Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(2) Summen, Produkte, Potenzen

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Summen - Summenzeichen

Definition (Summenzeichen)

Summen werden oft mithilfe des *Summenzeichens*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1}$$

dargestellt. Dabei stehen

- Σ für das griechische *S*igma, mnemonisch für *S*umme,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Summanden und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die Summanden.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Summenzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $I := \{1, 5, 7\}$ definiert, so ist $\sum_{i \in I} x_i := x_1 + x_5 + x_7$.

Summen - Rechenregeln

Theorem (Rechenregeln für Summen)

Summen gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^{n} x = nx \tag{2}$$

Assoziativität bei Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \tag{3}$$

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Aufspalten von Summen mit $1 < m < n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \tag{5}$$

Umindizierung

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \tag{6}$$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Summen unter Anwendung der Rechenregeln für Summen.

1. $\sum_{i=1}^{6} 5$
2. $\sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{3} 2i$
3. $\sum_{i=1}^{3} 3i$

Spalten Sie die folgende Summe in 2 Summen auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\sum_{i=1}^{5} (i+2)$

Indizieren Sie die folgende Summe neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\sum_{i=0}^{5} 2i$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Summen unter Anwendung der Rechenregeln für Summen.

1. $\sum_{i=1}^{6} 5 = 6 \cdot 5 = 30$
2. $\sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{3} 2i = \sum_{i=1}^{3} (i + 2i) = \sum_{i=1}^{3} (3i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 18$
3. $\sum_{i=1}^{3} 3i = 3 \sum_{i=1}^{3} i = 3 \cdot (1 + 2 + 3) = 18$

Spalten Sie die folgende Summe in 2 Summen auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\sum_{i=1}^{5} (i + 2) = \sum_{i=1}^{2} (i + 2) + \sum_{i=3}^{5} (i + 2)$

Indizieren Sie die folgende Summe neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\sum_{i=0}^{5} 2i = \sum_{j=5}^{7} 2(i - 5)$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Definition (Produktzeichen)

Produkte werden oft mithilfe des *Produktzeichens*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \tag{7}$$

dargestellt. Dabei stehen

- $\prod$ für das griechische *P*i, mnemonisch für *P*rodukt,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Produkterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ für die Produktterme.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Produktzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{j=1}^{n} x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $J := \mathbb{N}_2^0 = \{0, 1, 2\}$ definiert, so ist $\prod_{j \in J} x_j := x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$.

Produkte - Rechenregeln

Theorem (Rechenregeln für Produkte, Teil 1/2)

Produkte gleicher Produktterme

$$\prod_{i=1}^{n} x = x^n \tag{8}$$

Assoziativität bei Produkten gleicher Länge

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \tag{9}$$

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\prod_{i=1}^{n} a x_i = a \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{10}$$

Aufspalten von Produkten mit $1 < m < n$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{m} x_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} x_i \tag{11}$$

Produkte - Rechenregeln (Fortgeführt)

Theorem (Rechenregeln für Produkte , Teil 2/2)

Umindizierung

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = \prod_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \tag{12}$$

Vertauschen der Produktfolge bei Doppelprodukten

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{ij} \tag{13}$$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Produkte unter Anwendung der Rechenregeln für Produkte

1. $\prod_{i=1}^{5} 2$
2. $\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{2}i \cdot \prod_{i=1}^{3} 2i$
3. $\prod_{i=1}^{3} 3i$

Spalten Sie das folgende Produkt in 2 Produkte auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\prod_{i=1}^{5}(7i + 3)$

Indizieren Sie das folgende Produkt neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\prod_{i=0}^{5}(i^2 + 9)$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Produkte unter Anwendung der Rechenregeln für Produkte

1. $\prod_{i=1}^{5} 2 = 2^5 = 32$
2. $\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{2} i \cdot \prod_{i=1}^{3} 2i = \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2} i \cdot 2i\right) = \prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36$
3. $\prod_{i=1}^{3} 3i = 3 \prod_{i=1}^{3} i = 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 18$

Spalten Sie das folgende Produkt in 2 Produkte auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\prod_{i=1}^{5} (7i + 3) = \prod_{i=1}^{2} (7i + 3) + \prod_{i=3}^{5} (7i + 3)$

Indizieren Sie das folgende Produkt neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\prod_{i=0}^{5} (i^2 + 9) = \prod_{j=5}^{7} ((i - 5)^2 + 9)$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Definition (Potenz)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die *n-te Potenz von a* definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a. \tag{14}$$

Weiterhin ist für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $n \in \mathbb{N}^0$ die *negative n-te Potenz von a* definiert durch

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}. \tag{15}$$

a wird dabei *Basis* und n wird *Exponent* genannt.

Theorem (Rechenregel für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ bei negativen Exponenten gelten

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{16}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{17}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{18}$$

Übungsbeispiele

Vereinfachen und berechnen Sie folgende Potenzen

1. $3^5 \cdot 3^{-3}$
2. $(5^{-2})^{-1}$
3. $3^2 \cdot 2^2$

Übungsbeispiele

Vereinfachen und berechnen Sie folgende Potenzen

1. $3^5 \cdot 3^{-3} = 3^2 = 9$
2. $(5^{-2})^{-1} = 5^2 = 25$
3. $3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$

Definition (n-te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die *n-te Wurzel von a* definiert als die Zahl r, so dass

$$r^n = a. \tag{19}$$

Theorem (Potenzschreibweise der n-ten Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und r die n-te Wurzel von a. Dann gilt

$$r = a^{\frac{1}{n}} \tag{20}$$

Beweis

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}} = a^1 = a. \tag{21}$$

Also gilt mit der Definition der n-ten Wurzel, dass $r = a^{\frac{1}{n}}$.

□

Bemerkung

- Das Rechnen mit Quadratwurzeln wird durch $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sehr erleichtert.

Übungsbeispiele

Berechnen Sie folgende Terme

1. $4^{\frac{1}{2}}$
2. $(25^{\frac{1}{4}})^2$

Übungsbeispiele

Berechnen Sie folgende Terme

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 4$
2. $(25^{\frac{1}{4}})^2 \; 25^{\frac{1}{4} \cdot 2} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^{3} 2$, $\sum_{i=1}^{3} i^2$, und $\sum_{i=1}^{3} \frac{2}{3} i$.
2. Schreiben Sie die Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ mithilfe des Summenzeichens.
3. Schreiben Sie die Summe $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ mithilfe des Summenzeichens.
4. Definieren Sie das Produktzeichen.
5. Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die $n$te (negative) Potenz von a.
6. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und $(2^5)^{-2}$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
7. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
8. Warum kann die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?
9. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}, 9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.