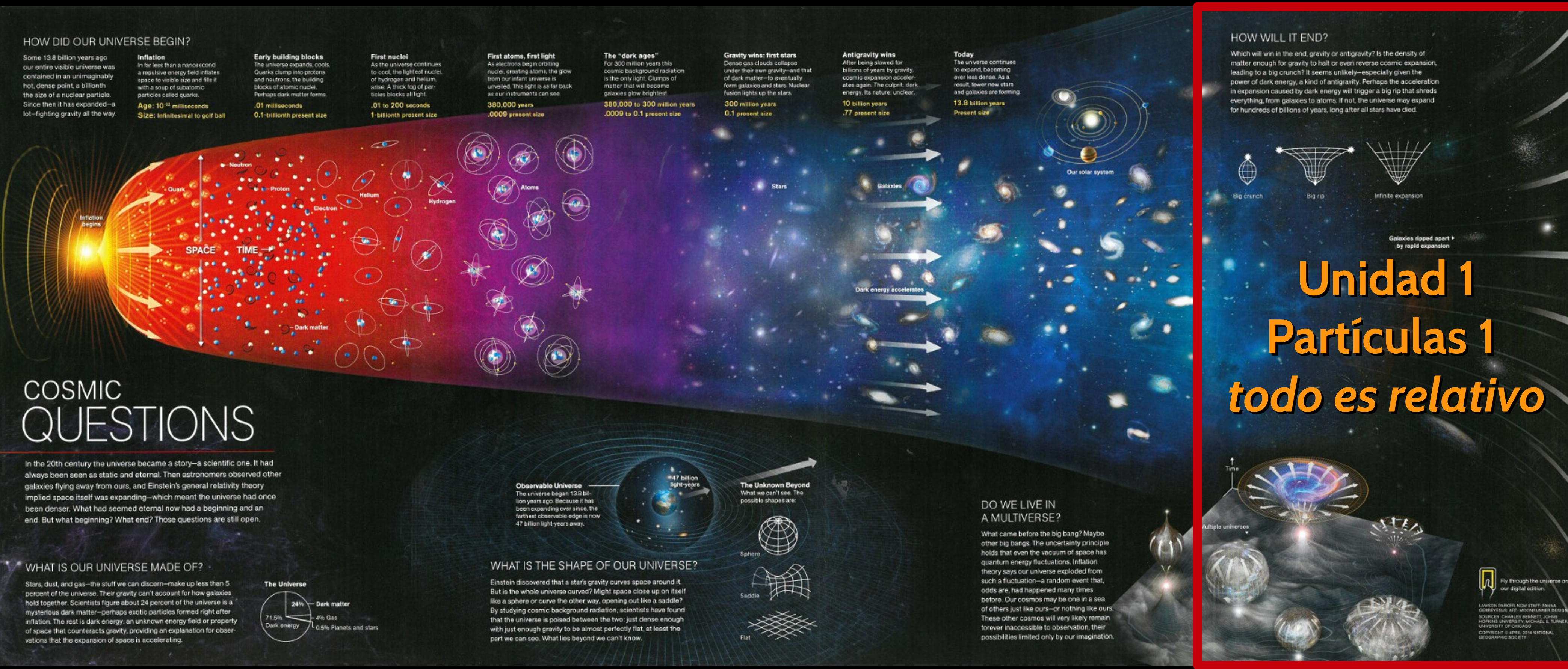
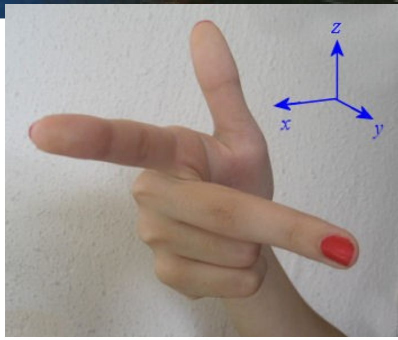
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2019

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C02
- **Fecha** 14 Ago 2019
- **Cont** Cinemática relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** https://gitlab.com/asoreyh/unrn-ipac/

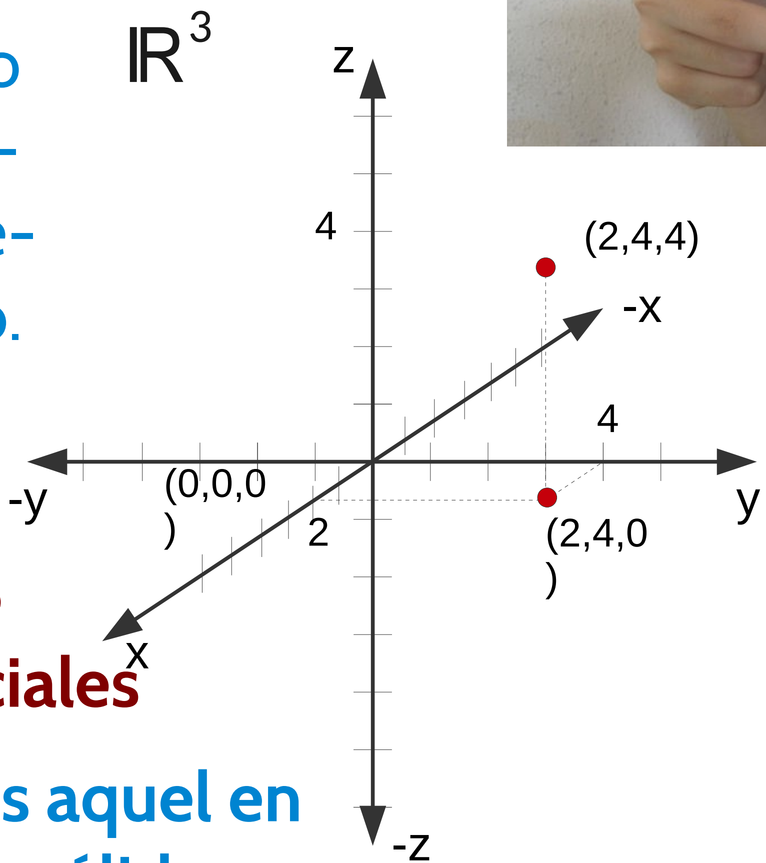
Contenidos: un viaje en el tiempo



Marco de referencia inercial

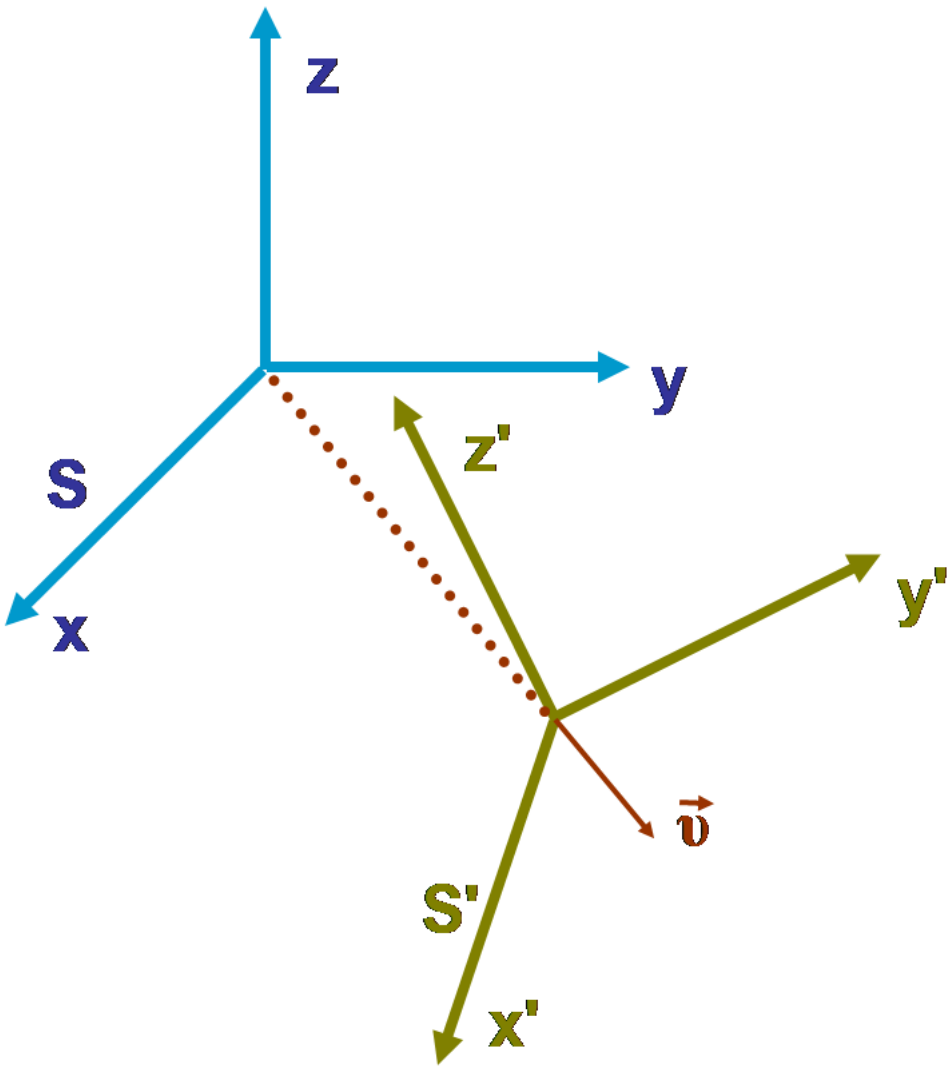


- **Marco de referencia incercial**
  - Describe el espacio homogenea (no hay lugares privilegiados) e isotrópicamente (no hay direcciones privilegiadas) e independiente del tiempo.
  - Las leyes físicas tienen la “misma forma” en todo sistema inercial. Decimos que la física es **covariante frente a cambios de sistemas inerciales**
  - **Un sistema de referencia inercial es aquel en el que la primera ley de Newton es válida.**



3-tupla: (x,y,z)

Relatividad de Galileo



- Sea un sistema S' que se mueve con velocidad constante v respecto a otro sistema S.
- Luego, un objeto en r, a tiempo t en S, tendrá posición r'(t) dada por:

$$\vec{r}\,'(t)=\vec{r}(t)-\vec{v}\,t$$

Pero entonces... Invariancia de Galileo

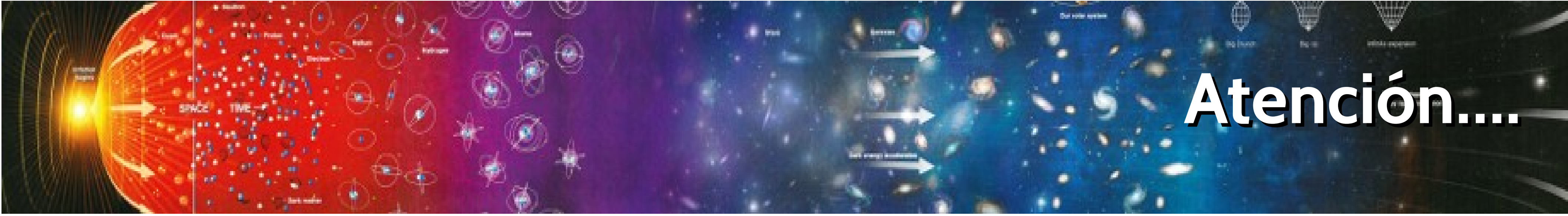
- Este último resultado es crucial, ya que si

$$\vec{a}\,'(t)=\vec{a}(t)$$

- Y suponemos que la masa *m* es un invariante, *m=m'*

$$m\vec{a}\,'(t)=m\vec{a}(t)\Rightarrow\vec{F}\,'(t)=\vec{F}(t)$$

- ¡La segunda ley de Newton no cambia frente a cambios entre sistemas de referencias inerciales! (la primera ya valía)
- **Si las leyes de la mecánica valen en un marco inercial, valen en todos**



Atención....

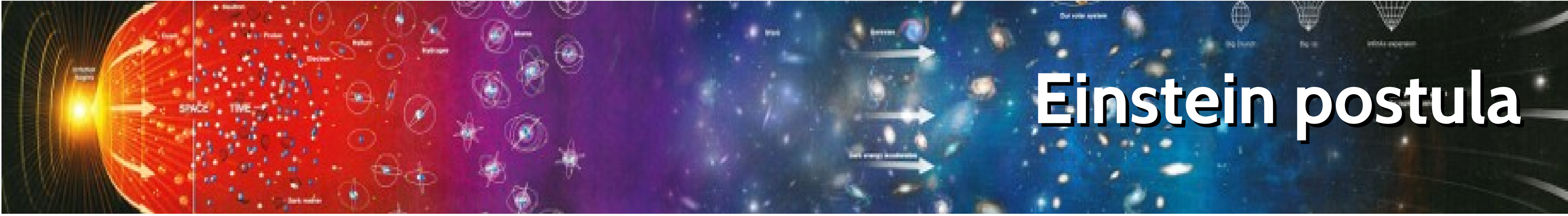
- Para llegar a este importante resultado, dimos por sentado algo que no es trivial:

En todos los casos, derivamos respecto a t, ya que en Galileo,

$t=t' \rightarrow dt = dt'$

- Esto parece obvio, pero ¡no lo es!
- Y además, sólo vale para las leyes de Newton, en el electromagnetismo, esto no vale (→ F-4B)

→ Transformaciones de Lorentz (ya vienen)



Einstein postula

- **El principio de la relatividad:**

  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invarianza de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

… y paso a la historia

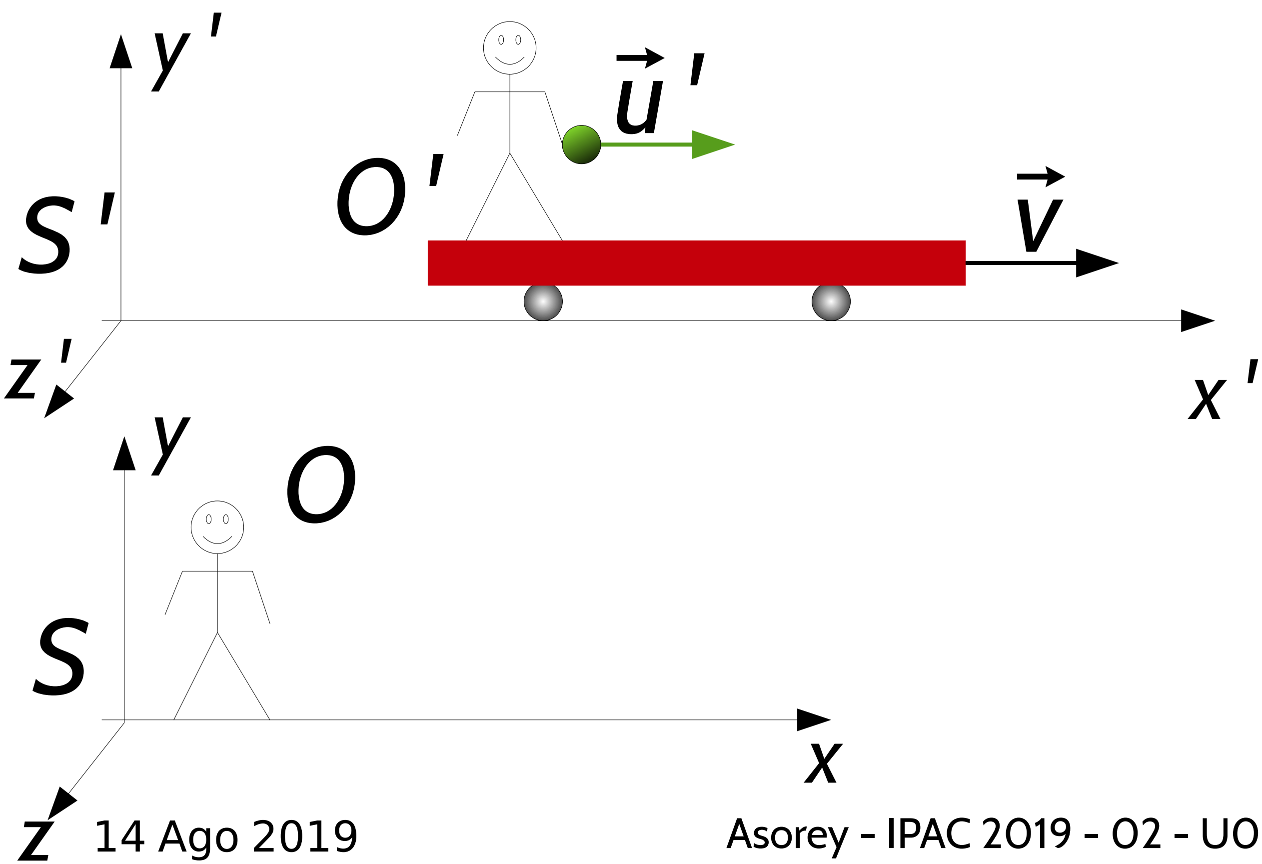
Cambio de paradigma 1

- **El primer postulado modifica la definición de sistema inercial: ya no importa la inercia**

“La debilidad del principio de inercia se encuentra en el hecho de que el mismo implica un argumento circular: una masa se mueve sin aceleración si está suficientemente lejos de otros cuerpos; y sabemos que la masa está suficientemente lejos de otros cuerpos sólo por el hecho de que se mueve sin aceleración” Albert Einstein, El significado de la relatividad

Entonces hagamos una prueba

- El primer postulado es claro, es lo que venimos haciendo con Galileo sobre la invariancia.



Por Galileo:

$$\vec{u}\,'(t)=\vec{u}(t)-\vec{v}$$

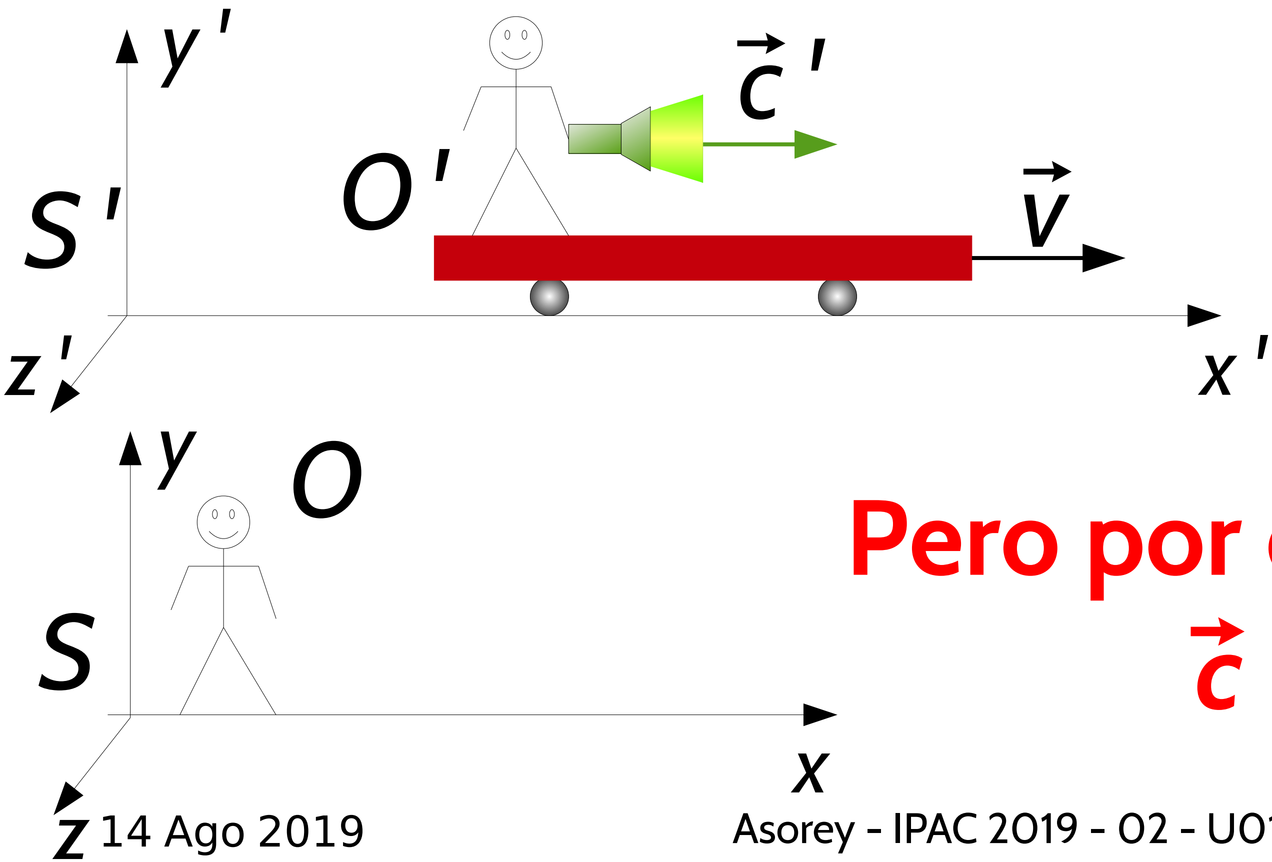
$$\vec{u}(t)=\vec{u}\,'(t)+\vec{v}$$

Claramente

$$\vec{u}\,'(t)\neq\vec{u}(t)$$

Cambio pelota por linterna verde...

- El primer postulado es claro, es lo que venimos haciendo con Galileo sobre la invariancia.
- ¿Qué pasa con el segundo? Imaginemos lo siguiente:



~~Por Galileo:~~

$$\cancel{\vec{c}\,'(t) = \vec{c}(t) - \vec{v}}$$

$$\cancel{\vec{c}(t) = \vec{c}\,'(t) + \vec{v}}$$

Pero por el 2do postulado

$$\vec{c}\,' = \vec{c} = \text{cte}$$

Cambio de paradigma 2

- Dado que la velocidad de la luz debe ser igual en ambos sistemas inerciales
- Y dado que uno se mueve respecto al otro, se anticipan problemas con la visión usual (de Galileo) de las cosas:

$$\vec{u}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \vec{u}'=\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} \Rightarrow \vec{u}' \neq \vec{u} \rightarrow \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \neq \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t}$$

- Esto no puede valer para la velocidad de la luz:

$$\vec{c}=\vec{c}'$$

en todos los sistemas inerciales

Cambio de paradigma 2

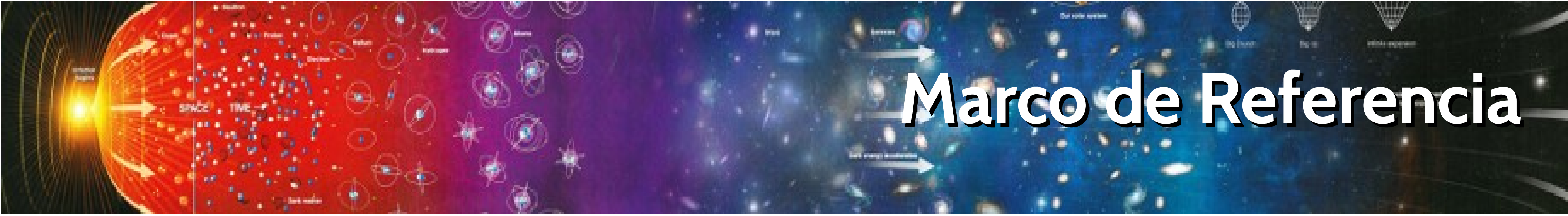
- La luz también se mueve en el espacio, entonces:

$$\vec{c} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \text{ y } \vec{c}\,' = \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero por el segundo postulado

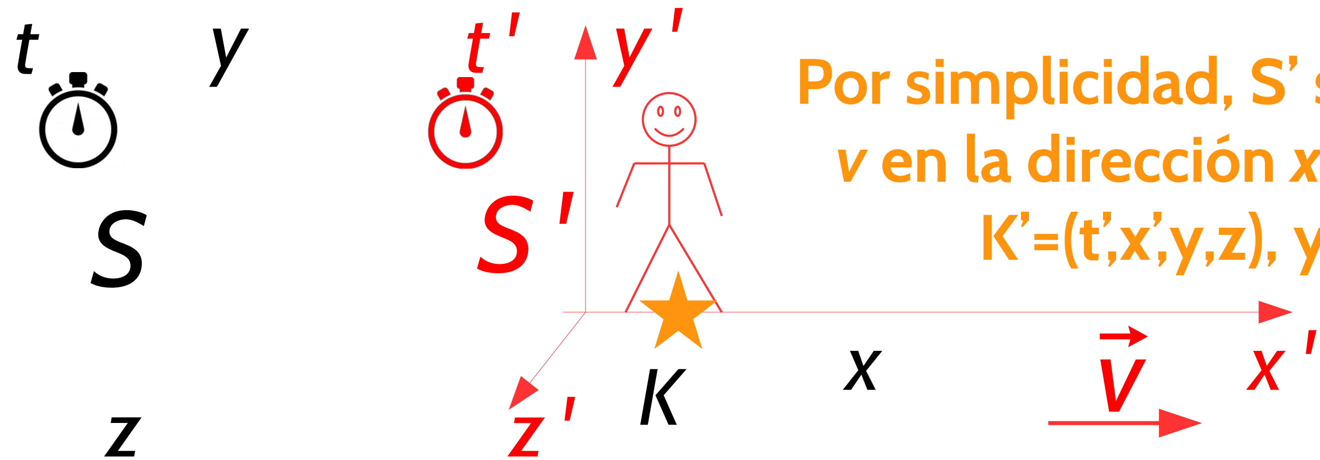
$$\vec{c} = \vec{c}\,' \rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t}$$

- Pero los desplazamientos "no deberían" ser iguales, ya que un sistema se mueve respecto al otro…
- … o los intervalos temporales… (!!!)



Marco de Referencia

- **Marco de Referencia**
  sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj
- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**
- **Evento**
  es un punto en el espaciotiempo *K=(t,x,y,z)*



Por simplicidad, S' se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

Transformaciones de Lorentz

- El mundo es así, y no como queremos que sea
- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia son

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v t\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

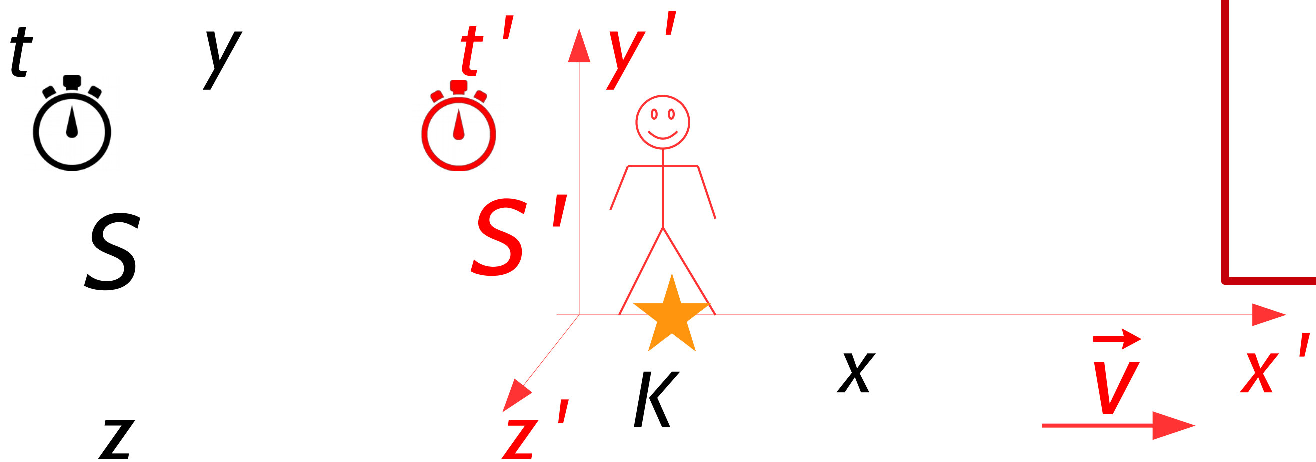
- Simetría entre tiempo y espacio → ***espaciotiempo***

Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, **y que verifican ambos postulados**, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

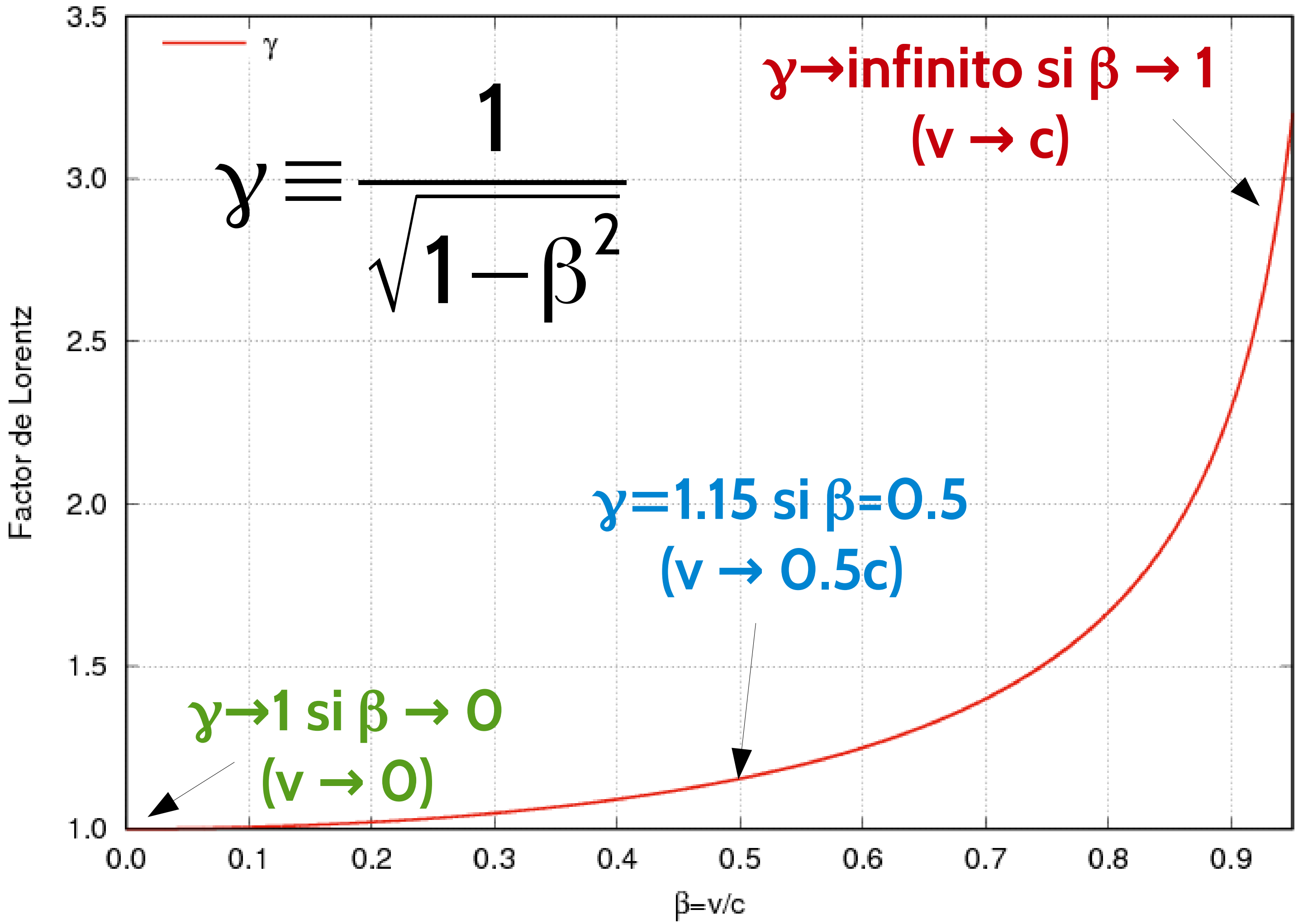
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



Aproximación Newtoniana, v → 0

- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \rightarrow 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t'=\gamma\left(t-\frac{1}{c^2}v\,x\right)\rightarrow t'\simeq t$$

$$x'=\gamma\left(x-\quad v\,t\right)\rightarrow x'\simeq x-vt$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

Si v → 0, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!

Regla de suma de velocidades

- Vimos que, según nuestro amigo Galileo,

$$\vec{u}\,'(t)=\vec{u}(t)-\vec{v}$$

  Y aquí como t=t' no tuvimos reparos en hacer la derivada

- **En el caso relativista debemos tener cuidado.**
- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
  - El observador en *S*, mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje *x* con velocidad *u=dx/dt*
  - El observador en *S'*, verá que el objeto se mueve con velocidad *u'=dx'/dt'*

Velocidades

- Recordando las expresiones para Δx y Δt y $\Delta x'$ y $\Delta t'$ ⇒

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt) \quad y \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(dx - v\,dt)}{\cancel{\gamma}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}$$

y sacando dt como factor común

$$u' = \frac{\cancel{dt}\,(dx/dt - v)}{\cancel{dt}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \qquad \text{pero } \frac{dx}{dt} = u$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

- De igual forma con los inversos

$$u = \frac{\cancel{\gamma}(dx' + v\,dt')}{\cancel{\gamma}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)}{dt'\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

La velocidad de la luz es constante

• Casos límites.

• Sea $u \to 0$ (objeto lento) $\Rightarrow$.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \cancel{\frac{uv}{c^2}}^{\,0}} \Rightarrow \boxed{u' = u - v}$$

Galileo si $u \to 0$ ($u \ll c$)

Si u << c → u' = u - v
¡Recupero Galileo! :-)

• Sea $u = c$ (luz) $\Rightarrow$.

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c\,\cancel{(1 - v/c)}}{\cancel{(1 - v/c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = c}$$

segundo principio!

Si u = c → u'=c
!Segundo postulado! :-)

Dos eventos K_1 y K_2 en el espaciotiempo

- Vistos desde los marcos S y S', estos estarán en:

$$K_1 \quad S:(t_{1,} x_{1,} y_{1,} z_1); \quad S':(t'_{1,} x'_{1,} y'_{1,} z'_1)$$
$$K_2 \quad S:(t_{2,} x_{2,} y_{2,} z_2); \quad S':(t'_{2,} x'_{2,} y'_{2,} z'_2)$$

- Claramente, los intervalos espaciales y temporales son:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{y} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1$$

- Y como todo es lineal:

¡Importante! Esta es la forma en como percibimos distancias y periodos de tiempo!

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t')$$

Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v \Delta t\right) \qquad \Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v \Delta t'\right)$$

Eventos simultáneos en un marco

$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0$ y eventualmente $\Delta x' = 0$

Eventos co-locales en un marco

$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0$ y eventualmente $\Delta t' = 0$

Dilatación temporal

- **El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**
- Imaginen en S un reloj ($\rightarrow \Delta t = s$) en reposo $\rightarrow \Delta x = 0$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x \right) \rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \Delta t' = \gamma s$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta t' > \Delta t$

- Por ejemplo, v=259807 km/s

$$\rightarrow \beta = v/c = 0.866 \rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \Delta t' = 2 s$$

El intervalo medido en el marco S (reloj en reposo) dura 1 segundo.
El mismo intervalo visto en el marco en movimiento S' dura 2 segundos

Contracción espacial

- **La distancia entre dos eventos (p.ej. la longitud de un objeto) no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**

- Imaginen una regla ($\rightarrow \Delta x = l$) en el sistema S. En el sistema S' se mide la distancia entre los extremos de la regla de manera simultánea ($\rightarrow \Delta t' = 0$)

$$\Delta x = \gamma \left(\Delta x' + v \Delta t' \right) \rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' \rightarrow \Delta x' = \Delta \frac{x}{\gamma} \rightarrow \Delta x' = \frac{l}{\gamma}$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta x' < \Delta x$

- Por ejemplo, $v = 259807$ km/s $\rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta x' = l/2$

La longitud medida en el marco S' (reloj en movimiento) es menor que la longitud medida en el marco con el reloj en reposo

Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$

El muón

- **Muón**: decaen en electrones en un tiempo promedio de $\tau = 2.2\,\mu s$ ($2.2\times10^{-6}\,s$).

$$\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$$

- velocidad típica $v = 0.99c \Rightarrow \beta = 0.99$

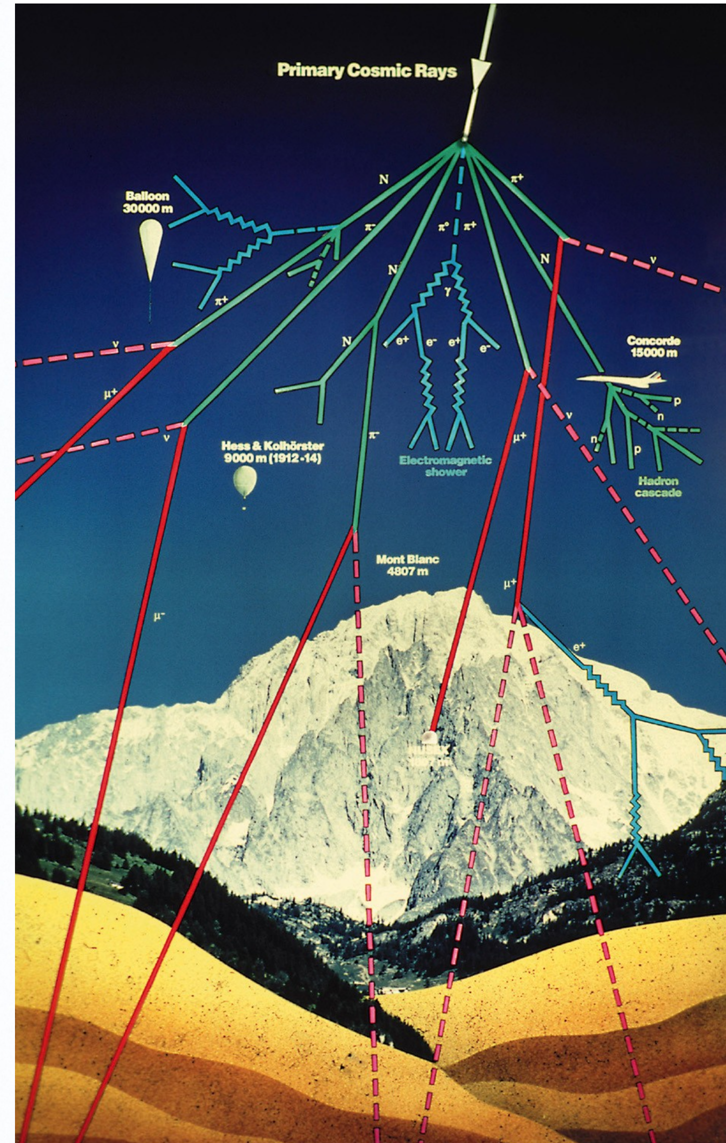
$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \boxed{\gamma \simeq 7}$$

- Algún μ decae en $2\mu s$ (p. ej) $\Rightarrow$ esto es en el marco de referencia del μ (t'). $\Rightarrow x' = t' c\beta = \boxed{594\,m = x'}$
- Esto es med. from S'. ¿A cuánto corresponde esto en S? ya que $t'=0 \Rightarrow t=0$ (por construcción) tenemos:

$$x' = x/\gamma \Rightarrow x = x'\cdot\gamma \Rightarrow x = 7\cdot 594\,m \Rightarrow \boxed{x = 4158\,m}$$

- ¿y el tiempo t? Las cosas serán consistentes.
- Antes de decaer el muón recorre más de 4 km en nuestro marco de referencia.

Muones producidos en la atmósfera se observan en el piso



Apéndice: Transformación de Lorentz

Apéndice: Transformaciones de Lorentz
Derivación "*a la Einstein*"

- Supongamos que el evento fue encender una linterna en *(0,0,0,0)* apuntando en la dirección +x. Luego de un tiempo *t*, la luz se habrá desplazado una distancia:

$$x = c\,t \Rightarrow x - ct = 0$$

- En el sistema S', tendremos (recordar, *c'=c*)

$$x' - ct' = 0$$

- Dado que están igualados a cero, los eventos ocurren en el mismo punto del espaciotiempo (no importa quien los vea), entonces:

$$x' - ct' = \lambda\left(x - ct\right)$$

Derivación "*a la Einstein*", 2

- Para un fotón viajando hacia +x:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

- Para un fotón viajando hacia -x:

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

Derivación

$$\begin{cases} x' - ct' = \lambda(x - ct) & (1) \\ x' + ct' = \mu(x + ct) & (2) \end{cases}$$

Sumando (1)+(2):

$$2x' = \lambda x - \lambda ct + \mu x + \mu ct$$

$$x' = \underbrace{\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)}_{a} x - \underbrace{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)}_{b} ct$$

$$\boxed{x' = ax - bct} \qquad (3)$$

Restando (1)−(2):

$$-2ct' = \lambda x - \lambda ct - \mu x - \mu ct$$

$$ct' = -\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)x + \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)ct$$

$$\boxed{ct' = act - bx} \qquad (4)$$

Derivación “*a la Einstein*”, 3

- Visto desde S', el origen está en $x'=0 \Rightarrow$.

$$0 = ax - bct$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a} t$$

- y por lo tanto, la velocidad relativa entre S y S' es:

$$x = v t \Rightarrow \boxed{v = \frac{bc}{a}} \qquad (5)$$

y a tiempo $t=0 \Rightarrow$

$$\boxed{x' = a x} \qquad (6)$$

Derivación "*a la Einstein*", 4, Importante

- Definimos el intervalo de distancia como

$$\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1$$

Ahora, por el postulado 1, la longitud de una regla en reposo en S' medida por O, debe ser igual a la longitud observada por O' de una regla que está en reposo en S.

$$\Rightarrow \Delta x' = \Delta x$$

- Entonces, si dos puntos en x' están separados por $\Delta x'=1$, vistos desde S' a *t=0*, será

$$x' = ax \Rightarrow \Delta x' = a \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{a}} \quad (7)$$

- Considero ahora $t'=0$ (tiempo en S'), Despejo t desde la ecuación (4):

$$0 = act - bx \Rightarrow tac = bx$$

$$\Rightarrow t = \frac{b}{ac}\, x$$

- Reemplazando en (3)

$$x' = ax - b\cancel{c}\left(\frac{b}{a\cancel{c}}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = ax - \frac{b^2}{a}x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2x - b^2x}{a}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2 - b^2}{a}x \qquad \text{Multiplico } a/a$$

$$\Rightarrow x' = a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x \qquad \text{y por (5)}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \Rightarrow \boxed{x' = a(1-\beta^2)x} \quad (8)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$x' = a(1-\beta^2)x \quad (8)$$

Derivación "*a la Einstein*", 6

- Luego, la relación de distancias será

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = a\left(1-\beta^2\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right)\Delta x \text{, y si } \Delta x = 1$$

$$\rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right) \quad (9)$$

- Pero recordando $\Delta x' = \Delta x$, entonces (7)=(9):

$$\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \frac{1}{a} = a\left(1-\beta^2\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

Derivación "*a la Einstein*", 7, Importante

- Y entonces

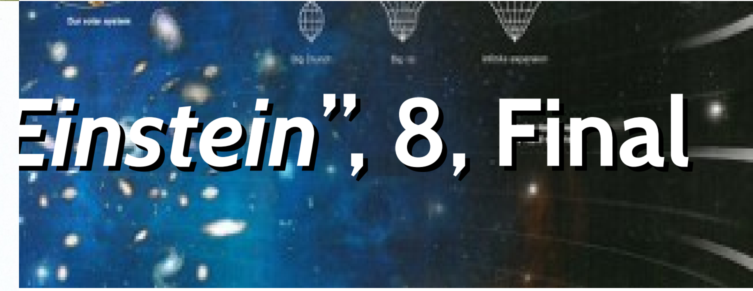
$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Definiendo:

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad (10)$$

- Resulta (recordando además (5) y la def de beta:

$$a = \gamma, \quad \text{y} \quad b = \beta\gamma \quad (11)$$



• Entonces, reemplazando los (11) en (3) y (4):

$$x' = ax - bct \rightarrow x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$\Rightarrow x' = \gamma\left(x - vt\right)$$

y $ct' = \cancel{\gamma} act - bx \Rightarrow ct' = \gamma ct - \beta\gamma x$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma \cancel{c} t}{\cancel{c}} - \frac{\beta\gamma}{c}x$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta c}{c^2}x\right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

y Finalmente:

$\cancel{x' =}$

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right) \\ x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

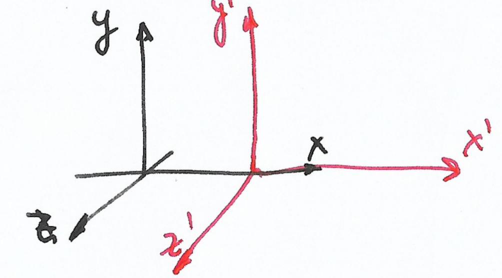
Transformación de Lorentz

Transformaciones de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right) \\ x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Otra forma para TL

Transformación de Lorentz. Otra forma.



- A $t=0$ los sistemas son co-locales
- A $t=0$ se enciende un foco puntual en el origen $S_0 = S_0'$.
- Como $c = c'$ ⇒ En ambos sistemas se debe formar la propagación de la luz

- El frente de onda será, en S: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$

  y en S': $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

Notar que así también se pueden construir los intervalos invariantes

- Como S' se mueve en la dirección $+x$ ⇒ $y=y'$ y $z=z'$ y sólo esperamos cambios en x y x': ⇒ $x'=\gamma(x-vt)$; $x=\gamma'(x'+vt')$
- γ es algún factor de cambio ⇒ Por el 1º postulado $\gamma=\gamma'$
- Por el segundo postulado, $c=c'$ ⇒ en la dirección $+x$: $ct=x$ y $ct'=x'$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(x-vt) \quad \text{y} \quad ct=\gamma(x'+vt')$$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(ct-vt) \quad \text{y} \quad ct=\gamma(ct'+vt')$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma}{c}(c-v)t \Rightarrow t'=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)t \Rightarrow t'=\gamma t(1-\beta)$$

$$\text{y} \quad t=\frac{\gamma}{\cancel{c}}\cancel{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)t' \Rightarrow t=\gamma(1+\beta)t'$$

$$\Rightarrow t=\gamma(1+\beta)\gamma(1-\beta)t \Rightarrow 1=\gamma^2(1+\beta)(1-\beta) \Rightarrow \gamma^2=\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ y luego obtenemos las T.L.