Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(2) Summen, Produkte, Potenzen

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^{3} 2$, $\sum_{i=1}^{3} i^2$, und $\sum_{i=1}^{3} \frac{2}{3} i$.
2. Schreiben Sie die Summe $1+3+5+7+9+11$ mithilfe des Summenzeichens.
3. Schreiben Sie die Summe $0+2+4+6+8+10$ mithilfe des Summenzeichens.
4. Definieren Sie das Produktzeichen.
5. Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die $n$te (negative) Potenz von a.
6. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und $(2^5)^{-2}$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
7. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
8. Warum kann die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?
9. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}, 9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.

Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^{3} 2$, $\sum_{i=1}^{3} i^2$, und $\sum_{i=1}^{3} \frac{2}{3} i$.

- $\sum_{i=1}^{3} 2 = 2 + 2 + 2 = 6 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} 2 = 3 \cdot 2 = 6$

  Alternativ kann für eine Summe über konstante Summanden c auch folgende Formel verwendet werden:

  $\sum_{i}^{n} c = (n - i + 1) \cdot c$. In diesem Beispiel ergibt das $\sum_{i=1}^{3} 2 = (3 - 1 + 1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$

- $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 11$

- $\sum_{i=1}^{3} \frac{2}{3} i = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{3} i = \frac{2}{3}(1 + 2 + 3) = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Schreiben Sie die Summe $1+3+5+7+9+11$ mithilfe des Summenzeichens.

$\sum_{i=1}^{6} 2i - 1$

oder

$\sum_{i \in I} i$ mit $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

Anmerkung: Es gibt viele Möglichkeiten, diese Summe zu schreiben.

SKF 3. *Summen*

Schreiben Sie die Summe $0+2+4+6+8+10$ mithilfe des Summenzeichens.

$\sum_{i=1}^{6} 2i-2$ oder $\sum_{i\in I} i$ mit $I=\{0,2,4,6,8,10\}$

Anmerkung: Es gibt wie bei SKF 2 viele Möglichkeiten diese Summe zu schreiben.

Definieren Sie das Produktzeichen.

Definition (Produktzeichen)

Produkte werden oft mithilfe des *Produktzeichens*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \tag{1}$$

dargestellt. Dabei stehen

- $\prod$ für das griechische *P*i, mnemonisch für *P*rodukt,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Produkterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ für die Produktterme.

Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die $n$te (negative) Potenz von a.

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die *n-te Potenz von a* definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a.$$

Für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $n \in \mathbb{N}^0$ die *negative n-te Potenz von a* definiert durch

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}.$$

Anmerkung: Die negative Potenz von a ist nur für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ definiert, weil Division für den Dividenden 0 *nicht definiert ist*.

Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und $(2^5)^{-2}$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.

- $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$
  $a^n a^m = a^{n+m}$
- $(2^5)^{-2} = 2^{5\cdot(-2)} = 2^{-10} = (2^{10})^{-1} = \frac{1}{2^{10}}$
  $(a^n)^m = a^{nm}$ und $a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}$

Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.

- $6^2 = 36$
- $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 36$
  $(ab)^n = a^n b^n$

Warum kann die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?

Die n-the Wurzel von a ist durch folgende Definition gegeben.

Definition (n-te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die *n-te Wurzel von a* definiert als die Zahl r, so dass

$$r^n = a. \tag{2}$$

Um zu beweisen, dass wir die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ schreiben können (wie im Theorem behauptet), wollen wir zeigen, dass $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ ergibt. Anders ausgedrpckt, setzen wir $a^{\frac{1}{n}}$ für r und zeigen, dass dies a ergibt, und somit die "Bedingung"der Definition einer n-ten Wurzel erfüllt ist.

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

Also gilt mit der Definition der n-ten Wurzel, dass $r = a^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Anmerkung:

$\square$ symbolisiert den Ausdruck *"quod erat demonstrandum"* (lat. für *"was zu beweisen war"*, häufig abgekürzt durch q.e.d.)

Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}, 9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.

- $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $4^{-\frac{1}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^{-1} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$