제 9강 점추정량의 비교(1)

통계적 추론

출처 : 방송통신대학교



학습목표

- 7 추정량의 특성을 설명할 수 있다.
- 결 불편추정량을 설명할 수 있다.
- 3 일치추정량을 설명할 수 있다.
- 4 추정량의 효율성을 설명할 수 있다.
- 5 평균제곱오차를 설명할 수 있다.

학습내용

- 추정량의 특성
- 2 불편성
- 3 일치성
- # 효율성과 평균제곱오차

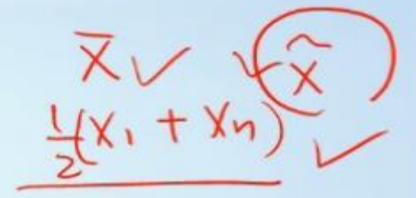


1. 추정량의 특성

■ 추정량: 모수를 추정하는 데 사용되는 통계량

■ 추정방법에 따라 여러 개의 가능한 추정량이 존재 ✔

■ 추정값: 데이터에 근거한 추정량이 실현된 값





🚛 1. 추정량의 특성

- 어떤 추정량이 모수를 추정하는 데 적합한가?
 - * 변동 없이 항상 추정량 값이 모수와 일치 🖊



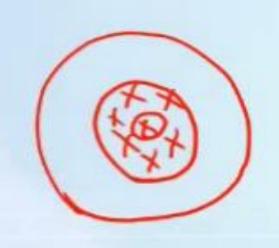
추정량은 뽑을때마다 다른 추정값이 나오고, 이 값은 분포를 하게 됨.

그러면 어떤 추정량이 좋은 것인가?? 판단할 수 있는 기준이 필요



1. 추정량의 특성

■ 추정량 선택기준 : 불편성, 효율성, 일치성



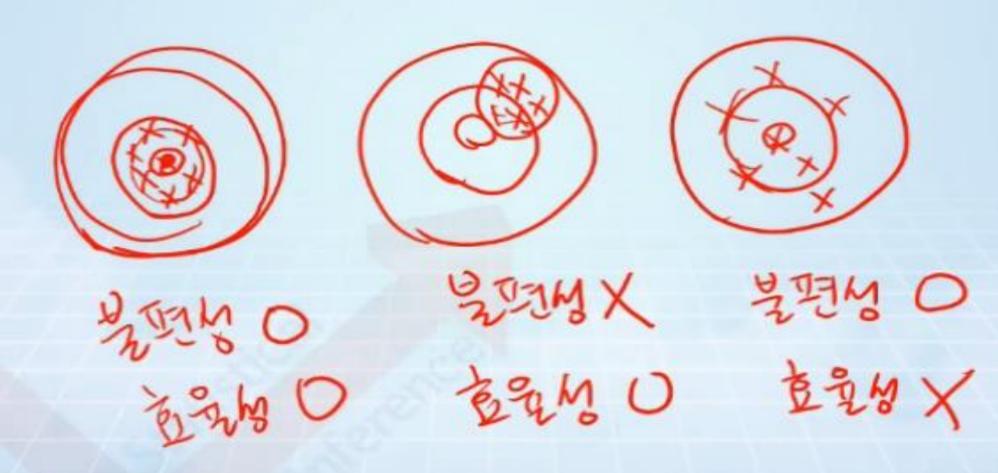






1. 추정량의 특성

■ 추정량 선택기준 : 불편성, 효율성, 일치성



추정량의 불편성을 계산하는 방법을 알아보자. ~~~



■불편추정량

- ▶ 통계량의 모든 가능한 값을 평균하면 모수와 같아지는 추정량
- $E(T) = \theta$

■ 편의추정량

- 불편추정량이 되지 못하는 추정량
- $bias(T) = E(T) \theta$

E(T) = **θ** T는 θ의 불편추정량 이라고 한

이라고 함

들계약





예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 평균이 λ 인 포아송분포를 따르는 확률표본일 때 다음 추정량의 편의는?

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2}$$



예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 평균이 λ 인 포아송분포를 따르는 확률표본일 때 다음 추정량의 편의는?

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2}$$

$$E(X) = E(\frac{1}{M} \frac{2}{2} X_{1}) = \frac{1}{M} \frac{2}{2} E(X_{1})$$

E(Xi)

= Var(Xi)

이차 적률에서 일차적률을 빼면 $E(\chi_{\chi}^2) = \chi + \chi^2$ 분산이 계산됨.

$$Var(X) = \frac{\lambda}{M} = Var(X^{2})$$

$$E(X^{2}) = Var(X) + E(X)^{2}$$

$$= \frac{\lambda}{M} + \lambda^{2}$$

$$= \frac{\lambda}{M-1} \frac{M}{X^{2}} (X^{2} - M)^{2}$$

$$= \frac{\lambda}{M-1} \frac{M}{X^{2}} (X^{2$$

$$= \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{m} (\lambda + \lambda^{2}) - \frac{m}{M-1} (\frac{\lambda}{M} + \lambda^{2})$$

$$= \frac{m}{M-1} (\lambda + \lambda^{2}) - \frac{\lambda}{M-1} - \frac{m}{M-1}$$

$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

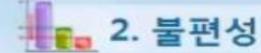
$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

$$= (\frac{m}{M-1} - \frac{1}{M-1}) \lambda + (\frac{m}{M-1} - \frac{m}{M-1}) \lambda^{2}$$

이므로, S 제곱은 λ의 불편 추정량임.



예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는 확률표본일 때 추정량의 편의를 구하라.

$$\hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2}$$

예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는 확률표본일 때 추정량의 편의를 구하라.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

$$E\left(\frac{|M-1|S^2}{\sigma^2}\right) = M = E(S^2) = O^2$$

예시

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(\frac{m-1}{m}S^2)$$

$$= \frac{m-1}{m}E(S^2)$$

$$= \frac{m-1}{m}G^2$$

$$bias = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2$$

$$= \frac{m-1}{m}\sigma^2 - \frac{m}{m}\sigma^2 = \frac{-1}{m}\sigma^2$$

🚛 3. 일치성

■ 표본크기가 증가할수록 추정량의 분포가 모수값으로 집중되어 가는 성질

•
$$T_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$T_n \xrightarrow{p} \theta \vee$$

$$-\lim_{n\to\infty} P[|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta|<\varepsilon]=1 \quad \text{odelle } \frac{270}{}$$

3. 일치성

예시

$$X_1,X_2,\cdots,X_n$$
이 정규분포 $(N(\mu,\sigma^2))$ 를 따르는 확률표본일 때 $\overline{X}=rac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 가 μ 의 일치추정량임을 보여라.

3. 일치성

예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는

확률표본일 때 $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ 가 μ 의 일치추정량임을 보여라.

간단히 증명하면, 오른쪽과 같이 $\sqrt{\alpha_{Y}}$ ($\sqrt{\chi}$) = ($\sqrt{\chi}$) $\sqrt{\alpha_{Y}}$ 방법 1) 지므로 X_Bar은 μ 에 수렴함.

时如与智力的 의 34m X 上的 M 방법2

品 X는 M의 인체 辛奶花



예시

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
이 평균 μ , 분산 σ^2 을 따르는 확률표본일 때 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$ 이 σ 의

일치추정량임을 보여라.

3. 일치성

예시

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
이 평균 μ , 분산 σ^2 을 따르는

확률표본일 때
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$
이 σ 의

일치추정량임을 보여라.

■ 추정량의 변동성이 작다면 추정량 값의 신뢰도는 높아짐

当然收 野家的 写行 一直是的

oxdots 불편추정량 $\hat{ heta}$ 의 효율성

• eff
$$(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$$





예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는

확률표본일 때 추정량의 효율성을 비교하시오.

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2} \qquad \hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2}$$



예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는

확률표본일 때 추정량의 효율성을 비교하시오.

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2} \qquad \hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2}$$

$$\frac{(M-1)5^2}{\sim \chi^2(M-1)}$$

$$V_{\alpha Y}(S^{2}) = \frac{26^{4}}{N-1} \frac{(M-1)^{2}}{6^{4}} V_{\alpha Y}(S^{2}) = 2(M-1)$$

$$Var(\hat{S}^{2}) = \frac{m-1}{264}$$

$$Var(\hat{S}^{2}) = Var(\frac{m-1}{m}S^{2})$$

$$= \frac{(m-1)^{2}}{M^{2}} \frac{Var(S^{2})}{Var(S^{2})} = \frac{(m-1)^{2}}{m^{2}} \frac{264}{m-1}$$

$$= \frac{2(m-1)64}{m^{2}} eff(\hat{S}^{2})$$

$$= \frac{m^{2}}{2(m-1)64}$$

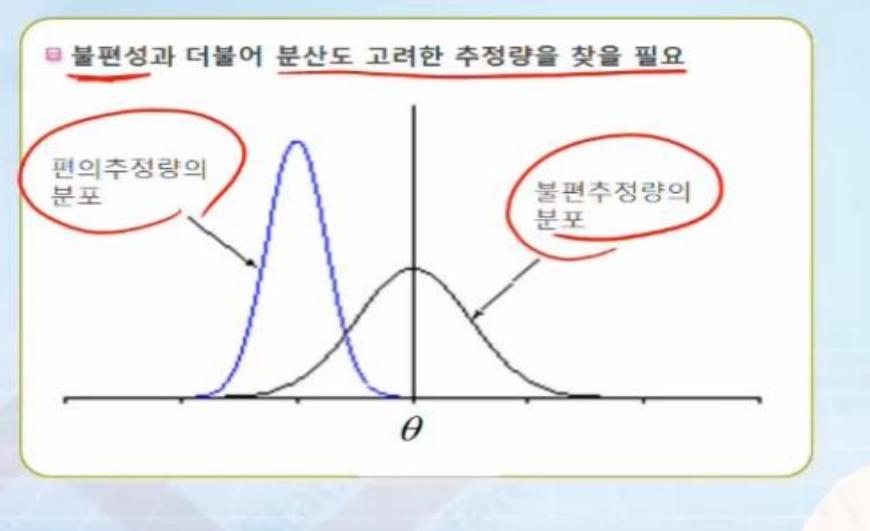
예시

eff(S²) =
$$\frac{m-1}{264}$$

eff(\hat{G}^2) = $\frac{m^2}{2(m-1)64}$

σ제곱은 효율성이지만, 편의가 있고, S제곱은 불편성을 가지고 있지만, 효율성이 떨어짐.

이와 같이 2가지 이슈가 있을때 어떻게 결합할지 고민이 필요함.





추정량의 비교

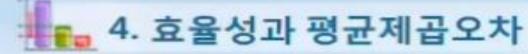
- 편의와 효율성을 동시에 고려한 기준을 마련
 - 평균제곱오차(mean-square error, MSE)

🥟 추정량의 비교

$$MSE(T) = Var(T) + bias(T)$$

对近2011至9六

평균제곱 오차라는 관점에서 최적의 통계량을 찾을 필요가 있음.



예시

 X_1, X_2, \cdots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는

확률표본, 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2} \qquad \hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2}$$



예시

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$ 를 따르는 $(M-1)$ $(M-1)$ $(M-1)$ $(M-1)$

확률표본, 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2} \qquad \hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2}$$

$$E\left(\frac{(m-1)S^2}{6^2}\right) = m-1 \quad Var\left(\frac{(m-1)S^2}{6^2}\right) = 2(m-1)$$

$$E(S^2) = 0^2 Var(S^2) = \frac{204}{m-1}$$

앞에서 구한 값들임

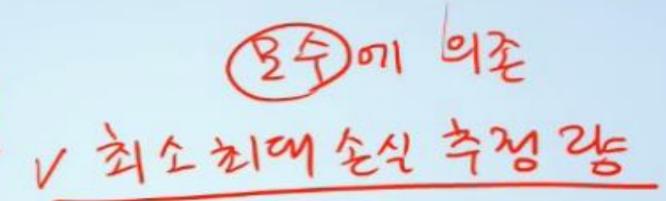
MSE
$$(S^2) = Var(S^2) + bias(S^2)^2$$

 $= \frac{204}{m-1} + 0 = \frac{264}{m-1}V$
MSE $(\hat{G}^2) = Var(\hat{G}^2) + bias(\hat{G}^2)^2$
 $= \frac{2(m-1)}{m^2} 64 + (-\frac{1}{m} 6^2)^2$
 $= \frac{2m-1}{m^2} 64.$

M ≥ 2 M $\leq E(\hat{\sigma}^2) < MSE(S^2)$ M $\leq E(\hat{\sigma}^2) < MSE(S^2)$ M $\leq E(\hat{\sigma}^2) < MSE(S^2)$ $\leq G^2 > 1 + S^2 > 24 + 24$

🚛 4. 효율성과 평균제곱오차

- 🬑 베이즈 추정량
 - ▣ 평균제곱오차의 최대값
 - $Max\theta \in \Omega MSE(\theta,T)$



□ 평균손실을 최소로 하는 추정량

평균손실 추정량은 모수에 의존하지 않음.



예시

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
 $\sim N(\mu, 1)$ 확률표본 $ightarrow
ightarrow
ight$

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \hat{\mu}_2 = \frac{n-1}{n} \bar{X}$$
의 평균손실을 $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}$ \(\lambda(\omega_1)\right) 에 대해 비교하시오.

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
 $\sim N(\mu(1))$ 확量표본 Λ た 地域で

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \hat{\mu}_2 = \frac{n-1}{n} \bar{X}$$
의 평균손실을 $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}$ \ \(\text{(0)}\) 에 대해 비교하시오.

MSE (
$$\mu$$
, $\hat{\mu}_{i}$) = Var ($\hat{\mu}_{i}$) + | biastical = $\frac{6^{2}}{m}$ + 0 = $\frac{\pi}{m}$

$$V M SE (M, \hat{M}) = Var(\hat{M}) + biac \hat{M}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

MSE 의 평균손실에 대한 정의을 적용.

$$\int_{-\infty}^{\infty} MSE(\mu, \hat{\mu}) \pi(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\mu) d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \pi(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi(\mu)}{m} d\mu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} MSE(\mu, \hat{\mu}_2) \pi(\mu) d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\alpha+1)^2}{n^3} + \frac{1}{m^2} \mu^2 \right) \pi(\mu) d\mu.$$

$$= \frac{(m-1)^2}{m^3} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\mu) d\mu + \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \pi(\mu) d\mu + \frac{1}{m^2}$$

선문포에 따라서 결과는 라서 결과는 달라질 수 있음.

요점정리

- 불편성은 추정량 의 기대값이 모수 θ 가 되어 치우침이 없는 성질을 의미한다. B(T) = θ , $\theta \in \Omega$
- 일치성은 추정량이 모수에 확률적으로 수렴하는 성질을 가지는 것을 의미한다.
 limp[lθ̂(X₁, ···, X_n)- θl < ∈]= 1

 $n \rightarrow \infty$

- 효율성은 추정량의 변동성과 관련된 기준이다. 추정량 T의 효율성은 다음과 같이 추정량분산의 역수로 정의된다. $eff(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$
- 통계량 T가 θ의 추정통계량일 때 통계량 T에 대한 평균제곱오차
 (MSE, mean-squared error, MSE)는 통계량의 편의와 분산을 모두 고려한 통계량의 비교기준이다.

 $MSB(T) = B[(T-\theta)^2]$