Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(4) Funktionen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Funktion)

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. D wird dabei *Definitionsmenge von* f und Z wird *Zielmenge von* f genannt. Wir schreiben

$$f : D \to Z, x \mapsto f(x), \tag{1}$$

wobei $f : D \to Z$ gelesen wird als "die Funktion f bildet alle Elemente der Menge D eindeutig auf Elemente in Z ab" und $x \mapsto f(x)$ gelesen wird als "x, welches ein Element von D ist, wird durch die Funktion f auf $f(x)$ abgebildet, wobei $f(x)$ ein Element von Z ist". Der Pfeil $\to$ steht für die Abbildung zwischen den Mengen D und Z, der Pfeil $\mapsto$ steht für die Abbildung zwischen einem Element von D und einem Element von Z.

Bemerkungen

- Es ist zentral, zwischen der *Funktion* f als Zuordnungsvorschrift und einem *Wert* der Funktion $f(x)$ als Element von Z zu unterscheiden.
- x ist der Funktionsinput (auch *Argument* der Funktion genannt), $f(x)$ der Funktionsoutput.
- Üblicherweise folgt $f(x)$ die Definition der *funktionalen Form* von f, z.B.

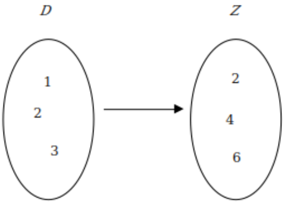
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto f(x) := x^2. \tag{2}$$

Veranschaulichung - Definitions- und Zielmenge

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 2x.$$

´



Bermerkung:

- Die aufgeführen Werte in Definitions- und Zielbereich (1,2,3 und 2,4,6) sind nicht vollständig, sondern nur beispielhaft.

Definition (Bildmenge, Urbildmenge)

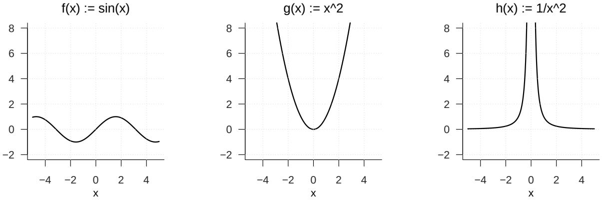
Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und es seien $D' \subseteq D$ und $Z' \subseteq Z$.

- Die Menge
$$f(D') := \{z \in Z | \text{Es gibt ein } x \in D' \text{ mit } z = f(x)\} \tag{3}$$
heißt die *Bildmenge von* D' und $f(D) \subseteq Z$ heißt der *Wertebereich* von f.
- Die Menge
$$f^{-1}(Z') := \{x \in D | f(x) \in Z'\} \tag{4}$$
heißt die *Urbildmenge von* Z'. $x \in D$ mit $z = f(x) \in Z$ heißt auch *Urbild von* z.

Bemerkung

- Wertebereich $f(D)$ und Zielmenge Z sind nicht notwendigerweise identisch.

Abbildung, Bild- und Urbilder - Beispiele

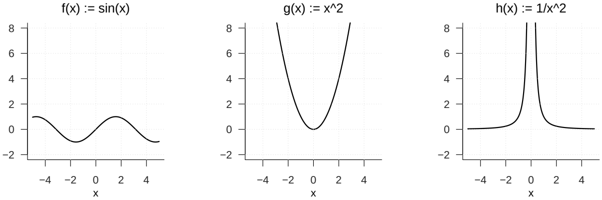


	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$	$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x)$
Funktionale Form	$f(x) := \sin(x)$	$g(x) := x^2$	$h(x) := \frac{1}{x^2}$
Definitionsmenge	$D := \mathbb{R}$	$D := \mathbb{R}$	$D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Zielmenge	$Z := \mathbb{R}$	$Z := \mathbb{R}$	$Z := \mathbb{R}$
Wertebereich	$f(D) = [-1, 1] \subseteq Z$	$g(D) = [0, \infty[\subseteq Z$	$h(D) = \mathbb{R}^+ \subseteq Z$
Bild von $x = 1 \in D$	$f(1) = \sin(1) = 0.84$	$g(1) = 1^2 = 1$	$h(1) = \frac{1}{1^2} = 1$
Ein Urbild von $z = 1 \in Z$	$f_1^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$	$g_1^{-1}(1) = 1$	$h_1^{-1}(1) = 1$

Anmerkungen:

- Das Bild der gesamten Defintionsmenge D entspricht dem Wertebereicht $f(D) \subseteq Z$.
- Bei allen drei Beispielen existieren zu jedem Bild z mehrere Urbilder $f^{-1}(z)$. Solche Funktionen heißen *nicht-injektiv*.
- Weitere Urbilder von $x = 1$ sind $f_2^{-1}(1) = -\frac{3\pi}{2}$, $g_2^{-1}(1) = 1$ und $h_2^{-1}(1) = -1$
- Außerdem hat in allen drei Beispielen nicht jedes Element der Zielmengen Z ein Urbild in den Definitionsmengen D (*nicht-surjektiv*).

Abbildung, Bilder und Urbilder - Beispiele



Es seien $D' =]0,2] \subset D$ und $Z' =]0,4] \subset Z$, dann ergeben sich folgende Bild- Urbildmengen.

Bildmenge von D'	$f(D') =]0,1[\subset Z$	$g(D') =]0,4] \subset Z$	$h(D') = \ [0.25, \infty[\subset Z$
Urbildmenge von Z'	$f^{-1}(Z')$	$g^{-1}(Z')$	$h^{-1}(Z')$
	$= \ldots]0,\pi[\cap]2\pi, 3\pi[\ \ldots$	$= [-2, 0[\cap]0,2]$	$=]-\infty, 0.25] \cap [0.25, \infty[$

Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

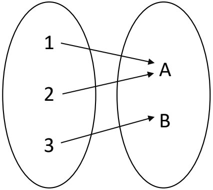
Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion.

- Die Funktion f heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Bild $z \in f(D)$ genau ein Urbild $x \in D$ gibt. Äquivalent gilt, dass f injektiv ist, wenn aus $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist.
- Die Funktion f heißt *surjektiv*, wenn $f(D) = Z$ gilt, wenn also jedes Element der Zielmenge Z ein Urbild in der Definitionsmenge D hat.
- Die Funktion f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

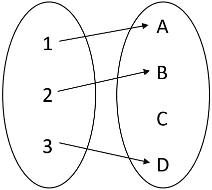
Bemerkungen

- Bijektive Abbildungen heißen auch *eineindeutige Funktionen* (engl. *one-to-one mappings*).

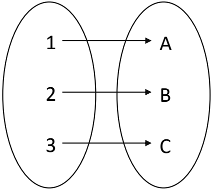
A Nicht-injektiv



B Nicht-surjektiv

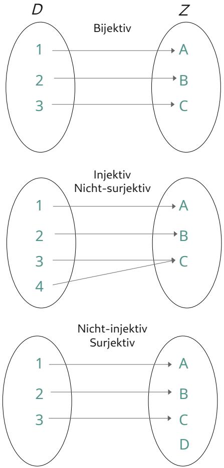


C Bijektiv

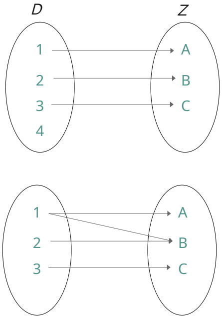


Abbildungen - Beispiele

Abbildungen



__keine__ Abbildungen



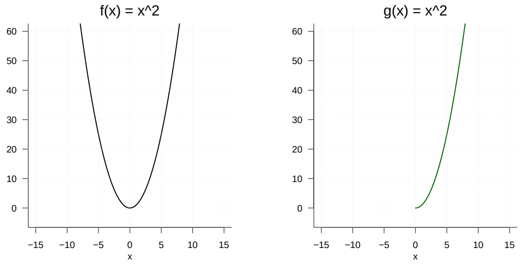
Funktionseigenschaften - Beispiel

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$$

und

$$g : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto g(x) := x^2$$



- f ist nicht injektiv, weil z.B. für $x_1 = 2 \neq -2 = x_2$ gilt, dass $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$.
- Weiterhin ist f auch nicht surjektiv, weil z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild unter f hat.
- g ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Funktiontypen - Verkettung

Definition (Verkettete Funktionen)

Es seien $f : D \to R$ und $g : R \to S$ zwei Funktionen, wobei die Zielmenge von f mit der Definitionsmenge von g übereinstimmen. Dann ist durch

$$g \circ f : D \to S, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \tag{5}$$

eine Funktion definiert, die die *Verkettung von f und g* genannt wird.

Bemerkungen

- $g \circ f$ bezeichnet die Funktion.
- $(g \circ f)(x)$ bezeichnet ein Element in S.
- Erst wird f auf x angewendet, dann wird g auf $f(x)$ angewendet.

Beispiel:

- Für $f(x) := -x^2$ und $g(x) := \exp(x)$ ist $(g \circ f)(x) = \exp(-x^2)$.

Funktionentypen - Inverse

Definition (Inverse Funktion)

Es sei $f : D \to R, x \mapsto f(x)$ eine bijektive Funktion. Dann heißt die Funktion f^{-1} mit

$$f^{-1} \circ f : D \to D, x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \tag{6}$$

inverse Funktion (oder *Umkehrfunktion*) von f.

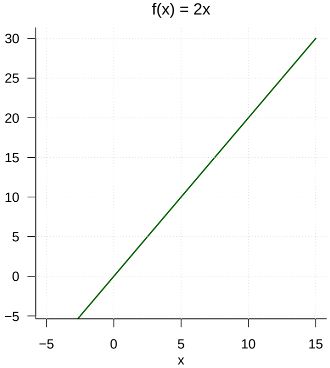
Bemerkungen

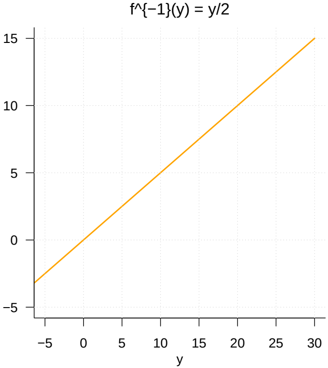
- Weil f bijektiv ist, wird jedem $x \in D$ genau ein $z = f(x) \in Z$ zugeordnet.
- Jedem $z \in Z$ wird also auch genau ein $x \in D$ zugeordnet.
- Die inverse Funktion einer bijektiven Funktion ist also auch bijektiv.

Inverse - Beispiel

Beispiel:

- Beispiel: Die inverse Funktion von $f(x) := 2x =: y$ ist $f^{-1}(y) = y/2$.





Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $f : D \to R, x \mapsto f(x)$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für $x, y \in D$ und einen Skalar c gelten, dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = cf(x). \tag{7}$$

Eine Abbildung, für die obige Eigenschaften nicht gelten, heißt *nicht-lineare Abbildung*.

Bemerkungen

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax$ linear, weil

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = acx = cax = cf(x). \tag{8}$$

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ dagegen ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax + b$ nicht-linear, weil z.B. für $a := b := 1$ gilt, dass

$$f(x+y) = 1(x+y) + 1 = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y). \tag{9}$$

- Eine Abbildung der Form $f(x) := ax + b$ heißt *affin-lineare Abbildung*
- Abbildungen der Form $f(x) := ax + b$ werden auch als *lineare Funktionen* bezeichnet.

Theorem (Lineare Abbildung der Null)

$f : D \to R$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$f(0) = 0. \tag{10}$$

Beweis

Mit der Additivität von f gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0). \tag{11}$$

Addition von $-f(0)$ auf beiden Seiten obiger Gleichung ergibt dann

$$f(0) - f(0) = f(0) + f(0) - f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0). \tag{12}$$

□

Definition (Funktionenarten)

In der statistischen Anwendung unterscheiden wir

- *univariate reellwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x), \tag{13}$$
- *multivariate reellwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f(x_1, ..., x_n), \tag{14}$$
- *multivariate vektorwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Bemerkung

- In der Physik werden multivariate reellwertige Funktionen auch *Skalarfelder* genannt.
- In der Physik werden multivariate vektorwertige Funktionen auch *Vektorfelder* genannt.
- In manchen Anwendungen kommen auch *matrixvariate matrixwertige Funktionen* zum Tragen.

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Elementare Funktionen

Elementare univariate reellwertige Funktion der probabilistischen Datenanalyse sind

- die Polynomfunktionen,
- die Exponentialfunktion,
- die Logarithmusfunktion,
- die Gammafunktion.

Wir skizzieren diese Funktionen im Folgenden.

Definition (Polynomfunktionen)

Eine Funktion der Form

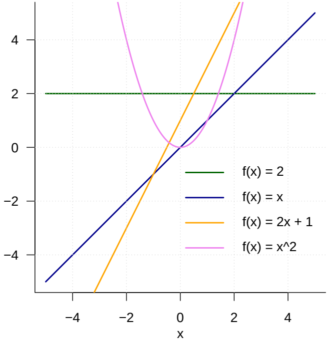
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \tag{16}$$

heißt *Polynomfunktion* k-ten Grades mit Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$. Typische Polynomfunktionen sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet

Name	Funktionale Form	Koeffizienten
Konstante Funktion	$f(x) = a$	$a_0 := a$, $a_i := 0, i > 0$
Identitätsfunktion	$f(x) = x$	$a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_i := 0, i > 0$
Lineare Funktion	$f(x) = ax + b$	$a_0 := b$, $a_1 := a$, $a_i := 0, i > 1$
Quadratfunktion	$f(x) = x^2$	$a_0 := 0$, $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_i := 0, i > 2$

Elementare Funktionen - Polynom

Graphen typischer Polynomfunktionen



Theorem (Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Exponentialfunktion* ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{17}$$

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in]-\infty, 0[\Rightarrow \exp(x) \in]0, 1[$
	$x \in]0, \infty[\quad \Rightarrow \exp(x) \in]1, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
Spezielle Werte	$\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
Exponentialeigenschaften	$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
	$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
	$\exp(x)\exp(-x) = 1$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Exponentialeigenschaften sind beim Rechnen mit der Normalverteilung zentral.
- $e \approx 2.71$ heißt *Eulersche Zahl*.

Theorem (Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Logarithmusfunktion* ist definiert als inverse Funktion der Exponentialfunktion,

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \text{ mit } \ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

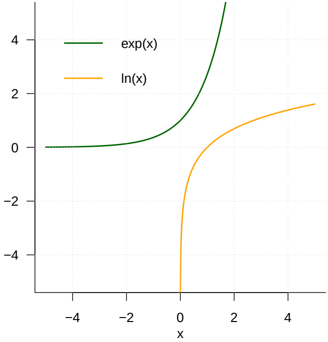
Wertebereich	$x \in]0, 1[\ \Rightarrow \ln(x) \in]-\infty, 0[$
	$x \in]1, \infty[\Rightarrow \ln(x) \in]0, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
Spezielle Werte	$\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
Logarithmeneigenschaften	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
	$\ln(x^c) = c \ln(x)$
	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Logarithmeneigenschaften sind beim Rechnen mit Log-Likelihood-Funktionen zentral.
- "Die Logarithmusfunktion wandelt Produkte in Summen und Potenzen in Produkte um."

Elementare Funktionen - Exponential- und Logarithmusfunktion

Graphen der Exponential- und Logarithmusfunktion



Theorem (Gammafunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Gammafunktion* ist definiert durch

$$\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty \xi^{x-1} \exp(-\xi)\, d\xi \tag{19}$$

Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

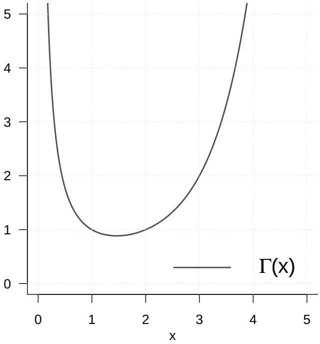
Spezielle Werte	$\Gamma(1) = 1$
	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
	$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.
Rekursionseigenschaft	Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Gammafunktion ist im Kontext von χ^2-, t- und F-Verteilung zentral.

Elementare Funktionen - Gammafunktion

Graph der Gammafunktion auf $]0, 5[$



Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Komponenten der Funktionsschreibweise $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$.
2. Definieren Sie die Begriffe Bildmenge, Wertebereich, und Urbildmenge einer Funktion.
3. Definieren Sie die Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität einer Funktion.
4. Erläutern Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ weder injektiv noch surjektiv ist.
5. Erläutern Sie, warum $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ bijektiv ist.
6. Erläutern Sie die Komponenten der Schreibweise $g \circ f : D \to S, x \mapsto (g \circ f)(x)$.
7. Definieren Sie den Begriff der inversen Funktion.
8. Geben Sie die inverse Funktion von x^2 auf $[0, \infty[$ an.
9. Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung.
10. Definieren Sie die Begriffe der univariat-und multivariat-reellwertigen Funktion.
11. Definieren Sie Begriff der multivariaten vektorwertigen Funktion.
12. Skizzieren Sie die konstante Funktion für $a := 1$ und die Identitätsfunktion.
13. Für $a = 2$ und $b = 3$, skizzieren Sie die linear Funktion $f(x) = ax + b$.
14. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) := (x - 1)^2$ und $g(x) := (x + 3)^2$.
15. Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.
16. Geben Sie Exponentialeigenschaften der Exponentialfunktion an.
17. Geben Sie die Logarithmeneigenschaften der Logarithmusfunktion an.