

제 10강 점추정량의 비교 (2)

캡처를 할려고 했는데 깔끔하지가 없어서
약간의 수식과 칠판에 작성하는 것으로
하겠습니다

1. 추정량의 특성

- 추정량: 모수를 추정하는 데 사용되는 통계량
 - 추정방법에 따라 여러 개의 가능한 추정량이 존재
 - 가상의 표본을 사용하였기 때문에, 일정 분포만 알 수 있다!
 - 단일이 아닌 여러가지이다. $\bar{X}, \frac{1}{2}(x_1 + x_n), \bar{x}$ 와 같이. (등등)
- 추정값: 데이터에 근거한 추정량이 실현된 값

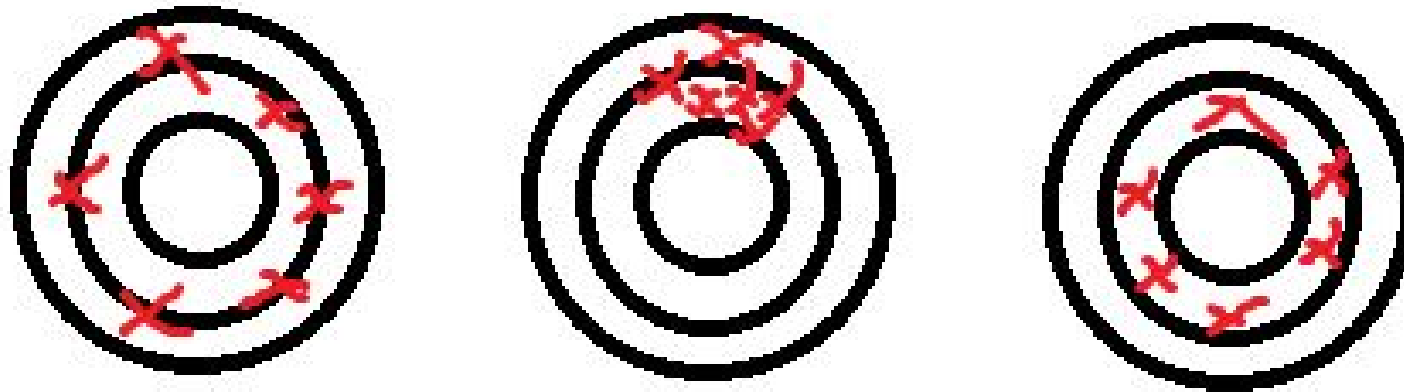
1. 추정량의 특성

- 어떤 추정량이 모수를 측정하는 데 적합한가?
 - 변동 없이 항상 추정량 값이 모수와 일치
 - 추정량은 분포한다. (뽑을때 마다 달라진다)
 - 어떤 추정이 좋은가 대해서는 피셔가 다음과 같은 개념을 생각해 내었다.

불편성 효율성 일치성

1. 추정량의 특성

- 과녁을 예로 들어서 설명해 보자, 다음과 같이 사수가 과녁에 대고 총을 사격하였고, 다음과 같은 결과가 나왔다.



1. 추정량의 특성

- 첫번째 예는 과녁의 주위에 맞아서 불편성은 존재하나, 효율적이지 않다.
- 두번째 예는 한 곳에 많이 맞아서 효율성은 있으나, 불편성은 존재하지 않는다.
- 세번째 예는 잘 맞아서 불편성이 있고, 것도 효율적으로 분포하고 있어서 효율성도 존재한다.
- 세번째 케이스 처럼 **효율성**과 **불편성**이 같이 **존재** 하여야 한다!

2. 불편성

- 불편추정량
 - 통계량의 모든 가능한 값을 평균하면 모수와 같아지는 추정량
 - $E(T) = \theta$
- 편의추정량
 - 불편추정량이 되지 못하는 추정량
 - $\text{bias}(T) = E(T) - \theta$

2. 불편성

- 통계량을 확률분포를 바탕으로 기대값을 구하면 모수와 같아질 때 T 는 θ 에 불편추정량 이라고 이야기 한다.
- 기대값에서 모수를 차감해서 편의추정량을 구하게 된다.
- 불편추정량과 편의추정량을 찾는 것은 중요한 과제 중 하나다.

2. 불편성 (예시)

- X_1, X_2, \dots, X_n 이 평균이 λ 인 포아송분포를 따르는 확률분포일 때 다음 추정량의 편의는?

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

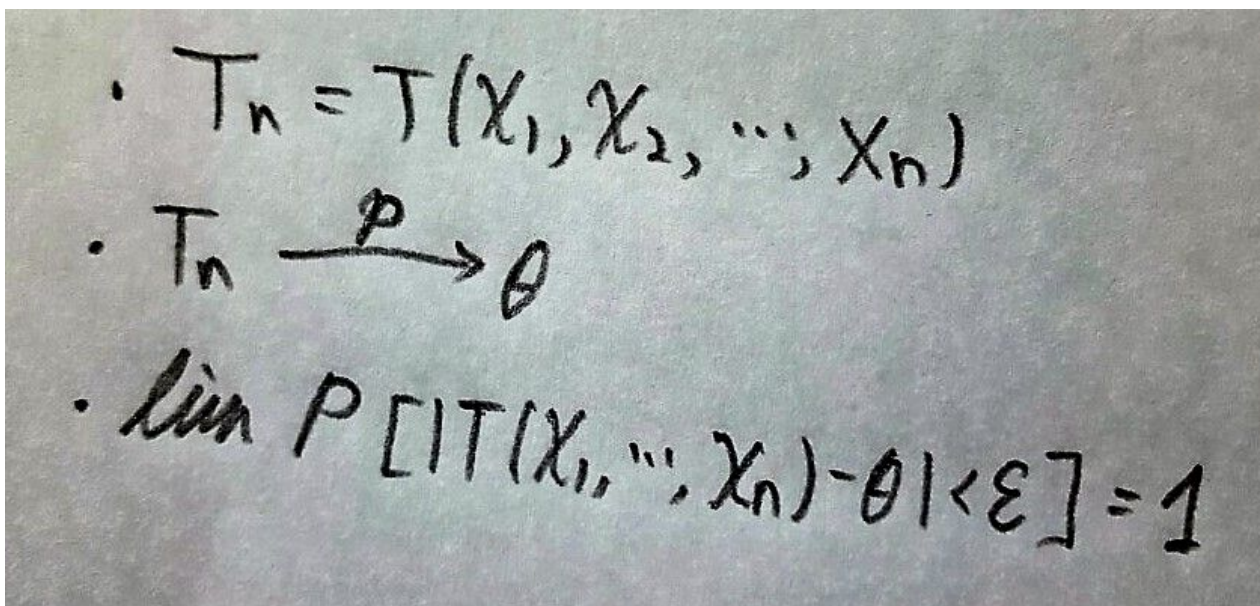
2. 불편성... 증명 타임!

2. 불편성... 증명 타임! (2)

X_1, X_2, \dots, X_n 이 정규분포 ($N(\mu, \sigma^2)$)를 따르는 확률분포 일때 추정량의 편의를 구해라.

3. 일치성

- 표본크기가 증가할수록 추정량의 분포가 모수값으로 집중되어 가는 성질
- 일치추정량



Handwritten mathematical notes defining consistency:

- $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- $T_n \xrightarrow{P} \theta$
- $\lim P[|T(X_1, \dots, X_n) - \theta| < \varepsilon] = 1$

3. 일치성

- 커지면서 1에 수렴하는것.
- T_n 과 세타의 값이 작을 확률이 n 이 커지면서 1로 수렴하는 사실을 표현한다.
- 통계량 T_n 을 세타의 일치추정량 이라고 할수 있다.

3. 일치성... 증명 타임!

- X_1, X_2, \dots, X_n | 정규분포 ($N(\mu, \sigma)$)을 따르는 확률변수일 때

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

가 μ 의 일치추정량임을 보여라

3. 일치성... 증명 타임!

- X_1, X_2, \dots, X_n | 평균 μ , 분산 σ^2 를 따르는 확률 표본일 때

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

이 σ 의 일치추정량임을 구해라.

4. 효율성과 평균제곱오차

- 추정량의 변동성이 작다면 추정량값의 신뢰도는 높아질 것
 - 같은 값을 보이는 것, 걱정이 없음
 - 여론조사를 했다 (값은 바뀐다) → 긴장한다.
- 불편추정량 $\hat{\theta}$ 의 효율성
 - 세타의 분산을 구해서 역수를 취한다.
 - 추정량 변동성 역수 → 효율성 (eff)

$$eff(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$$

4. 효율성과 평균제곱오차... 증명 타임!

- X_1, X_2, \dots, X_n 이 정규분포 $(N(\mu, \sigma))$ 을 따르는 확률표본일 때에 추정량의 효율성을 구하시오.

4. 효율성과 평균제곱오차

- MSE (Mean Square-Error)에 대하여
 - 편의성과 효율성을 동시에 고려한 기준을 마련
 - 평균제곱오차 (Mean Square Error)

$$\begin{aligned}MSE(T) &= E[(T - \Theta)^2] \\&= E((T - E(T)) \\&\quad + (E(T) - \Theta))^2\end{aligned}$$

4. 효율성과 평균제곱오차

- $E((T - E(T))^2) + E((E(T) - \Theta))^2)$
+ $2E((T - E(T))(E(T) - \Theta))$
= $Var(T) + bias(T)^2$
- $MSE(T) = Var(T) + bias(T)^2$

4. 효율성과 평균제곱오차

- X_1, X_2, \dots, X_n 이 정규분포 ($N(\mu, \sigma)$)을 따르는 확률표본,
추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교해라.