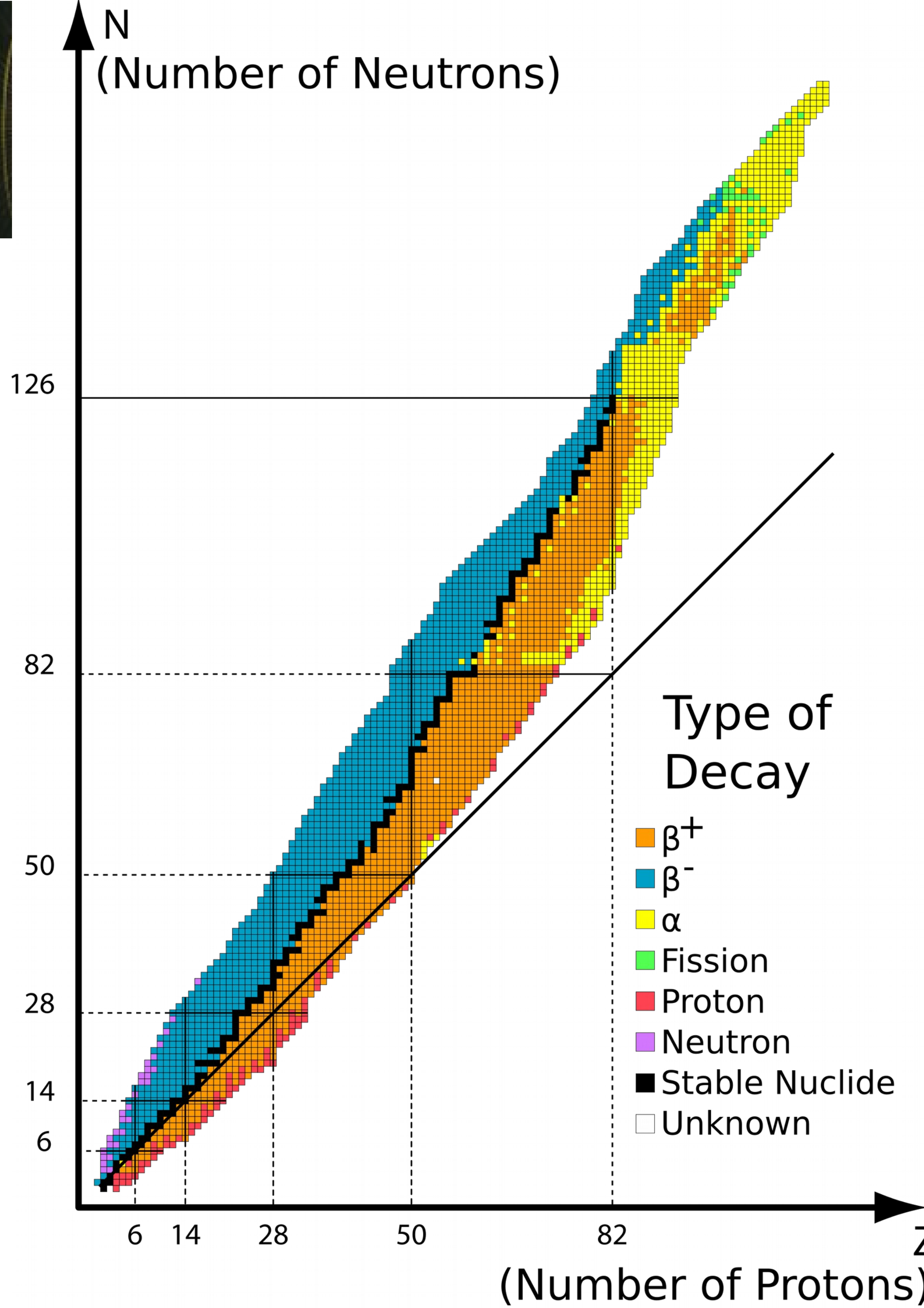


Tabla de nucléidos

- $F_E \sim Z^2$
- Neutrones sin carga eléctrica
- $^1H_1$ $^4He_2$ $^{208}Pb_{82}$

Los neutrones ayudan a la "cohesión" (estabilidad) de los núcleos

Fuerza Fuerte

Un proceso que se observó hace casi 100 años

- Propuesta para el decaimiento beta del Bismuto-210

$$ {}^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^{-} + Q_{\beta^{-}} $$

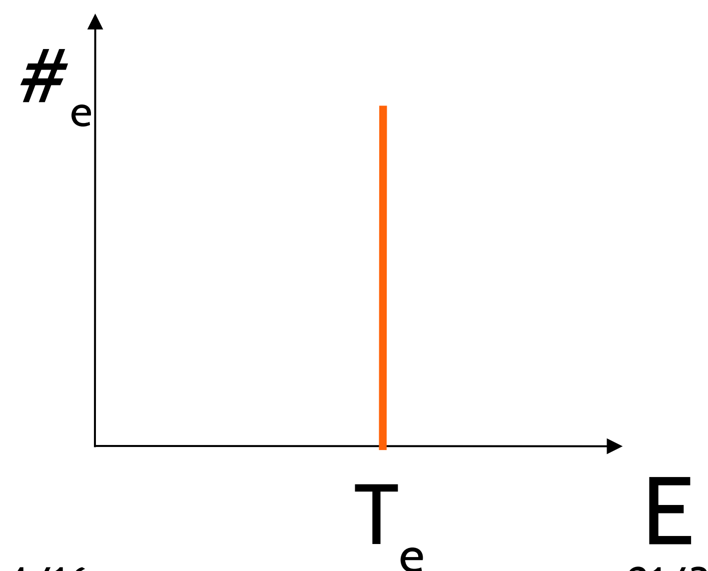
$$ \left(n \rightarrow p^{+} + e^{-} + Q_{\beta^{-}} \right) $$

- Luego, la energía liberada debería ser

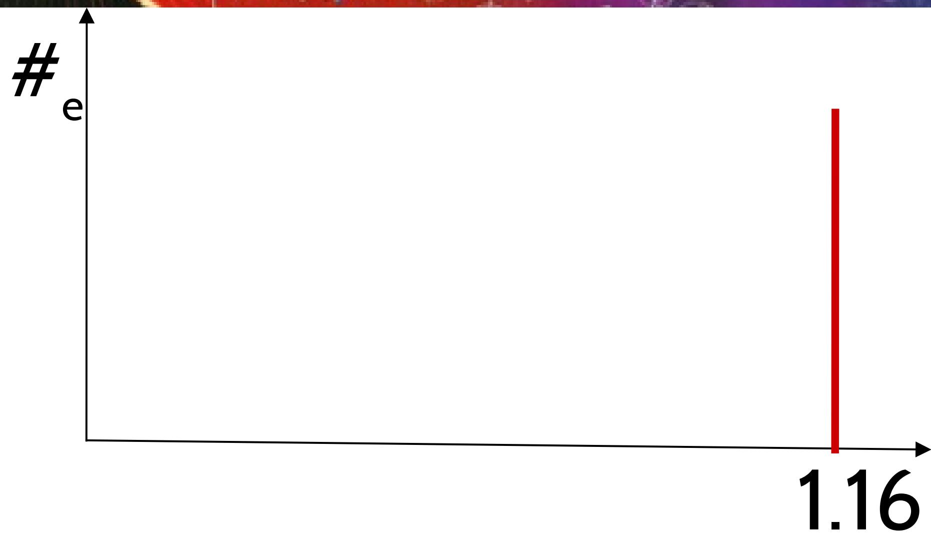
$$ m_{\mathrm{Bi}} c^{2} = \left(m_{\mathrm{Po}} + m_{e} \right) c^{2} + Q $$

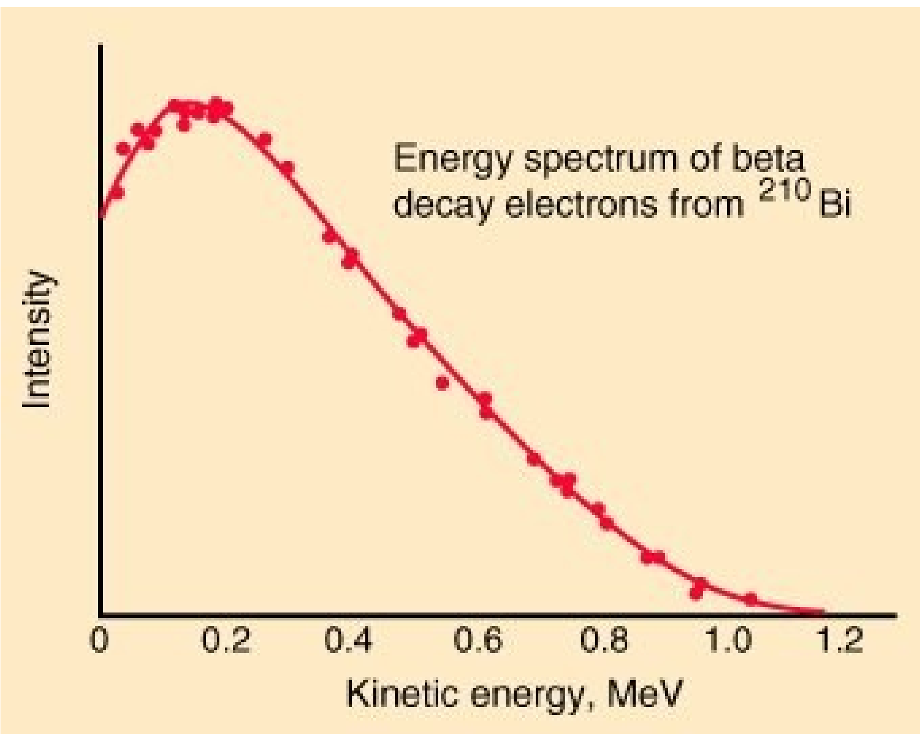
$$ Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_{e} \right) c^{2} \approx T_{e} $$

$$ T_{e} \simeq 1.16\,\mathrm{MeV} $$



La medición





- Bohr: "La energía no se conserva"
- Pauli: La energía se conserva si existe otra partícula: "**neutrino**"
- Decaimiento beta correcto:

$$ {}^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-} $$

$$ \left(n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-}\right) $$

$$ Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_e - m_{\bar{\nu}_e}\right)c^2 $$

$$ Q \approx T_e + T_\nu $$

El electrón emitido, ¿es relativista?

+ velocidad del electrón emitido en el Decaimiento β del 210-Bi

$m_e = 0{,}511\ \mathrm{MeV}/c^2$ y la energía disponible $Q = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$

Supongamos que $T_e = Q \Rightarrow T_e = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$. Luego.

$$E = mc^2 + T_e \Rightarrow E = 0{,}511\ \frac{\mathrm{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} + 1{,}16\ \mathrm{MeV}$$

$$\Rightarrow E = 1{,}671\ \mathrm{MeV}.$$

Pero $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = E/mc^2 \Rightarrow \gamma = \dfrac{1{,}671\ \cancel{\mathrm{MeV}}}{0{,}511\ \frac{\cancel{\mathrm{MeV}}}{\cancel{c^2}}\cancel{c^2}} \Rightarrow \gamma = 3{,}27$

$$\boxed{\gamma = 3{,}27}$$

y $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - 1/\gamma^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow \beta = 0{,}952 \Rightarrow v_e = \beta c \Rightarrow \boxed{v_e = 0{,}952\, c}$$

Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

$$E = qV \rightarrow E = (1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt

$$\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas RX Partículas R.C. Gal

Visible Gamma C. Galáctico R.C.E.G.

Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	m = E / c^2	eV/c^2

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV

Ley de decaimiento

- **Suceso cuántico y estadístico**: **no podemos saber cuando un átomo particular decaerá.**
- Se observa que para un elemento la **tasa de decaimiento es constante, λ.**

$$[\lambda] = s^{-1}$$

Ley de decaimiento radiactivo

+ Sea una muestra con N_0 núcleos inestables.
+ El núcleo tiene una tasa de decaimiento λ, $[\lambda] = s^{-1}$

$$\Rightarrow N_0 \xrightarrow{t} N(t) \qquad N(t) < N_0 \quad \text{y} \quad N(t) = N_0 + dN \Rightarrow dN < 0$$

Luego, en un tiempo dt:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N} \qquad \left(\frac{dN}{dt} < 0\right)$$

Aplicamos el procedimiento usual para esta ecuación diferencial:

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + C$$

Siendo C la constante de integración. Luego:

$$e^{\ln N} = e^{-\lambda t + C} \Rightarrow N(t) = e^{-\lambda t} e^{C}$$ y para $t=0$, $N(t) = N_0 \Rightarrow$

$$N_0 = e^{-\lambda 0} e^{C} \Rightarrow e^{C} = N_0 .$$ Finalmente:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$ Ley de Decaimiento Radiactivo.

Ley de decaimiento radiactivo

- **Suceso cuántico y estadístico**: **no podemos saber cuando un átomo particular decaerá.**
- Se observa que para un elemento la **tasa de decaimiento es constante, λ.**

$$[\lambda] = s^{-1}$$

- Luego, en una muestra con *N* átomos radiactivos, la tasa de decaimiento *dN/dt* será proporcional a *N*:

$$\frac{-dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda\, dt \rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int -\lambda\, dt$$

$$\rightarrow \ln N = -\lambda t + C \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Ley de Decaimiento exponencial

- Ocurre con una **tasa de decaimiento constante λ**

$$N(t)=N_0 e^{-\lambda t} \qquad [\lambda]=s^{-1}$$

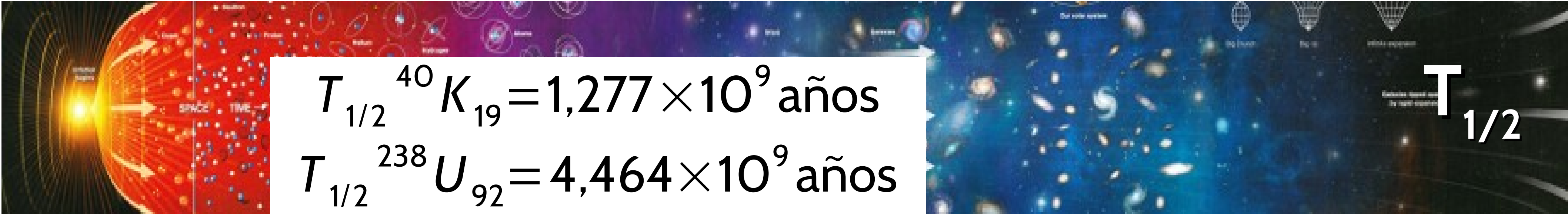
- A partir de λ, definimos la **vida media τ**

$$\tau \equiv \frac{1}{\lambda} \Rightarrow N(t)=N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [\tau]=s$$

- Y además, el **período de semi-desintegración, como el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad del elemento en una muestra se reduzca a la mitad**

$$T_{1/2}\,\text{es tal que}\; N(T_{1/2})=\frac{N_0}{2}=N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}$$

$$\Rightarrow T_{1/2}=\ln(2)\,\tau$$

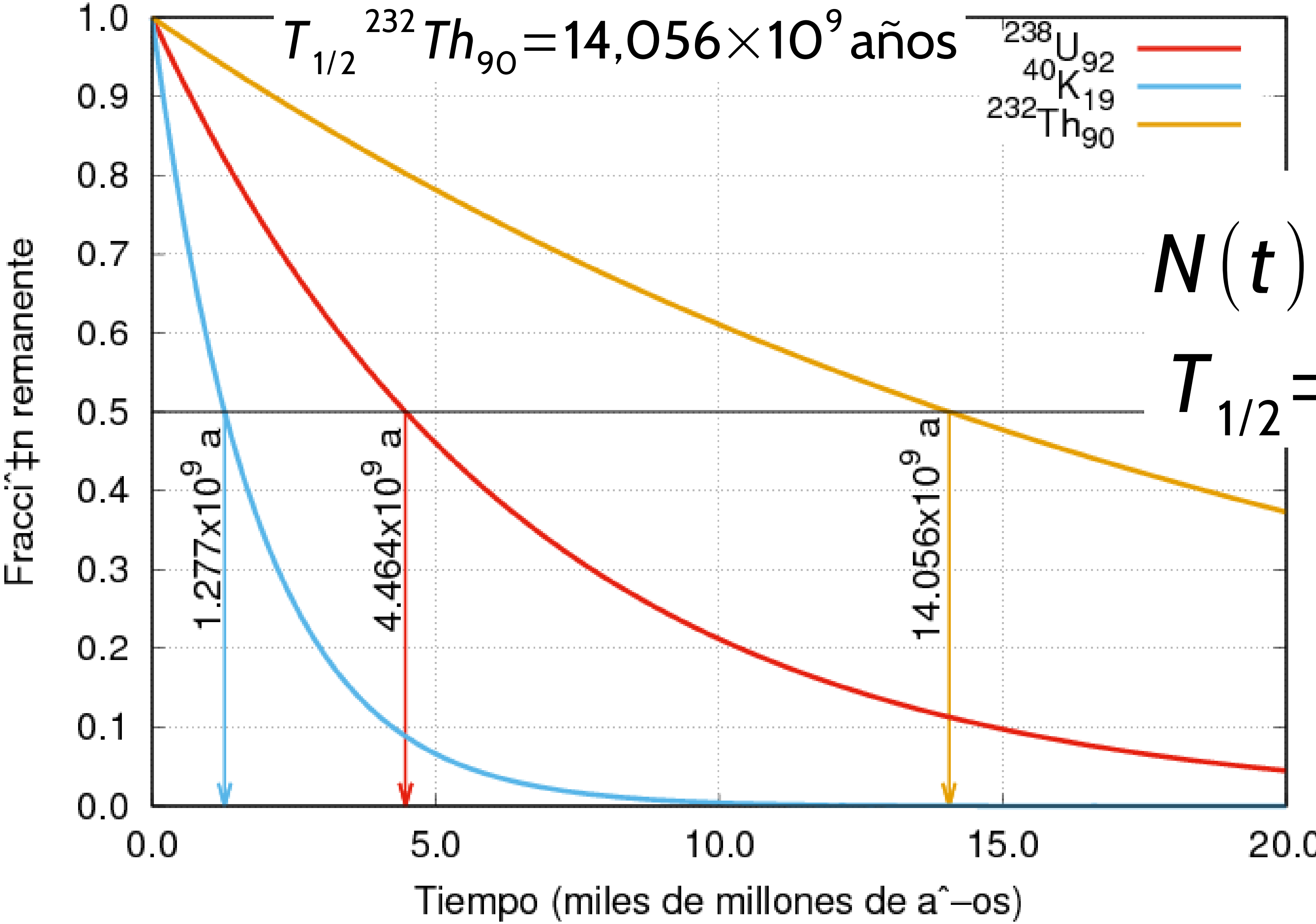


$T_{1/2}$

$$T_{1/2}\ {}^{40}K_{19} = 1{,}277 \times 10^9 \text{ años}$$

$$T_{1/2}\ {}^{238}U_{92} = 4{,}464 \times 10^9 \text{ años}$$

$$T_{1/2}\ {}^{232}Th_{90} = 14{,}056 \times 10^9 \text{ años}$$



$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$T_{1/2} = \ln(2)\,\tau$$

Actividad

- Cuando tengo 1 núcleo, hablo de probabilidades
- Pero tengo muchos → Ley de los grandes números → valores medios.
- **La actividad de una muestra está dada por el número de decaimientos por unidad de tiempo**:

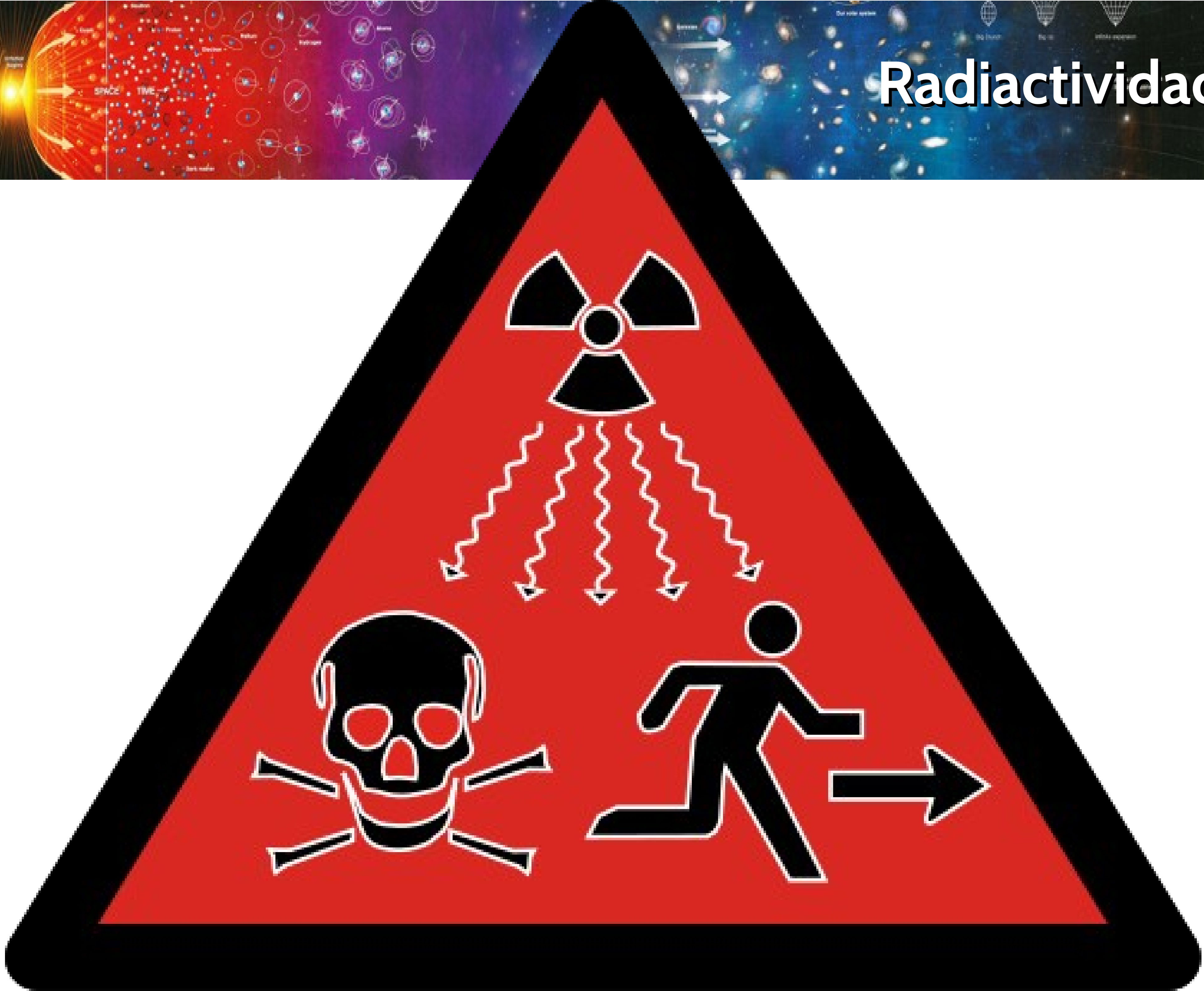
$$A(t) = \lambda N(t)$$

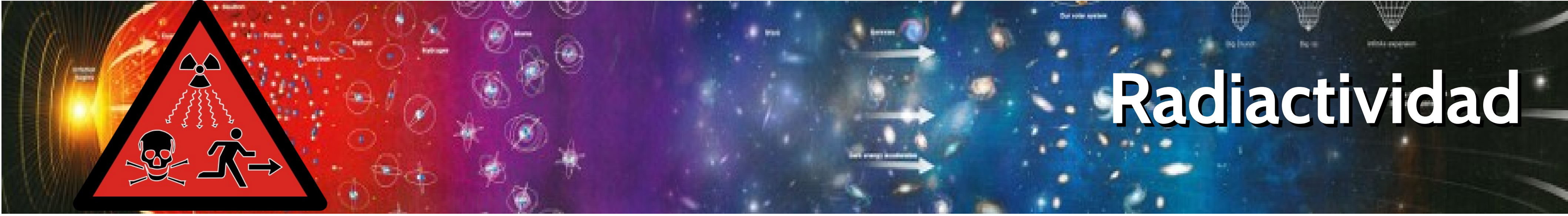
$$[A(t)] = \text{decaimientos}\, s^{-1} = \text{Bq}\,(\text{bequerel})$$

$$1\,\text{Bq} = 27\,\text{pCi} \qquad 1\,\text{Ci} = 37\,\text{GBq}$$

- Se puede pensar en que masa se necesita para 1 Bq

Radiactividad





Radiactividad

- **Fenómeno físico** por el cual algunos elementos inestables **decaen** en otros más estables **emitiendo radiación ionizante** (Energías típicas: keV – MeV).
- Tipos:
  - **Alfa**: emisión de un núcleo de Helio (2 protones, 2 neutrones). Poca capacidad de penetración (las detiene un papel)
  - **Beta**: emisión de un electrón o un positrón (media capacidad de penetración: láminas metálicas delgadas)
  - **Gamma**: emisión de un fotón de alta energía (alta capacidad de penetración, hasta plomo)
  - Otros: neutrones, protones, fisión espontánea, fragmentación

Tipos de decaimiento

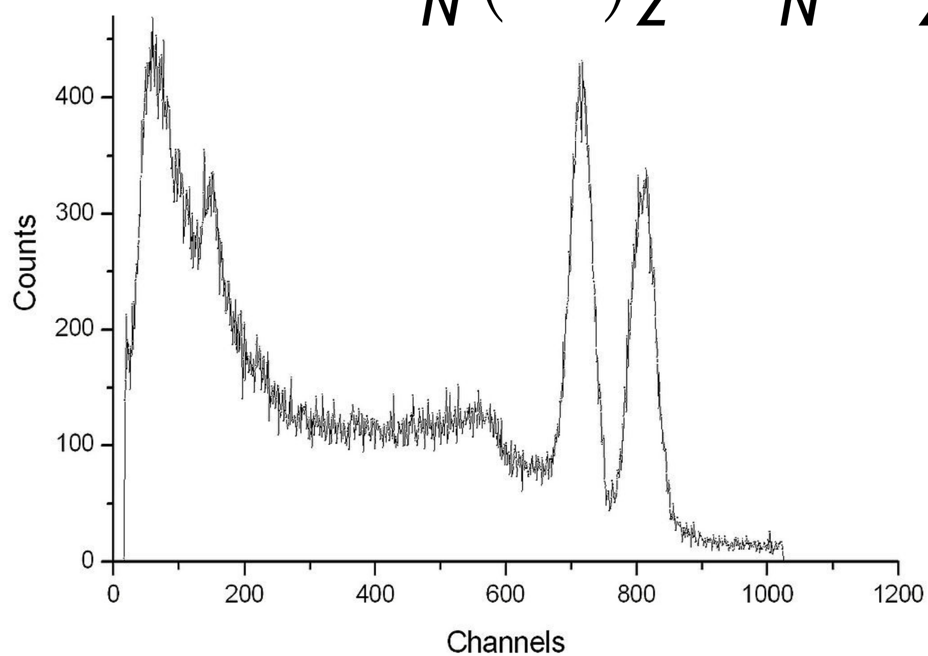
- **Emisión de partículas cargadas** (alfa, beta, protón, fisión, fragmentación): implican cambios en el número atómico
- **Emisión de neutrones**: cambios en el número másico
- **Emisión de fotones**: desexcitación nuclear
- En todo decaimiento **se libera energía, *Q*,** usualmente en forma de energía cinética de los productos del decaimiento. **El decaimiento ocurre si y sólo si *Q*>0**
- En general, ***Q* es igual a la diferencia de masa entre reactivos y productos.**

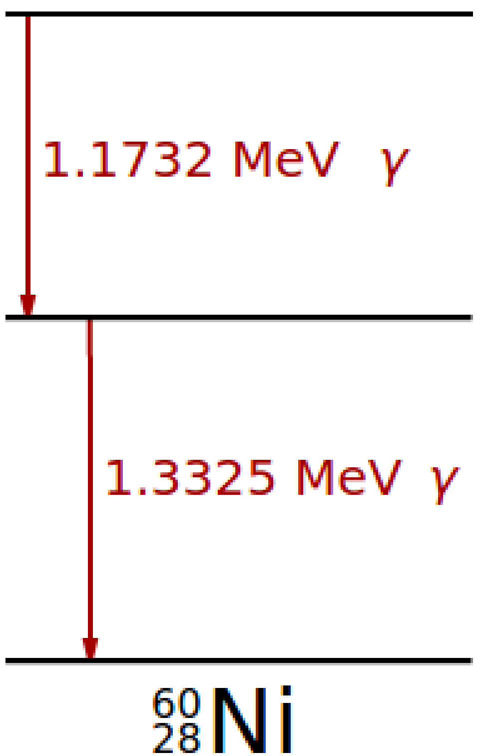
$$Q=\left(m_{\text{reactivos}}-m_{\text{productos}}\right)c^{2}$$

Emisión Gamma

- El núcleo tiene niveles de energía
- El núcleo en un estado excitado se desexcita a través de la emisión de un fotón (gamma) con energía igual a la diferencia de energía entre los estados inicial y final

$$ {}^{A}_{N}(X)^{*}_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N}X_{Z} + \gamma $$

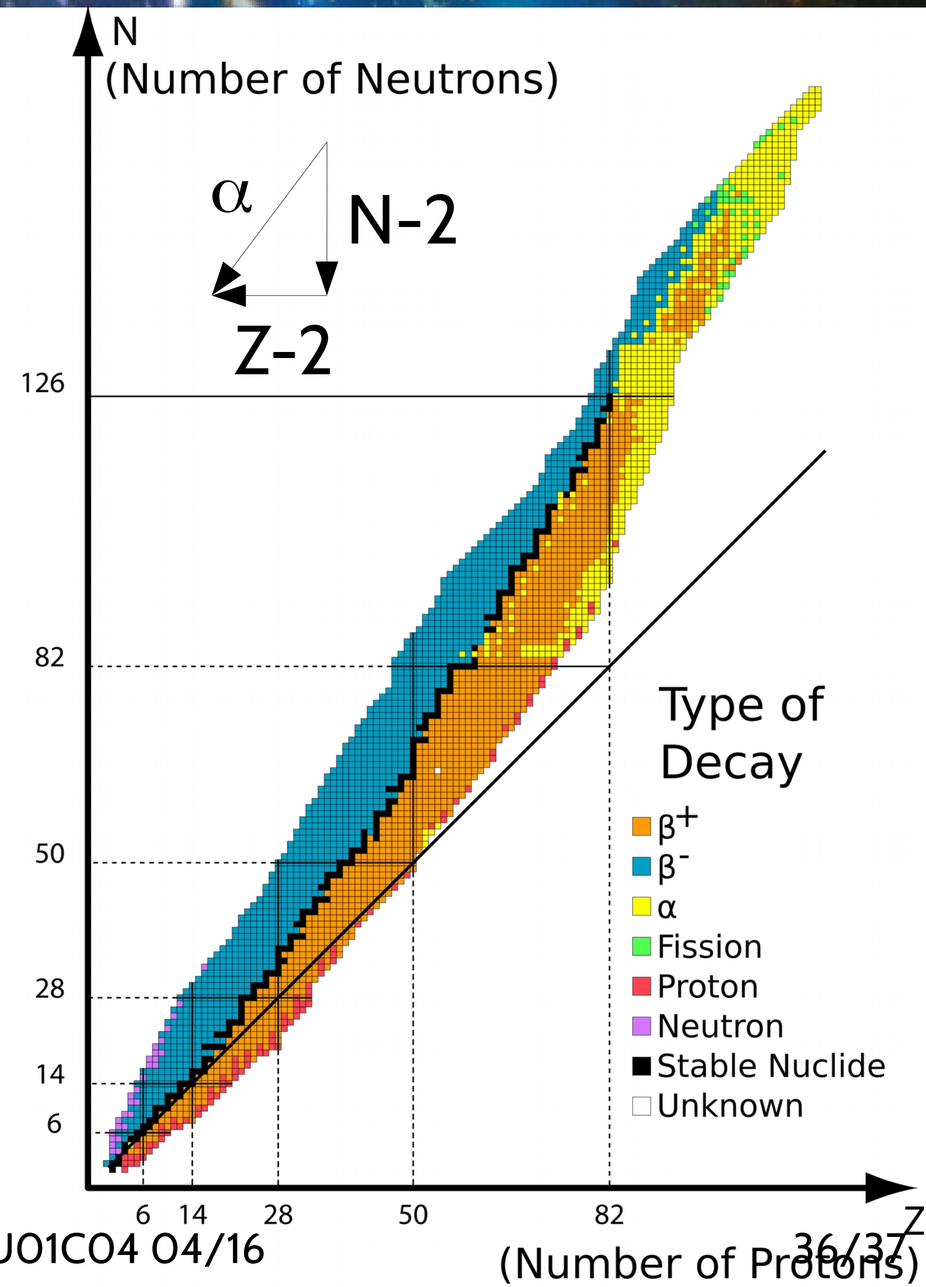


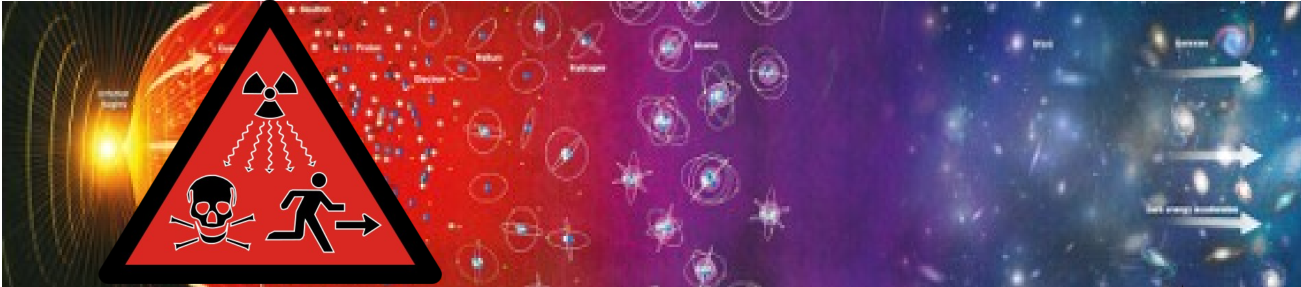


Decaimiento alfa

- Corresponde a la emisión espontánea de un núcleo de Helio $^4He_2$ (partícula alfa, 2 neutrones, 2 protones)
- El núcleo pierde dos protones → ¡otro elemento!

$$^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A-4}_{N-2}Y_{Z-2} + \alpha + Q_{\alpha}$$





Decaimiento beta

- **β⁻**: emisión de un **electrón**

$${}^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N-1}Y_{Z+1} + e^{-} + \bar{\nu}_{e} + Q_{\beta^{-}}$$

- **β⁺**: emisión de un **positrón**

$${}^{A}_{N}X_{Z} \rightarrow {}^{A}_{N+1}Y_{Z-1} + e^{+} + \nu_{e} + Q_{\beta^{+}}$$

- **ε: captura electrónica**

$${}^{A}_{N}X_{Z} + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{N+1}Y_{Z-1} + \nu_{e} + Q_{\epsilon}$$

- **¿Que es ν_e?**