제 9강 점추정량의 비교(1)

통계적 추론

출처 : 방송통신대학교

학습개요

학습목표

1. 추정량의 특성을 설명할 수 있다.
2. 불편추정량을 설명할 수 있다.
3. 일치추정량을 설명할 수 있다.
4. 추정량의 효율성을 설명할 수 있다.
5. 평균제곱오차를 설명할 수 있다.

학습내용

1. 추정량의 특성
2. 불편성
3. 일치성
4. 효율성과 평균제곱오차

1. 추정량의 특성

- 추정량 : 모수를 추정하는 데 사용되는 통계량
  - 추정방법에 따라 여러 개의 가능한 추정량이 존재

$\bar{X}$ $\hat{X}$

$\frac{1}{2}(X_1 + X_n)$

- 추정값 : 데이터에 근거한 추정량이 실현된 값

1. 추정량의 특성

- 어떤 추정량이 모수를 추정하는 데 적합한가?
  - 변동 없이 항상 추정량 값이 모수와 일치

추정량 분포

추정량은 뽑을때마다 추정값이 나오고,
이 값은 분포를 하게 됨.

그러면 어떤 추정량이 좋은 것인가??
판단할 수 있는 기준이 필요

1. 추정량의 특성

- 추정량 선택기준 : 불편성, 효율성, 일치성

과녁에 총을 쏘았는데
어떤 것이 좋은 총인가??

1. 추정량의 특성

- 추정량 선택기준 : 불편성, 효율성, 일치성

불편성 O	불편성 X	불편성 O
효율성 O	효율성 O	효율성 X

추정량의 불편성을 계산하는 방법을 알아보자. ~~~

2. 불편성

- 불편추정량
  - 통계량의 모든 가능한 값을 평균하면 모수와 같아지는 추정량
  - $E(T) = \theta$

$$E(\underset{\text{통계량}}{T}) = \underset{\text{모수}}{\theta}$$

T는 θ의 불편추정량 이라고 함.

- 편의추정량
  - 불편추정량이 되지 못하는 추정량
  - $bias(T) = E(T) - \theta$

2. 불편성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균이 λ인 포아송분포를 따르는 확률표본일 때 다음 추정량의 편의는?

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

2. 불편성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균이 λ인 포아송분포를 따르는 확률표본일 때 다음 추정량의 편의는?

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$E(X_i) = Var(X_i) = \lambda$$

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\lambda} = \lambda$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \lambda$$

$$E(X_i^2) = \lambda + \lambda^2$$

이차 적률에서 일차적률을 빼면 분산이 계산됨.

2. 불편성

예시

$$Var(\overline{X}) = \frac{\lambda}{n} \leftarrow Var(X_i)$$

$$= E(\overline{X}^2) - (E(\overline{X}))^2$$

$$E(\overline{X}^2) = Var(\overline{X}) + E(\overline{X})^2$$

$$= \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1} \overline{X}^2$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{n}{n-1} E(\overline{X}^2)$$

2. 불편성

예시

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\lambda+\lambda^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\lambda}{n}+\lambda^2\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}(\lambda+\lambda^2) - \frac{\lambda}{n-1} - \frac{n}{n-1}\lambda^2$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)\lambda + \cancel{\left(\frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-1}\right)}\lambda^2$$

$$0$$

$$\frac{n-1}{n-1} = 1$$

$$E(S^2) = \lambda \qquad S^2\text{의 편의} = 0$$

이므로, S 제곱은 λ의 불편 추정량임.

2. 불편성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는 확률표본일 때 추정량의 편의를 구하라.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

2. 불편성

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는 확률표본일 때 추정량의 편의를 구하라.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) = \frac{n-1}{n}E(S^2)$$

2. 불편성

예시

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} E(S^2)$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$bias = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \frac{n}{n} \sigma^2 = \frac{-1}{n} \sigma^2$$

3. 일치성

- 표본크기가 증가할수록 추정량의 분포가 모수값으로 집중되어 가는 성질

$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

- 일치추정량
  - $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: 추정량
  - $T_n \xrightarrow{p} \theta$
  - $\lim_{n\to\infty} P\left[\left|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta\right| < \varepsilon\right] = 1$ 임의의 ε>0

3. 일치성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는 확률표본일 때 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$가 μ의 일치추정량임을 보여라.

3. 일치성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는 확률표본일 때 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$가 μ의 일치추정량임을 보여라.

간단히 증명하면, 오른쪽과 같이 N이 X_Bar의 분산은 0 에 가까워 지므로 X_Bar은 μ에 수렴함.

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ 방법 1)

약대수법칙에 의해 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ 방법 2)

$\therefore$ $\bar{X}$는 μ의 일치 추정량.

3. 일치성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균 μ, 분산 σ^2을 따르는 확률표본일 때 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ 이 σ의 일치추정량임을 보여라.

3. 일치성

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균 μ, 분산 σ^2을 따르는 확률표본일 때 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ 이 σ의 일치추정량임을 보여라.

i) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

$\frac{n}{n-1} \frac{1}{n}$

$S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

약대수법칙에 의해서 σ 제곱으로 수렴하고, n / (n -1) 은 N이 커짐에 따라 1에 수렴함.

ii) $g(t) = \sqrt{t}$ $\quad S = \sqrt{S^2} \xrightarrow{P} \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

4. 효율성과 평균제곱오차

- 추정량의 변동성이 작다면 추정량 값의 신뢰도는 높아짐

추정량 변동성 역수 → 효율성.

- 불편추정량 $\hat{\theta}$의 효율성
  - $eff(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{\underline{Var(\hat{\theta})}}$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는

확률표본일 때 추정량의 효율성을 비교하시오.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는 확률표본일 때 추정량의 효율성을 비교하시오.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$Var\left(S^2 \cdot \frac{(n-1)}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$$

$$Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \qquad \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var(S^2) = 2(n-1)$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$$\mathrm{eff}(S^2) = \frac{n-1}{2\sigma^4}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{n-1}{n} S^2\right)$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} \underline{\mathrm{Var}(S^2)} = \frac{(n-1)^{\cancel{2}}}{n^2} \frac{2\sigma^4}{\cancel{n-1}}$$

$$= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$$

$$\mathrm{eff}(\hat{\sigma}^2)$$

$$= \frac{n^2}{2(n-1)\sigma^4}$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$$eff(S^2) = \frac{m-1}{2\sigma^4}$$

$$eff(\hat{\sigma}^2) = \frac{m^2}{2(m-1)\sigma^4}$$

$\Rightarrow$ $m \geq 2$ 인 경우 $\hat{\sigma}^2$ 이

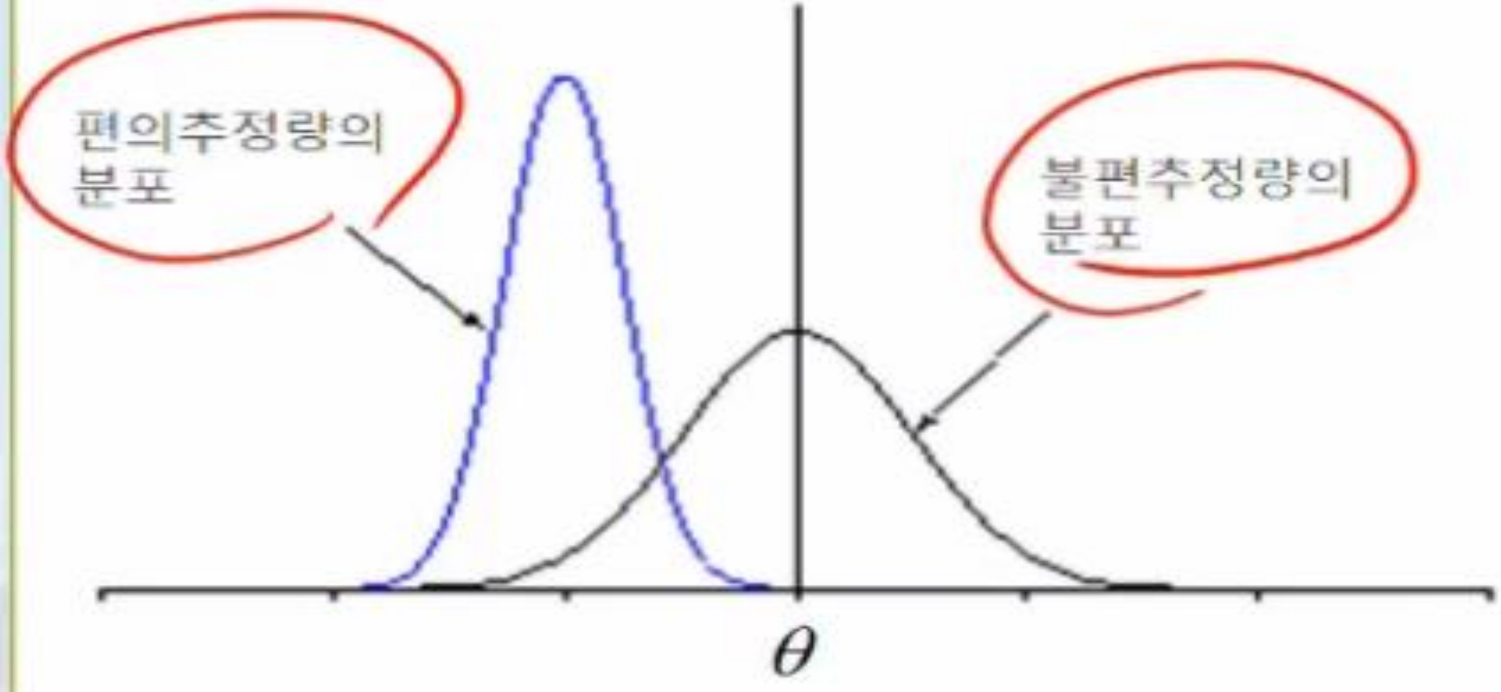
S^2 보다 효율적

σ제곱은 효율성이지만, 편의가 있고,
S제곱은 불편성을 가지고 있지만, 효율성이 떨어짐.

이와 같이 2가지 이슈가 있을때 어떻게 결합할지 고민이 필요함.

4. 효율성과 평균제곱오차

- 불편성과 더불어 분산도 고려한 추정량을 찾을 필요



4. 효율성과 평균제곱오차

추정량의 비교

- 편의와 효율성을 동시에 고려한 기준을 마련
  - 평균제곱오차(mean–square error, MSE)
  - $MSE(T) = E\left[(T-\theta)^2\right] = E\left[\left((T-E(T)) + (E(T)-\theta)\right)^2\right]$

$$= E\left((T-E(T))^2\right) + E\left((E(T)-\theta)^2\right)$$

$$+ 2E\left((T-E(T))(E(T)-\theta)\right)$$

$$= Var(T) + bias(T)^2$$

효율성의 지표와 불편성의 지표를 통합하는 지표로 MSE을 사용함.

4. 효율성과 평균제곱오차

추정량의 비교

- $MSE(T) = Var(T) + bias(T)^2$

평균제곱 오차

평균제곱 오차라는 관점에서 최적의 통계량을 찾을 필요가 있음.

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는

확률표본, 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $(N(\mu, \sigma^2))$를 따르는

확률표본, 추정량의 효율성과 평균제곱오차를 비교하라.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \qquad Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

앞에서 구한 값들임

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$$MSE(S^2) = Var(S^2) + bias(S^2)^2$$

$$= \frac{2\sigma^4}{n-1} + 0 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$MSE(\hat{\sigma}^2) = Var(\hat{\sigma}^2) + bias(\hat{\sigma}^2)^2$$

$$= \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4 + \left(-\frac{1}{n}\sigma^2\right)^2$$

$$= \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$n \geq 2$

$MSE(\hat{\sigma}^2) < MSE(S^2)$

MSE 관점

$\hat{\sigma}^2$ 가 S^2 보다 우수.

4. 효율성과 평균제곱오차

베이즈 추정량

- 평균제곱오차의 최대값
  - $Max_{\theta \in \Omega} MSE(\theta, T)$

모수에 의존

✓ 최소 최대 손실 추정량

- 평균손실을 최소로 하는 추정량
  - $\int_{\theta \in \Omega} MSE(\theta, T)\pi(\theta)d\theta$ ✓ → T

평균손실 θ

베이즈 추정량

평균손실 추정량은 모수에 의존하지 않음.

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본

사전분포

$\hat{\mu}_1 = \bar{X},\ \hat{\mu}_2 = \dfrac{n-1}{n}\bar{X}$ 의 평균손실을 $\pi(\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}$ $\sim N(0,1)$

에 대해 비교하시오.

4. 효율성과 평균제곱오차

$E(\bar{X}) = \mu$

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본

$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \hat{\mu}_2 = \frac{n-1}{n}\bar{X}$ 의 평균손실을 에 대해 비교하시오.

사전분포

$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2} \sim N(0, 1)$

$MSE(\mu, \hat{\mu}_1) = Var(\hat{\mu}_1) + [bias(\hat{\mu}_1)]^2$

$= \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\cancel{1}}{n}$

4. 효율성과 평균제곱오차

$E(\bar{X}) = \mu$

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\frac{n-1}{n}\mu - \mu$

예시

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, 1)$ 확률표본

사전분포

$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \hat{\mu}_2 = \frac{n-1}{n}\bar{X}$ 의 평균손실을 $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}$ $\sim N(0, 1)$

에 대해 비교하시오.

$$\checkmark \; MSE(\mu, \hat{\mu}_1) = Var(\hat{\mu}_1) + \{bias(\hat{\mu}_1)\}^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\cancel{1}}{n}$$

$$\checkmark \; MSE(\mu, \hat{\mu}_2) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{\cancel{\sigma^2}\,1}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}$$

이대로는 비교가 불가능하기 때문에 MSE 의 평균손실값을 구해서 비교

4. 효율성과 평균제곱오차

MSE 의 평균손실에 대한 정의을 적용.

예시

$$\int_{-\infty}^{\infty} MSE(\mu, \hat{\mu}_1)\, \pi(\mu)\, d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(\mu)\, d\mu = \frac{1}{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\mu) d\mu}_{1}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} MSE(\mu, \hat{\mu}_2)\, \pi(\mu)\, d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{n^2} \mu^2 \right) \pi(\mu)\, d\mu$$

4. 효율성과 평균제곱오차

예시

$$= \frac{(n-1)^2}{n^3}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\mu)\,d\mu}_{} + \frac{1}{n^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\pi(\mu)\,d\mu}_{1}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{n^2} \qquad \mu \sim N(0,1)$$

$$= \frac{n^2-n+1}{n^3} = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^3} < \frac{1}{n}$$

평균 손실 면에서 보면

$\hat{\mu}_2$이 $\hat{\mu}_1$보다 우수

이 결과는 사전분포에 따라서 결과는 달라질 수 있음.

요점정리

- 불편성은 추정량 의 기대값이 모수 θ가 되어 치우침이 없는 성질을 의미한다.

$$B(T) = \theta, \quad \theta \in \Omega$$

- 일치성은 추정량이 모수에 확률적으로 수렴하는 성질을 가지는 것을 의미한다.

$$\lim_{n \to \infty} p[|\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n) - \theta| < \epsilon] = 1$$

- 효율성은 추정량의 변동성과 관련된 기준이다. 추정량 T의 효율성은 다음과 같이 추정량분산의 역수로 정의된다. $\mathrm{eff}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}$

- 통계량 T가 θ의 추정통계량일 때 통계량 T에 대한 평균제곱오차 (MSE, mean-squared error, MSE)는 통계량의 편의와 분산을 모두 고려한 통계량의 비교기준이다.

$$MSB(T) = B[(T-\theta)^2]$$

출력하기