



# Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

## (4) Funktionen

---

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

---

## **Definition und Eigenschaften**

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

## Definition (Funktion)

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*)  $f$  ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge  $D$  genau ein Element einer Zielmenge  $Z$  zuordnet.  $D$  wird dabei *Definitions-  
menge von  $f$*  und  $Z$  wird *Zielmenge von  $f$*  genannt. Wir schreiben

$$f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x), \quad (1)$$

wobei  $f : D \rightarrow Z$  gelesen wird als “die Funktion  $f$  bildet alle Elemente der Menge  $D$  eindeutig auf Elemente in  $Z$  ab” und  $x \mapsto f(x)$  gelesen wird als “ $x$ , welches ein Element von  $D$  ist, wird durch die Funktion  $f$  auf  $f(x)$  abgebildet, wobei  $f(x)$  ein Element von  $Z$  ist”. Der Pfeil  $\rightarrow$  steht für die Abbildung zwischen den Mengen  $D$  und  $Z$ , der Pfeil  $\mapsto$  steht für die Abbildung zwischen einem Element von  $D$  und einem Element von  $Z$ .

### Bemerkungen

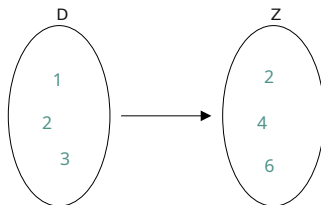
- Es ist zentral, zwischen der *Funktion*  $f$  als Zuordnungsvorschrift und einem *Wert* der Funktion  $f(x)$  als Element von  $Z$  zu unterscheiden.
- $x$  ist der Funktionsinput (auch *Argument* der Funktion genannt),  $f(x)$  der Funktionsoutput.
- Üblicherweise folgt  $f(x)$  die Definition der *funktionalen Form* von  $f$ , z.B.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto f(x) := x^2. \quad (2)$$

# Veranschaulichung - Definitions- und Zielmenge

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 2x.$$



Bemerkung:

- Die aufgeführten Werte in Definitions- und Zielbereich (1,2,3 und 2,4,6) sind nicht vollständig, sondern nur beispielhaft.

## Definition (Bildmenge, Urbildmenge)

Es sei  $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$  eine Funktion und es seien  $D' \subseteq D$  und  $Z' \subseteq Z$ .

- Die Menge

$$f(D') := \{z \in Z \mid \text{Es gibt ein } x \in D' \text{ mit } z = f(x)\} \quad (3)$$

heißt die *Bildmenge von  $D'$*  und  $f(D) \subseteq Z$  heißt der *Wertebereich* von  $f$ .

- Die Menge

$$f^{-1}(Z') := \{x \in D \mid f(x) \in Z'\} \quad (4)$$

heißt die *Urbildmenge von  $Z'$* .  $x \in D$  mit  $z = f(x) \in Z$  heißt auch *Urbild von  $z$* .

### Bemerkung

- Wertebereich  $f(D)$  und Zielmenge  $Z$  sind nicht notwendigerweise identisch.

## Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Es sei  $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$  eine Funktion.

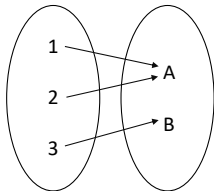
- Die Funktion  $f$  heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Bild  $z \in f(D)$  genau ein Urbild  $x \in D$  gibt. Äquivalent gilt, dass  $f$  injektiv ist, wenn aus  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 \neq x_2$  folgt, dass  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ist.
- Die Funktion  $f$  heißt *surjektiv*, wenn  $f(D) = Z$  gilt, wenn also jedes Element der Zielmenge  $Z$  ein Urbild in der Definitionsmenge  $D$  hat.
- Die Funktion  $f$  heißt *bijektiv*, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

### Bemerkungen

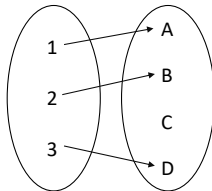
- Bijektive Abbildungen heißen auch *eindeutige Funktionen* (engl. *one-to-one mappings*).



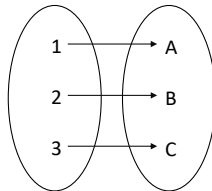
**A** Nicht-injektiv



**B** Nicht-surjektiv



**C** Bijektiv



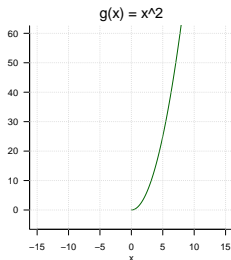
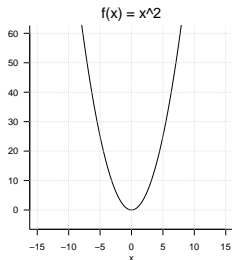
# Funktionseigenschaften - Beispiel

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$$

und

$$g : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto g(x) := x^2$$



- $f$  ist nicht injektiv, weil z.B. für  $x_1 = 2 \neq -2 = x_2$  gilt, dass  $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$ .
- Weiterhin ist  $f$  auch nicht surjektiv, weil z.B.  $-1 \in \mathbb{R}$  kein Urbild unter  $f$  hat.
- $g$  ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

---

Definition und Eigenschaften

## **Funktionentypen**

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

## Definition (Verkettete Funktionen)

Es seien  $f : D \rightarrow R$  und  $g : R \rightarrow S$  zwei Funktionen, wobei die Zielmenge von  $f$  mit der Definitionsmenge von  $g$  übereinstimmen. Dann ist durch

$$g \circ f : D \rightarrow S, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (5)$$

eine Funktion definiert, die die *Verkettung von  $f$  und  $g$*  genannt wird.

### Bemerkungen

- $g \circ f$  bezeichnet die Funktion.
- $(g \circ f)(x)$  bezeichnet ein Element in  $S$ .
- Erst wird  $f$  auf  $x$  angewendet, dann wird  $g$  auf  $f(x)$  angewendet.

### Beispiel:

- Für  $f(x) := -x^2$  und  $g(x) := \exp(x)$  ist  $(g \circ f)(x) = \exp(-x^2)$ .

## Definition (Inverse Funktion)

Es sei  $f : D \rightarrow R, x \mapsto f(x)$  eine bijektive Funktion. Dann heißt die Funktion  $f^{-1}$  mit

$$f^{-1} \circ f : D \rightarrow D, x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \quad (6)$$

*inverse Funktion* (oder *Umkehrfunktion*) von  $f$ .

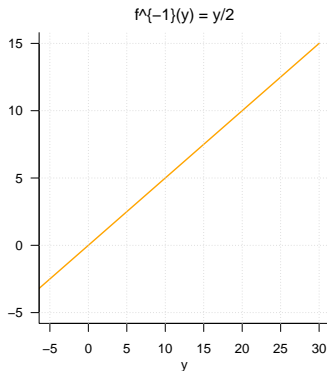
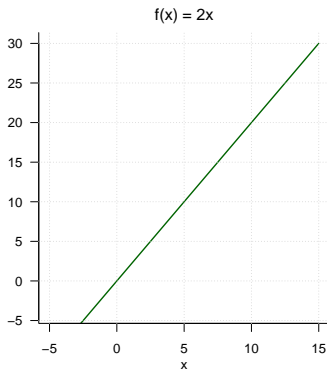
### Bemerkungen

- Weil  $f$  bijektiv ist, wird jedem  $x \in D$  genau ein  $z = f(x) \in Z$  zugeordnet.
- Jedem  $z \in Z$  wird also auch genau ein  $x \in D$  zugeordnet.
- Die inverse Funktion einer bijektiven Funktion ist also auch bijektiv.

# Inverse - Beispiel

Beispiel:

- Beispiel: Die inverse Funktion von  $f(x) := 2x$  ist  $f^{-1}(y) = y/2$ .



## Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow R, x \mapsto f(x)$  heißt *lineare Abbildung*, wenn für  $x, y \in D$  und einen Skalar  $c$  gelten, dass

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = cf(x). \quad (7)$$

Eine Abbildung, für die obige Eigenschaften nicht gelten, heißt *nicht-lineare Abbildung*.

### Bemerkungen

- Für  $a \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax$  linear, weil

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = acx = cax = cf(x). \quad (8)$$

- Für  $a, b \in \mathbb{R}$  dagegen ist die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax + b$  nicht-linear, weil z.B. für  $a := b := 1$  gilt, dass

$$f(x + y) = 1(x + y) + 1 = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y). \quad (9)$$

- Eine Abbildung der Form  $f(x) := ax + b$  heißt *affin-lineare Abbildung*
- Abbildungen der Form  $f(x) := ax + b$  werden auch als *lineare Funktionen* bezeichnet.

### Theorem (Lineare Abbildung der Null)

$f : D \rightarrow R$  sei eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$f(0) = 0. \quad (10)$$

#### Beweis

Mit der Additivität von  $f$  gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0). \quad (11)$$

Addition von  $-f(0)$  auf beiden Seiten obiger Gleichung ergibt dann

$$f(0) - f(0) = f(0) + f(0) - f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0). \quad (12)$$

□



## Definition (Funktionenarten)

In der statistischen Anwendung unterscheiden wir

- *univariate reellwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x), \quad (13)$$

- *multivariate reellwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (14)$$

- *multivariate vektorwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

### Bemerkung

- In der Physik werden multivariate reellwertige Funktionen auch *Skalarfelder* genannt.
- In der Physik werden multivariate vektorwertige Funktionen auch *Vektorfelder* genannt.
- In manchen Anwendungen kommen auch *matrixvariante matrixwertige Funktionen* zum Tragen.

---

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

**Elementare Funktionen**

Selbstkontrollfragen

Elementare univariate reellwertige Funktion der probabilistischen Datenanalyse sind

- die Polynomfunktionen,
- die Exponentialfunktion,
- die Logarithmusfunktion,
- die Gammafunktion.

Wir skizzieren diese Funktionen im Folgenden.

## Definition (Polynomfunktionen)

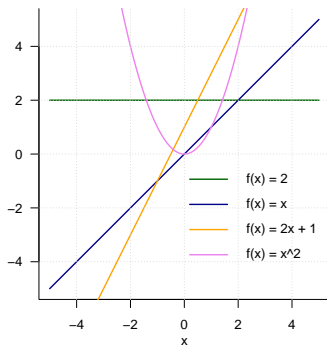
Eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{i=0}^k a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \quad (16)$$

heißt *Polynomfunktion*  $k$ -ten Grades mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ . Typische Polynomfunktionen sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet

Name	Funktionale Form	Koeffizienten
Konstante Funktion	$f(x) = a$	$a_0 := a, a_i := 0, i > 0$
Identitätsfunktion	$f(x) = x$	$a_0 := 0, a_1 := 1, a_i := 0, i > 1$
Lineare Funktion	$f(x) = ax + b$	$a_0 := b, a_1 := a, a_i := 0, i > 1$
Quadratfunktion	$f(x) = x^2$	$a_0 := 0, a_1 := 0, a_2 := 1, a_i := 0, i > 2$

## Graphen typischer Polynomfunktionen



## Theorem (Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Exponentialfunktion* ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (17)$$

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in ]-\infty, 0[ \Rightarrow \exp(x) \in ]0, 1[$ $x \in ]0, \infty[ \Rightarrow \exp(x) \in ]1, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
Spezielle Werte	$\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
Exponentialeigenschaften	$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $\exp(x) \exp(-x) = 1$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Exponentialeigenschaften sind beim Rechnen mit der Normalverteilung zentral.
- $e \approx 2.71$  heißt *Eulersche Zahl*.

## Theorem (Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Logarithmusfunktion* ist definiert als inverse Funktion der Exponentialfunktion,

$$\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \text{ mit } \ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

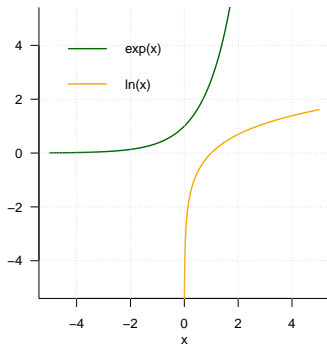
Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in ]0, 1[ \Rightarrow \ln(x) \in ]-\infty, 0[$ $x \in ]1, \infty[ \Rightarrow \ln(x) \in ]0, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
Spezielle Werte	$\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$ .
Logarithmeneigenschaften	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ $\ln(x^c) = c \ln(x)$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

### Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Logarithmeneigenschaften sind beim Rechnen mit Log-Likelihood-Funktionen zentral.
- “Die Logarithmusfunktion wandelt Produkte in Summen und Potenzen in Produkte um.”

## Graphen der Exponential- und Logarithmusfunktion





## Theorem (Gammafunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Gammafunktion* ist definiert durch

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^{\infty} \xi^{x-1} \exp(-\xi) d\xi \quad (19)$$

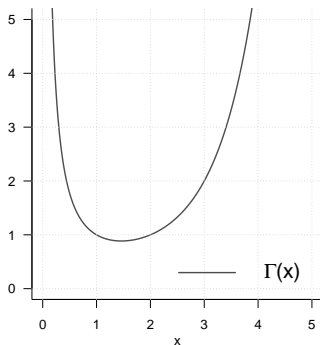
Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

Spezielle Werte	$\Gamma(1) = 1$
	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
	$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ .
Rekursionseigenschaft	Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

### Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Gammafunktion ist im Kontext von  $\chi^2$ -,  $t$ - und  $F$ -Verteilung zentral.

Graph der Gammafunktion auf  $]0, 5[$



---

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

**Selbstkontrollfragen**

1. Erläutern Sie die Komponenten der Funktionsschreibweise  $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$ .
2. Definieren Sie die Begriffe Bildmenge, Wertebereich, und Urbildmenge einer Funktion.
3. Definieren Sie die Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität einer Funktion.
4. Erläutern Sie, warum  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$  weder injektiv noch surjektiv ist.
5. Erläutern Sie, warum  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$  bijektiv ist.
6. Erläutern Sie die Komponenten der Schreibweise  $g \circ f : D \rightarrow S, x \mapsto (g \circ f)(x)$ .
7. Definieren Sie den Begriff der inversen Funktion.
8. Geben Sie die inverse Funktion von  $x^2$  auf  $[0, \infty[$  an.
9. Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung.
10. Definieren Sie die Begriffe der univariat- und multivariat-reellwertigen Funktion.
11. Definieren Sie Begriff der multivariaten vektorwertigen Funktion.
12. Skizzieren Sie die konstante Funktion für  $a := 1$  und die Identitätsfunktion.
13. Für  $a = 2$  und  $b = 3$ , skizzieren Sie die linear Funktion  $f(x) = ax + b$ .
14. Skizzieren Sie die Funktionen  $f(x) := (x - 1)^2$  und  $g(x) := (x + 3)^2$ .
15. Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.
16. Geben Sie Exponentialeigenschaften der Exponentialfunktion an.
17. Geben Sie die Logarithmeneigenschaften der Logarithmusfunktion an.