Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(5) Differentialrechnung

Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

Definition (Ableitung)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \tag{1}$$

eine univariate reellwertige Funktion. f heißt in $a \in I$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

existiert. $f'(a)$ heißt dann die *Ableitung von f an der Stelle* a. Ist f differenzierbar für alle $x \in I$, so heißt f *differenzierbar* und die Funktion

$$f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \tag{3}$$

heißt *Ableitung von f*

Bemerkungen

- Für $h > 0$ heißt $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *Differenzquotient*.
- Der Differenzquotient misst die Änderung $f(a+h) - f(a)$ von f pro Strecke h.
- Für $h \to 0$ misst der Differenzquotient die Änderungsrate von f in a.
- $f'(a)$ ist eine Zahl, f' ist eine Funktion.
- Wir werden keine Grenzwertbildung zur Berechnung von Ableitungen benötigen.

Definition (Notation für Ableitungen univariater reellwertiger Funktionen)

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion. Äquivalente Schreibweisen für die Ableitung von f und die Ableitung von f an einer Stelle x sind

(1) die *Lagrange-Notation* f' und $f'(x)$,

(2) die *Newton-Notation* $\dot{f}$ und $\dot{f}(x)$,

(3) die *Leibniz-Notation* $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df(x)}{dx}$ und

(4) die *Euler-Notation* Df und $Df(x)$.

Bemerkungen

- Für univariate reellwertige Funktionen benutzen wir f' und $f'(x)$ als Bezeichner.
- In Berechnungen benutzen wir auch die "Operator-Schreibweise" $\frac{d}{dx}f(x)$.
- Wir verstehen $\frac{d}{dx}f(x)$ als den Auftrag, die Ableitung von f zu berechnen.

Definition (Höhere Ableitungen)

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion und

$$f^{(1)} := f' \tag{4}$$

sei die Ableitung von f. Die k-te Ableitung von f ist rekursiv definiert durch

$$f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)' \text{ für } k \geq 0, \tag{5}$$

unter der Annahme, dass $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist. Insbesondere ist die *zweite Ableitung von* f definiert durch die Ableitung von f', also

$$f'' := (f')'. \tag{6}$$

Bemerkungen

- Wir schreiben auch $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ für den Auftrag, die zweite Ableitung von f zu bestimmen.
- Die nullte Ableitung $f^{(0)}$ von f ist f selbst.
- Üblicherweise schreibt man für $k < 4$ f', f'', f''' statt $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$.
- Im Allgemeinen benötigen wir nur f' und f''.

Theorem (Rechenregeln für Ableitungen)

Für $i = 1, \ldots, n$ seien g_i reellwertige univariate differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Rechenregeln für Ableitungen

(1) Summenregel

$$\text{Für } f(x) := \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \text{ gilt } f'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(x). \tag{7}$$

(2) Produktregel

$$\text{Für } f(x) := g_1(x)g_2(x) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x). \tag{8}$$

(3) Quotientenregel

$$\text{Für } f(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \text{ gilt } f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)}. \tag{9}$$

(4) Kettenregel

$$\text{Für } f(x) := g_1(g_2(x)) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(g_2(x))g_2'(x). \tag{10}$$

Bemerkung

- Für Beweise der Rechenregeln wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Theorem (Ableitungen elementarer Funktionen)

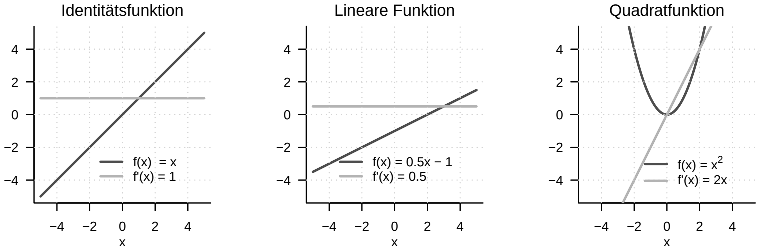
Für einige elementare Funktionen der Datenanalyse ergeben sich folgende Ableitungen

Name	Definition	Ableitung
Polynomfunktionen	$f(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$	$f(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$
Konstante Funktion	$f(x) := a$	$f'(x) = 0$
Identitätsfunktion	$f(x) := x$	$f'(x) = 1$
Lineare Funktion	$f(x) := ax + b$	$f'(x) = a$
Quadratfunktion	$f(x) := x^2$	$f'(x) = 2x$
Exponentialfunktion	$f(x) := \exp(x)$	$f'(x) = \exp(x)$
Logarithmusfunktion	$f(x) := \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

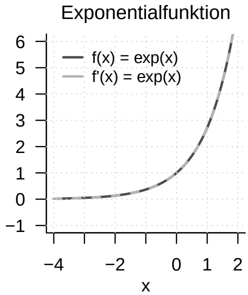
Bemerkung

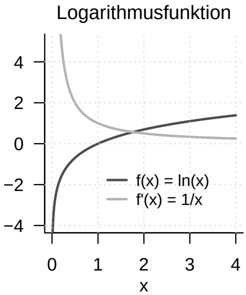
- Für Beweise wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Ableitungen elementarer Funktionen



Ableitungen elementarer Funktionen





Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

Analytische Optimierung

Definition (Extremstellen und Extremwerte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine univariate reellwertige Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in U$

- ein *lokales Minimum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \tag{11}$$

- ein *globales Minimum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in U, \tag{12}$$

- ein *lokales Maximum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \tag{13}$$

- *lokales Maximum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U. \tag{14}$$

Der Wert $x_0 \in U$ der Definitionsmenge von f heißt entsprechend *lokale* oder *globale Minimalstelle* oder *Maximalstelle*, der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ heißt entsprechend *lokales* oder *globales Minimum* oder *Maximum*. Generell heißt der Wert $x_0 \in U$ *Extremstelle* und der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ *Extremwert*.

Bemerkungen

- Extremstellen werden auch mit $\arg\min_{x \in I \cap U} f(x)$ oder $\arg\max_{x \in I \cap U} f(x)$ bezeichnet.
- Extremwerte werden auch mit $\min_{x \in I \cap U} f(x)$ oder $\max_{x \in I \cap U} f(x)$ bezeichnet.

Definition (Notwendige Bedingung für Extrema)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Dann gilt

$$x_0 \text{ ist Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0. \tag{15}$$

Bemerkungen

- Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist die erste Ableitung von f in x_0 null.
- Sei zum Beispiel x_0 eine lokale Maximalstelle von f. Dann gilt
  - Links von x_0 steigt f an, rechts von x_0 fällt f ab.
  - In x_0 steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist $f'(x_0) = 0$.

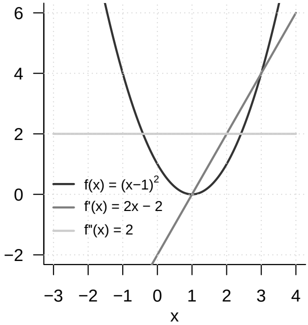
Definition (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

f sei eine zweimal differenzierbare univariate reellwertige Funktion.

- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$
$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \tag{16}$$
gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Minimum.
- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$
$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \tag{17}$$
gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Maximum.

Bemerkung

- Eine Intuition vermittelt nachfolgende Abbildung.



Hier ist offenbar $x_0 = 1$ eine lokale Minimalstelle von $f(x) = (x-1)^2$. Man erkennt:

- Links von x_0 fällt f ab, rechts von x_0 steigt f an.
- In x_0 steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist $f'(x_0) = 0$.
- Links und rechts von x_0 und in x_0 ist die Änderung f'' von f' positiv.
- Links von x_0 schwächt sich die Negativitaet von f' zu 0 ab.
- Rechts von x_0 verstärkt sich die Positivitaet von f'.

Definition (Standardverfahren der analytischen Optimierung)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Lokale Extremstellen von f können mit folgendem *Standardverfahren der analytischen Optimierung* identifiziert werden:

(1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f.

(2) Bestimmen von Nullstellen x^* von f' durch Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^*.

$\Rightarrow$ Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f.

(3) Evaluation von $f''(x^*)$.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) > 0$, dann ist x^* lokale Minimumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) < 0$, dann ist x^* lokale Maximumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) = 0$, dann ist x^* keine Extremstelle von f.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := (x-1)^2. \tag{18}$$

Die erste Ableitung von f ergibt sich mit der Kettenregel zu

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((x-1)^2\right) = 2(x-1) \cdot \frac{d}{dx}(x-1) = 2x-2. \tag{19}$$

Die zweite Ableitung von f ergibt sich zu

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(2x-2) = 2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^* ergibt

$$f'(x^*) = 0 \Leftrightarrow 2x^* - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^* = 2 \Leftrightarrow x^* = 1. \tag{21}$$

$x^* = 1$ ist folglich eine Minimalstelle von f mit zugehörigen Minimalwert $f(1) = 0$.

Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a.
2. Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f.
3. Erläutern Sie die Symbole $f'(x), \dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$.
4. Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f.
5. Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.
6. Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.
7. Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.
8. Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.
9. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := 3x^2 + \exp\left(-x^2\right) - x\ln(x)$.
10. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ für $\mu \in \mathbb{R}$.
11. Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.
12. Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.
13. Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.
14. Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.
15. Bestimmen Sie einen Extremwert von $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$.