Universidad Nacional de Río Negro
Int Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2021

- **Unidad** 01 – El modelo estándar
- **Clase** U01 C01 - 01/16
- **Fecha** 04 Ago 2021
- **Cont** Dinámica relativista
- **Cátedra** Asorey

Presentación

Colegas contando algunas experiencias

- Hernán Asorey, <hasorey@unrn.edu.ar>, Físico
  - Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro:

    Jefe del Departamento Física Médica - CAB
    líneas: Aplicaciones de Detectores de Partículas: Meteorología Espacial, Muongafía de Volcanes, Física Médica
  - UNRN
    - Docente del Profesorado Superior en Física desde 2009.
    - Profesor Asociado:
      - Física IIIB (Termodinámica)
      - Física IVB (Astrofísica, Cosmología y Partículas)
      - Antes: Física 1A, Física 1B, Física 2B, Física Moderna A
  - UBA, Instituto Balseiro, UIS (Colombia), UNSAM

Objetivos y metodología

- **Objetivos**
  - **Adquirir una perspectiva del estado actual de la Física de Partículas, la Astrofísica y la Cosmología, a un nivel introductorio y que produzca las herramientas para su implementación en el aula de escuelas medias.**
- **Metodología (orientada al trabajo grupal)**
  - Clases interactivas
  - Trabajos en clase y en casa
  - Son requeridos, fundamentales y valorados:
    - sus aportes en clase; y
    - la profundización curricular individual o grupal fuera del horario de clase

Fundamentación y Propósito

- **Fundamentación**

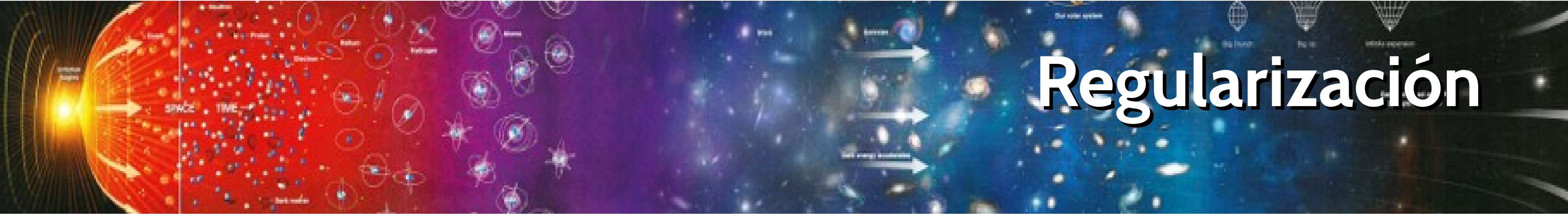
  Representa un intento por exponer aspectos de la física que normalmente no se presentan en cursos de cuarto año de profesorados en física, con el objeto de brindar a los futuros docentes conocimientos y herramientas que les permitan abordar en la escuela media, temas actuales. La física de este curso incluye tópicos de la física contemporánea con contenidos que desde que se tiene conocimiento fascinan e interesan al hombre como el del origen del universo, el funcionamiento y el destino del Universo. Se introducen contenidos de física moderna como el modelo estándar de las partículas fundamentales, la radiactividad, la relatividad especial y general y el modelo estándar cosmológico

- **Propósitos de la asignatura**

  Construir juntos con los estudiantes los modelos que rigen al universo, y su importancia, y los efectos indirectos que pueden observarse en el mundo cotidiano. Que los estudiantes comprendan como la física abarca desde los sucesos que rigen las interacciones fundamentales hasta la estructura del Universo a las escalas más grandes, produciendo herramientas para facilitar la implementación en el aula de escuelas medias.

Puntos de contacto

- 16 encuentros semanales, desde el 04/Ago hasta el 17/Nov
  - Google Meet: Miércoles 16 a 20, disponibles en YouTube
  - Trabajo en casa: 3 horas semanales (mínimo)
  - Campus Bimodal UNRN
- Bibliografía
  - Depende de la unidad, ver en aula bimodal
  - Apuntes de clase
  - Wikipedia



Regularización

- **No se toman parciales → evaluación continua**
  - ℗ Participación activa en los encuentros semanales (30%)
  - ℗ Auto-evaluación conceptual semanal (se completa antes de la próxima clase) (30%)
  - ℗ Entregas de trabajos mensuales (fecha máxima de entrega de todos los trabajos: 12/Nov/2021) y charla tema a elección (40%)

Nota: ℗ significa que es condición necesaria para la promoción

Aprobación y Promoción

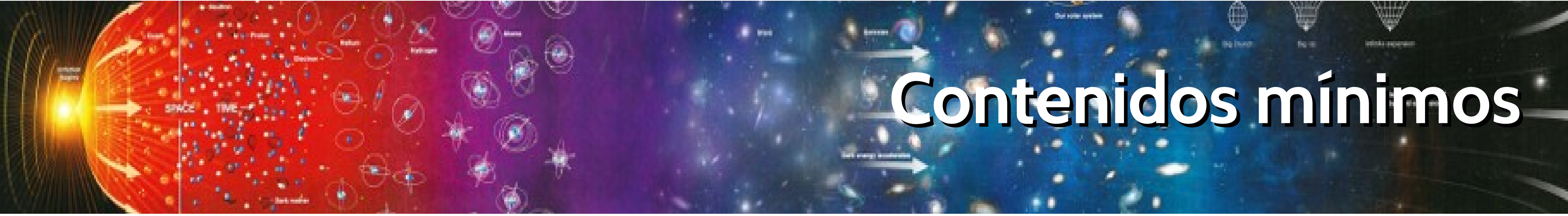
- ## Promoción ℗:
  - Si habiendo cumplido las condiciones de regularización y promoción, la nota de evaluación continua es 8 o más
    → **Promoción de la materia con la nota de la evaluación continua**

ó

- ## Aprobación:
  - Instancia de final en las fechas previstas por la Universidad.
  - La nota final de la materia es:
    0.7 x nota evaluación continua + 0.3 x nota del final

Autoevaluación en línea

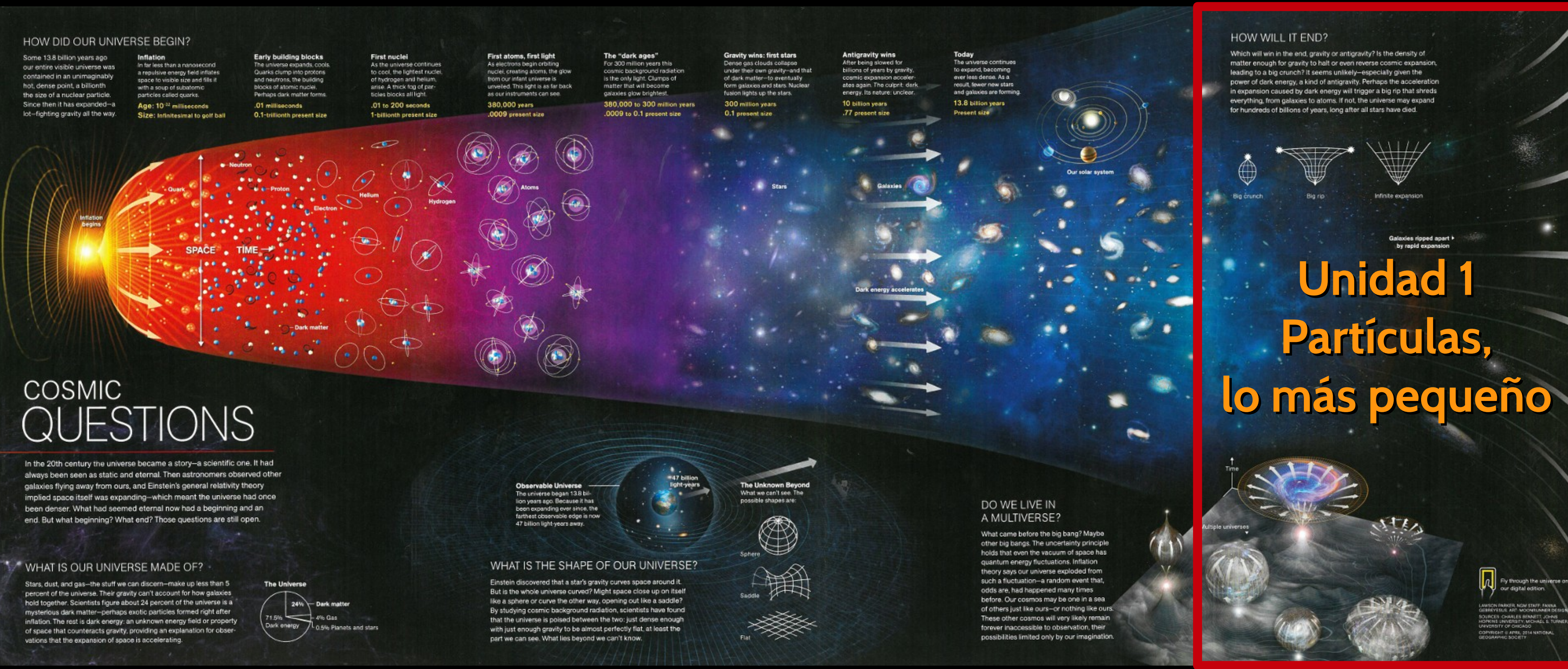
- Luego de cada clase entregaré un formulario con preguntas conceptuales sobre los contenidos vistos
- **Revisión de los conceptos claves de cada clase**
- Es un formulario de **autoevaluación para que cada uno analice su comprensión de temas claves**
- Plazo para completarlo → debe ser cumplimentado antes de la próxima clase
- No tienen nota pero es importante que sean completados, forman parte de la evaluación continua
- Habrá 15 autoevaluaciones a lo largo del curso



Contenidos mínimos

- **Los contenidos mínimos según su plan:**
  Partículas fundamentales y sus interacciones: leptones, hadrones y partículas mensajeras. Antipartículas. El modelo estándar. Aceleradores de partículas. Estrellas y galaxias. Evolución de las estrellas en nacimiento y muerte de las estrellas. Relatividad general: gravedad y la curvatura del espacio. El universo en expansión. El Big-Bang y el fondo cósmico de microondas. El modelo estándar cosmológico. Los primeros tiempos del Universo

Contenidos: un viaje en el tiempo y el espacio



Unidad 1
Partículas,
lo más pequeño

U1:Partículas, lo más pequeño
4 encuentros, del 04/Ago al 25/Ago

- Dinámica Relativista.
- Física de partículas
  - Partículas fundamentales: leptones, hadrones, bosones mensajeros
- El modelo estándar
  - Interacciones fundamentales
  - Simetrías y leyes de conservación
- Trabajo unidad → fecha máxima de entrega 12/Nov
  Para el viernes 13/Ago → proponer tema (campus)

U2: Astrofísica, escalas intermedias
5 encuentros, del 01/Sep al 29/Sep

- Estrellas.
  - Modelos politrópico. La fusión nuclear estelar.
  - Clasificación estelar. Diagrama H-R.
  - Evolución estelar. Nebulosas.
- Planetas
  - El Sistema Solar
  - Exoplanetas
  - Vida en el Universo: Astrobiología.
- Trabajo unidad → fecha máxima de entrega 12/Nov

U3: Astrofísica, escalas grandes
4 encuentros, del 06/Oct al 27/Oct

- Relatividad General.
  - Introducción y conceptos básicos.
  - Solución de Schwarzschild.
  - Objetos compactos: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros.
- Formación de estructuras
  - Galaxias: Modelos y formación. GalaxyZoo.
  - Galaxias de Núcleos activos. Clasificación.
  - Formación de estructuras. Corrimiento al rojo y el universo en expansión.
- Trabajo unidad → fecha máxima de entrega 12/Nov

U4: Cosmología, las escalas más grandes
3 encuentros, del 03/Oct al 17/Nov

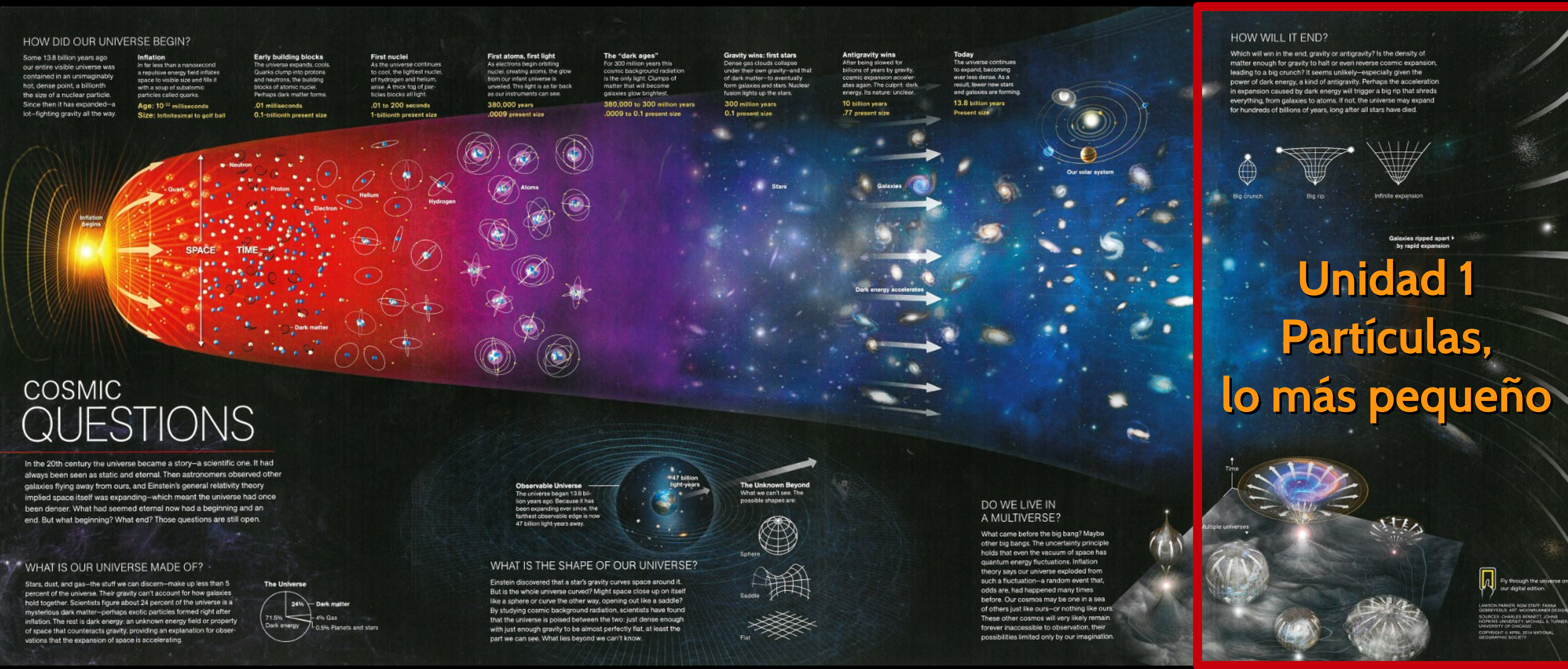
- Modelo cosmológico estándar
  - El fondo de microondas.
  - Modelo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker.
  - El Big Bang. Modelo de Alpher, Bethe & Gamow.
  - Modelo LCDM.
- Historia térmica del universo.
  - Épocas térmicas
  - Primeros segundos del universo
  - Evolución futura del universo.
  - ¿El fin...?
- Trabajo unidad → Charla tema a elección 17/Nov

¿Qué esperan de este curso en relación a...

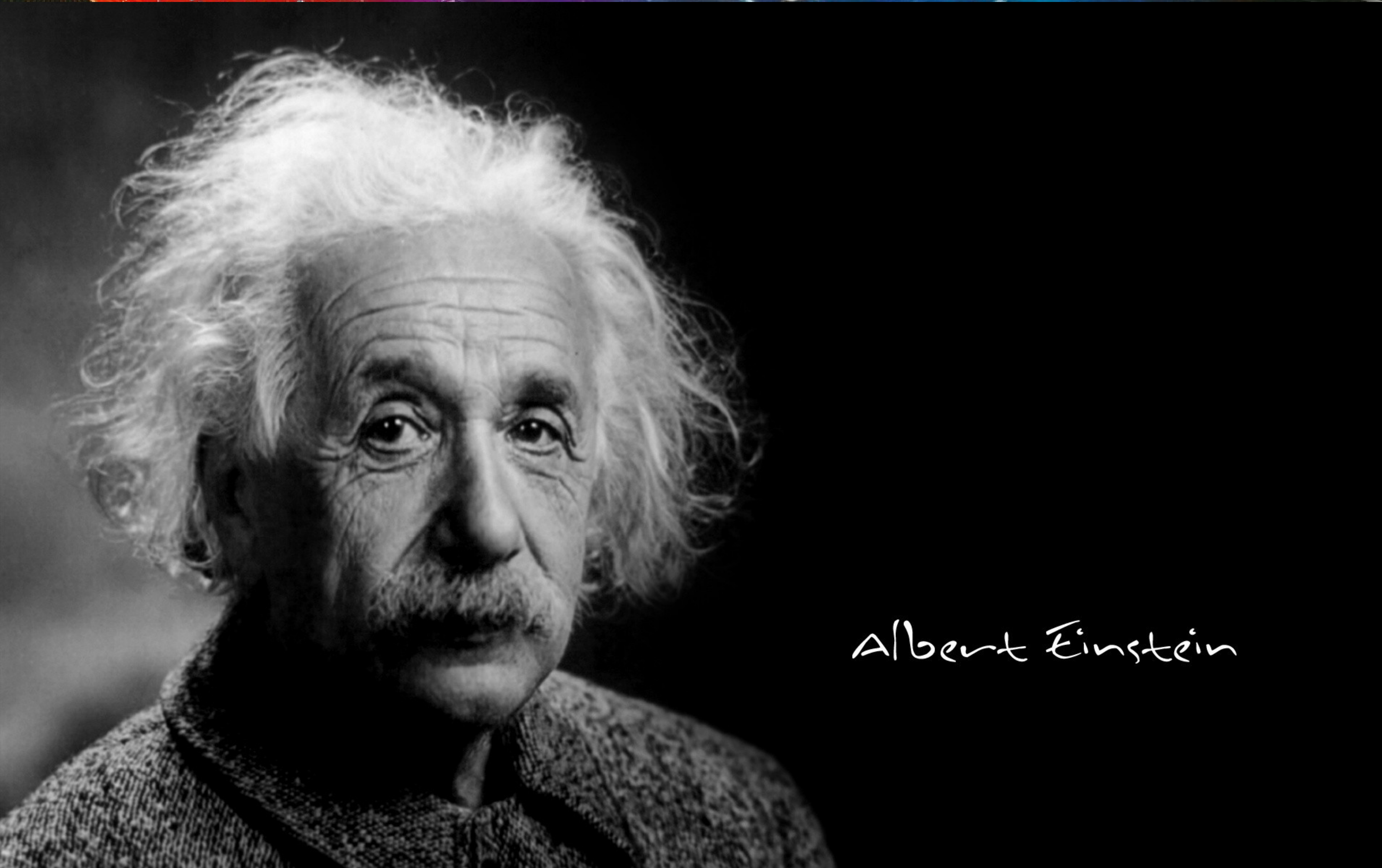
- ... sus intereses partículares?
- ... los conceptos físicos y temas a tratar?
- ... su rol como docentes?

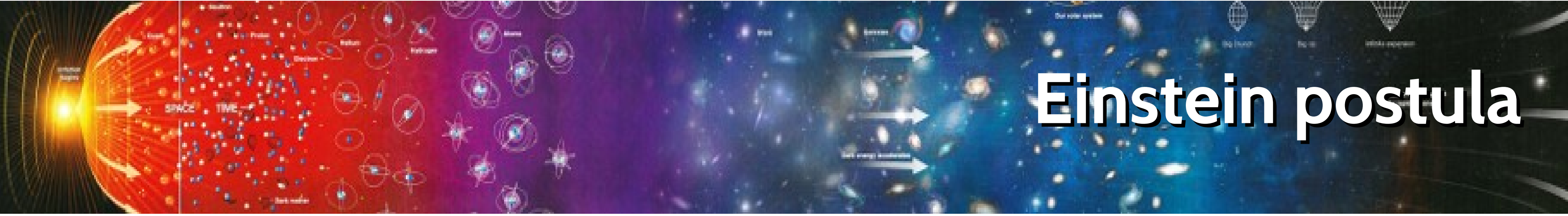
- ¿Hay algún tema o temas que les interesaría ver o profundizar?

Contenidos: un viaje en el tiempo y el espacio



El genial Albert Einstein





Einstein postula

- **El principio de la relatividad:**

  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invarianza de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

La medición del tiempo y del espacio dependen del observador

Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

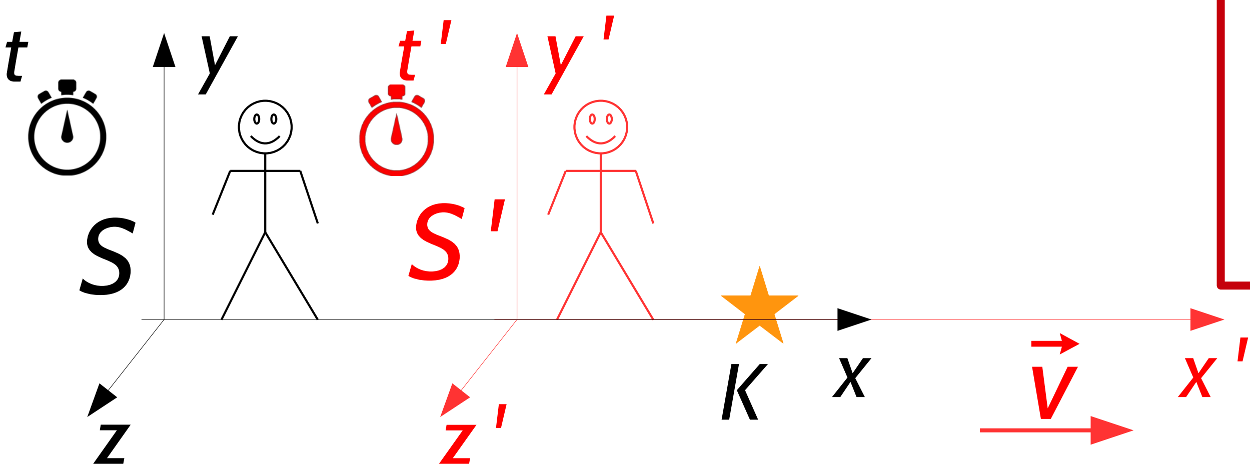
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right)$$

$$y' = y$$

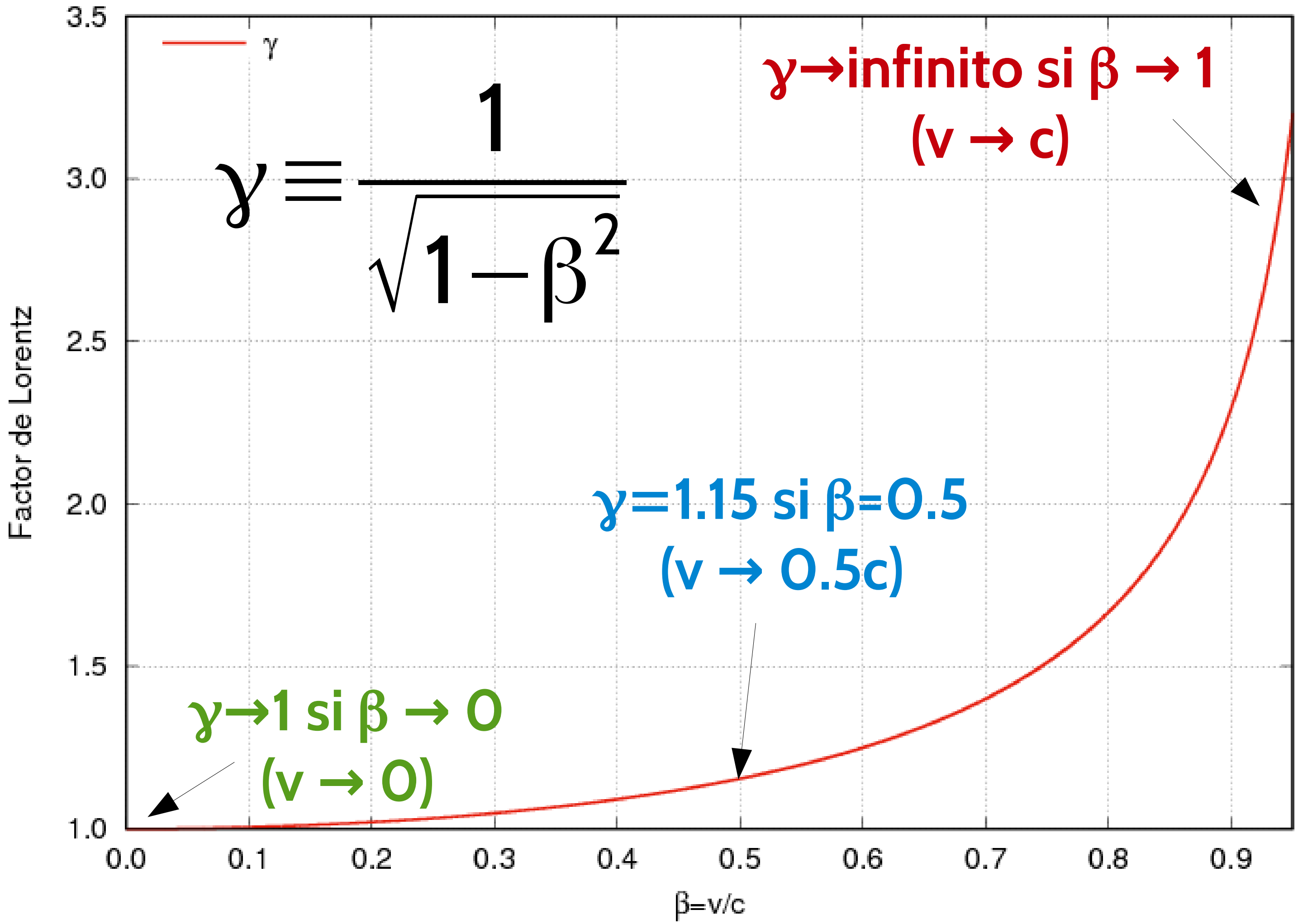
$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$



Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



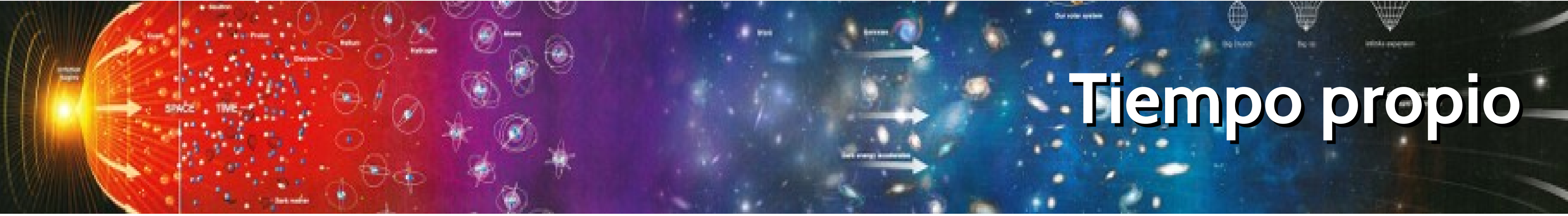
Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$



Tiempo propio

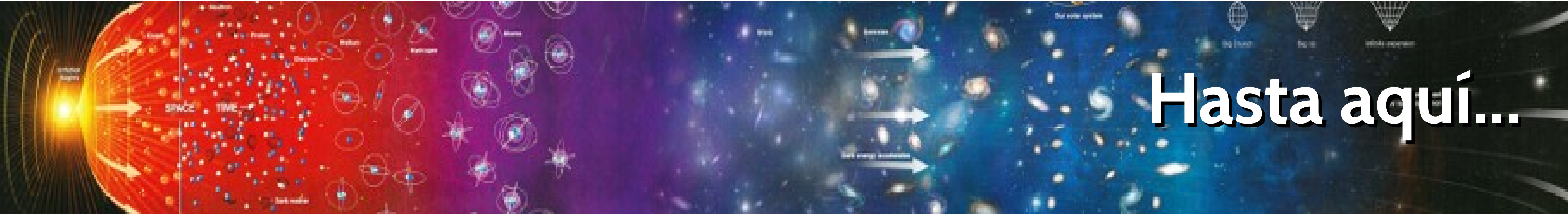
- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto.**
  Llamaremos a este marco "**comóvil**".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

Tiempo propio

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

$$dt = \gamma\, d\tau$$



Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

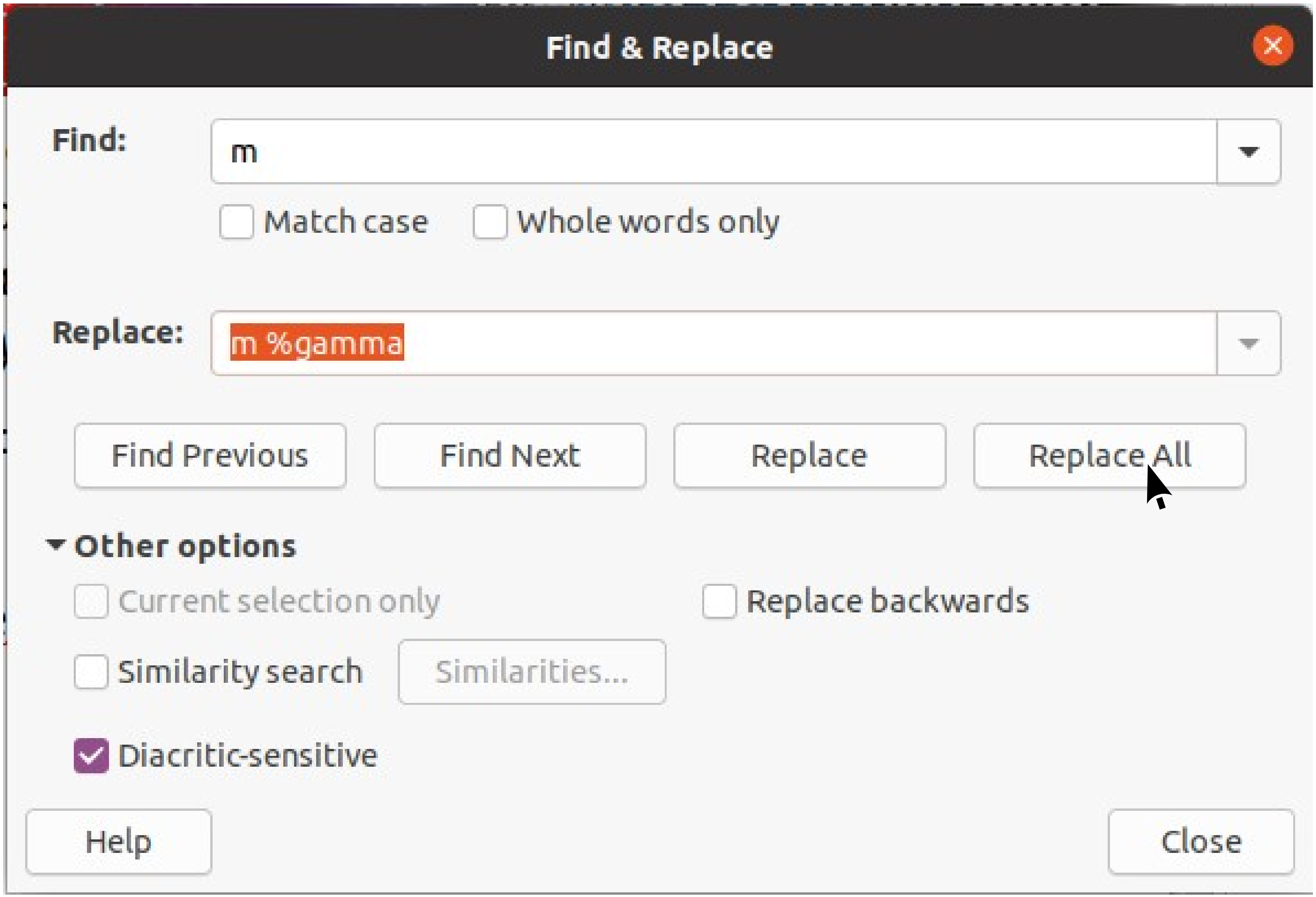
Richard Feynman dijo:

- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

$$\vec{F} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- donde

$$m \rightarrow m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$


Find & Replace
Find:
m
Match case
Whole words only
Replace:
m %gamma
Find Previous
Find Next
Replace
Replace All
Other options
Current selection only
Replace backwards
Similarity search
Similarities...
Diacritic-sensitive
Help
Close

La conservación de *p* es un principio básico

- Alberto lo dijo: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia:

  Clásico: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}\,'=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\,')$

  Correcto: $\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}\,'=\frac{d}{dt'}(m\vec{r}\,')$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

Cant. de movimiento relativista

$$\boxed{\vec{p}=\frac{d}{d\tau}m(\tau)\vec{r}(\tau)}$$

dado que: $\Delta\tau=\gamma\Delta t$

$$\frac{dr}{d\tau}=\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Recordar a Feynmann:

$$\vec{p}=m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}=m(\gamma\vec{v})$$

Una nueva magnitud conservada

- Una nueva magnitud conservada surge naturalmente:

$$\boxed{E = \gamma m c^2}$$

Energía total

- A bajas energías, si v<<c, obtenemos la visión clásica:

$$\boxed{E = \gamma m c^2 \simeq \boxed{m c^2} + \boxed{\frac{1}{2} m v^2}}$$

Energía cinética clásica

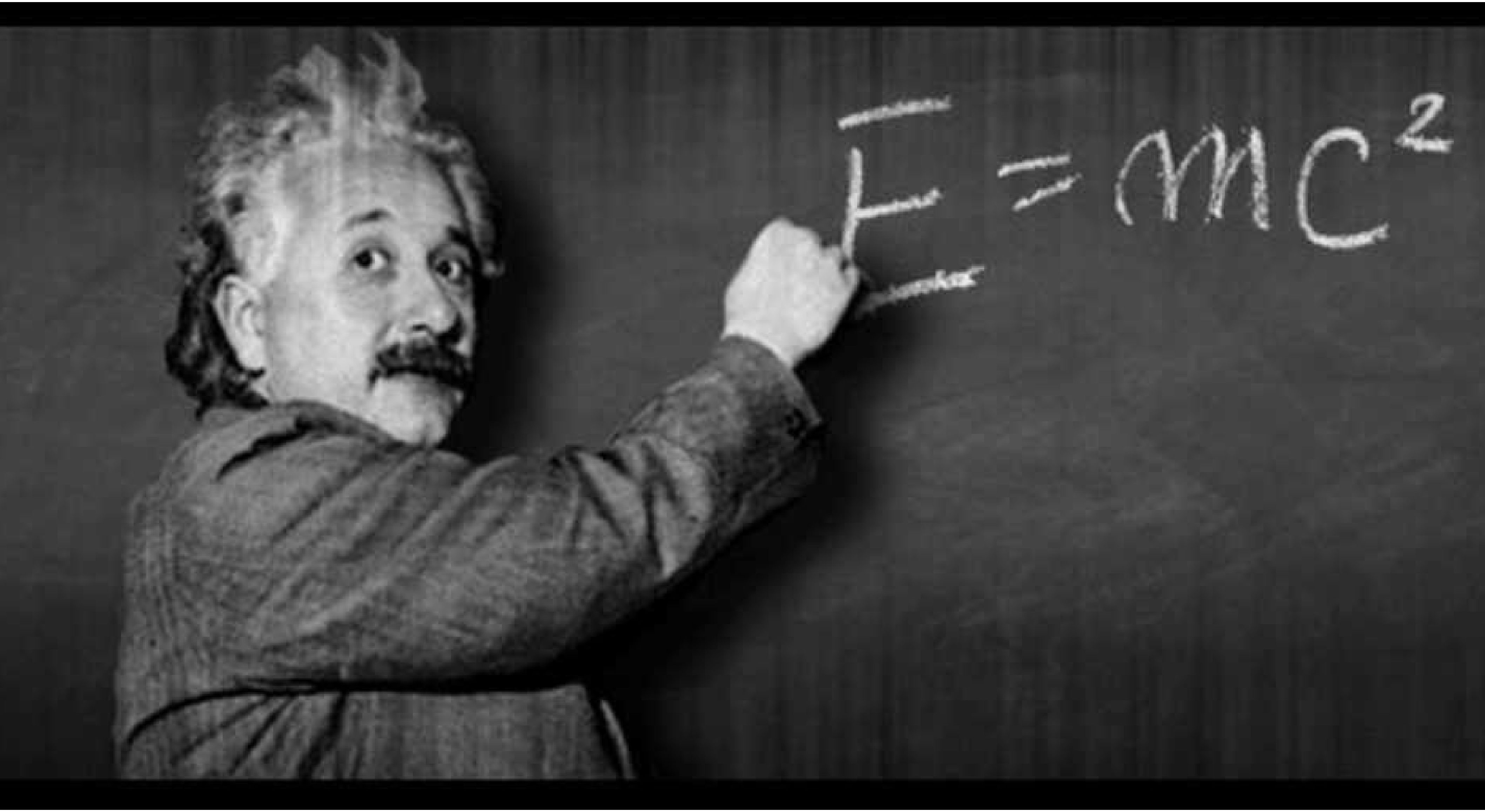
Equiv. masa energía

- En general, y en ausencia de otras interacciones:

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética
(en ausencia de otras interacciones)

Gracias Isaac, seguí participando....



Un nuevo invariante

Cant. de movimiento relativista: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energía total relativista: $E = \gamma m c^2$

Elevamos al cuadrado: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$ (1)

$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$ (2)

Restando (1) − (2):

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 v^2$$

Sacando factor común: $E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = \gamma^2 m^2 c^4 \overbrace{\left(1 - \beta^2\right)}^{1/\gamma^2}$

$$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = \cancel{\gamma^2} m^2 c^4 \cdot \frac{1}{\cancel{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}$$

invariante relativista.
(no depende del sist. de ref).

Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

- Un nuevo invariante relativista:

$$\boxed{E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2}$$

Invariante relativista

¿y si no la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento!

$$m=0\rightarrow E^2-(pc)^2=(mc^2)^2\Rightarrow E^2-(pc)^2=0$$

Cantidad de movimiento de partículas sin masa

$$\boxed{E=pc}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta:

λ=420 nm → E = hc/λ = 0.473 aJ (attojoules, atto=10^{-18})

→ p = 1.58 x 10^{-27} kg m/s

Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

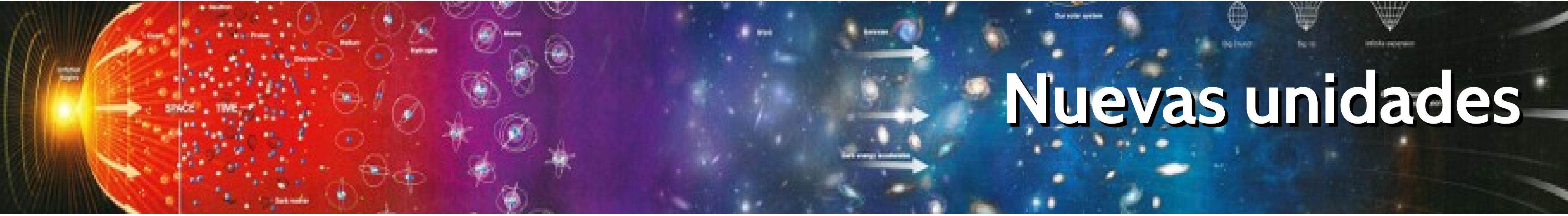
$$E = qV \rightarrow E = \left(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(1\,\mathrm{V}\right) \rightarrow E = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas R X Partículas R.C. Gal

Visible Gamma C. Galáctico R.C.E.G.



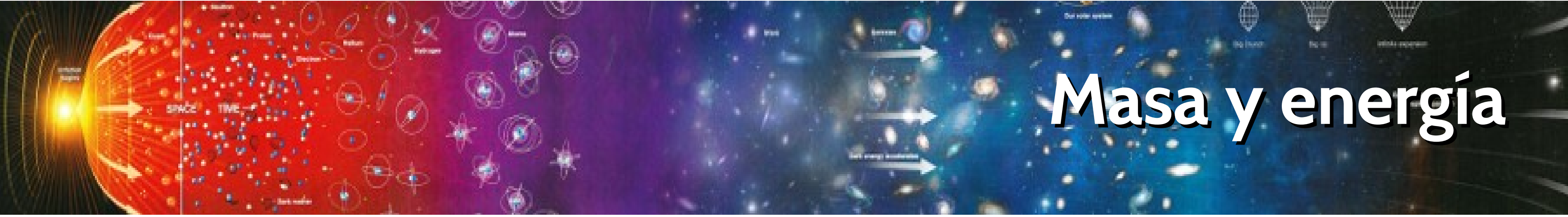
Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c^2

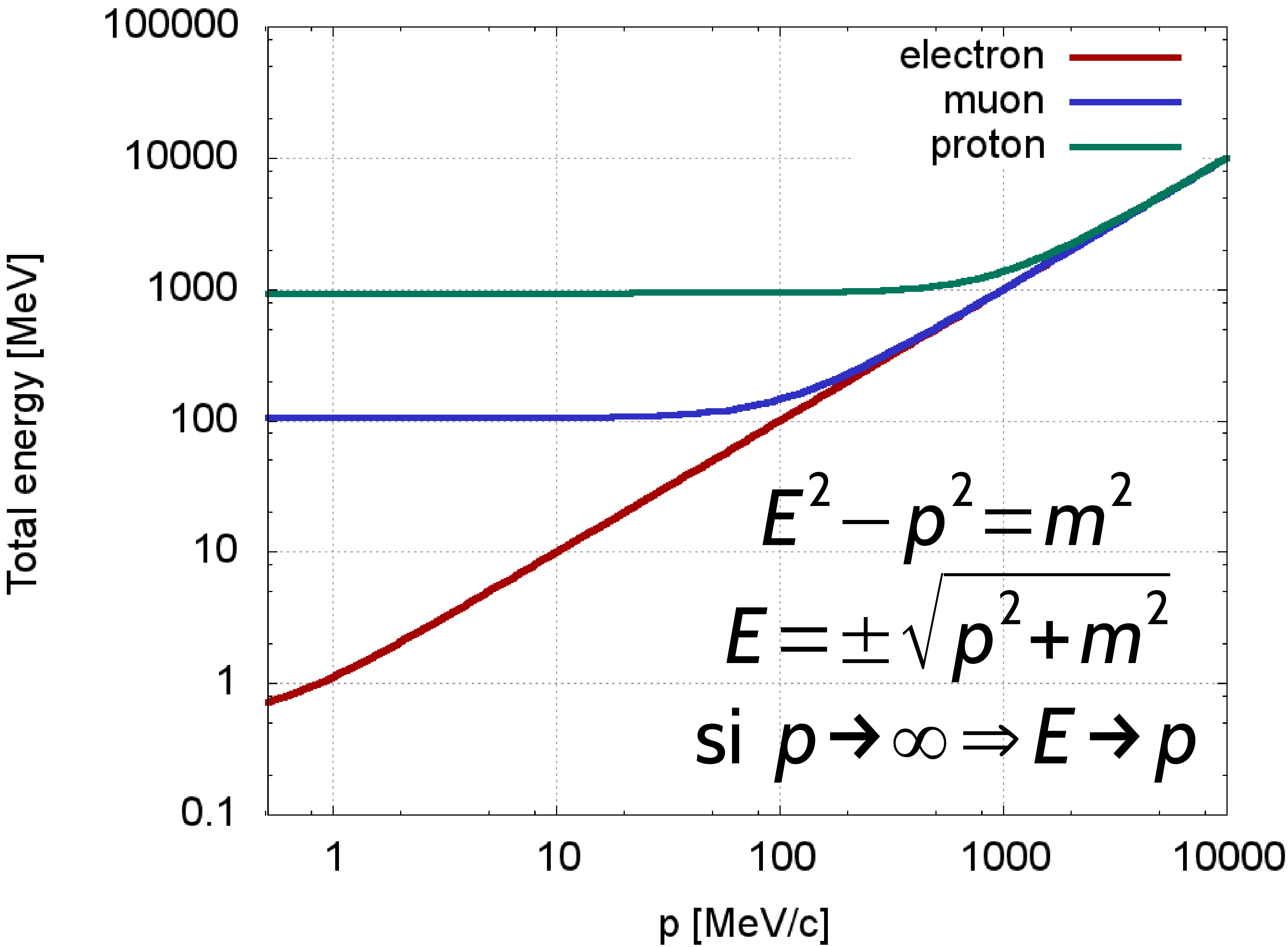
- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h = c = 1$$

- Entonces, todo se mide en eV y → $\boxed{E^2 - p^2 = m^2}$



Masa y energía



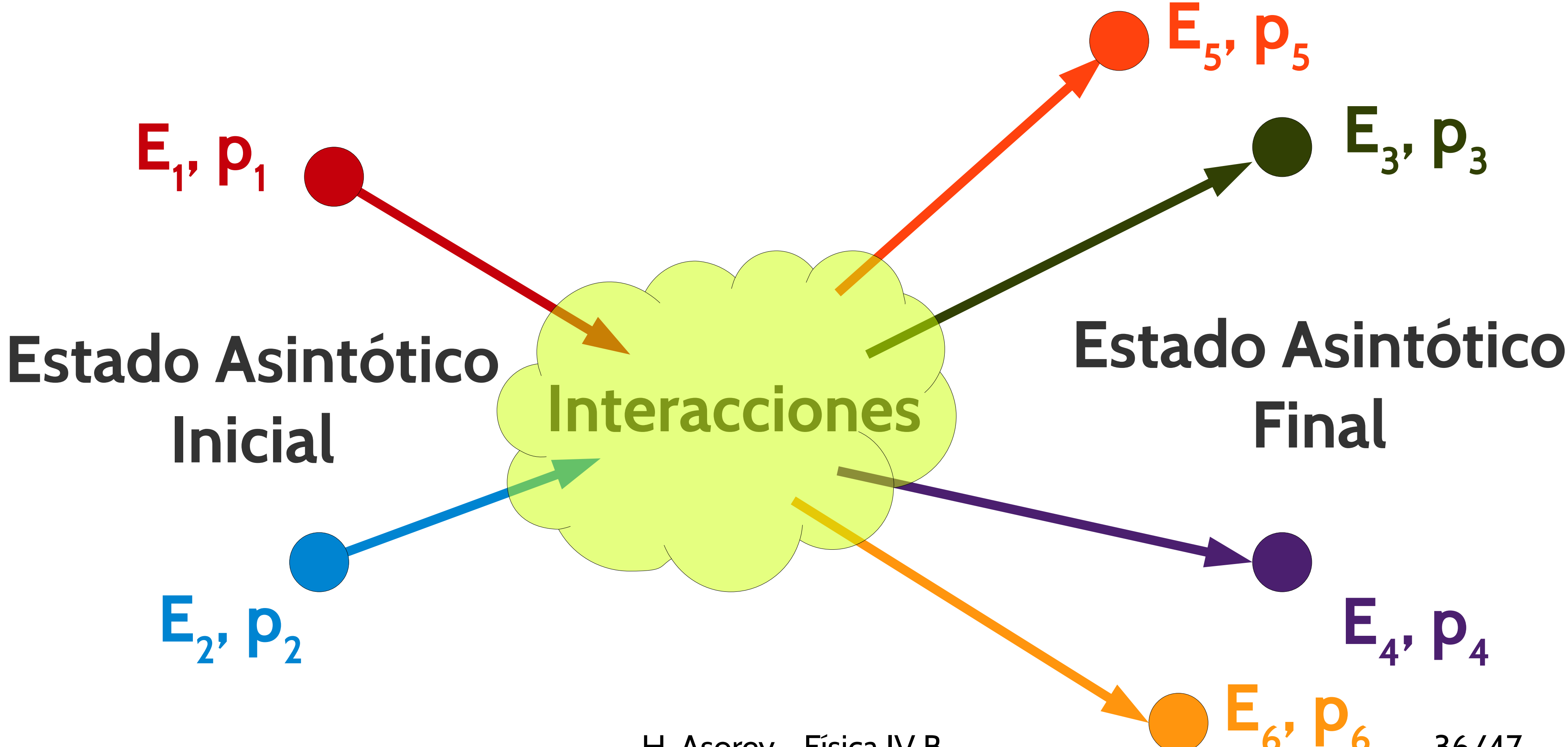
$$E^2 - p^2 = m^2$$

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\text{si } p \to \infty \Rightarrow E \to p$$

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{array}{l} E^{\text{inicial}} = \sum_j^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} = \sum_k^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{array}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \sum_j^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} = \sum_k^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{array}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

Apéndice

Transformaciones de Lorentz

Apéndice: Transformaciones de Lorentz
Derivación "*a la Einstein*"

- Supongamos que el evento fue encender una linterna en *(0,0,0,0)* apuntando en la dirección +x. Luego de un tiempo *t*, la luz se habrá desplazado una distancia:

$$x = ct \Rightarrow x - ct = 0$$

- En el sistema S', tendremos (recordar, $c'=c$)

$$x' - ct' = 0$$

- Dado que están igualados a cero, los eventos ocurren en el mismo punto del espaciotiempo (no importa quien los vea), entonces:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

Derivación “*a la Einstein*”, 2

- Para un fotón viajando hacia +x:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

- Para un fotón viajando hacia -x:

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

Derivación

$$\begin{cases} x' - ct' = \lambda(x - ct) & (1) \\ x' + ct' = \mu(x + ct) & (2) \end{cases}$$

Sumando (1)+(2):

$$2x' = \lambda x - \lambda ct + \mu x + \mu ct$$

$$x' = \overbrace{\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)}^{a} x - \overbrace{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)}^{b} ct$$

$$\boxed{x' = ax - bct} \qquad (3)$$

Restando (1)-(2):

$$-2ct' = \lambda x - \lambda ct - \mu x - \mu ct$$

$$ct' = -\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)x + \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)ct$$

$$\boxed{ct' = act - bx} \qquad (4)$$

H.

Derivación "*a la Einstein*", 3

- Visto desde S', el origen está en $x'=0 \Rightarrow$.

$$0 = ax - bct$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a}\,t$$

- y por lo tanto, la velocidad relativa entre S y S' es:

$$x = v\,t \Rightarrow \boxed{v = \frac{bc}{a}} \qquad (5)$$

y a tiempo $t=0 \Rightarrow$

$$\boxed{x' = a x} \qquad (6)$$

Derivación "*a la Einstein*", 4, Importante

- Definimos el intervalo de distancia como

$$\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1$$

Ahora, por el postulado 1, la longitud de una regla en reposo en S' medida por O, debe ser igual a la longitud observada por O' de una regla que está en reposo en S.

$$\Rightarrow \Delta x' = \Delta x$$

- Entonces, si dos puntos en x' están separados por Δx'=1, vistos desde S' a *t=0*, será

$$x' = ax \Rightarrow \Delta x' = a\,\Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{a}} \quad (7)$$

- Considero ahora $t'=0$ (tiempo en S'),
  Despejo t desde la ecuación (4):

$$0 = act - bx \Rightarrow tac = bx$$

$$\Rightarrow t = \frac{b}{ac}\,x$$

- Reemplazando en (3)

$$x' = ax - b\cancel{c}\left(\frac{b}{a\cancel{c}}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = ax - \frac{b^2}{a}x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2x - b^2x}{a}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2 - b^2}{a}x \qquad \text{Multiplico } a/a$$

$$\Rightarrow x' = a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x \qquad \text{y por (5)}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \Rightarrow \boxed{x' = a(1-\beta^2)x} \quad (8)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$x' = a(1-\beta^2)x \quad (8)$$

Derivación “*a la Einstein*”, 6

- Luego, la relación de distancias será

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = a\left(1-\beta^2\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right)\Delta x \text{, y si } \Delta x = 1$$

$$\rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right) \quad \color{red}{(9)}$$

- Pero recordando $\Delta x' = \Delta x$, entonces (7)=(9):

$$\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \frac{1}{a} = a\left(1-\beta^2\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

Derivación "*a la Einstein*", 7, Importante

- Y entonces

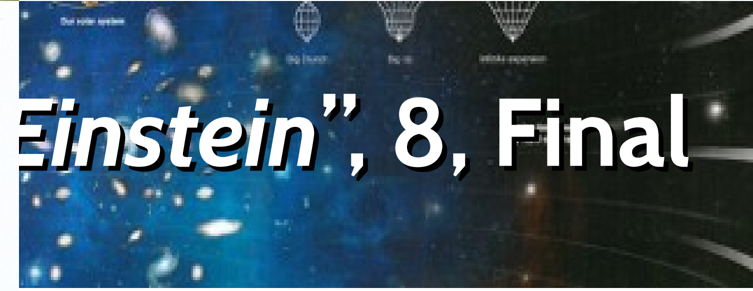
$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Definiendo:

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (10)$$

- Resulta (recordando además (5) y la def de beta:

$$a = \gamma, \quad \text{y} \quad b = \beta\gamma \qquad (11)$$



- Entonces, reemplazando los (11) en (3) y (4):

$$x' = ax - bct \longrightarrow x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

y $ct' = \cancel{\gamma} act - bx \Rightarrow ct' = \gamma ct - \beta\gamma x$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma \cancel{c} t}{\cancel{c}} - \frac{\beta\gamma}{c}x$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta c}{c^2}x\right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

y Finalmente:

$\cancel{x'} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

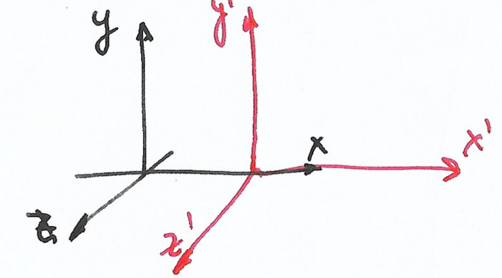
Transformación de Lorentz

Transformaciones de Lorentz

$$\boxed{\begin{gathered} t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}v\,x\right) \\ x' = \gamma(x - v\,t) \\ y' = y \\ z' = z \end{gathered}}$$

Otra forma para TL

Transformación de Lorentz. Otra forma.



- A $t=0$ los sistemas son co-locales
- A $t=0$ se enciende un foco puntual en el origen $S_0 = S_0'$.
- Como $c = c'$ ⇒ En ambos sistemas se debe conservar la propagación de la luz

- El frente de onda será, en S: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$

  y en S': $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

Notar que así también se pueden construir los intervalos invariantes

- Como S' se mueve en la dirección $+x$ ⇒ $y=y'$ y $z=z'$ y sólo esperamos cambios en x y x': ⇒ $x'=\gamma(x-vt)$; $x=\gamma'(x'+vt')$
- γ es algún factor de contraste ⇒ Por el 1º postulado $\gamma=\gamma'$
- Por el segundo postulado, $c=c'$ ⇒ en la dirección $+x$: $ct=x$ y $ct'=x'$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(x-vt) \quad \text{y} \quad ct = \gamma(x'+vt')$$

$$\Rightarrow ct' = \gamma(ct-vt) \quad \text{y} \quad ct = \gamma(ct'+vt')$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma}{c}(c-v)t \Rightarrow t' = \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)t \Rightarrow t' = \gamma t(1-\beta)$$

$$\text{y} \quad t = \frac{\gamma}{\cancel{c}}\cancel{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)t' \Rightarrow t = \gamma(1+\beta)t'$$

$$\Rightarrow t = \gamma(1+\beta)\gamma(1-\beta)t \Rightarrow 1 = \gamma^2(1+\beta)(1-\beta) \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ y luego obtenemos las T.L.