Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(1) Mengen

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Diskutieren Sie die Begriffe Definition, Theorem, Beweis.
2. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
3. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
4. Für Mengen M, N erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M, m \notin N, M \subseteq N, M \subset N$.
5. Definieren Sie den Begriff der Kardinalität einer Menge.
6. Definieren Sie den Begriff der Potenzmenge einer Menge.
7. Es sei $M := \{a, b\}$. Bestimmen Sie $|M|$ und $\mathcal{P}(M)$.
8. Es seien $M := \{a, b\}, N := \{a, c, d\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.
9. Erläutern Sie die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}^0$.
10. Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.
11. Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.
12. Definieren Sie die Begriffe des abgeschlossenen, offenen, und halboffenen Intervalls.
13. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
14. Definieren Sie die Menge $\mathbb{R}^n$.

Diskutieren Sie die Begriffe Definition, Theorem und Beweis.

- Eine **Definition** (oder auch *Axiom*) ist ein Grundsatz eines logischen Systems, der innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird. Definitionen können nur nach ihrer Nützlichkeit innerhalb eines logischen Systems bewertet werden.
- Ein **Theorem** (oder auch *Satz*) ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als richtig erkannt, dass heißt, aus Definitionen und/oder bereits bekannten Sätzen hergeleitet werden kann. Theoreme sind die "empirischen Ergebnisse" der Mathematik.
- Ein **Beweis** ist eine logische Argumentationskette, die auf bekannte Definitionen und Theoreme zurückgreift, um die Richtigkeit eines Theorems zu belegen. Kurze Beweise tragen oft zum Verständnis eines Theorems bei, lange Beweise eher nicht. Beweise sind die Antwort auf die Frage warum eine mathematische Aussage gilt ("Warum ist das so?").

Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.

Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als "eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen". Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist.

Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.

(1) Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$.

(2) Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$.

(3) Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$.

Für Mengen M, N erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M, m \notin N, M \subseteq N, M \subset N$.

- $m \in M$ bedeutet m ist ein Element der Menge M.
- $m \notin N$ bedeutet m ist *kein* Element der Menge N.
- $M \subseteq N$ bedeutet die Menge M ist eine Teilmenge der Menge N. Dabei ist M eine *Untermenge* von N und N eine *Obermenge* von N.
- $M \subset N$ bedeutet die Menge M ist eine echte Teilmenge der Menge N. Das heißt für jedes Element $m \in M$ gilt auch $m \in N$, aber es gibt mindestens ein Element $n \in N$ für das gilt $n \notin M$. Anders ausgedrückt, es gibt mindestens ein Element n der Menge N, das *nicht* auch ein Element der Menge M ist.

Definieren Sie den Begriff der Kardinalität einer Menge.

Definition (Kardinalität, leere Menge)

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet. Eine Menge mit Kardinalität 0 heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Definieren Sie den Begriff der Potenzmenge einer Menge.

Definition (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von* M und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Die leere Untermenge von M und M selbst sind immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

Es sei $M := \{a, b\}$. Bestimmen Sie $|M|$ und $\mathcal{P}(M)$.

$|M| = 2$

$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Es seien $M := \{a, b\}, N := \{a, c, d\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.

$M \cup N = \{a, b, c, d\}$

$M \cap N = \{a\}$

$M \setminus N = \{b\}$

$M \Delta N = \{b, c, d\}$.

Erläutern Sie die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}^0$.

- $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{N}_n$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen der Ordnung n.
  Bsp. für $n = 3$: $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$.
- $\mathbb{N}^0$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null.

Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Der Unterschied zwischen der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ liegt darin, dass $\mathbb{Z}$ auch negative Zahlen und die Null beinhaltet und $\mathbb{N}$ nicht.

Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.

Der Unterschied zwischen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegt darin, dass $\mathbb{R}$ auch die Menge der irrationalen Zahlen (z.B. e, π und $\sqrt{2}$) umfasst und $\mathbb{Q}$ nur rationale Zahlen.

Definieren Sie die Begriffe des abgeschlossenen, offenen, und halboffenen Intervalls.

Definition (Intervalle)

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \tag{1}$$
- das *offene Interval*
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \tag{2}$$
- die *halboffenen Intervalle*
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}. \tag{3}$$

Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.

$M \times N$ representiert das *Kartesische Produkt der Mengen M und N*. Das kartesische Produkt bezeichnet die Menge aller geordneten Tupel (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$.

Definieren Sie die Menge $\mathbb{R}^n$.

Definition (Die Menge $\mathbb{R}^n$)

Das n-fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} := \{x := (x_1, , \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

und "$\mathbb{R}$ *hoch* n" gesprochen. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ typischerweise als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

und nennen sie n-*dimensionale Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ nennt man *Skalare*.