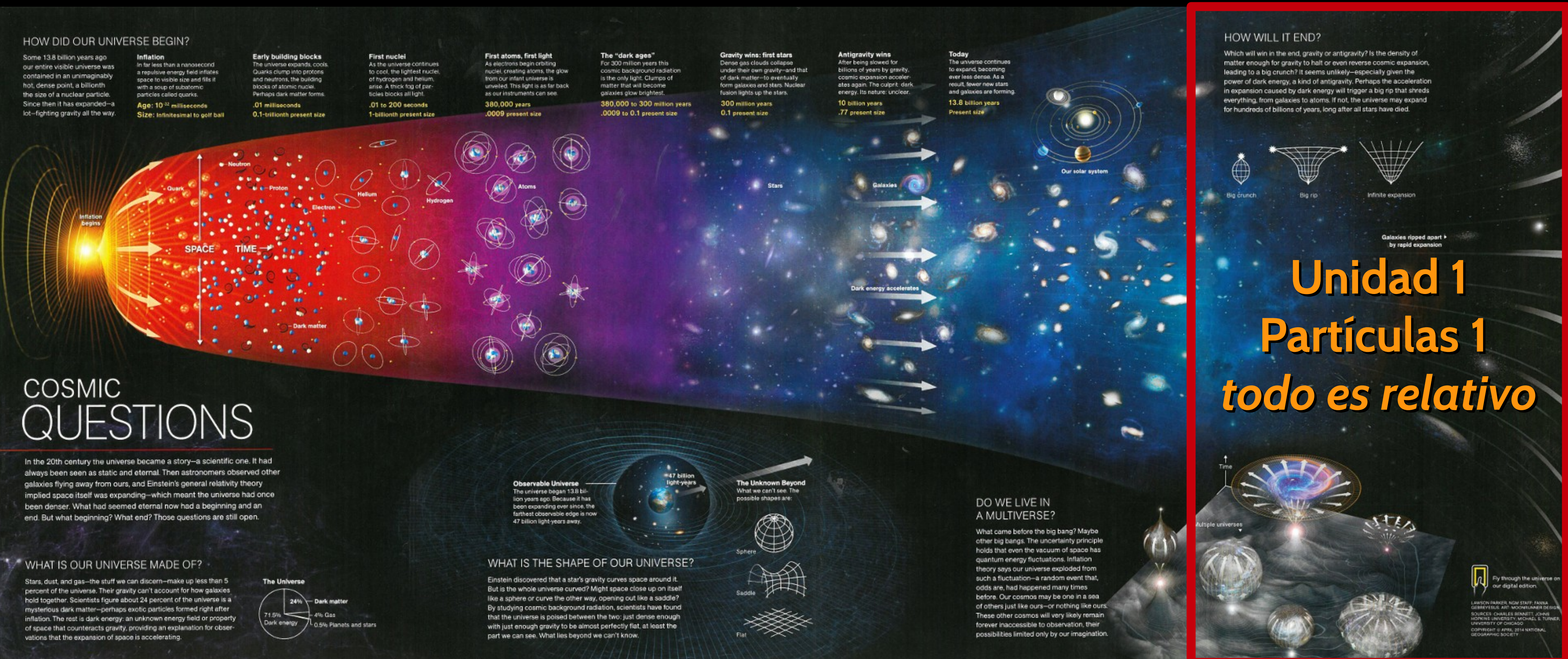
# Universidad Nacional de Río Negro
# Int. Partículas, Astrofísica & Cosmología - 2017

- **Unidad** 01 – Relatividad
- **Clase** U01 C02 – 03
- **Fecha** 22 Ago 2017
- **Cont** Relatividad especial
- **Cátedra** Asorey
- **Web** github.com/asoreyh/unrn-ipac
  www.facebook.com/fisicareconocida/
- **Archivo** ipac-2017-U01-C03-0822-relatividad-3

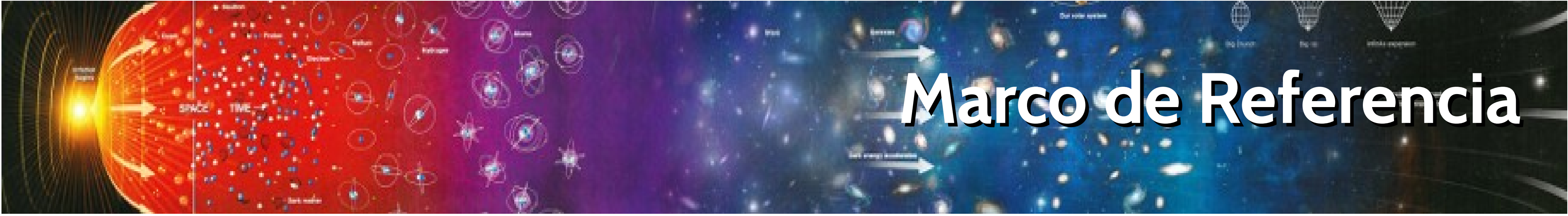
# Contenidos: un viaje en el tiempo




**Unidad 1**

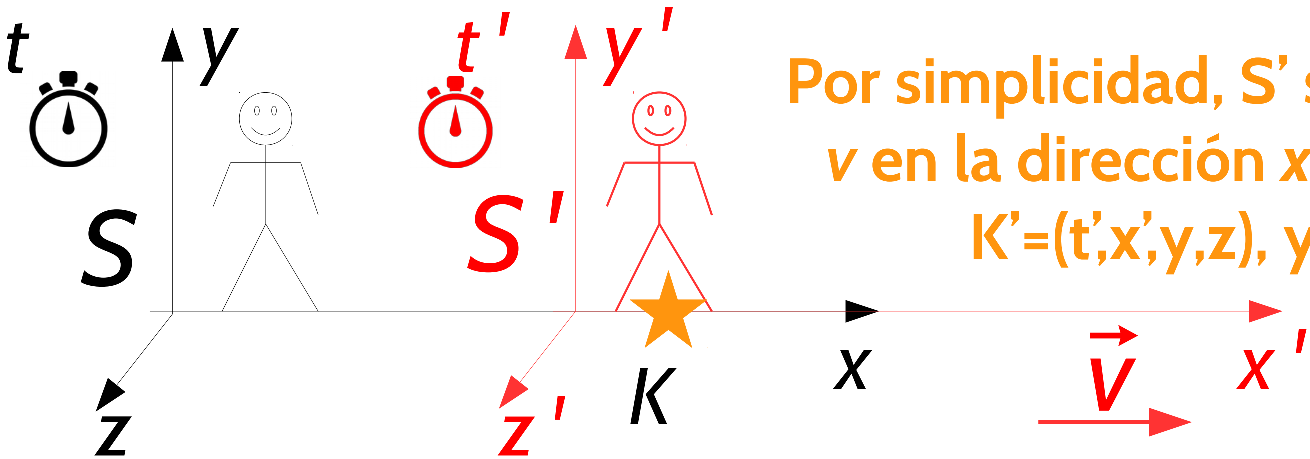
**Partículas 1**

***todo es relativo***



# Marco de Referencia

- **Marco de Referencia**
  sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj
- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**
- **Evento**
  **es un punto en el espaciotiempo *K=(t,x,y,z)***




Por simplicidad, S' se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y


# Derivación "*a la Einstein*"

- Supongamos que el evento fue encender una linterna en *(0,0,0,0)* apuntando en la dirección +x. Luego de un tiempo *t*, la luz se habrá desplazado una distancia:

$$x = c\,t \Rightarrow x - ct = 0$$

- En el sistema S', tendremos (recordar, *c'*=*c*)

$$x' - ct' = 0$$

- Dado que están igualados a cero, los eventos ocurren en el mismo punto del espaciotiempo (no importa quien los vea), entonces:

$$x' - ct' = \lambda\left(x - ct\right)$$

# Derivación “*a la Einstein*”, 2

- Para un fotón viajando hacia +x:

$$x'-ct'=\lambda(x-ct)$$

- Para un fotón viajando hacia -x:

$$x'+ct'=\mu(x+ct)$$

Derivación

$$\begin{cases} x'-ct'=\lambda(x-ct) & (1)\\ x'+ct'=\mu(x+ct) & (2)\end{cases}$$

Sumando (1)+(2):

$$2x'=\lambda x-\lambda ct+\mu x+\mu ct$$

$$x'=\overbrace{\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)}^{a}x-\overbrace{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)}^{b}ct$$

$$\boxed{x'=ax-bct} \qquad (3)$$

Restando (1)−(2):

$$-2ct'=\lambda x-\lambda ct-\mu x-\mu ct$$

$$ct'=-\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)x+\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)ct$$

$$\boxed{ct'=act-bx} \qquad (4)$$

# Derivación "*a la Einstein*", 3

- Visto desde S', el origen está en $x'=0 \Rightarrow$.

$$0 = ax - bct$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a}\, t$$

- y por lo tanto, la velocidad relativa entre S y S' es:

$$x = v t \Rightarrow \boxed{v = \frac{bc}{a}} \qquad (5)$$

y a tiempo $t=0 \Rightarrow$

$$\boxed{x' = ax} \qquad (6)$$

# Derivación "*a la Einstein*", 4, Importante

- Definimos el intervalo de distancia como

$$\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1$$

**Ahora, por el postulado 1, la longitud de una regla en reposo en S' medida por O, debe ser igual a la longitud observada por O' de una regla que está en reposo en S.**

$$\Rightarrow \Delta x' = \Delta x$$

- Entonces, si dos puntos en x' están separados por Δx'=1, vistos desde S' a *t=0*, será

$$x' = ax \Rightarrow \Delta x' = a \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{a}} \quad (7)$$


- Considero ahora $t'=0$ (tiempo en $S'$), Despejo $t$ desde la ecuación (4):

$$0 = act - bx \Rightarrow tac = bx$$

$$\Rightarrow t = \frac{b}{ac}\, x$$

- Reemplazando en (3)

$$x' = ax - b\cancel{c}\left(\frac{b}{a\cancel{c}}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = ax - \frac{b^2}{a}x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2x - b^2x}{a}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{a^2 - b^2}{a}\, x \qquad \text{Multiplico } a/a$$

$$\Rightarrow x' = a\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x \qquad \text{y por (5)}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \Rightarrow \boxed{x' = a\left(1-\beta^2\right)x} \quad (8)$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$x' = a\left(1-\beta^2\right)x \quad \mathbf{(8)}$$

# Derivación "*a la Einstein*", 6

- Luego, la relación de distancias será

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = a\left(1-\beta^2\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right)\Delta x \text{ ,y si } \Delta x = 1$$

$$\rightarrow \Delta x' = a\left(1-\beta^2\right) \quad \textcolor{red}{(9)}$$

- Pero recordando $\Delta x' = \Delta x$, entonces (7)=(9):

$$\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \frac{1}{a} = a\left(1-\beta^2\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

# Derivación "*a la Einstein*", 7, Importante

- Y entonces

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Definiendo:

$$\boxed{\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (10)$$

- Resulta (recordando además (5) y la def de beta:

$$a=\gamma, \quad \text{y} \quad b=\beta\,\gamma \qquad (11)$$

Entonces, reemplazando las (11) en (3) y (4):

$$x' = ax - bct \longrightarrow x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

y $ct' = \cancel{\gamma} act - bx \Rightarrow ct' = \gamma ct - \beta\gamma x$

$$\Rightarrow t' = \frac{\gamma \cancel{c} t}{\cancel{c}} - \frac{\beta\gamma}{c}x$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

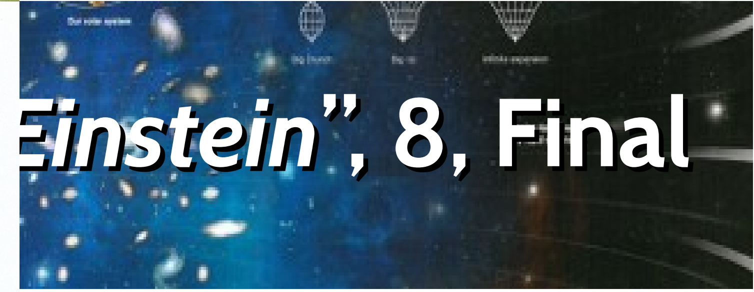
$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta c}{c^2}x\right)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

y Finalmente:

$$\cancel{x'} \quad \boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Transformación de Lorentz




## Transformaciones de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}v\,x\right) \\ x' &= \gamma(x - v\,t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

# Transformaciones de Lorentz

- El mundo es así, y no como queremos que sea
- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia son

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - v t\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

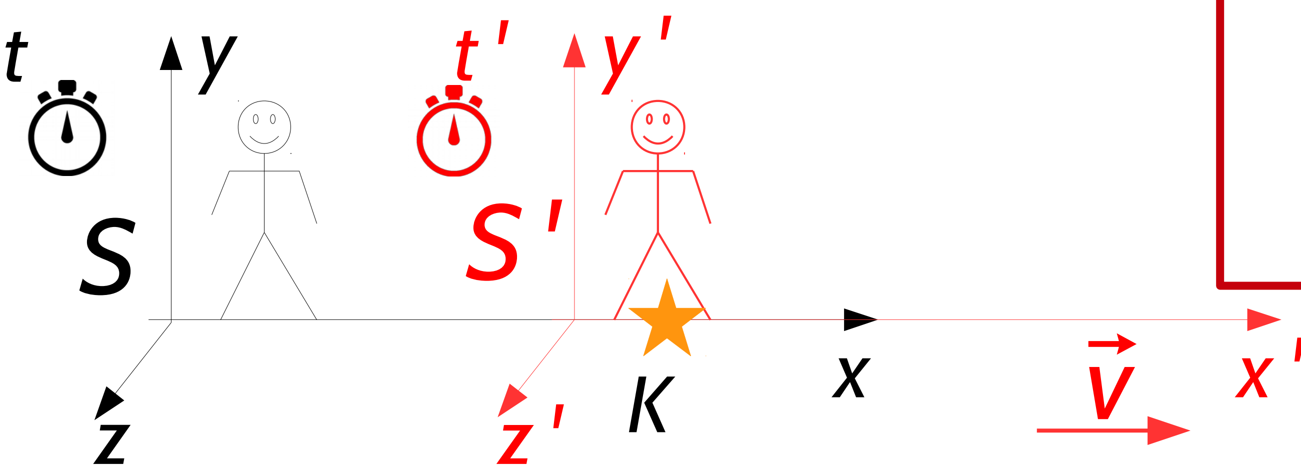
- Simetría entre tiempo y espacio → ***espaciotiempo***

# Transformaciones de Lorentz

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S’ que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K’=(t’,x’,y,z), ya que z’=z e y’=y

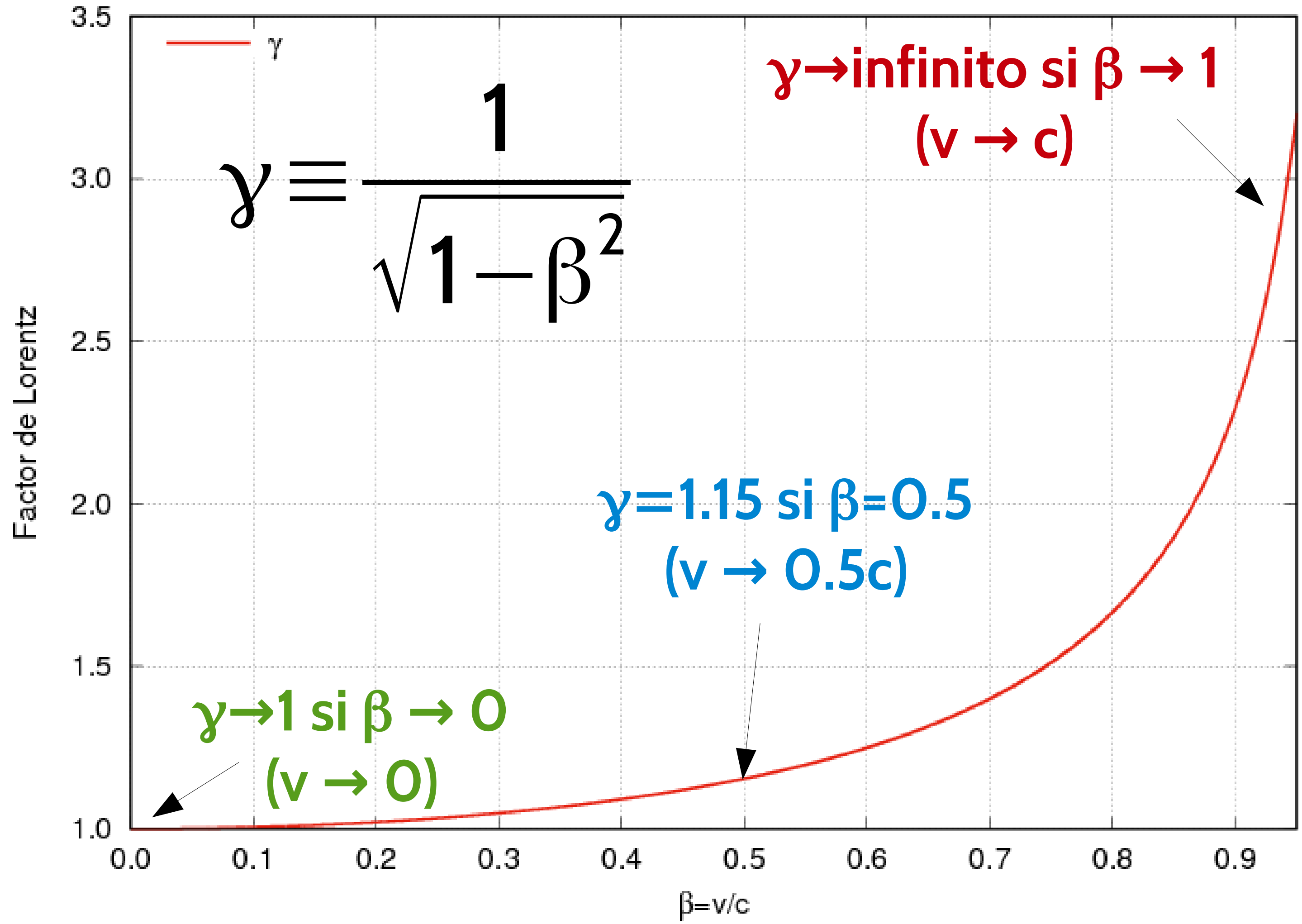
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$




$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

# Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma, ecuación (10)



# Aproximación Newtoniana, v → 0

- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \rightarrow 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right) \rightarrow t' \simeq t$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right) \rightarrow x' \simeq x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

**Si v → 0, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!**

# Regla de suma de velocidades

- Vimos que, según nuestro amigo Galileo,

$$\vec{u}\,'(t)=\vec{u}(t)-\vec{v}$$

  Y aquí como t=t' no tuvimos reparos en hacer la derivada

- **En el caso relativista debemos tener cuidado.**
- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
  - **El observador en *S*, mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje *x* con velocidad *u=dx/dt***
  - **El observador en *S'*, verá que el objeto se mueve con velocidad *u'=dx'/dt'***

• Recordando las expresiones para $\Delta x$ y $\Delta t$ y $\Delta x'$ y $\Delta t'$ ⇒

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt) \quad y \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(dx - v\,dt)}{\cancel{\gamma}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}$$

y sacando dt como factor común

$$u' = \frac{\cancel{dt}\,(dx/dt - v)}{\cancel{dt}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

pero $\frac{dx}{dt} = u$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

• De igual forma con los inversos

$$u = \frac{\cancel{\gamma}(dx' + v\,dt')}{\cancel{\gamma}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)}{dt'\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$


$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

# La velocidad de la luz es constante

- Casos límites.
- Sea $u \to 0$ (objeto lento) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \cancel{\frac{uv}{c^2}}^{\,0}} \Rightarrow \boxed{u' = u - v}$$

Galileo si $u \to 0$ ($u \ll c$)

- Sea $u = c$ (luz) $\Rightarrow$

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{\cancel{c}v}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c\,\cancel{(1 - v/c)}}{\cancel{(1 - v/c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = c}$$

segundo principio!

**Si u << c → u' = u - v**
**¡Recupero Galileo! :-)**

**Si u = c → u'=c**
**!Segundo postulado! :-)**