



Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

(2) Summen, Produkte, Potenzen

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Definition (Summenzeichen)

Summen werden oft mithilfe des *Summenzeichens*

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (1)$$

dargestellt. Dabei stehen

- Σ für das griechische Sigma, mnemonisch für Summe,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Summanden und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- x_1, x_2, \dots, x_n für die Summanden.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Summenzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindex ist irrelevant, es gilt $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $I := \{1, 5, 7\}$ definiert, so ist $\sum_{i \in I} x_i := x_1 + x_5 + x_7$.

Theorem (Rechenregeln für Summen)

Summen gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^n x = nx \quad (2)$$

Assoziativität bei Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \quad (3)$$

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

Aufspalten von Summen mit $1 < m < n$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=m+1}^n x_i \quad (5)$$

Umindizierung

$$\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \quad (6)$$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Summen unter Anwendung der Rechenregeln für Summen.

1. $\sum_{i=1}^6 2$

2. $\sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=1}^3 2i$

3. $\sum_{i=1}^3 3i$

Spalten Sie die folgende Summe in 2 Summen auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\sum_{i=1}^5 (i + 2)$

Indizieren Sie die folgende Summe neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\sum_{i=0}^5 2i$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Summen unter Anwendung der Rechenregeln für Summen.

1. $\sum_{i=1}^6 2 = 6 \cdot 2 = 12$

2. $\sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=1}^3 2i = \sum_{i=1}^3 (i + 2i) = \sum_{i=1}^3 (3i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 18$

3. $\sum_{i=1}^3 3i = 3 \sum_{i=1}^3 i = 3 \cdot (1 + 2 + 3) = 18$

Spalten Sie die folgende Summe in 2 Summen auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\sum_{i=1}^5 (i + 2) = \sum_{i=1}^2 (i + 2) + \sum_{i=3}^5 (i + 2)$

Indizieren Sie die folgende Summe neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\sum_{i=0}^5 2i = \sum_{j=5}^7 2(i - 5)$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Definition (Produktzeichen)

Produkte werden oft mithilfe des *Produktzeichens*

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad (7)$$

dargestellt. Dabei stehen

- \prod für das griechische Π , mnemonisch für *Produkt*,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Produkterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- x_1, x_2, \dots, x_n für die Produkterme.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Produktzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindex ist irrelevant, es gilt $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{j=1}^n x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben. Ist z.B. die Indexmenge $J := \mathbb{N}_2^0 = \{0, 1, 2\}$ definiert, so ist $\prod_{j \in J} x_j := x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$.

Theorem (Rechenregeln für Produkte, Teil 1/2)

Produkte gleicher Produktterme

$$\prod_{i=1}^n x = x^n \quad (8)$$

Assoziativität bei Produkten gleicher Länge

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n y_i \right) = \prod_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) \quad (9)$$

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\prod_{i=1}^n ax_i = a \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \quad (10)$$

Aufspalten von Produkten mit $1 < m < n$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \left(\prod_{i=1}^m x_i \right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^n x_i \right) \quad (11)$$

Theorem (Rechenregeln für Produkte , Teil 2/2)

Umindizierung

$$\prod_{i=0}^n x_i = \prod_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \quad (12)$$

Vertauschen der Produktfolge bei Doppelprodukten

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m x_{ij} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_{ij} \quad (13)$$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Produkte unter Anwendung der Rechenregeln für Produkte

1. $\prod_{i=1}^5 2$

2. $\prod_{i=1}^3 \frac{1}{2}i \cdot \prod_{i=1}^3 2i$

3. $\prod_{i=1}^3 3i$

Spalten Sie das folgende Produkt in 2 Produkte auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\prod_{i=1}^5 (7i + 3)$

Indizieren Sie das folgende Produkt neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\prod_{i=0}^5 (i^2 + 9)$

Übungsbeispiele

Berechnen sie folgende Produkte unter Anwendung der Rechenregeln für Produkte

1. $\prod_{i=1}^5 2 = 2^5 = 32$

2. $\prod_{i=1}^3 \frac{1}{2}i \cdot \prod_{i=1}^3 2i = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}i \cdot 2i\right) = \prod_{i=1}^3 i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36$

3. $\prod_{i=1}^3 3i = 3 \prod_{i=1}^3 i = 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 18$

Spalten Sie das folgende Produkt in 2 Produkte auf mit $1 < m < n$ und $m = 2$.

4 $\prod_{i=1}^5 (7i + 3) = \prod_{i=1}^2 (7i + 3) + \prod_{i=3}^5 (7i + 3)$

Indizieren Sie das folgende Produkt neu mit einem Startindex $j = 5$

5 $\prod_{i=0}^5 (i^2 + 9) = \prod_{j=5}^7 ((i - 5)^2 + 9)$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Definition (Potenz)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die n -te Potenz von a definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a. \quad (14)$$

Weiterhin ist für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $n \in \mathbb{N}^0$ die negative n -te Potenz von a definiert durch

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}. \quad (15)$$

a wird dabei *Basis* und n wird *Exponent* genannt.

Theorem (Rechenregel für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ bei negativen Exponenten gelten

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (16)$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (17)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (18)$$

Übungsbeispiele

Vereinfachen und berechnen Sie folgende Potenzen

1. $3^5 \cdot 3^{-3}$

2. $(5^{-2})^{-1}$

3. $3^2 \cdot 2^2$

Übungsbeispiele

Vereinfachen und berechnen Sie folgende Potenzen

1. $3^5 \cdot 3^{-3} = 3^2 = 9$

2. $(5^{-2})^{-1} = 5^2 = 25$

3. $3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$

Definition (n -te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die n -te Wurzel von a definiert als die Zahl r , so dass

$$r^n = a. \quad (19)$$

Theorem (Potenzschreibweise der n -ten Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und r die n -te Wurzel von a . Dann gilt

$$r = a^{\frac{1}{n}} \quad (20)$$

Beweis

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}} = a^1 = a. \quad (21)$$

Also gilt mit der Definition der n -ten Wurzel, dass $r = a^{\frac{1}{n}}$.

□

Bemerkung

- Das Rechnen mit Quadratwurzeln wird durch $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sehr erleichtert.

Übungsbeispiele

Berechnen Sie folgende Terme

1. $4^{\frac{1}{2}}$

2. $(25^{\frac{1}{4}})^2$

Übungsbeispiele

Berechnen Sie folgende Terme

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

2. $(25^{\frac{1}{4}})^2 \cdot 25^{\frac{1}{4} \cdot 2} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Summen

Produkte

Potenzen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^3 2$, $\sum_{i=1}^3 i^2$, und $\sum_{i=1}^3 \frac{2}{3}i$.
2. Schreiben Sie die Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ mithilfe des Summenzeichens.
3. Schreiben Sie die Summe $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ mithilfe des Summenzeichens.
4. Definieren Sie das Produktzeichen.
5. Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die n te (negative) Potenz von a .
6. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und $(2^5)^{-2}$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
7. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
8. Warum kann die n -te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?
9. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$, $9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.