Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(6) Integralrechnung

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Stammfunktion einer univariaten reellwertigen Funktion.
2. Definieren Sie den Begriff des unbestimmten Integrals einer univariaten reellwertigen Funktion.
3. Erläutern Sie den Begriff des Riemanschen Integrals.
4. Geben Sie den ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.
5. Geben Sie den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.
6. Erläutern Sie den Begriff des uneigentlichen Integrals.
7. Erläutern Sie den Begriff des mehrdimensionalen Integrals.
8. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 2x\,dx$.

SKF 1. *Stammfunktion*

Definieren Sie den Begriff der Stammfunktion einer univariaten reellwertigen Funktion.

Definition (Stammfunktion, Unbestimmtes Integral)

Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine univariate reellwertige Funktion. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f \tag{1}$$

Stammfunktion von f.

Definieren Sie den Begriff des unbestimmten Integrals einer univariaten reellwertigen Funktion.

Definition (Stammfunktion, Unbestimmtes Integral)

Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine univariate reellwertige Funktion. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f \tag{2}$$

Stammfunktion von f. Ist F eine Stammfunktion von f, dann heißt

$$\int f(x)\,dx := F(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \tag{3}$$

unbestimmtes Integral der Funktion f.

Bemerkungen

- Die Ableitung der Stammfunktion F von f ist f.
- Das unbestimmte Integral ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ heißt *Integrationskonstante*, es gilt $\frac{d}{dx}c = 0$.
- Der Ausdruck $\int f(x)\,dx$ ist als $F(x) + c$ definiert
- In $\int f(x)\,dx$ haben $\int$ und dx keine eigentliche Bedeutung, $f(x)$ heißt *Integrand*.

Erläutern Sie den Begriff des Riemanschen Integrals.

Theorem (Riemannsches Integral)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte reellwertige Funktion auf $[a, b]$. Weiterhin sei für $Z_k, k = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit zugehörigen Feinheiten $Z_{k,\mathsf{max}}$. Wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_1, Z_2, \ldots$ mit $|Z_{k,\mathsf{max}}| \to 0$ für $k \to \infty$ und für beliebig gewählte Punkte $\xi_{ki}, i = 1, \ldots, n$ im Teilintervall $[x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ der Zerlegung Z_k gilt, dass die Folge der zugehörigen Riemannschen Summen $R(Z_1), R(Z_2), \ldots$ gegen den gleichen Grenzwert strebt, dann heißt f auf $[a, b]$ *integrierbar*. Der entsprechende Grenzwert der Folge von Riemannschen Summen wird *bestimmtes Riemannsches Integral* genannt und mit

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} R(Z_k) \text{ für } |Z_{k,\mathsf{max}}| \to 0 \tag{4}$$

bezeichnet.

Bemerkungen

- Für $f > 0$ ist $\int_a^b f(x)\,dx$ der Flächeninhalt zwischen den $f(x)$ und der x-Achse
- Generell ist $\int_a^b f(x)\,dx$ der vorzeichenbehaftete Flächeninhalt den $f(x)$ und der x-Achse.
- Positive und negative Flächeninhalt gleichen einander aus.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ ist als Mittelwert von f auf $[a, b]$ zu verstehen.

Geben Sie den ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.

Theorem (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion, dann ist die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \text{ mit } x, a \in I \tag{5}$$

eine Stammfunktion von f.

Geben Sie den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.

Theorem (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I, so gilt für $a, b \in I$ mit $a \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b \tag{6}$$

Erläutern Sie den Begriff des uneigentlichen Integrals.

Definition (Uneigentliche Integrale)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine univariate reellwertige Funktion. Mit den Definitionen

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \text{ und } \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{7}$$

und der Additivität von Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx \tag{8}$$

wird der Begriff des bestimmten Integrals auf die unbeschränkten Integrationsintervalle $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ und $]-\infty, \infty[$ erweitert. Integrale mit unbeschränkten Integrationsintervallen heißen *uneigentliche Integrale*. Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, sagt man, dass die uneigentlichen Integrale *konvergieren*.

Bemerkung

- Für die WDF f einer Zufallsvariable ist die Forderung $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ zentral.

Erläutern Sie den Begriff des mehrdimensionalen Integrals.

Definition (Mehrdimensionale Integrale)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine multivariate reellwertige Funktion. Dann heißen Integrale der Form

$$\int\limits_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \tag{9}$$

mehrdimensionale bestimmte Integrale auf Hyperrechtecken. Weiterhin heißen Integrale der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \tag{10}$$

mehrdimensionale uneigentliche Integrale.

Bemerkungen

- Für die WDF eines Zufallsvektors ist die Forderung $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$ zentral.

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 2x\,dx$.

Eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 2x$$

ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) := x^2$$

weil

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

Einsetzen in den Zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt dann

$$\int_0^1 2x\,dx = 1^2 - 0^2 = 1$$

Vergleiche Theorem Zweiter Hauptsatz: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$