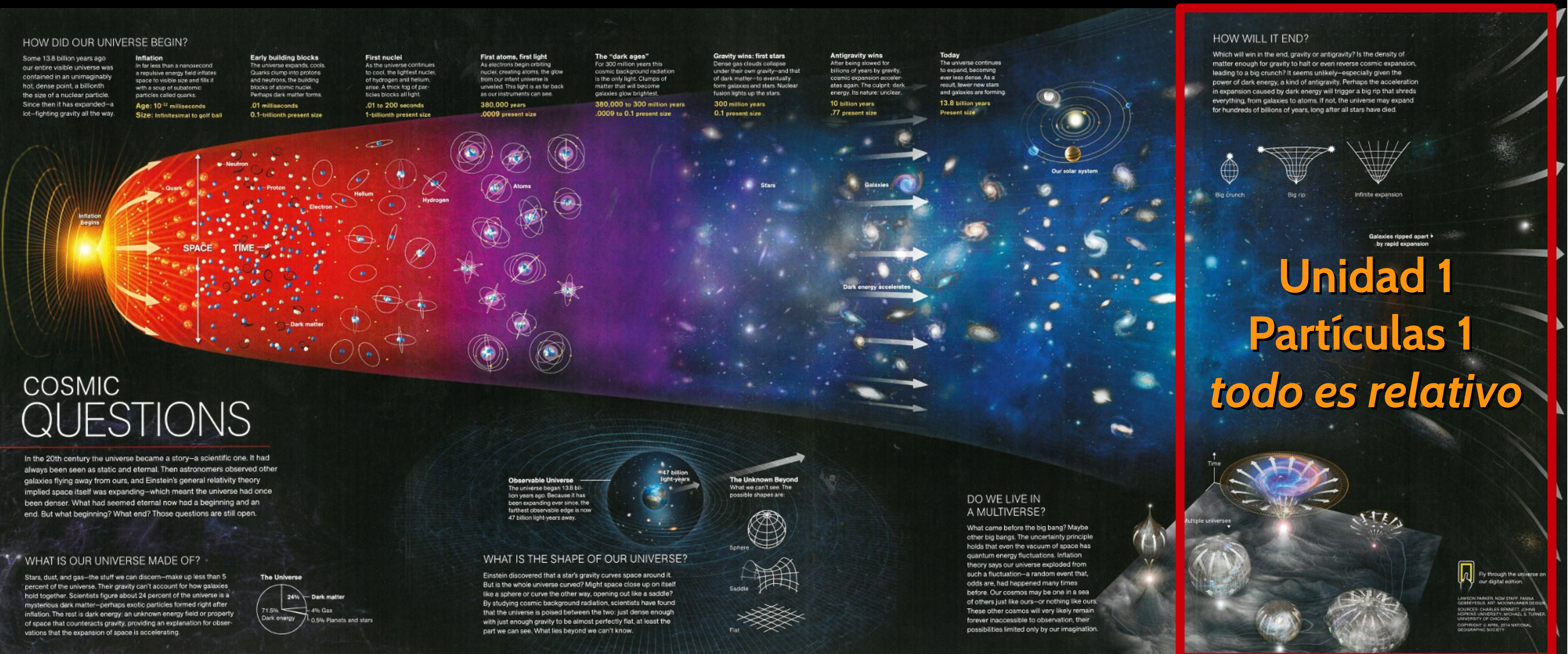
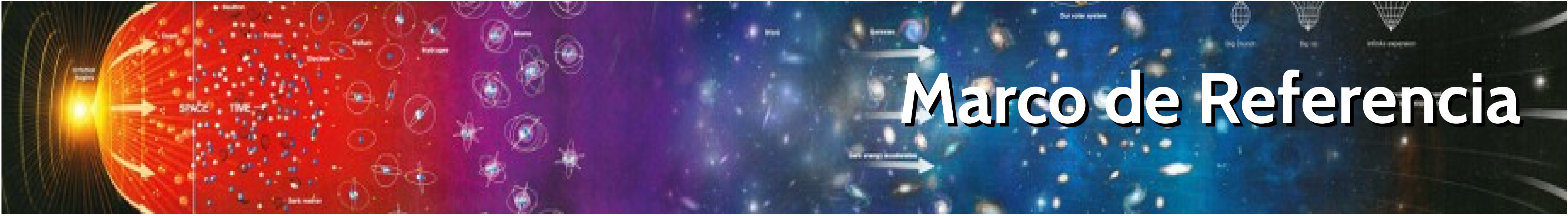
Universidad Nacional de Río Negro
Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2017

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C04 – 04
- **Fecha** 29 Ago 2017
- **Cont** Mecánica relativista
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
  www.facebook.com/fisicareconocida/
- **Archivo** ipac-2017-U01-C04-0829-relatividad-4

Contenidos: un viaje en el tiempo

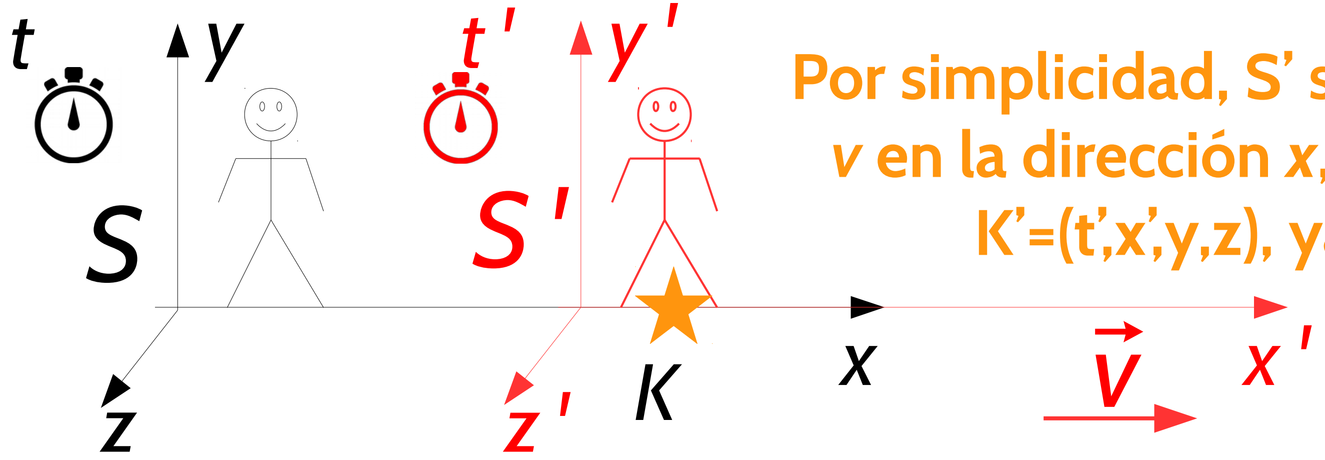


Unidad 1
Partículas 1
todo es relativo



Marco de Referencia

- **Marco de Referencia**
  sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj
- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**
- **Evento**
  es un punto en el espaciotiempo ***K=(t,x,y,z)***



Por simplicidad, S' se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

Transformaciones de Lorentz

- El mundo es así, y no como queremos que sea
- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia son

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v t\right)$$

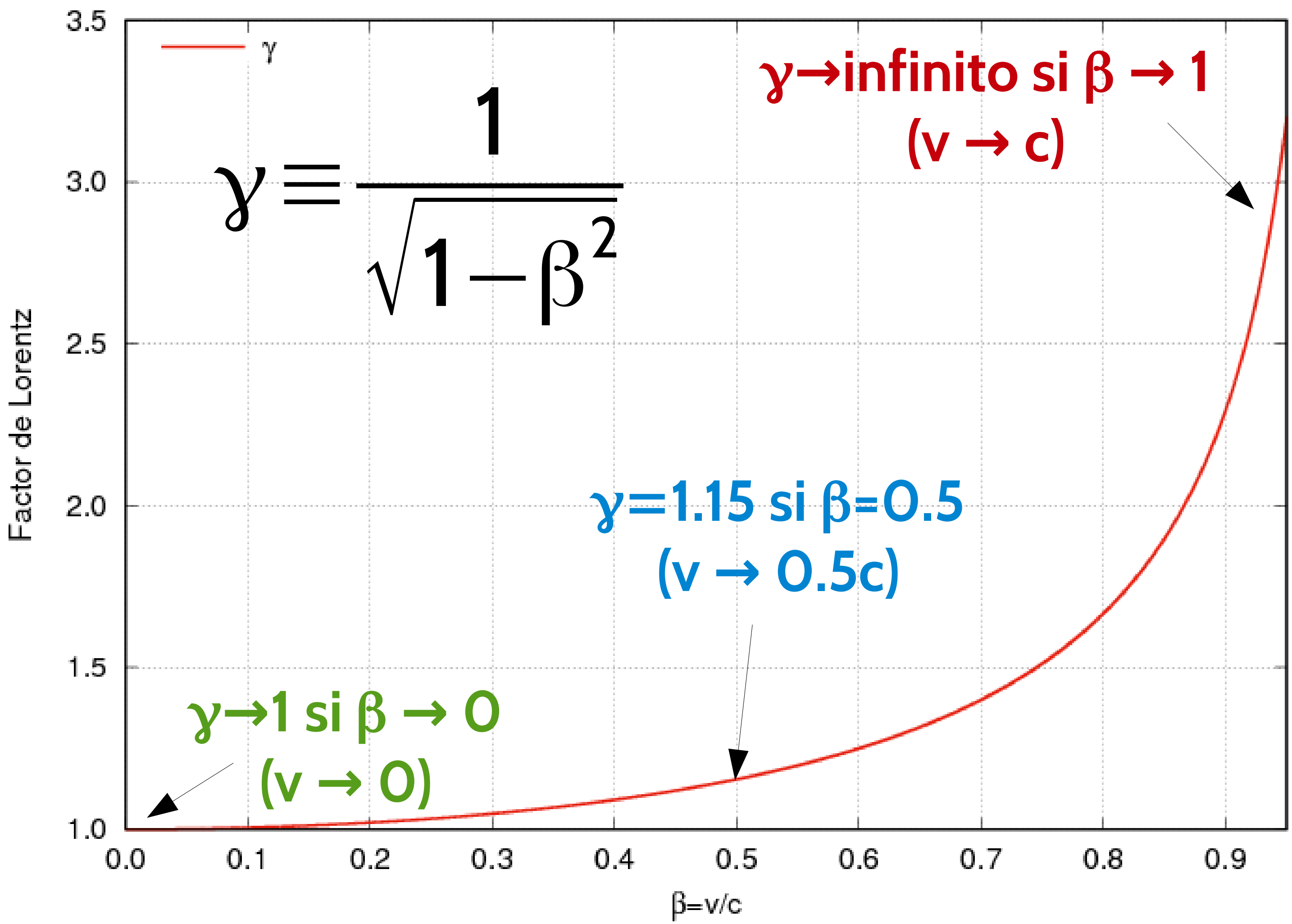
$$y' = y$$

$$z' = z$$

- Simetría entre tiempo y espacio → ***espaciotiempo***

Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

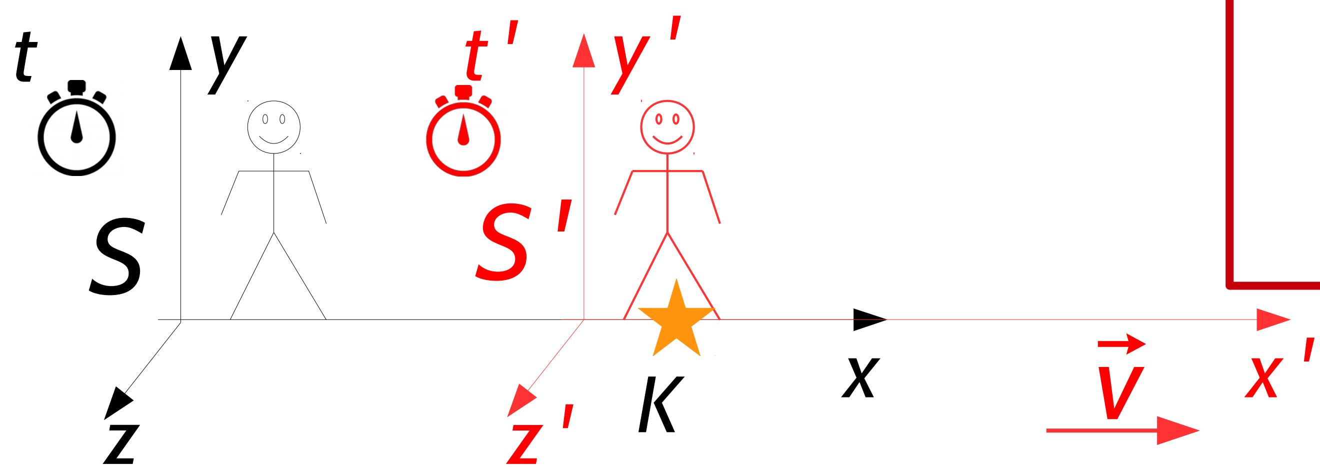
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\,x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v\,t\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$



Aproximación Newtoniana, v → 0

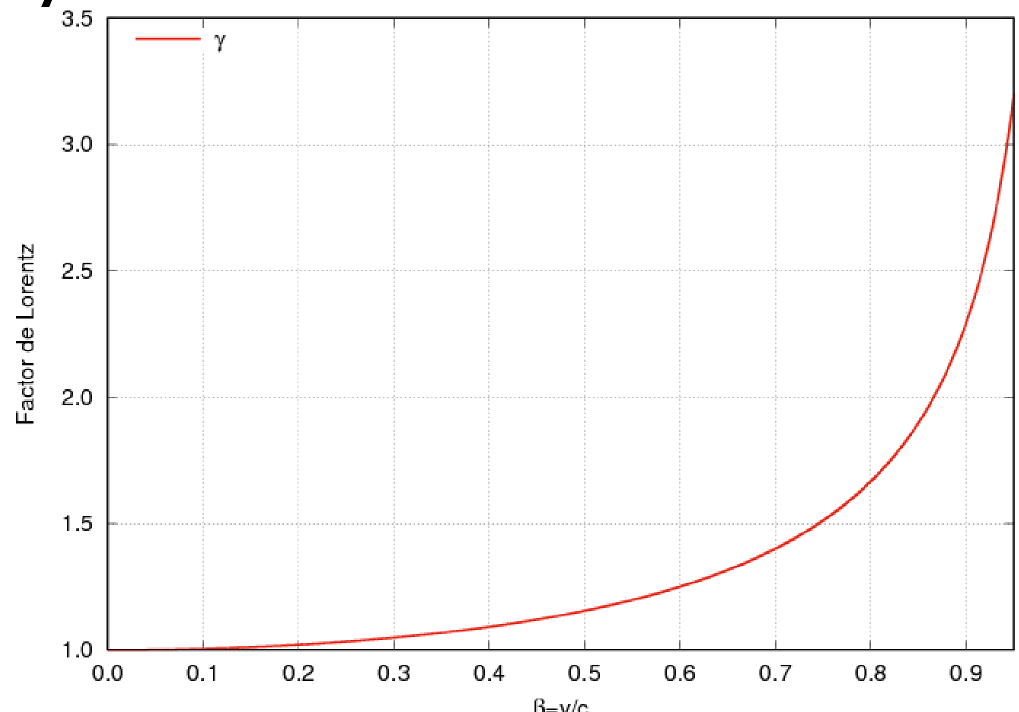
- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \rightarrow 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right) \rightarrow t' \simeq t$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right) \rightarrow x' \simeq x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



Si v → 0, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!

Regla de suma de velocidades

- Vimos que, según nuestro amigo Galileo,

$$\vec{u}\,'(t)=\vec{u}(t)-\vec{v}$$

  Y aquí como t=t' no tuvimos reparos en hacer la derivada
- **En el caso relativista debemos tener cuidado.**
- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
  - **El observador en *S*, mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje *x* con velocidad *u=dx/dt***
  - **El observador en *S'*, verá que el objeto se mueve con velocidad *u'=dx'/dt'***

Velocidades

- Recordando las expresiones para Δx y Δt y $\Delta x'$ y $\Delta t'$ ⇒

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt) \quad \text{y} \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(dx - v\,dt)}{\cancel{\gamma}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}$$

y sacando dt como factor común

$$u' = \frac{\cancel{dt}\,(dx/dt - v)}{\cancel{dt}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

pero $\frac{dx}{dt} = u$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

- De igual forma con los inversos

$$u = \frac{\cancel{\gamma}(dx' + v\,dt')}{\cancel{\gamma}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)}{dt'\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

La velocidad de la luz es constante

- Casos límites.
- Sea $u \to 0$ (objeto lento) $\Rightarrow$.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \cancel{\frac{uv}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{u' = u - v}$$

Galileo si $u \to 0$ ($u \ll c$)

- Sea $u = c$ (luz) $\Rightarrow$.

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c\,\cancel{(1 - v/c)}}{\cancel{(1 - v/c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = c}$$

segundo principio!

Si u << c → u' = u - v
¡Recupero Galileo! :-)

Si u = c → u'=c
!Segundo postulado! :-)

Dos eventos K_1 y K_2 en el espaciotiempo

- Vistos desde los marcos S y S', estos estarán en:

$$K_1 \quad S:(t_{1,} x_{1,} y_{1,} z_1); \quad S':(t'_{1,} x'_{1,} y'_{1,} z'_1)$$
$$K_2 \quad S:(t_{2,} x_{2,} y_{2,} z_2); \quad S':(t'_{2,} x'_{2,} y'_{2,} z'_2)$$

- Claramente, los intervalos espaciales y temporales son:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{y} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1$$

- Y como todo es lineal:

¡Importante! Esta es la forma en como percibimos distancias y periodos de tiempo!

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t')$$

Simultaneidad y co-localidad relativista

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{1}{c^2} v \Delta x'\right)$$

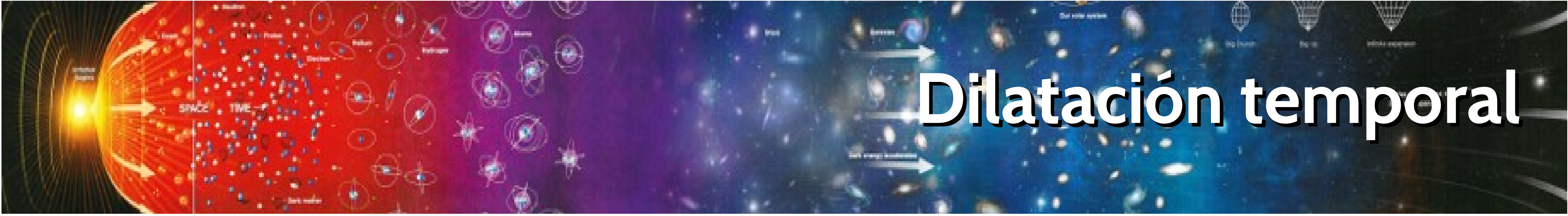
$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v \Delta t\right) \qquad \Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v \Delta t'\right)$$

Eventos simultáneos en un marco

$\Delta t = 0, \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta t' \neq 0$ y eventualmente $\Delta x' = 0$

Eventos co-locales en un marco

$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0 \rightarrow \Delta x' \neq 0$ y eventualmente $\Delta t' = 0$



Dilatación temporal

- **El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**
- Imaginen en S un reloj ($\rightarrow \Delta t = s$) en reposo $\rightarrow \Delta x = 0$

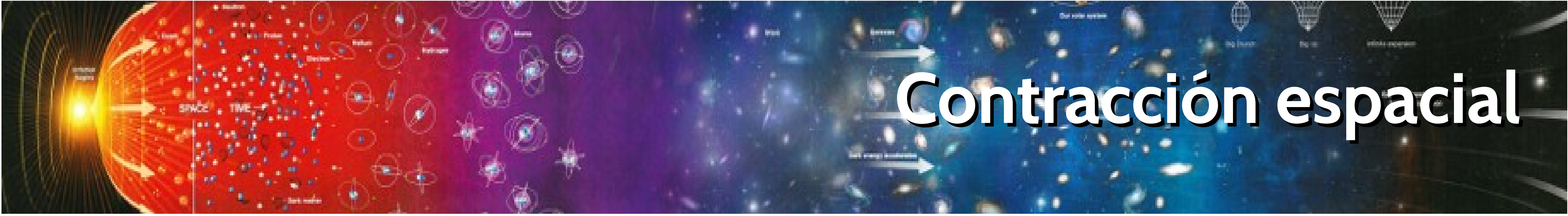
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{1}{c^2} v \Delta x\right) \rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \rightarrow \Delta t' = \gamma s$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta t' > \Delta t$

- Por ejemplo, v=259807 km/s

$$\rightarrow \beta = v/c = 0.866 \rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \Delta t' = 2 s$$

El intervalo medido en el marco S (reloj en reposo) dura 1 segundo.
El mismo intervalo visto en el marco en movimiento S' dura 2 segundos



Contracción espacial

- **La distancia entre dos eventos (p.ej. la longitud de un objeto) no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia**
- Imaginen una regla ($\rightarrow \Delta x = l$) en el sistema S. En el sistema S' se mide la distancia entre los extremos de la regla de manera simultánea ($\rightarrow \Delta t' = 0$)

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' \rightarrow \Delta x' = \Delta \frac{x}{\gamma} \rightarrow \Delta x' = \frac{l}{\gamma}$$

y dado que $\gamma > 1$ si $v > 0$, luego $\Delta x' < \Delta x$

- Por ejemplo, $v = 259807$ km/s $\rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \Delta x' = l/2$

La longitud medida en el marco S' (reloj en movimiento) es menor que la longitud medida en el marco con el reloj en reposo

Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$

El muón

- Muón: decaen en electrones en un tiempo promedio de $\tau = 2.2\,\mu s$ $(2.2\times10^{-6} s)$.

  $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$

- velocidad típica $v = 0.99c \Rightarrow \beta = 0.99$

  $\Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \boxed{\gamma \cong 7}$

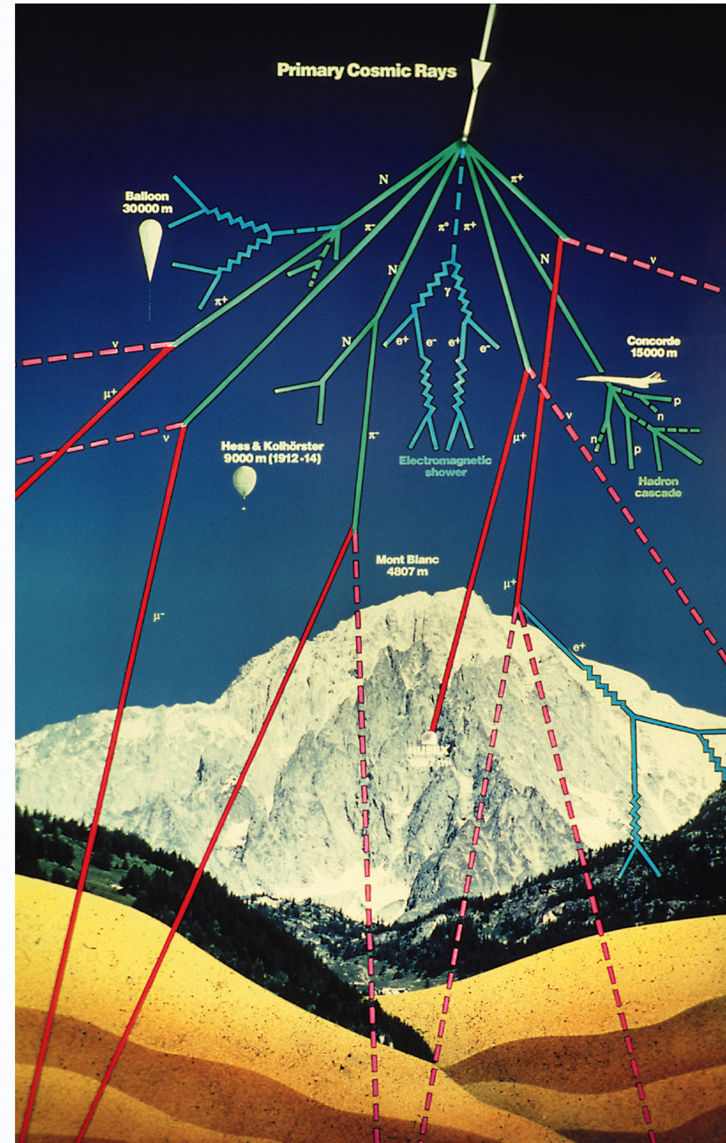
- Algún μ decae en $2\mu s$ (p. ej) ⇒ esto es en el marco de referencia del μ (t'). $\Rightarrow x' = t' c \beta = \boxed{594\,m = x'}$
- Esto es en el frame S'. ¿A cuánto corresponde esto en S?

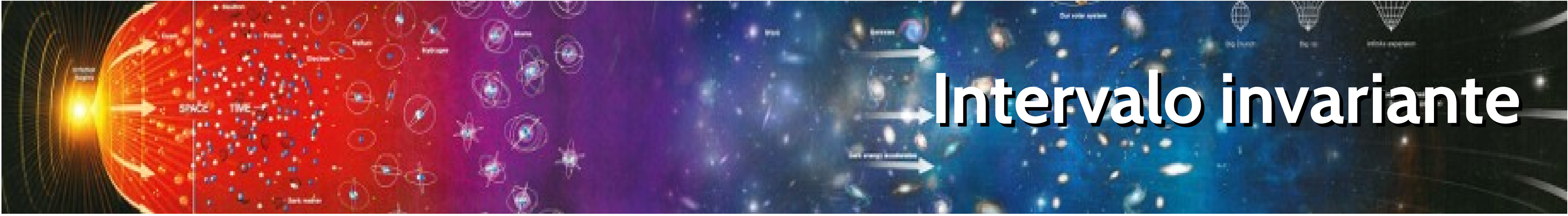
  ya que $t'=0 \Rightarrow t=0$ (por construcción) tenemos:

  $x' = x/\gamma \Rightarrow x = x' \cdot \gamma \Rightarrow x = 7 \cdot 594\,m \Rightarrow \boxed{x = 4158\,m}$

- y el tiempo t? las cosas serán consistentes.
- Antes de decaer el muón recorre más de 4 km en nuestro marco de referencia.

Muones producidos en la atmósfera se observan en el piso





Intervalo invariante

- La velocidad de la luz es invariante, entonces:

$$c=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt'} \text{ con } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ y } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

- Luego, para un fotón: $c\,\Delta t=\Delta r \rightarrow c^2(\Delta t)^2=(\Delta r)^2$

Convención:

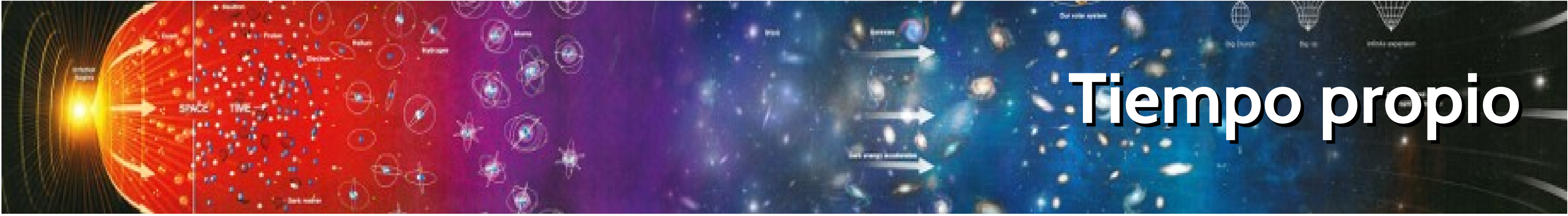
+ - - -

$$\rightarrow s^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2}^{\text{intervalo espaciotemporal}\equiv s^2}$$

$$\text{y } s'^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2}^{\text{intervalo espaciotemporal}\equiv s'^2}$$

- La invariancia de la velocidad de la luz implica (**probarlo**):

$$s^2=s'^2$$



Tiempo propio

- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "**comóvil**".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

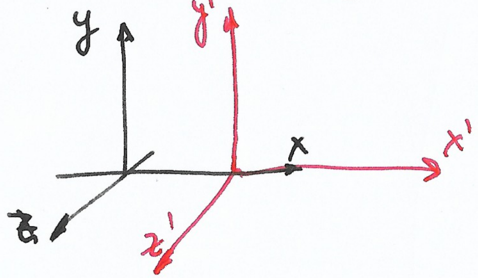
$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$

Otra forma para TL

Transformación de Lorentz. Otra forma.



- A $t=0$ los sistemas son co-locales
- A $t=0$ se enciende un foco puntual en el origen $S_0 = S_0'$.
- Como $c = c'$ ⇒ En ambos sistemas se debe conservar la propagación de la luz

Notar que así también se pueden construir los intervalos invariantes

- El frente de onda será, en S: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$

  y en S': $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

- Como S' se mueve en la dirección $+x$ ⇒ $y=y'$ y $z=z'$ y solo esperamos cambios en x y x': ⇒ $x'=\gamma(x-vt)$; $x=\gamma'(x'+vt')$
- γ es algún factor de cambio ⇒ Por el 1º postulado $\gamma=\gamma'$
- Por el segundo postulado, $c=c'$ ⇒ en la dirección $+x$: $ct=x$ y $ct'=x'$

$$\Rightarrow ct'=\gamma(x-vt) \quad y \quad ct=\gamma(x'+vt')$$

$$\Rightarrow ct'=\gamma(ct-vt) \quad y \quad ct=\gamma(ct'+vt')$$

$$\Rightarrow t'=\frac{\gamma}{c}(c-v)t \Rightarrow t'=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)t \Rightarrow t'=\gamma t(1-\beta)$$

$$y \quad t=\frac{\gamma}{\cancel{c}}\cancel{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)t' \Rightarrow t=\gamma(1+\beta)t'$$

$$\Rightarrow t=\gamma(1+\beta)\gamma(1-\beta)t \Rightarrow 1=\gamma^2(1+\beta)(1-\beta) \Rightarrow \gamma^2=\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ y luego obtenemos las T.L.

Jugando con la velocidad de la luz

A slower speed of light
http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/

WARP: A Special Relativity Simulator
http://www.adamauton.com/warp/

Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Diálogo entre dos mundos: movimiento y fuerzas

- Newton: - Un cuerpo sujeto a una fuerza constante *F* durante un tiempo *t* tendrá una velocidad *v=(F/m)t* que aumenta con *t*
- Einstein: - Pero Isaac, ¡v<c siempre!
- N: ¿Qué? Vos estás equivocado Alberto ¿sino que pasa con mi 2da ley?

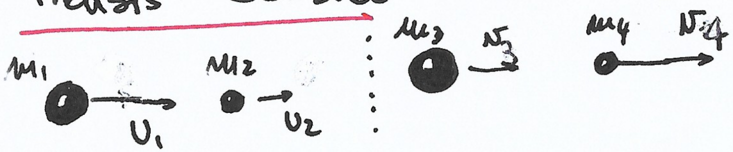
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- E: ¡Ahh! ¿Pero cuál *t* estarás usando en tu derivada? ¿En que marco de referencia?
- N: ¿Cómo? ¿el tiempo no es absoluto? ¿Acaso *t* no es el mismo para todos los observadores inerciales?
- E: Jejejeje.... (sonrisa con mirada pícara)

Pasen y vean

Colisiones (u es inicial, v es final, puede haber cambio de masa).

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 \quad m_4 v_4 \qquad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \qquad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa entre S y S') ⇒

En S'

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 - (m_1 + m_2) V = m_3 v_3 + m_4 v_4 - V(m_3 + m_4)$$

(1)

⇒ $(m_1 + m_2) V = (m_3 + m_4) V$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1 + m_2 = m_3 + m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Análisis Relativista

Imaginemos que en el caso relativista $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{p}' = m v'$ (suponemos por ahora x post. 1 y $m = m'$) ⇒ (1) y (2) se mantienen. Cambiando (3) por la relativista:

$$v_3' = \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} \qquad (5)$$

⇒ reemplazando en (2):

$$m_1 \frac{u_1 - V}{1 - u_1 V/c^2} + m_2 \frac{u_2 - V}{1 - u_2 V/c^2} = m_3 \frac{v_3 - V}{1 - v_3 V/c^2} + m_4 \frac{v_4 - V}{1 - v_4 V/c^2}$$

¿y ahora? V no se cancela, entonces esta ecuación (conservación de la cant. de movimiento) ¡no vale en general! ó tenemos que cambiar las masas para ajustar.

La definición estándar no se verifica.

Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad\qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

resulta qué:

  - o bien no se conserva la cantidad de movimiento;
  - o bien la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativistiva $\vec{p} = ?$