Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(4) Funktionen

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Komponenten der Funktionsschreibweise $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$.
2. Definieren Sie die Begriffe Bildmenge, Wertebereich, und Urbildmenge einer Funktion.
3. Definieren Sie die Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität einer Funktion.
4. Erläutern Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ weder injektiv noch surjektiv ist.
5. Erläutern Sie, warum $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ bijektiv ist.
6. Erläutern Sie die Komponenten der Schreibweise $g \circ f : D \to S, x \mapsto (g \circ f)(x)$.
7. Definieren Sie den Begriff der inversen Funktion.
8. Geben Sie die inverse Funktion von x^2 auf $[0, \infty[$ an.
9. Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung.
10. Definieren Sie die Begriffe der univariat-und multivariat-reellwertigen Funktion.
11. Definieren Sie Begriff der multivariaten vektorwertigen Funktion.
12. Skizzieren Sie die konstante Funktion für $a := 1$ und die Identitätsfunktion.
13. Für $a = 2$ und $b = 3$, skizzieren Sie die linear Funktion $f(x) = ax + b$.
14. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) := (x - 1)^2$ und $g(x) := (x + 3)^2$.
15. Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.
16. Geben Sie Exponentialeigenschaften der Exponentialfunktion an.
17. Geben Sie die Logarithmeneigenschaften der Logarithmusfunktion an.

Erläutern Sie die Komponenten der Funktionsschreibweise $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$.

- $f : D \to Z$ wir gelesen wird als “die Funktion f bildet alle Elemente der Menge D eindeutig auf Elemente in Z ab''
- $x \mapsto f(x)$ wird gelesen wird als “x, welches ein Element von D ist, wird durch die Funktion f auf $f(x)$ abgebildet, wobei $f(x)$ ein Element von Z ist''

Definieren Sie die Begriffe Bildmenge, Wertebereich, und Urbildmenge einer Funktion.

Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und es seien $D' \subseteq D$ und $Z' \subseteq Z$.

- Die *Bildmenge von* D' ist definiert als

$$f(D') := \{z \in Z | \text{Es gibt ein } x \in D' \text{ mit } z = f(x)\}$$

  .

  Die Bildmenge umfasst all die Elemente der Zielmenge, die ihren Urpsrung in D' haben.

- Der *Wertebereich* von f ist gegeben durch $f(D) \subseteq Z$.
- *Urbildmenge von* Z' ist definiert als

$$f^{-1}(Z') := \{x \in D | f(x) \in Z'\}$$

  Die Urbildmenge umfasst die Werte der Definitionsmenge, die auch einen Wert in Z' abbilden.

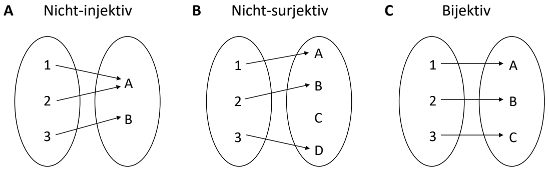
SKF 3. *Funktionseigentschaften*

Definieren Sie die Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität einer Funktion.

Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

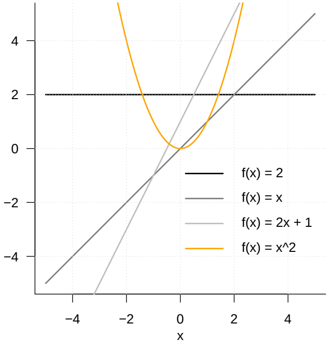
Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion.

- Die Funktion f heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Bild $z \in f(D)$ genau ein Urbild $x \in D$ gibt. Äquivalent gilt, dass f injektiv ist, wenn aus $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist.
- Die Funktion f heißt *surjektiv*, wenn $f(D) = Z$ gilt, wenn also jedes Element der Zielmenge Z ein Urbild in der Definitionsmenge D hat.
- Die Funktion f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.



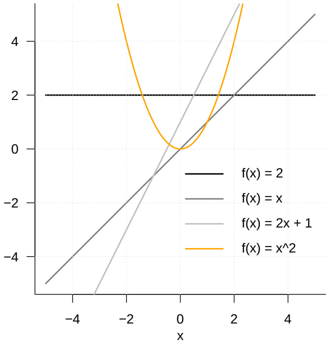
Erläutern Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ weder injektiv noch surjektiv ist.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ ist nicht injektiv, weil z.B. für $x_1 = 2 \neq -2 = x_2$ gilt, dass $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$. Weiterhin ist f auch nicht surjektiv, weil z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild unter f hat.



Erläutern Sie, warum $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ bijektiv ist.

$f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ ist injektiv und surjektiv und somit bijektiv.



Erläutern Sie die Komponenten der Schreibweise $g \circ f : D \to S, x \mapsto (g \circ f)(x)$.

- $g \circ f$ bezeichnet die Funktion.
- $g \circ f : D \to S$ wir gelesen wird als "die Funktion $g \circ f$ bildet alle Elemente der Menge D eindeutig auf Elemente in S ab"
- $x \mapsto (g \circ f)(x)$ wird gelesen wird als "x, welches ein Element von D ist, wird durch die Funktion $g \circ f$ auf $(g \circ f)(x)$ abgebildet, wobei $(g \circ f)(x)$ ein Element von S ist"
- $(g \circ f)(x)$ bezeichnet ein Element in S.

Definieren Sie den Begriff der inversen Funktion.

Definition (Inverse Funktion)

Es sei $f : D \to R, x \mapsto f(x)$ eine bijektive Funktion. Dann heißt die Funktion f^{-1} mit

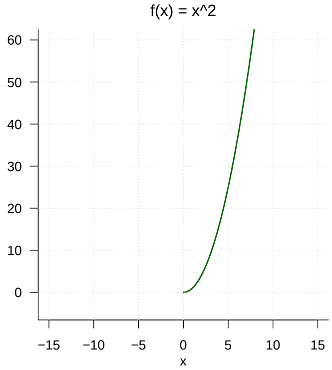
$$f^{-1} \circ f : D \to D, x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \tag{1}$$

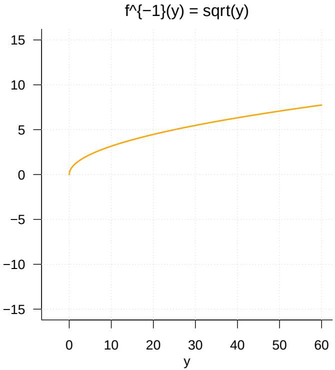
inverse Funktion (oder *Umkehrfunktion*) von f.

Geben Sie die inverse Funktion von x^2 auf $[0, \infty[$ an.

Die inverse Funktion von $f(x) := x^2 =: y$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Zur Veranschaulichung





Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung.

Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $f : D \to R, x \mapsto f(x)$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für $x, y \in D$ und einen Skalar c gelten, dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = cf(x). \tag{2}$$

Eine Abbildung, für die obige Eigenschaften nicht gelten, heißt *nicht-lineare Abbildung*.

Definieren Sie die Begriffe der univariat-und multivariat-reellwertigen Funktion.

- *univariate reellwertige Funktionen* sind definiert als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x),$$

- *multivariate reellwertige Funktionen* sind definiert als

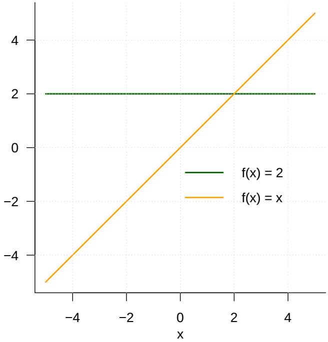
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f(x_1, ..., x_n),$$

Definieren Sie Begriff der multivariaten vektorwertigen Funktion.

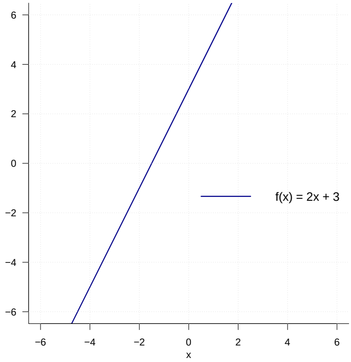
- *multivariate vektorwertige Funktionen* sind definiert als

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

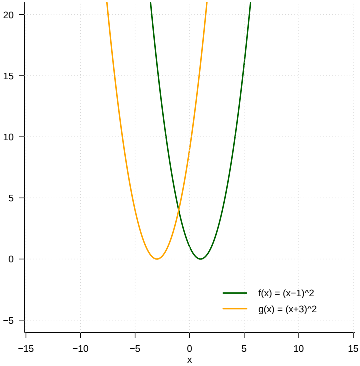
Skizzieren Sie die konstante Funktion für $a := 1$ und die Identitätsfunktion.



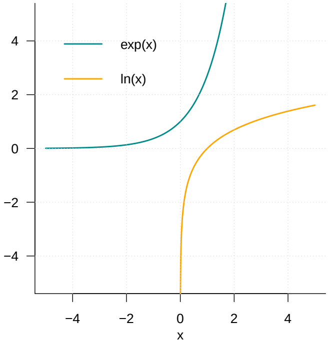
Für $a = 2$ und $b = 3$, skizzieren Sie die linear Funktion $f(x) = ax + b$.



Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) := (x-1)^2$ und $g(x) := (x+3)^2$.



Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.



Geben Sie Exponentialeigenschaften der Exponentialfunktion an.

- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(x)\exp(-x) = 1$

Geben Sie die Logarithmeneigenschaften der Logarithmusfunktion an.

Wertebereich	$x \in]0,1[\ \Rightarrow \ln(x) \in]-\infty, 0[$
	$x \in]1,\infty[\Rightarrow \ln(x) \in]0,\infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
Spezielle Werte	$\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
Logarithmeneigenschaften	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
	$\ln(x^c) = c \ln(x)$
	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$