



Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

(5) Differentialrechnung

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a .
2. Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f .
3. Erläutern Sie die Symbole $f'(x)$, $\dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$.
4. Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f .
5. Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.
6. Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.
7. Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.
8. Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.
9. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := 3x^2 + \exp(-x^2) - x \ln(x)$.
10. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ für $\mu \in \mathbb{R}$.
11. Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.
12. Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.
13. Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.
14. Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.
15. Bestimmen Sie einen Extremwert von $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

SKF 1. Ableitung

Definieren Sie den Begriff der Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a .

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine univariate reellwertige Funktion.

$f'(a)$ bezeichnet den Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Wenn $f'(a)$ existiert, f heißt in $a \in I$ *differenzierbar*.

Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f .

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine univariate reellwertige Funktion.

Wenn f differenzierbar für alle $x \in I$ ist, bezeichnet f' die *Ableitung von f* und ist definiert als

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x). \quad (2)$$

SKF 3. Notationen

Erläutern Sie die Symbole $f'(x)$, $\dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$.

$f'(x)$, $\dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$ sind äquivalente Schreibweisen bzw. Notationen für Ableitungen univariater reelwertigen Funktion f .

- (1) die *Lagrange-Notation* f' und $f'(x)$,
- (2) die *Newton-Notation* \dot{f} und $\dot{f}(x)$,
- (3) die *Leibniz-Notation* $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df(x)}{dx}$ und
- (4) die *Euler-Notation* Df und $Df(x)$.

SKF 4. Zweite Ableitung

Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f .

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion und

$$f^{(1)} := f' \quad (3)$$

sei die Ableitung von f . Die 2-te Ableitung von f ist definiert durch

$$f^{(2)} := \left(f^{(1)}\right)' \text{ für } k \geq 0, \quad (4)$$

unter der Annahme, dass $f^{(1)}$ differenzierbar ist. Die *zweite Ableitung von f* ist definiert durch die Ableitung von f' , also

$$f'' := (f')'. \quad (5)$$

SKF 5. Ableitung - Summenregel

Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := \sum_{i=1}^n g_i(x)$ gilt $f'(x) = \sum_{i=1}^n g'_i(x)$.

SKF 6. Ableitung - Produktregel

Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := g_1(x)g_2(x)$ gilt $f'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x)$.

SKF 7. Ableitung - Quotientenregel

Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.

$$\text{Für } f(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \text{ gilt } f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)}.$$

SKF 8. Ableitung - Kettenregel

Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := g_1(g_2(x))$ gilt $f'(x) = g_1'(g_2(x))g_2'(x)$.

SKF 9. Ableitung bestimmen

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := 3x^2 + \exp(-x^2) - x \ln(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^1 + \exp(-x^2) \cdot (-2x^1) - (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= 6x - 2x \exp(-x^2) - \ln(x) - \frac{x}{x} \\ &= 6x - 2x \exp(-x^2) - \ln(x) - 1 \end{aligned}$$

SKF 10. Ableitung bestimmen

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) \cdot (1 - 0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) \end{aligned}$$

Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.

Definition (Extremstellen und Extremwerte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine univariate reellwertige Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in U$

- ein *lokales Minimum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \quad (6)$$

- ein *globales Minimum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in U, \quad (7)$$

- ein *lokales Maximum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \quad (8)$$

- *lokales Maximum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U. \quad (9)$$

Der Wert $x_0 \in U$ der Definitionsmenge von f heißt entsprechend *lokale* oder *globale Minimalstelle* oder *Maximalstelle*, der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ heißt entsprechend *lokales* oder *globales Minimum* oder *Maximum*. Generell heißt der Wert $x_0 \in U$ *Extremstelle* und der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ *Extremwert*.

SKF 12. notwendige Bedingung Extremum

Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.

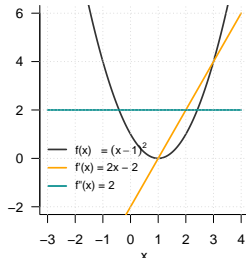
Definition (Notwendige Bedingung für Extrema)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Dann gilt

$$x_0 \text{ ist Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0. \quad (10)$$

Bemerkungen

- Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist die erste Ableitung von f in x_0 null.
- Sei zum Beispiel x_0 eine lokale Maximalstelle von f . Dann gilt
 - Links von x_0 steigt f an, rechts von x_0 fällt f ab.
 - In x_0 steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist $f'(x_0) = 0$.



Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.

Definition (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

f sei eine zweimal differenzierbare univariate reellwertige Funktion.

- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \quad (11)$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Minimum.

- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \quad (12)$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Maximum.

Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.

Definition (Standardverfahren der analytischen Optimierung)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Lokale Extremstellen von f können mit folgendem *Standardverfahren der analytischen Optimierung* identifiziert werden:

- (1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f .
- (2) Bestimmen von Nullstellen x^* von f' durch Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^* .
 \Rightarrow Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f .
- (3) Evaluation von $f''(x^*)$.
 \Rightarrow Wenn $f''(x^*) > 0$, dann ist x^* lokale Minimumstelle von f .
 \Rightarrow Wenn $f''(x^*) < 0$, dann ist x^* lokale Maximumstelle von f .
 \Rightarrow Wenn $f''(x^*) = 0$, dann ist x^* keine Extremstelle von f .

SKF 15. Extremwert bestimmen

Bestimmen Sie einen Extremwert von $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \quad (13)$$

(1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f .

Die erste Ableitung von f ergibt sich mit der Kettenregel zu

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \right) \quad (14)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{2}(x - \mu) \cdot 1\right) \quad (15)$$

$$= -(x - \mu) \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \quad (16)$$

(forgeführt).

Die zweite Ableitung von f ergibt sich mit der Produktregel zu

$$f''(x) = -1 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) + (-(x - \mu)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{2}(x - \mu) \cdot 1\right) \quad (17)$$

$$= -\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) + (x - \mu) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \cdot (x - \mu) \quad (18)$$

$$= -\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) + (x - \mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \quad (19)$$

$$= (x - \mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \quad (20)$$

$$= (x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right) \quad (21)$$

SKF 15. Extremwert bestimmen

(forgeführt).

(2) Bestimmen von Nullstellen x^* von f' durch Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^* .

⇒ Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f .

Bei $f'(x) = -(x - \mu) \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right)$ geht das einfacher: Die Funktion f' wird null, wenn entweder der erste oder der zweite Produktterm null werden. Der Exponentialterm $\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right)$ kann nicht null werden. Der erste Term $(x - \mu)$ wird null, wenn $x = \mu$. Daraus folgt, dass $f' = 0$, wenn $x = \mu$.

SKF 15. Extremwert bestimmen

(forgeführt).

(3) Evaluation von $f''(x^*)$.

\Rightarrow Wenn $f''(x^*) > 0$, dann ist x^* lokale Minimumstelle von f .

\Rightarrow Wenn $f''(x^*) < 0$, dann ist x^* lokale Maximumstelle von f .

\Rightarrow Wenn $f''(x^*) = 0$, dann ist x^* keine Extremstelle von f .

$$\begin{aligned}f''(\mu) &= (\mu^2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu - \mu)^2\right) \\&= (\mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2\right) \\&= (-1) \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 0\right) \\&= -\exp(0) \\&= -1\end{aligned}$$

$\Rightarrow f''(\mu) < 0 \Rightarrow \mu$ ist eine lokale Maximumstelle von f .