



Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

(1) Mengen

Definition (Mengen und Mengendefinition)

Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als "eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen". Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M \quad (1)$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist. Zur Definition von Mengen gibt es mindestens folgende Möglichkeiten:

- (1) Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$.
- (2) Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$.
- (3) Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$.

Bemerkungen

- $\{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ wird als " $x \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass $x < 4$ ist" gelesen.
- Die Bedeutung von \mathbb{N} und \mathbb{N}_3 wird im Folgenden erläutert.
- Mengen sind *ungeordnet*, d.h. $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$ etc.

Definition (Teilmengen und Mengengleichheit)

- Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B , wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$. Ist A eine Teilmenge von B ist, so schreibt man

$$A \subseteq B \quad (2)$$

und nennt A *Untermenge* von B und B *Obermenge* von A .

- Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge B , wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, es aber zumindest ein Element $b \in B$ gibt, für das gilt $b \notin A$. Ist A eine echte Teilmenge von B , so schreibt man

$$A \subset B. \quad (3)$$

- Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, und wenn für jedes Element $b \in B$ gilt, dass auch $b \in A$. Sind die Mengen A und B gleich, so schreibt man

$$A = B. \quad (4)$$

Beispiel

- Es seien $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$, $C := \{1, 2\}$. Dann gilt:
 $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subseteq C$, $C \subseteq B$ und $B = C$.

Definition (Kardinalität, leere Menge)

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet. Eine Menge mit Kardinalität 0 heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset bezeichnet.

Beispiele

- Für $M := \{1, 2, 3\}$ gilt $|M| = 3$.
- Für $M := \{a, b\}$ gilt $|M| = 2$.
- Für $M := \{x, y, z, \pi\}$ gilt $|M| = 4$.
- Für $M := \emptyset$ gilt $|M| = 0$.

Definition (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von M* und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Die leere Untermenge von M und M selbst sind immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

Bemerkung

- Ohne Beweis halten wir fest, dass gilt $|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beispiele

- Für $M := \{1, 2, 3\}$ gilt $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- Für $N := \{5, 6\}$ gilt $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}\}$.

Definition (Mengenoperationen)

M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung* von M und N ist definiert als die Menge

$$M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}, \quad (5)$$

wobei *oder* im inklusiven Sinne als *und/oder* zu verstehen ist.

- Der *Durchschnitt* von M und N ist definiert als die Menge

$$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}. \quad (6)$$

- Die *Differenz* von M und N ist definiert als die Menge

$$M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}. \quad (7)$$

- Die *symmetrische Differenz* von M und N ist definiert als die Menge

$$M \Delta N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N, \text{ aber } x \notin M \cap N\}, \quad (8)$$

wobei *oder* hier also im exklusiven Sinne zu verstehen ist.

Beispiel

- Für $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{2, 3, 4, 5\}$ gilt

$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M \cap N = \{2, 3\}, M \setminus N = \{1\}, N \setminus M = \{4, 5\}, M \Delta N = \{1, 4, 5\}.$$

Definition (Partition)

M sei eine Menge und $P := \{N_i\}$ sei eine Menge von Mengen N_i mit $i = 1, \dots, n$, so dass gilt

$$M = \cup_{i=1}^n N_i \text{ und } N_i \cap N_j = \emptyset \text{ für } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (9)$$

Dann heißt P eine *Partition* (oder *Zerlegung*) von M .

Bemerkung

- $M = \cup_{i=1}^n N_i$ drückt aus, dass die Menge M der *Vereinigung* aller Teilmengen N_i mit $i = 1, \dots, n$ ist.
- $N_i \cap N_j = \emptyset$ für $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j$ drückt aus, dass der *Durchschnitt* aller Teilmengen mit jeweils allen Teilmengen leer (\emptyset) ist. Man sagt auch, die Teilmengen sind *diskunkt*.
- Intuitiv entspricht die Partition einer Menge dem Aufteilen der Menge in disjunkte Teilmengen.

Beispiele

- Partitionen von $M := \{1, 2, 3, 4\}$ sind zum Beispiel

$$P_1 := \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, P_2 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, P_3 := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}. \quad (10)$$

Definition (Zahlenmengen)

Es bezeichnen

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ die *natürlichen Zahlen der Ordnung n* ,
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die *natürlichen Zahlen* und Null,
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ die *rationalen Zahlen*,
- \mathbb{R} die *reellen Zahlen*, und
- $\mathbb{C} := \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1}\}$ die *komplexen Zahlen*.

Bemerkungen

- \mathbb{R} umfasst die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie z.B. e , π und $\sqrt{2}$.
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definition (Intervalle)

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad (11)$$

- das *offene Intervall*

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \quad (12)$$

- die *halboffenen Intervalle*

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}. \quad (13)$$

Bemerkungen

- Positiv Unendlich (∞) und negativ Unendlich ($-\infty$) sind keine Elemente von \mathbb{R} .
- Es gilt also immer $] - \infty, b]$ oder $] - \infty, b[$ bzw. $]a, \infty[$ oder $[a, \infty[$, sowie $\mathbb{R} =] - \infty, \infty[$.

Definition (Kartesische Produkte)

M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M und N* die Menge aller geordneten Tupel (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m, n) | m \in M, n \in N\}. \quad (14)$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M. \quad (15)$$

Seien weiterhin M_1, \dots, M_n Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M_1, \dots, M_n* die Menge aller geordneten n -Tupel (m_1, \dots, m_n) mit $m_i \in M_i$ für $i = 1, \dots, n$, formal

$$\prod_{i=1}^n M_i := M_1 \times \dots \times M_n := \{(m_1, \dots, m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}. \quad (16)$$

Das n -fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^n M := \{(m_1, \dots, m_n) | m_i \in M\}. \quad (17)$$

Definition (Die Menge \mathbb{R}^n)

Das n -fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^n \mathbb{R} := \{x := (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \quad (18)$$

und " \mathbb{R} hoch n " gesprochen. Wir schreiben die Elemente von \mathbb{R}^n typischerweise als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

und nennen sie *n -dimensionale Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ nennt man *Skalare*.

Beispiele

- Ein Bsp für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.76 \\ 0.23 \\ 7.10 \end{pmatrix}$, Ein Bsp für $x \in \mathbb{R}^2$ ist $x = \begin{pmatrix} 2.81 \\ 4.22 \end{pmatrix}$.

Selbstkontrollfragen

1. Diskutieren Sie die Begriffe Definition, Theorem, Beweis.
2. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
3. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
4. Für Mengen M, N erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M, m \notin N, M \subseteq N, M \subset N$.
5. Definieren Sie den Begriff der Kardinalität einer Menge.
6. Definieren Sie den Begriff der Potenzmenge einer Menge.
7. Es sei $M := \{a, b\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(M)$.
8. Es seien $M := \{a, b\}, N := \{a, c, d\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.
9. Erläutern Sie die Symbole \mathbb{N}, \mathbb{N}_n , und \mathbb{N}^0 .
10. Erläutern Sie den Unterschied zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Z} .
11. Erläutern Sie den Unterschied zwischen \mathbb{R} und \mathbb{Q} .
12. Definieren Sie die Begriffe des abgeschlossenen, offenen, und halboffenen Intervalls.
13. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
14. Definieren Sie die Menge \mathbb{R}^n .