Investigação Operacional - Trabalho Prático 2

Carlos Machado a97114, Gustavo Pereira a96867, Vasco Oliveira a96361,
Cláudio Bessa a97063, Tiago Oliveira a97254

Universidade do Minho

1 Formulação do Problema

Neste problema deparamos com um problema de escalonamento de equipas (com tempos de serviço fixos) onde cada cliente tem associada respetiva hora de início de serviço. Determinada equipa pode efetuar o serviço de um cliente 2 se e somente se, após o término do serviço do cliente 1 tiver tempo para a deslocação entre clientes.

Sendo essa restrição expressa maticamente por $a_i + t_{ij} \leq t_j$.

Cada equipa inicia o seu dia de trabalho às 09 : 00 na sede da empresa (K). Os dados relativos aos clientes são:

j	cliente	a_j (¼hora)	a_j (hora do serviço)
1	Ana	8	11:00
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	3	09:45
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Figura 1. Horas de serviço

Foi nos também igualmente informado, pelo corpo docente, que certos dados no enunciado não obdeciam à propriedade da "desigualdade triangular". Em termos de distâncias, essa propriedade pode ser enunciada da seguinte forma:

$$dAC \leq dAB + dBC.$$

Sendo assim, como já tinhamos o trabalho numa fase final, não assumimos tal propriedade.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
B		3	5	3	3	2	3	4	2	5
C			3	2	3	2	0	1	1	2
D				1	3	3	3	2	3	1
E					2	1	2	2	2	2
F						2	3	3	3	4
G							2	2	2	3
H								1	1	1
I									3	2
J										4

tempos de deslocação

Figura 2. Tempos de deslocação

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	13	5	6	5	10	7	5	0	7	1
B		11	14	10	8	6	11	13	4	15
C			8	6	10	6	0	5	6	2
D				4	8	8	8	6	11	4
E					6	4	6	5	7	6
F						5	10	10	8	11
G							10	7	5	9
H								5	6	9
I									7	9
J										10

custos de deslocação

Figura 3. Custos de deslocação

2 Modelo

Primeiro, através da restrição $a_i + t_{ij} \leq t_j$, determinados quais os arcos que iam fazer parte do nosso modelo.

```
Arcos depois das restrições ai + tij ≤ aj
K: A,B,C,D,F,G,H,I,J
A:
B: G
C: A,B,G
D: A,B,F,G,J
F: G
G:
H: A,B,C,F,G,J
I: A,B,C,F,G,H,J
J: A,B,G
```

Figura 4. Arcos efetuados

De seguida, com esta informação, fórmulamos o nosso grafo de compatibilidades, para orientarmo-nos.

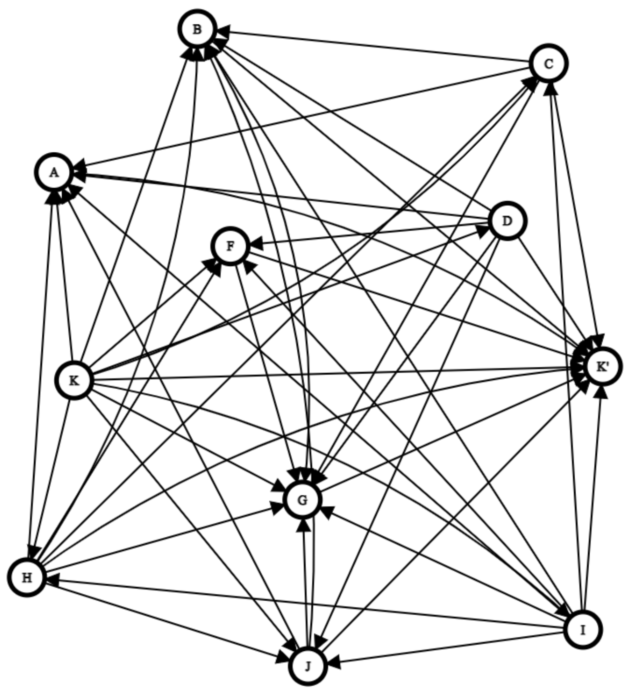

Figura 5. Grafo de compatibilidades

Antes de passarmos para a resolução do problema no relax4 precivamos de pensar como obrigar as equipas a passarem por todos os vértices (uma equipa em cada vértice), adicionando um fluxo de exactamente uma unidade em cada vértice, representado na figura 6, em que o fluxo de um dos arcos de entrada é igual a 1 e o fluxo de um dos arcos de saída é igual a 1.

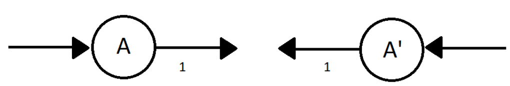

Figura 6. Fluxo de 1 unidade

No fim, resolvemos o exercício no relax4 usando o método de um fluxo de uma unidade em cada vértice, e, como nós não sabiamos qual seria o número ótimo de equipas criamos um arco auxiliar de K até K' com custo 0, e damos um fluxo de entrada no vértice K igual a 20 e um fluxo de saída no vértice K' igual a 20, fazendo, assim, com que as equipas que não tenham sido usadas possam passar por esse arco auxiliar, tornando o nosso ficheiro de input numa solução admissível (o ficheiro de *input* do *relax4* será enviado em anexo).

Utilizamos como valores de oferta e procura dos vértices K e K', respetivamente, o valor 20 mas é de notar que podíamos ter usado qualquer valor que seja maior ou igual ao número de clientes, que no nosso caso é 9.

3 Solução Ótima

Após a inserção do nosso input no *relax4* obtivemos o seguinte informação,

```
*******************************************************************
NUMBER OF NODES = 22, NUMBER OF ARCS = 45
USING DEFAULT INITIALIZATION
*********************************
OPTIMAL COST = 72.
NUMBER OF ITERATIONS = 3
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 0
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 0
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 0
*********************************
```

f 21 22 16	f 17 22 1	f 18 2 0
f 21 1 1	f 18 22 0	f 18 3 0
f 21 2 0	f 19 22 0	f 18 6 0
f 21 3 1	f 20 22 0	f 18 7 0
f 21 4 1	f 12 7 1	f 18 10 1
f 21 6 0	f 13 1 0	f 19 1 0
f 21 7 0	f 13 2 0	f 19 2 0
f 21 8 0	f 13 7 0	f 19 3 0
f 21 9 1	f 14 1 0	f 19 6 0
f 21 10 0	f 14 2 0	f 19 7 0
f 11 22 1	f 14 6 1	f 19 8 1
f 12 22 0	f 14 7 0	f 19 10 0
f 13 22 1	f 14 10 0	f 20 1 0
f 14 22 0	f 16 7 0	f 20 2 1
f 16 22 1	f 18 1 0	f 20 7 0

Através desta informação conseguimos obter:

- O custo ótimo de 72, obtido no ficheiro de output onde diz: OPTIMAL COST = 72.
- O número de equipas utilizadas de 4, obtido no ficheiro de output aqui: f 21 22 16, que é a representação do arco auxiliar K-K', falado anteriormente, onde possou uma quantidade de fluxo de 16, e como nós demos 20 como o valor de oferta, fazemos 20 - 16 e temos o número de equipas = 4.
- Os caminhos que cada equipa fez, vendo os arcos onde passaram uma quantidade de fluxo de 1.

É de notar que poderá haver outras soluções admissíveiscom o mesmo custo mínimo, no nosso caso 72.

O *output* pode ser visto em tabela da seguinte forma:

Equipa 1

j	cliente	a_j (¼ hora)	a_j (hora do serviço)	tempo de deslocação	custo deslocação
1	Keleirós	0	09:00	KA: ¼ hora	1
	Ana	8	11:00	AK: ¼ hora	1
	Keleirós	9	11:15		1
custo de operação da equipa					3

Figura 7. Plano de deslocação da equipa 1

Equipa 2

j	cliente	a_j (¼ hora)	a_j (hora do serviço)	tempo de deslocação	custo deslocação
3	Keleirós	0	09:00	KC: 2/4 hora	2
	Carlos	4	10:00	CK: 2/4 hora	2
	Keleirós	6	10:30		1
custo de operação da equipa					5

Figura 8. Plano de deslocação da equipa 2

Equipa 3

j	cliente	a_j (¼ hora)	a_j (hora do serviço)	tempo de deslocação	custo deslocação
4	Keleirós	0	09:00	KD: ¼ hora	4
6	Diogo	2	09:30	DF: ¾ hora	8
	Francisca	6	10:30	FK: 4/4 hora	11
	Keleirós	10	11:15		1
custo de operação da equipa					24

Figura 9. Plano de deslocação da equipa 3

Equipa 4

j	cliente	a_j (¼ hora)	a_j (hora do serviço)	tempo de deslocação	custo deslocação
	Keleirós	0	09:00	KI: ²⁄₄ hora	9
9	Inês	2	09:30	IH: ¼ hora	5
8	Helena	3	09:45	HJ: ¼ hora	6
10	José	5	10:15	JB: ²⁄₄ hora	4
2	Beatriz	7	10:45	BG: ²⁄₄ hora	6
7	Gonçalo	9	11:15	GK: ¾ hora	9
	Keleirós	12	12:00		1
custo de operação da equipa					40

Figura 10. Plano de deslocação da equipa 4

4 Validação

Para validarmos o nosso modelo primeiro verificamos se os seguintes dados faziam parte da nossa solução:

- Os arcos K-I e K-D, são os únicos arcos possíveis quando estamos a entrar nos vértices I e D, respetivamente.
- Os arcos A-K' e G-K',são os únicos arcos possíveis quando estamos a sair dos vértices I e D, respetivamente
- Como os arcos K-I, K-D, A-K' e G-K' são de passagem obrigatória, significa que iriamos precisar de pelo menos duas equipas.

Seguidamente, visualizamos os caminhos que foram feitos pelas equipas, através da solução do *relax4*, e verificamos se as equipas não passavam pelo mesmo vértice mais do que uma vez e se passavam por todos os vértices.

Para finalizar, acabamos por resolver o nosso modelo no *lpsolve*, em anexo tal como o ficheiro de *input* do *relax4*, para verificar se as soluções coincidiam. Finalizando assim a validação.