CONTROL ADAPTATIVO PREDICTIVO

La aparición del control PID a principios del siglo XX ofreció una solución matemáticamente sencilla y fácil de implementar con la tecnología de la época, que permitió una autocorrección de la operación de un proceso alrededor de cierto valor de consigna. Las primeras aplicaciones consistían en limitadores de velocidad y controles de dirección para barcos. Su sencillez permitió que se aplicara en sistemas neumáticos primero, y luego en sistemas mecánicos, eléctricos y electrónicos .

A pesar de estar ampliamente implantados en la industria, y de obtener resultados satisfactorios en muchos casos, los controladores PID tienen limitaciones muy importantes: En primer lugar, estos controladores son diseñados bajo la hipótesis de que el sistema *es lineal e invariante en el tiempo* y, aunque muchos sistemas pueden linealizarse (por lo menos en el entorno del punto de operación) en el fondo ningún proceso es lineal. Por otro lado el bien conocido problema de la *falta de estabilidad*, dado que si queremos que el sistema responda rápido, este amplifica la señal de error, amplificándose también las oscilaciones en la salida. Por el contrario, una respuesta más lenta compromete la eficacia del sistema de control. Además hay que añadir que este tipo de sistemas requieren ajustes y tampoco son capaces de reaccionar ante cambios en la dinámica del proceso [2].

Para evitar estos inconvenientes, y gracias a la introducción del computador digital, se han desarrollado diversas soluciones en forma de algoritmos de control, una de ellas es el control adaptativo predictivo.

1. CONTROL PREDICTIVO

El control predictivo aparece en 1974 en una Tesis Doctoral [1], y se podría definir como:

"Basándose en un modelo del proceso, el control predictivo es el que hace que la salida dinámica del proceso predicha por un modelo sea igual a una salida dinámica deseada convenientemente elegida."

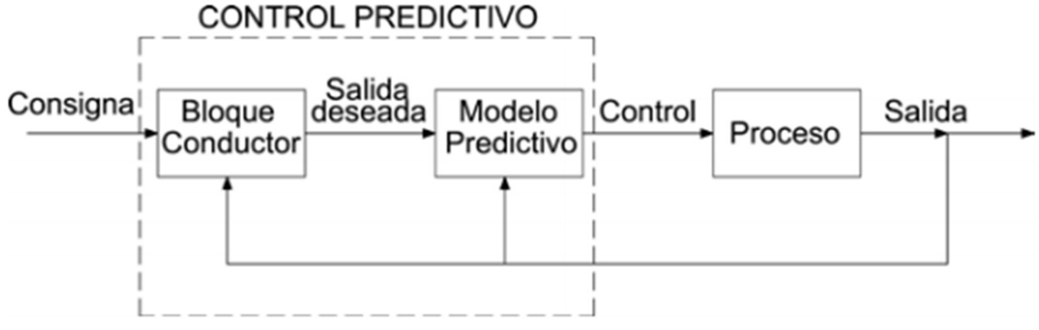

Ilustración 1. Diagrama de bloques del control predictivo [2]

Estrategia básica de control predictivo

Sea el modelo discreto dado por la ecuación en diferencias:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{m} b_i u(k+1-i)$$

El control predictivo en su formulación básica, para un horizonte de predicción igual a uno, calcula en cada instante la predicción de la salida del proceso a partir de los valores presentes y anteriores de las variables de entrada y salida y de los parámetros del modelo predictivo, como:

$$\hat{y}\ (k+\mathrm{j}|k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k)\ y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i(k)\ u(k+1-i)$$

Donde el acento circunflejo, significa que la variable es una *estimación*, y $(k+1|k)$, significa *para el instante k+1, con la información obtenida hasta k.*

El bloque conductor, calcula la salida deseada a partir de los parámetros de un modelo estable con la dinámica deseada. Este modelo recibe como entrada la consigna y como condiciones iniciales las salidas del proceso actual y en instantes anteriores, luego:

$$y_d(k) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{q} \beta_i y_{sp}(k+1-i) \qquad (1)$$

Esta salida deseada deberá seguir una trayectoria deseada que deberá ser físicamente realizable, con una acción de control acotada, y deberá guiar al proceso suavemente, sin sobreoscilaciones y sin desviaciones permanentes. Normalmente se escogen α_i y β_i de manera que formen un sistema de segundo orden sobreamortiguado. Igualando la salida predicha a la salida deseada, obtenemos la acción de control predictivo:

$$u(k) = \frac{y_d(k+1|k) - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k) y(k+1-i) - \sum_{i=2}^{m} \hat{b}_i(k) u(k+1-i)}{\hat{b}_1} \qquad (2)$$

Estrategia extendida de control predictivo

La estrategia básica de control predictivo puede controlar algunos tipos de procesos, siempre que el modelo predictivo sea correcto. Sin embargo, existe una clase de procesos en los cuales el valor absoluto de la acción de control dada por (2), *puede crecer sin límite* al intentar guiar al proceso sobre la trayectoria deseada. Este comportamiento lo podemos ver en la ilustración 8. A esta clase de procesos se los conoce como *procesos con inverso inestable*, y una de sus características es que su respuesta a una acción de control positiva es inicialmente negativa. En la Ilustración 7 puede observarse la respuesta a un escalón unitario de un proceso con inverso inestable, dado por la función de transferencia:

$$T(z) = \frac{-0,3919 + 0,7321z^{-1}}{1 - 0,7419z^{-1} + 0,0821z^{-2}} \qquad (3)$$

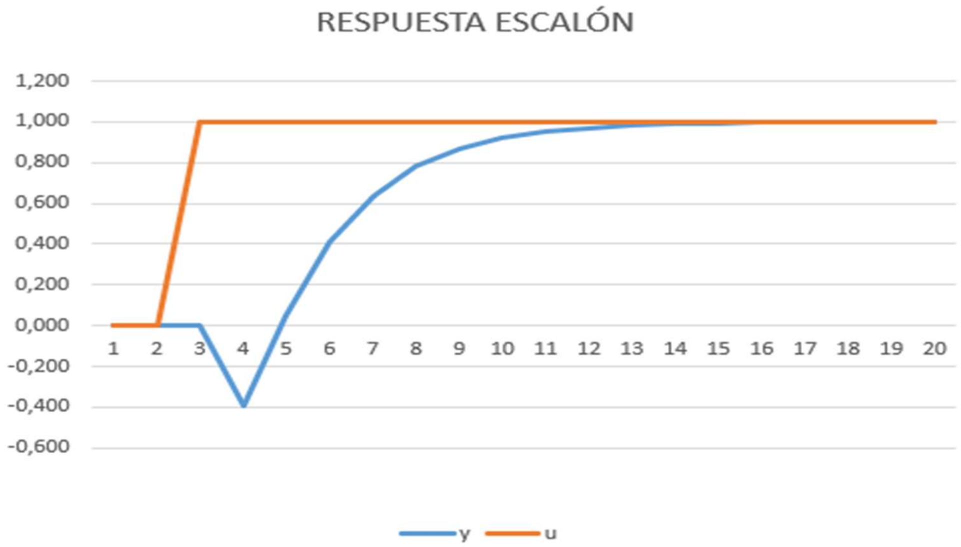

Ilustración 2. Respuesta escalón de un proceso con inverso inestable

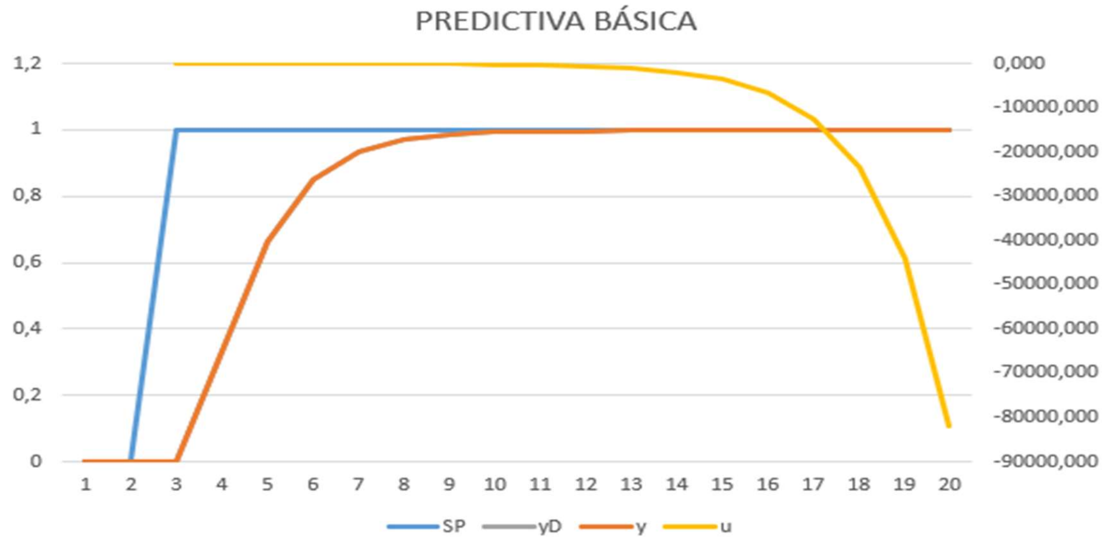

Ilustración 3. Acción de control predictiva básica para el sistema dado en (3)

Los procesos con inverso inestable son aquellos en los que si se cambian las entradas por las salidas y viceversa, son inestables. Luego, se caracterizan por tener ceros fuera del círculo unitario en su función de transferencia. En la ilustración 9 podemos ver la disposición de polos (X) y ceros (O) de la función de transferencia dada en (3).

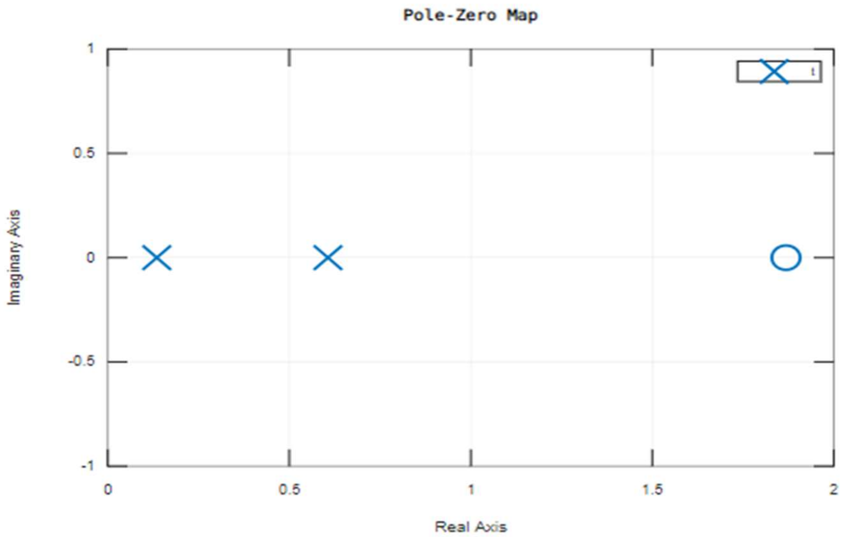

Ilustración 4. Polos y ceros de la función de transferencia (3)

Con el fin de superar la inestabilidad en la aplicación de la estrategia básica a este tipo de procesos nació la estrategia extendida de control predictivo, la cual considera la predicción de la salida, no ya en uno, sino en un número mayor de instantes futuros, con:

$$\hat{y}\,(k+\mathrm{j}|k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k)\hat{y}(k+\mathrm{j}-i) + \sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i(k)\hat{u}(k+\mathrm{j}-i) \qquad (4)$$

$$\mathrm{j} = 1{,}2, \dots, \lambda$$

donde

$$\hat{y}(k+1-i) = \mathrm{y(k+1-i)}; \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

$$\hat{u}(k+1-i) = \mathrm{u(k+1-i)}; \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m}$$

De forma análoga a (1), calculamos una trayectoria de referencia, pero en un intervalo $[k,\ k+\lambda]$ en la forma:

$$y_r(k+j|k) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y(k+j-i|k) \ + \sum_{i=1}^{q} \beta_i y_{sp}(k+j-i|k) \qquad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots, \lambda$$

Tomando la función de coste y la solución particular, dadas en [2], dicha función de coste a minimizar queda:

$$J_k = \frac{1}{2}[\hat{y}(k+\lambda\,|k) - y_r(k+\lambda|k)]^2 \qquad (6)$$

Con la condición de que la acción de control permanezca constante en el intervalo de predicción, esto es:

$$u(k|k) = \hat{u}(k+1|k) = \cdots = \hat{u}(k+\lambda-1|k)$$

Con estas consideraciones, la predicción extendida será:

$$\hat{y}(k+\lambda|k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k+1-i) + \sum_{i=2}^{m} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k+1-i) + \hat{h}^{(\lambda)}\, u(k|k) \qquad (7)$$

Donde:

$$\hat{e}_i^{(j)} = \hat{e}_1^{(j-1)} \hat{a}_i + \hat{e}_{i+1}^{(j-1)}; \qquad i = 1, \dots, n;\ \ j = 2, \dots, \lambda \qquad (8a)$$

$$\hat{g}_i^{(j)} = \hat{e}_1^{(j-1)}\, \hat{b}_i + \hat{g}_{i+1}^{(j-1)}; \qquad i = 1, \dots, m; \quad j = 2, \dots, \lambda \quad (8b)$$

$$\hat{h}^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \hat{g}_1^{(i)} \qquad (8c)$$

Con:

$$\hat{e}_i^{(1)} = \hat{a}_i; \qquad i = 1, \dots n; \quad (9a)$$

$$\hat{g}_i^{(1)} = \hat{b}_i; \qquad i = 1, \dots, m; \quad (9b)$$

$$\hat{e}_{n+1}^{(j-1)} = 0 \qquad j = 2, \dots, \lambda \quad (9c)$$

$$\hat{g}_{n+1}^{(j-1)} = 0 \qquad j = 2, \dots, \lambda \quad (9d)$$

Del mismo modo, la trayectoria de referencia tomando $y_{sp}(k+i|k) = y_{sp}(k)$, queda:

$$y_r(k+\lambda|k) = \sum_{i=1}^{p} \hat{\varphi}_i^{(\lambda)} y(k+1-i) + \sum_{i=2}^{q} \delta_i^{(\lambda)} y_{sp}(k+1-i) + \mu^{(\lambda)}\, y_{sp}(k|k) \qquad (10)$$

Donde los parámetros φ_i, δ_i, μ, se calculan de manera análoga que e_i, g_i, h_i, en (8) y (9)

Entonces, igualando (10) con (7) obtenemos la acción de control extendida:

$$u(k) = \frac{y_r(k+\lambda|k) - \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k+1-i) + \sum_{i=2}^{m} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k+1-i)}{\hat{h}^{(\lambda)}} \qquad (11)$$

Esta ley de control, sí que es capaz de controlar un proceso con inverso inestable. La aplicamos al proceso dado por (3) con $\lambda = 3$, y obtenemos la siguiente acción de control:

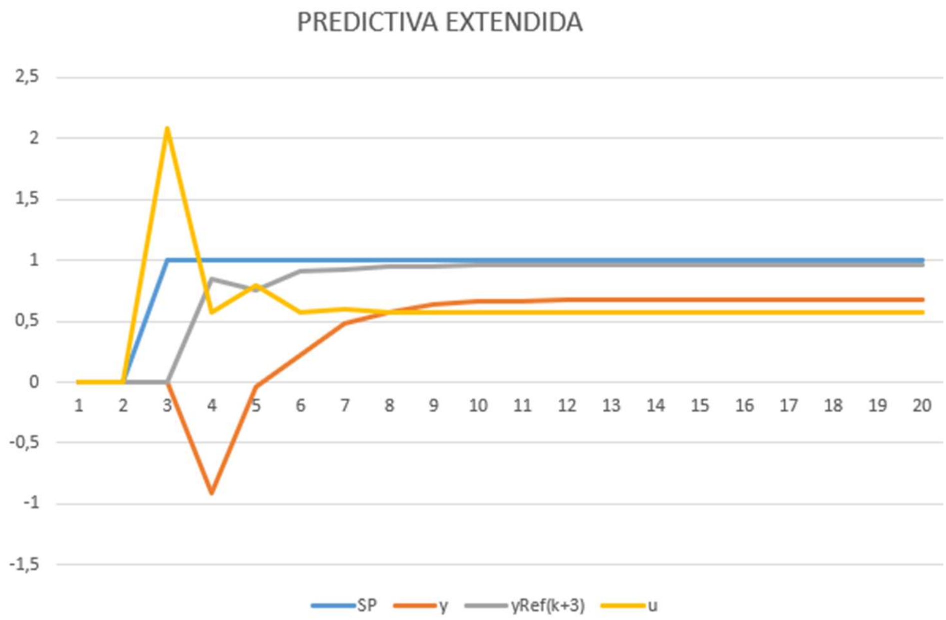

Ilustración 5. Ilustración 8. Acción de control predictiva extendida para el sistema dado en (3)

Se observa que con la estrategia extendida sí que es posible controlar el proceso con una acción de control acotada.

Formulación incremental del control predictivo

El control predictivo se puede formular con variables de entrada y de salida incrementales; esto presenta ciertas ventajas [1], como la resistencia a perturbaciones constantes y la independencia de tener la misma ganancia el proceso y el modelo.

La formulación incremental toma valores incrementales en las variables de entrada y de salida, quedando el modelo predictivo (4), de este modo:

$$\Delta\hat{y}\ (k+\mathrm{j}|k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(k)\Delta\hat{y}(k+\mathrm{j}-i) + \sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i(k)\Delta\hat{u}(k+\mathrm{j}-i) \qquad (12)$$

$$\mathrm{j} = 1,2,\dots,\lambda$$

donde

$$\Delta\hat{y}(k+\mathrm{j}|\mathrm{k}) = \hat{y}(\mathrm{k}+\mathrm{j}|\mathrm{k}) - \hat{y}(\mathrm{k}+\mathrm{j}-1|\mathrm{k})$$

$$\Delta\hat{u}(k+\mathrm{j}|\mathrm{k}) = \hat{u}(k+\mathrm{j}|\mathrm{k}) - \hat{u}(k+\mathrm{j}-1|\mathrm{k})$$

y

$$\Delta\hat{y}(k+1-i) = \mathrm{y}(\mathrm{k}+1-\mathrm{i}) - \mathrm{y}(\mathrm{k}-\mathrm{i}); \qquad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{n}$$

$$\Delta\hat{u}(k+1-i) = \mathrm{u}(\mathrm{k}+1-\mathrm{i}) - \mathrm{u}(\mathrm{k}-\mathrm{i}); \qquad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{m}$$

Tomando una función de coste similar a la del apartado anterior y aplicando condiciones iniciales equivalentes, obtenemos:

$$\hat{y}(k+\lambda|k) - y(k) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(\lambda)} \Delta y(k+1-i) + \sum_{i=2}^{m} \hat{\gamma}_i^{(\lambda)} \Delta u(k+1-i) + \hat{h}^{(\lambda)}\, \Delta u(k|k) \qquad (13)$$

Donde

$$\hat{\eta}_i^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \hat{e}_i^{(j)} \qquad (14a)$$

$$\hat{\gamma}_i^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_i^{(j)} \qquad (14b)$$

$$\hat{h}^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_1^{(j)} \qquad (14c)$$

Y análogamente al apartado anterior, obtenemos la acción de control:

$$\Delta u(k) = \frac{y_r(k+\lambda|k) - \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(\lambda)} \Delta y(k+1-i) - \sum_{i=2}^{m} \hat{\gamma}_i^{(\lambda)} \Delta u(k+1-i)}{\hat{h}^{(\lambda)}} \qquad (15)$$

Siendo

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$$

2. El Mecanismo de Adaptación

La bondad del control predictivo se basa en disponer de un buen modelo del proceso pero aunque se tenga un modelo exacto del mismo, si este cambia su dinámica con el tiempo un modelo estático ve degradada rápidamente su capacidad de controlarlo de manera satisfactoria. Si dispusiéramos de un mecanismo que fuera capaz de adaptar en tiempo real los parámetros del proceso, no nos importaría que nuestro conocimiento de la dinámica del proceso no fuera exacto, o que su dinámica variase.

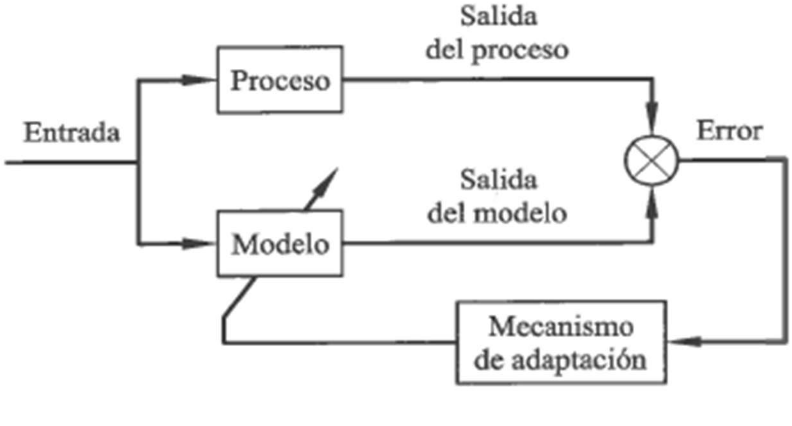

Ilustración 6. Diagrama de bloques de un sistema adaptativo [2]

Los sistemas adaptativos responden generalmente a un esquema similar al de la Ilustración 11. Se alimenta al sistema y al modelo con la misma señal de entrada, y de la resta de ambas salidas se obtiene la señal de error. El mecanismo de adaptación ajustará los valores de los parámetros del modelo, con el objetivo de mantener el error acotado.

Muchos autores han considerado el diseño del mecanismo de adaptación, aquí consideraremos el enfoque desde el punto de vista de la estabilidad dado en [2].

Para simplificar la escritura de las ecuaciones del modelo adaptativo, estableceremos las siguientes notaciones:

$$\phi(k)^T = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m)]$$

$$\hat{\theta}(k)^T = \left[\hat{a}_1(k),\ \hat{a}_2(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \hat{b}_2(k), \dots, \hat{b}_m(k)\ \right]$$

El sistema adaptativo genera una estimación a posteriori, a partir del vector de parámetros estimados y del vector de entradas-salidas. Siendo $d = 1 + r$, donde r es el retardo puro del proceso:

$$y(k|k) = \hat{\theta}(k)^T \cdot\ \phi(k-d)$$

Los errores de estimación a priori y a posteriori, son, respectivamente:

$$e(k|k) = y(k) - \hat{y}(k|k) \qquad (16)$$

$$e(k|k-1) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) \qquad (17)$$

Y el mecanismo de adaptación, calcula para cada k el nuevo vector de parámetros estimados, que para el caso real, sin diferencia de estructuras, es:

$$\hat{\theta}(k) =\ e(k|k)B\ \phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1) \qquad (18)$$

Para calcular el valor de los parámetros en k, necesitamos saber el error a posteriori, y para calcular el error a posteriori necesitamos los parámetros ajustados al instante k, para romper este círculo cerrado utilizamos la relación:

$$e(k|k) = \frac{e(k|k-1)}{1 +\ \phi(k-d)^T B\ \phi(k-d)} \qquad (19)$$

Luego:

$$\hat{\theta}(k) = \frac{e(k|k-1)B\ \phi(k-d)}{1 +\ \phi(k-d)^T B\ \phi(k-d)} + \hat{\theta}(k-1) \qquad (20)$$

El mecanismo de adaptación así definido adapta continuamente los valores del modelo en función del error de estimación. En el caso ideal la única fuente de error de estimación es el error de identificación paramétrica, *sin embargo en presencia de ruidos y perturbaciones éstos también contribuyen al error de estimación*. En este caso si se ejecuta el mecanismo de adaptación, su contribución al vector de estimación paramétrica puede ser negativa. Para discriminar cuando debe y cuando no debe ejecutarse el mecanismo de adaptación, utilizaremos el algoritmo para el caso real sin diferencia de estructuras [2], dado por:

$$\hat{\theta}(k) = \frac{\psi(k)e(k|k-1)B\,\phi(k-d)}{1+\,\phi(k-d)^T B\,\phi(k-d)} + \hat{\theta}(k-1) \qquad (21)$$

Donde $\psi(k)$ viene dada por:

$$\psi(k) = 0, \qquad si\ |e(k|k-1)| < \frac{2\cdot[1+\,\phi(k-d)^T\cdot\,\phi(k-d)]}{2+\,\phi(k-d)^T\cdot\,\phi(k-d)}\Delta_b < 2\Delta_b \quad (22a)$$

$$\psi(k) = 1, \qquad si\ |e(k|k-1)| \geq \frac{2\cdot[1+\,\phi(k-d)^T\cdot\,\phi(k-d)]}{2+\,\phi(k-d)^T\cdot\,\phi(k-d)}\Delta_b \geq \Delta_b \quad (22b)$$

Δ_b se obtiene de:

$$\Delta_b \geq \max_{0<k<\infty} |\Delta(k)| + \rho\,, \qquad siendo\ \rho > 0$$

Siendo $\Delta(k)$ es una estimación del límite superior absoluto de la señal de perturbación.

3. Control Adaptativo Predictivo

El control AP (Adaptativo Predictivo) combina un sistema de control predictivo y un sistema adaptativo, no como una simple yuxtaposición de ambos, sino explotando el beneficio de la interacción entre ellos. El efecto de aprendizaje sobre la dinámica del proceso que realiza el mecanismo de adaptación es aprovechado por el sistema de control predictivo para calcular la señal de control.

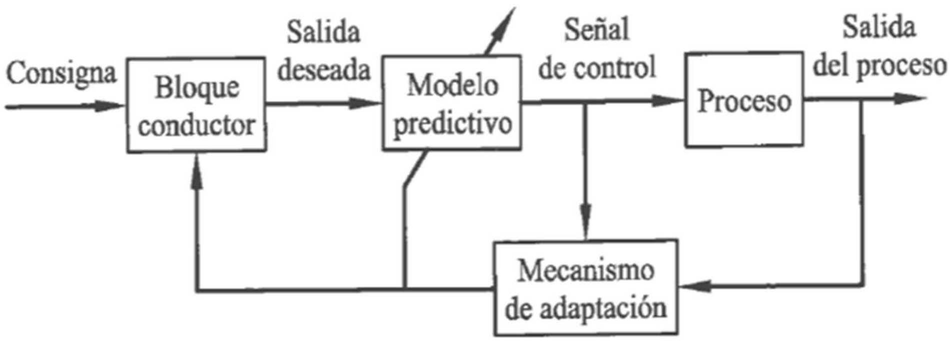

Ilustración 7. Diagrama de bloques del control AP [2]

El sistema de control AP se compone de los siguientes bloques:

- **Bloque conductor:** Genera la trayectoria deseada que guiará el proceso suavemente y sin sobreoscilaciones, habitualmente con una dinámica de segundo orden sobreamortiguada, hacia la consigna. Esta trayectoria debe ser físicamente realizable.

- **Modelo predictivo-adaptativo:** Actúa a dos niveles, por una parte calcula la señal de control que hace que la salida predicha esté contenida en la trayectoria deseada generada por el bloque conductor, por otro lado recibe la misma señal de control que el proceso con el objeto de calcular la señal de error comparando las salidas de ambos.

- **Mecanismo de adaptación:** Ajusta en tiempo real los parámetros del modelo para hacer tender el error a cero e informa al bloque conductor de las desviaciones de la salida del proceso respecto a la trayectoria deseada.

Bibliografía

[1] Martín, Juan M. (1974) *Contribución a los Sistemas Adaptativos con Modelo de Referencia a partir de la Teoría de la Hiperestabilidad*, (tesis doctoral). Universitat Politécnica de Catalunya, Barcelona.

[2] Martín, Juan M. (2005). *Control Adaptativo Predictivo Experto. Metodología, Diseño y Aplicación*. UNED