Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Formen mathematischer Aussagen

Definition. Eine Definition (oder auch ein *Axiom*) ist ein Grundsatz eines logischen Systems, der innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird. Definitionen können nur nach ihrer Nützlichkeit innerhalb eines logischen Systems bewertet werden. Eine Definition lernt man am besten erst einmal auswendig und hinterfragt sie erst dann, wenn man ihren Nutzen in der Anwendung verstanden hat oder von diesem nicht überzeugt ist. Etwas Entspannung beim Umgang mit Definitionen ist generell hilfreich.

Theorem. Ein Theorem (oder auch *Satz*) ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als richtig erkannt, dass heißt, aus Definitionen und/oder bereits bekannten Sätzen hergeleitet werden kann. Theoreme sind die "empirischen Ergebnisse" der Mathematik. Theoreme sind in der angewandten Mathematik oft für Berechnungen hilfreich, es lohnt sich also, sie auswendig zu lernen.

Beweis. Ein Beweis ist eine logische Argumentationskette, die auf bekannte Definitionen und Theoreme zurückgreift, um die Richtigkeit eines Theorems zu belegen. Kurze Beweise tragen oft zum Verständnis eines Theorems bei, lange Beweise eher nicht. Beweise sind die Antwort auf die Frage warum eine mathematische Aussage gilt ("Warum ist das so?"). Beweise lernt man nicht auswendig. Wenn sie lang sind, ist es sinnvoller sie beim ersten Lesen zu übergehen, um sich nicht in Details zu verlieren.

Grundlegende Begriffe und Symbole

Als bekannt vorausgesetzte Symbole

$A := B$	A ist definiert als B	$A = B$	A ist gleich B
$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent mit B	$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B
$a < b$	a ist kleiner als b	$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a > b$	a ist größer als b	$a \geq b$	a ist größer oder gleich b
$n!$	Fakultät von n	$\lvert a \rvert$	Betrag von a

(1) Mengen

Definitionen - Menge

Definition (Mengen und Mengendefinition)

Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als "eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen". Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M \tag{1}$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist. Zur Definition von Mengen gibt es mindestens folgende Möglichkeiten:

(1) Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$.

(2) Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$.

(3) Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$.

Bemerkungen

- $\{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ wird als "$x \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass $x < 4$ ist" gelesen.
- Die Bedeutung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_3$ wird im Folgenden erläutert.
- Mengen sind *ungeordnet*, d.h. $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$ etc.

Übungsbeispiele

Definieren Sie folgende Mengen:

1. Die Menge M, die die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 beinhaltet.
2. Die Menge G, die alle Zahlen der Menge M beinhaltet, die größer als 3 sind.

Übungsbeispiele

Definieren Sie folgende Mengen:

1. Die Menge M, die die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 beinhaltet.

   $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. Die Menge G, die alle Zahlen der Menge M beinhaltet, die größer als 3 sind.

   $G := \{g \in M | g > 3\}$ oder $G := \{4, 5, 6, 7\}$

Definitionen - Teilmenge, Mengengleichheit

Definition (Teilmengen und Mengengleichheit)

- Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$. Ist A eine Teilmenge von B ist, so schreibt man

$$A \subseteq B \tag{2}$$

  und nennt A *Untermenge* von B und B *Obermenge* von A.

- Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge B, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, es aber zumindest ein Element $b \in B$ gibt, für das gilt $b \notin A$. Ist A eine echte Teilmenge von B, so schreibt man

$$A \subset B. \tag{3}$$

- Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, und wenn für jedes Element $b \in B$ gilt, dass auch $b \in A$. Sind die Mengen A und B gleich, so schreibt man

$$A = B. \tag{4}$$

Übungsbeispiel

Schreiben Sie die nachstehenden Mengen, falls möglich, als Teilmengen anderer Mengen auf und notieren Sie Mengengleichheiten, fals bestehend.

1. Es seien $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$, $C := \{1, 2\}$.
2. Es seien $A := \{5, 6, 7, 8\}$, $B := \{x \in A | x > 6\}$, $C := \{7\}$.

Übungsbeispiel

Schreiben Sie die nachstehenden Mengen, falls möglich, als Teilmengen anderer Mengen auf und notieren Sie Mengengleichheiten, fals bestehend.

1. Es seien $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$, $C := \{1, 2\}$.

   $A \subset B, A \subset C, B \subseteq C, C \subseteq B$ und $B = C$.

2. Es seien $A := \{5, 6, 7, 8\}$, $B := \{x \in A | x > 6\}$, $C := \{5\}$.

   $\Leftrightarrow A := \{5, 6, 7, 8\}$, $B := \{7, 8\}$, $C := \{5\}$

   $B \subset A, C \subset A, C \subset B$.

Bemerkung:

- $\Leftrightarrow$ ist ein Symbol für Äquivalenz.

Definition (Kardinalität, leere Menge)

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet. Eine Menge mit Kardinalität 0 heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Übungsbeispiele

Geben Sie jeweils die Kardinalität $|M|$ der Menge M an.

1. Für $M := \{1, 2, 3\}$
2. $M := \{a, b\}$
3. Für $M := \{a, b\}$.
4. Für $M := \emptyset$

Übungsbeispiele

Geben Sie jeweils die Kardinalität $|M|$ der Menge M an.

1. Für $M := \{1, 2, 3\}$
   $|M| = 3.$
2. $M := \{a, b\}$
   $|M| = 2$
3. Für $M := \{x, y, z, \pi\}$.
   $|M| = 4$
4. Für $M := \emptyset$
   $|M| = 0$

Definition (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von* M und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Die leere Untermenge von M und M selbst sind immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

Bemerkung

- Ohne Beweis halten wir fest, dass gilt $|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Übungsbeispiele

Geben Sie jeweils die Potenzmenge $\mathcal{P}$ an.

1. $M := \{1, 2, 3\}$
2. $N := \{5, 6\}$

Übungsbeispiele

Geben Sie jeweils die Potenzmenge $\mathcal{P}$ an.

1. $M := \{1, 2, 3\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
2. $N := \{5, 6\}$
   $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}\}$

Verknüpfungen von Mengen - Operationen

Definition (Mengenoperationen)

M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung von* M *und* N ist definiert als die Menge
$$M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}, \tag{5}$$
wobei *oder* im inklusiven Sinne als *und/oder* zu verstehen ist.
- Der *Durchschnitt von* M *und* N ist definiert als die Menge
$$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}. \tag{6}$$
- Die *Differenz von* M *und* N ist definiert als die Menge
$$M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}. \tag{7}$$
- Die *symmetrische Differenz von* M *und* N ist definiert als die Menge
$$M \Delta N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N, \text{ aber } x \notin M \cap N\}, \tag{8}$$
wobei *oder* hier also im exklusiven Sinne zu verstehen ist.

Übungsbeispiele

Es seien $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie die sich aus den Mengenoperationen ergebenden Elemente an.

1. $M \cup N$
2. $M \cap N$
3. $M \setminus N$
4. $N \setminus M$
5. $M \Delta N$

Übungsbeispiele

Es seien $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie die sich aus den Mengenoperationen ergebenden Elemente an.

1. $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $M \cap N = \{2, 3\}$
3. $M \setminus N = \{1\}$
4. $N \setminus M = \{4, 5\}$
5. $M \Delta N = \{1, 4, 5\}$

Definition (Partition)

M sei eine Menge und $P := \{N_i\}$ sei eine Menge von Mengen N_i mit $i = 1, \ldots, n$, so dass gilt

$$M = \cup_{i=1}^{n} N_i \text{ und } N_i \cap N_j = \emptyset \text{ für } i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n, i \neq j. \tag{9}$$

Dann heißt P eine *Partition* (oder *Zerlegung*) von M.

Bemerkung

- $M = \cup_{i=1}^{n} N_i$ drückt aus, dass die Menge M der *Vereinigung* aller Teilmengen N_i mit $i = 1, \ldots, n$ ist.
- $N_i \cap N_j = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ drückt aus, dass der *Druchschnitt* aller Teilmengen mit jeweils allen Teilmengen leer ($\emptyset$) ist. Man sagt auch, die Teilmengen sind *diskunkt*.
- Intuitiv entspricht die Partition einer Menge dem Aufteilen der Menge in disjunkte Teilmengen.

Übungsbeispiel

Geben Sie mögliche Partitionen von $M := \{1, 2, 3, 4\}$ an.

Übungsbeispiel

Geben Sie mögliche Partitionen von $M := \{1, 2, 3, 4\}$ an.

Mögliche Partitionen von $M := \{1, 2, 3, 4\}$ sind

- $P_1 := \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$
- $P_2 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- $P_3 := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}.$,

Spezielle Mengen - Zahlenmengen

Definition (Zahlenmengen)

Es bezeichnen

- $\mathbb{N} \;\; := \{1, 2, 3, ...\}$ die *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, ..., n\}$ die *natürlichen Zahlen der Ordnung* n,
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die *natürlichen Zahlen* und Null,
- $\mathbb{Z} \;\; := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ die *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} \;\; := \{\frac{p}{q}|p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ die *rationalen Zahlen*,
- $\mathbb{R}$ die *reellen Zahlen*, und
- $\mathbb{C} \;\; := \{a + ib|a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1}\}$ die *komplexen Zahlen*.

Bemerkungen

- $\mathbb{R}$ umfasst die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie z.B.e, π und $\sqrt{2}$.
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Spezielle Mengen - Intervalle

Definition (Intervalle)

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \tag{10}$$

- das *offene Interval*

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \tag{11}$$

- die *halboffenen Intervalle*

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}. \tag{12}$$

Bemerkungen

- Positiv Unendlich (∞) und negativ Unendlich ($-\infty$) sind keine Elemente von $\mathbb{R}$.
- Es gilt also immer $]-\infty, b]$ oder $]-\infty, b[$ bzw. $]a, \infty[$ oder $[a, \infty[$, sowie $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Übungsbeispiele

Definieren Sie folgende Intervalle

1. "Die reellen Zahlen von 2 bis einschlielich 10."
2. "Die reellen Zahlen, die größer als -2 und kleiner als 5 sind."
3. "Die reellen Zahlen, die größer als oder gleich -2 und kleiner als 5 sind."
4. "Die reellen Zahlen, die kleiner als oder gleich 5 sind."

Übungsbeispiele

Definieren Sie folgende Intervalle

1. "Die reellen Zahlen von 2 bis einschlielich 10."
   $[2, 10] := \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 10\}$
2. "Die reellen Zahlen, die größer als -2 und kleiner als 5 sind."
   $]-2, 5[:= \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 5\}$
3. "Die reellen Zahlen, die größer als oder gleich -2 und kleiner als 5 sind."
   $[-2, 5[:= \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 5\}$
4. "Die reellen Zahlen, die kleiner als oder gleich 5 sind."
   $]-\infty, 5] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$

Spezielle Mengen - Kartesisches Produkt

Definition (Kartesische Produkte)

M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M und N* die Menge aller geordneten Tupel (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m, n) | m \in M, n \in N\}. \tag{13}$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M. \tag{14}$$

Seien weiterhin $M_1, \ldots, M_n$ Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen $M_1, \ldots, M_n$* die Menge aller geordneten n-Tupel $(m_1, \ldots, m_n)$ mit $m_i \in M_i$ für $i = 1, \ldots, n$, formal

$$\prod_{i=1}^{n} M_i := M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, \ldots, m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}. \tag{15}$$

Das n-fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^{n} M := \{(m_1, , \ldots, m_n) | m_i \in M\}. \tag{16}$$

Spezielle Mengen - reelle Tupel n-ter Ordnung

Definition (Die Menge $\mathbb{R}^n$)

Das n-fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} := \{x := (x_1, , \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \tag{17}$$

und “$\mathbb{R}$ *hoch* n” gesprochen. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ typischerweise als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

und nennen sie n-*dimensionale Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ nennt man *Skalare*.

Beispiele

- Ein Bsp für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.76 \\ 0.23 \\ 7.10 \end{pmatrix}$, Ein Bsp für $x \in \mathbb{R}^2$ ist $x = \begin{pmatrix} 2.81 \\ 4.22 \end{pmatrix}$.

Selbstkontrollfragen

1. Diskutieren Sie die Begriffe Definition, Theorem, Beweis.
2. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
3. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
4. Für Mengen M, N erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M, m \notin N, M \subseteq N, M \subset N$.
5. Definieren Sie den Begriff der Kardinalität einer Menge.
6. Definieren Sie den Begriff der Potenzmenge einer Menge.
7. Es sei $M := \{a, b\}$. Bestimmen Sie $|M|$ und $\mathcal{P}(M)$.
8. Es seien $M := \{a, b\}, N := \{a, c, d\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.
9. Erläutern Sie die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}^0$.
10. Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.
11. Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.
12. Definieren Sie die Begriffe des abgeschlossenen, offenen, und halboffenen Intervalls.
13. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
14. Definieren Sie die Menge $\mathbb{R}^n$.