

Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(2) Summen, Produkte, Potenzen

Summen Produkte Potenzen Selbstkontrollfragen

Summen

Potenzen

Produkte

Selbstkontrollfragen

Summen - Summenzeichen

Definition (Summenzeichen)

Summen werden oft mithilfe des Summenzeichens

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \tag{1}$$

dargestellt. Dabei stehen

- Σ für das griechische Sigma, mnemonisch für Summe,
- das Subskript i = 1 f
 ür den Laufindex der Summanden und den Startindex.
- das Superskript n für den Endindex.
- $x_1, x_2, ..., x_n$ für die Summanden.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Summenzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $I:=\{1,5,7\}$ definiert, so ist $\sum_{i\in I}x_i:=x_1+x_5+x_7.$

Theorem (Rechenregeln für Summen)

Summen gleicher Summanden

$$\sum_{n=1}^{\infty} x = nx \tag{2}$$

Assoziativität bei Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)$$
(3)

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Aufspalten von Summen mit 1 < m < n

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \tag{5}$$

Umindizierung

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=m}^{n+m} x_{j-m} \tag{6}$$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Produkte - Produktzeichen

Definition (Produktzeichen)

Produkte werden oft mithilfe des Produktzeichens

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \tag{7}$$

dargestellt. Dabei stehen

- \prod für das griechische Pi, mnemonisch für Produkt,
- das Subskript i=1 für den Laufindex der Produkterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex.
- $x_1, x_2, ..., x_n$ für die Produktterme.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Produktzeichen Sinn.
- ullet Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{j=1}^n x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $J:=\mathbb{N}_2^0=\{0,1,2\}$ definiert, so ist $\sum_{j\in I}x_j:=x_0+x_1+x_2$.

Summen Produkte Potenzen Selbstkontrollfragen

Potenzen

Definition (Potenz)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die n-te Potenz von a definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a.$$
 (8)

Weiterhin ist für $a\in\mathbb{R}\setminus 0$ und $n\in\mathbb{N}^0$ die negative n-te Potenz von a definiert durch

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}.$$
 (9)

a wird dabei Basis und n wird Exponent genannt.

Theorem (Rechenregel für Potenzen)

Für $a,b\in\mathbb{R}$ und $n,m\in\mathbb{Z}$ mit $a\neq 0$ bei negativen Exponenten gelten

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{10}$$

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{nm} \tag{11}$$

$$(ab)^n = a^n b^n (12)$$

Potenzen

Definition (*n*-te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Wurzel von a definiert als die Zahl r, so dass

$$r^n = a. (13)$$

Theorem (Potenzschreibweise der *n*-ten Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und r die n-te Wurzel von a. Dann gilt

$$= a^{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

Beweis

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}} = a^{1} = a.$$
 (15)

Also gilt mit der Definition der n-ten Wurzel, dass $r=a\, \frac{1}{n}$.

Bemerkung

• Das Rechnen mit Quadratwurzeln wird durch $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sehr erleichtert.

Summen Produkte Potenzen Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

- 1. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^3 2$, $\sum_{i=1}^3 i^2$, und $\sum_{i=1}^3 \frac{2}{3}i$.
- 2. Schreiben Sie die Summe 1+3+5+7+9+11 mithilfe des Summenzeichens.
- 3. Schreiben Sie die Summe 0+2+4+6+8+10 mithilfe des Summenzeichens.
- 4. Definieren Sie das Produktzeichen.
- 5. Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die nte (negative) Potenz von a.
- 6. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und 2^5 . Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
- 7. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
- 8. Warum kann die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?
- 9. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}, 9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.