

# Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

# (5) Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Analytische Optimierung

## Definition (Ableitung)

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und

$$f: I \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$
 (1)

eine univariate reellwertige Funktion. f heißt in  $a \in I$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
 (2)

existiert. f'(a) heißt dann die Ableitung von f an der Stelle a. Ist f differenzierbar für alle  $x \in I$ , so heißt f differenzierbar und die Funktion

$$f': I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$
 (3)

heißt Ableitung von f

- Für h > 0 heißt  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  Differenzquotient.
- ullet Der Differenzquotient misst die Änderung f(a+h)-f(a) von f pro Strecke h.
- Für  $h \to 0$  misst der Differenzquotient die Änderungsrate von f in a.
- f'(a) ist eine Zahl, f' ist eine Funktion.
- Wir werden keine Grenzwertbildung zur Berechnung von Ableitungen benötigen.

## Definition (Notation für Ableitungen univariater reellwertiger Funktionen)

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion. Äquivalente Schreibweisen für die Ableitung von f und die Ableitung von f an einer Stelle x sind

- (1) die Lagrange-Notation f' und f'(x),
- (2) die Newton-Notation  $\dot{f}$  und  $\dot{f}(x)$ ,
- (3) die Leibniz-Notation  $\frac{df}{dx}$  und  $\frac{df(x)}{dx}$  und
- (4) die Euler-Notation Df und Df(x).

- Für univariate reellwertige Funktionen benutzen wir f' und f'(x) als Bezeichner.
- In Berechnungen benutzen wir auch die "Operator-Schreibweise"  $\frac{d}{dx}f(x)$ .
- Wir verstehen  $\frac{d}{dx}f(x)$  als den Auftrag, die Ableitung von f zu berechnen.

#### Definition (Höhere Ableitungen)

Es sei f eine univariate reellwertige Funktion und

$$f^{(1)} := f' \tag{4}$$

sei die Ableitung von f. Die k-te Ableitung von f ist rekursiv definiert durch

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$$
 für  $k \ge 0$ , (5)

unter der Annahme, dass  $f^{(k-1)}$  differenzierbar ist. Insbesondere ist die *zweite Ableitung von f* definiert durch die Ableitung von f', also

$$f^{\prime\prime} := (f^{\prime})^{\prime}. \tag{6}$$

- Wir schreiben auch  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$  für den Auftrag, die zweite Ableitung von f zu bestimmen.
- Die nullte Ableitung  $f^{(0)}$  von f ist f selbst.
- Üblicherweise schreibt man für k < 4 f', f'', f''' statt  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ .
- Im Allgemeinen benötigen wir nur f' und f''.

#### Theorem (Rechenregeln für Ableitungen)

Für  $i=1,\dots,n$  seien  $g_i$  reellwertige univariate differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Rechenregeln für Ableitungen

(1) Summenregel

$$\operatorname{F\"{u}r} f(x) := \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \text{ gilt } f'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(x). \tag{7}$$

(2) Produktregel

$$\operatorname{F\"{u}r} f(x) := g_1(x)g_2(x) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x). \tag{8}$$

(3) Quotientenregel

$$\operatorname{F\"{u}r} f(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \operatorname{gilt} f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)}. \tag{9}$$

(4) Kettenregel

$$\operatorname{F\"{u}r} f(x) := g_1(g_2(x)) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(g_2(x))g_2'(x). \tag{10}$$

#### Bemerkung

• Für Beweise der Rechenregeln wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

#### Theorem (Ableitungen elementarer Funktionen)

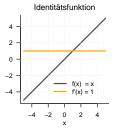
Für einige elementare Funktionen der Datenanalyse ergeben sich folgende Ableitungen

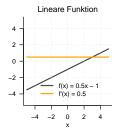
Name	Definition	Ableitung
Polynomfunktionen	$f(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$	$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$
Konstante Funktion	f(x) := a	f'(x) = 0
Identitätsfunktion	f(x) := x	f'(x) = 1
Lineare Funktion	f(x) := ax + b	f'(x) = a
Quadratfunktion	$f(x) := x^2$	f'(x) = 2x
Exponentialfunktion	$f(x) := \exp(x)$	$f'(x) = \exp(x)$
Logarithmusfunktion	$f(x) := \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

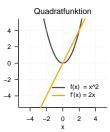
#### Bemerkung

• Für Beweise wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

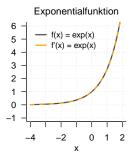
#### Ableitungen elementarer Funktionen

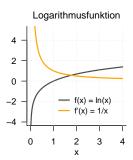






#### Ableitungen elementarer Funktionen





**Analytische Optimierung** 

#### Definition (Extremstellen und Extremwerte)

Es sei  $U\subseteq\mathbb{R}$  und  $f:U o\mathbb{R}$  eine univariate reellwertige Funktion. Dann hat f an der Stelle  $x_0\in U$ 

ullet ein lokales Minimum, wenn es ein Intervall I:=]a,b[ gibt mit  $x_0\in ]a,b[$  und

$$f(x_0) \le f(x)$$
 für alle  $x \in I \cap U$ , (11)

• ein globales Minimum, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \le f(x)$$
 für alle  $x \in U$ , (12)

• ein lokales Maximum, wenn es ein Intervall I := ]a, b[ gibt mit  $x_0 \in ]a, b[$  und

$$f(x_0) \ge f(x)$$
 für alle  $x \in I \cap U$ , (13)

· lokales Maximum, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \ge f(x)$$
 für alle  $x \in U$ . (14)

Der Wert  $x_0 \in U$  der Definitionsmenge von f heißt entsprechend lokale oder globale Minimalstelle oder Maximalstelle, der Funktionswert  $f(x_0) \in \mathbb{R}$  heißt entsprechend lokales oder globales Minimum oder Maximum. Generell heißt der Wert  $x_0 \in U$  Extremstelle und der Funktionswert  $f(x_0) \in \mathbb{R}$  Extremsert.

- Extremstellen werden auch mit  $\arg\min_{x\in I\cap U}f(x)$  oder  $\arg\max_{x\in I\cap U}f(x)$  bezeichnet.
- Extremwerte werden auch mit  $\min_{x \in I \cap U} f(x)$  oder  $\max_{x \in I \cap U} f(x)$  bezeichnet.

#### Definition (Notwendige Bedingung für Extrema)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Dann gilt

$$x_0$$
 ist Extremstelle von  $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$ . (15)

- Wenn  $x_0$  eine Extremstelle von f ist, dann ist die erste Ableitung von f in  $x_0$  null.
- ullet Sei zum Beispiel  $x_0$  eine lokale Maximalstelle von f. Dann gilt
  - Links von  $x_0$  steigt f an, rechts von  $x_0$  fällt f ab.
  - In  $x_0$  steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist  $f'(x_0) = 0$ .

#### Definition (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

f sei eine zweimal differenzierbare univariate reellwertige Funktion.

• Wenn für  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$ 

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0$$
 (16)

gilt, dann hat f an der Stelle  $x_0$  ein Minimum.

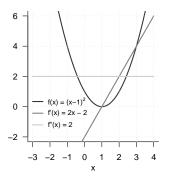
• Wenn für  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$ 

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0$$
 (17)

gilt, dann hat f an der Stelle  $x_0$  ein Maximum.

#### Bemerkung

• Eine Intuition vermittelt nachfolgende Abbildung.



Hier ist offenbar  $x_0 = 1$  eine lokale Minimalstelle von  $f(x) = (x-1)^2$ . Man erkennt:

- Links von  $x_0$  fällt f ab, rechts von  $x_0$  steigt f an.
- In  $x_0$  steigt f weder an, noch fällt f ab, also ist  $f'(x_0) = 0$ .
- ullet Links und rechts von  $x_0$  und in  $x_0$  ist die Änderung  $f^{\prime\prime}$  von  $f^\prime$  positiv.
- ullet Links von  $x_0$  schwächt sich die Negativitaet von f' zu 0 ab.
- Rechts von  $x_0$  verstärkt sich die Positivitaet von f'.

## Definition (Standardverfahren der analytischen Optimierung)

f sei eine univariate reellwertige Funktion. Lokale Extremstellen von f können mit folgendem Standardverfahren der analytischen Optimierung identifiziert werden:

- (1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von f.
- (2) Bestimmen von Nullstellen  $x^*$  von f' durch Auflösen von  $f'(x^*) = 0$  nach  $x^*$ .
  - $\Rightarrow$  Nullstellen von f' sind Kandidaten für Extremstellen von f.
- (3) Evaluation von  $f''(x^*)$ .
  - $\Rightarrow$  Wenn  $f''(x^*) > 0$ , dann ist  $x^*$  lokale Minimumstelle von f.
  - $\Rightarrow$  Wenn  $f''(x^*) < 0$ , dann ist  $x^*$  lokale Maximumstelle von f.
  - $\Rightarrow$  Wenn  $f''(x^*) = 0$ , dann ist  $x^*$  keine Extremstelle von f.

#### Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := (x-1)^2. \tag{18}$$

Die erste Ableitung von f ergibt sich mit der Kettenregel zu

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((x-1)^2\right) = 2(x-1) \cdot \frac{d}{dx}(x-1) = 2x-2.$$
 (19)

Die zweite Ableitung von f ergibt sich zu

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$
 (20)

Auflösen von  $f'(x^*) = 0$  nach  $x^*$  ergibt

$$f'(x^*) = 0 \Leftrightarrow 2x^* - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^* = 2 \Leftrightarrow x^* = 1.$$
 (21)

 $x^* = 1$  ist folglich eine Minimalstelle von f mit zugehörigen Minimalwert f(1) = 0.

Analytische Optimierung

- 1. Definieren Sie den Begriff der Ableitung  $f^{\prime}(a)$  einer Funktion f an einer Stelle a.
- 2. Definieren den Begriff der Ableitung f' einer Funktion f.
- 3. Erläutern Sie die Symbole  $f'(x),\dot{f}(x),\,\frac{df(x)}{dx}$  , und  $\frac{d}{dx}f(x)$  .
- 4. Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung  $f^{\prime\prime}$  einer Funktion f.
- 5. Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.
- 6. Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.
- 7. Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.
- 8. Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.
- 9. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x) := 3x^2 + \exp\left(-x^2\right) x\ln(x)$ .
- 10. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x):=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$  für  $\mu\in\mathbb{R}$ .
- 11. Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.
- 12. Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.
- 13. Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.
- 14. Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.
- 15. Bestimmen Sie einen Extremwert von  $f(x):=\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$  für  $\mu\in\mathbb{R}.$