Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(5) Differentialrechnung

Selbstkontrollfragen + Lösungen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a.
2. Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f.
3. Erläutern Sie die Symbole $f'(x), \dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$.
4. Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f.
5. Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.
6. Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.
7. Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.
8. Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.
9. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := 3x^2 + \exp\left(-x^2\right) - x\ln(x)$.
10. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ für $\mu \in \mathbb{R}$.
11. Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.
12. Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.
13. Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.
14. Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.
15. Bestimmen Sie einen Extremwert von $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

Definieren Sie den Begriff der Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine univariate reellwertige Funktion.

$f'(a)$ bezeichnet den Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Wenn $f'(a)$ existiert, f heißt in $a \in I$ *differenzierbar*.

Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine univariate reellwertige Funktion.

Wenn f differenzierbar für alle $x \in I$ ist, bezeichnet f' die *Ableitung von* f und ist definiert als

$$f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \tag{2}$$

Erläutern Sie die Symbole $f'(x), \dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$.

$f'(x)$, $\dot{f}(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d}{dx}f(x)$ sind äquivalente Schreibweisen bzw. Notationen für Ableitungen univariater reelwertigen Funktion f.

(1) die *Lagrange-Notation* f' und $f'(x)$,

(2) die *Newton-Notation* $\dot{f}$ und $\dot{f}(x)$,

(3) die *Leibniz-Notation* $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df(x)}{dx}$ und

(4) die *Euler-Notation* Df und $Df(x)$.

Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f.

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion und

$$f^{(1)} := f' \tag{3}$$

sei die Ableitung von f. Die 2-te Ableitung von f ist definiert durch

$$f^{(2)} := \left(f^{(1)}\right)' \text{ für } k \geq 0, \tag{4}$$

unter der Annahme, dass $f^{(1)}$ differenzierbar ist. Die *zweite Ableitung von* f ist definiert durch die Ableitung von f', also

$$f'' := (f')'. \tag{5}$$

Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ gilt $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(x)$

Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := g_1(x)g_2(x)$ gilt $f'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x)$.

Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ gilt $f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)}$.

Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.

Für $f(x) := g_1(g_2(x))$ gilt $f'(x) = g_1'(g_2(x))g_2'(x)$.

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := 3x^2 + \exp\left(-x^2\right) - x\ln(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^1 + \exp\left(-x^2\right) \cdot (-2x^1) - (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= 6x - 2x\exp\left(-x^2\right) - ln(x) - \frac{x}{x} \\ &= 6x - 2x\exp\left(-x^2\right) - ln(x) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu) \end{aligned}$$

Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.

Definition (Extremstellen und Extremwerte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine univariate reellwertige Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in U$

- ein *lokales Minimum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \tag{6}$$

- ein *globales Minimum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in U, \tag{7}$$

- ein *lokales Maximum*, wenn es ein Intervall $I :=]a, b[$ gibt mit $x_0 \in]a, b[$ und

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \tag{8}$$

- *lokales Maximum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U. \tag{9}$$

Der Wert $x_0 \in U$ der Definitionsmenge von f heißt entsprechend *lokale* oder *globale Minimalstelle* oder *Maximalstelle*, der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ heißt entsprechend *lokales* oder *globales Minimum* oder *Maximum*. Generell heißt der Wert $x_0 \in U$ *Extremstelle* und der Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{R}$ *Extremwert*.

Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.

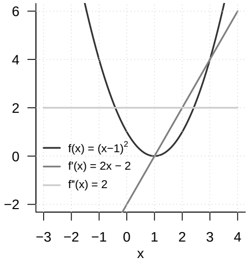
Definition (Notwendige Bedingung für Extrema)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Dann gilt

$$x_0 \text{ ist Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0. \tag{10}$$

Bemerkungen

- Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist die erste Ableitung von f in x_0 null.
- Sei zum Beispiel x_0 eine lokale Maximalstelle von f. Dann gilt
  - Links von x_0 steigt f an, rechts von x_0 fällt f ab.
  - In x_0 steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist $f'(x_0) = 0$.



SKF 13. *hinreichende Bedingung lokales Extremum*

Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.

Definition (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

f sei eine zweimal differenzierbare univariate reellwertige Funktion.

- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$
$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \tag{11}$$
gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Minimum.
- Wenn für $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$
$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \tag{12}$$
gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein Maximum.

Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.

Definition (Standardverfahren der analytischen Optimierung)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Lokale Extremstellen von f können mit folgendem *Standardverfahren der analytischen Optimierung* identifiziert werden:

(1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f.

(2) Bestimmen von Nullstellen x^* von f' durch Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^*.

$\Rightarrow$ Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f.

(3) Evaluation von $f''(x^*)$.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) > 0$, dann ist x^* lokale Minimumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) < 0$, dann ist x^* lokale Maximumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) = 0$, dann ist x^* keine Extremstelle von f.

Bestimmen Sie einen Extremwert von $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \tag{13}$$

(1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f.

Die erste Ableitung von f ergibt sich mit der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)\right) && (14)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{2}(x-\mu) \cdot 1\right) && (15)\\ &= -(x-\mu)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) && (16)\end{aligned}$$

(forgeführt).

Die zweite Ableitung von f ergibt sich mit der Produktregel zu

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -1 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) + (-(x-\mu)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{2}(x-\mu) \cdot 1\right) && (17)\\
&= -\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) + (x-\mu) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) \cdot (x-\mu) && (18)\\
&= -\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) + (x-\mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) && (19)\\
&= (x-\mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) && (20)\\
&= (x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right) && (21)
\end{aligned}
$$

(forgeführt).

(2) Bestimmen von Nullstellen x^* von f' durch Auflösen von $f'(x^*) = 0$ nach x^*.

$\Rightarrow$ Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f.

Bei $f'(x) = -(x-\mu)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$ geht das einfacher: Die Funktion f' wird null, wenn entweder der erste oder der zweite Produktterm null werden. Der Exponentialterm $\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$ kann nicht null werden. Der erste Term $(x-\mu)$ wird null, wenn $x = \mu$. $\Rightarrow f' = 0$, wenn $x = \mu$.

(forgeführt).

(3) Evaluation von $f''(x^*)$.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) > 0$, dann ist x^* lokale Minimumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) < 0$, dann ist x^* lokale Maximumstelle von f.

$\Rightarrow$ Wenn $f''(x^*) = 0$, dann ist x^* keine Extremstelle von f.

$$\begin{aligned}
f''(\mu) &= (\mu^2 - 2\mu\mu + \mu^2 - 1)\exp\left(-\frac{1}{2}(\mu - \mu)^2\right) \\
&= (\mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 - 1)\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2\right) \\
&= (-1)\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot 0\right) \\
&= -\exp(0) \\
&= -1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f''(\mu) < 0 \Rightarrow \mu$ ist eine lokale Maximumstelle von f.