7. BÖLÜM

PARAMETRİK DENKLEMLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR

7.1. Parametrik Denklemler

$y = f(x)$ şeklindeki fonksiyonlarla çalıştık. Bazen $g(x, y) = 0$ şeklindeki bağıntılarla da karşılaştık. Örneğin, $x^2 + y^2 = 1$ bu şekilde bir bağıntıdır. Ancak bu gösterimler her zaman aradığımız soruları cevaplayacak bir gösterim değildir. xy düzleminde hareket eden bir parçacığı gözönüne alalım. Parçacığın bir anlık pozisyonu x ve y koordinatları ile verilir. Parçacık düzlemde hareket ederken koordinatlar zamana göre değişir. O halde parçacığın hareketini tanımlamada koordinatları zamanın fonksiyonu olarak belirlemek doğaldır. Böylece I, f ve g fonksiyonlarının tanımlandığı bir aralık olmak üzere $t \in I$ için

$$x = f(t), \; y = g(t)$$

yazılır. Buradaki t ye parametre denir. Yani, x ve y den bağımsız ancak x ve y nin bağlı olduğu yeni t değişkenine parametre denir. Bu denklemlere de eğrinin parametrik denklemi adı verilir. Parametrik denklemler arasında t yi yok edersek eğrinin kartezyen denklemi elde edilir. Eğri üzerindeki pozitif yön parametrenin artan kuvvetlerine karşılık gelen yöndür.

7.1.1. Örnek: ***i.*** $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x = 2t - 1, \ y = -t + 2$$

parametrik denklemleri ile verilen eğriyi gözönüne alalım. $t = 2 - y$ olduğu gözönüne alınarak verilen parametrik denklemin kartezyen koordinatlardaki karşılığı

$$x = 2(2 - y) - 1 \text{ veya } y = \frac{1}{2}(3 - x)$$

olarak yazılır.

ii. $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere

$$x = 3\sin t, \ y = 5\cos t$$

parametrik denklemini gözönüne alalım. Burada

$$\frac{x}{3} = \sin t, \ \frac{y}{5} = \cos t$$

olduğundan

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

yazılır. Yani, verilen bir elipsin parametrik denklemidir.

iii. Kartezyen koordinatlarda $y = 1 - x^2$ eğrisi eriliyor. Bu eğrinin paramerik denklemini

$a.\ x = t$ $\qquad$ $b.\ x = \frac{t}{2}$

seçilmesi halinde bulunuz.

Çözüm: a. Verilen denklemde $x = t$ yazılırsa $y = 1 - t^2$ olur. O halde parametrik denklem

$$x = t, \ y = 1 - t^2$$

olarak bulunur.

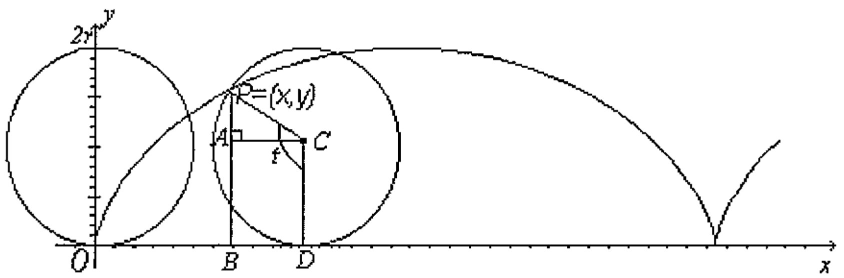
b. Verilen denklemde $x = \frac{t}{2}$ yazılırsa $y = 1 - \frac{t^2}{4}$ olur. O halde parametrik denklem

$$x = \frac{t}{2}, \ y = 1 - \frac{t^2}{4}$$

olarak bulunur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi bir eğri için parametrik denklem tek değildir.

iv. x eksenine orijinde teğet olan r yarıçaplı bir çemberin kaymadan bu eksen üzerinde yuvarlanması halinde başlangıç anındaki değme noktasının hareket boyunca çizdiği eğriye sikloid eğrisi denir. Bu eğrinin denklemini bulunuz.

Çözüm: t parametresi çemberin dönmesinin ölçüsü, $P = (x, y)$ noktası da orijindeki değme noktası olsun. $t = 0$ iken P orijindedir. APC ve PCD iç ters açılar olduğundan $APC = \pi - t$ dir. Buna göre şekildeki dik üçgenden



$$\sin t = \sin(\pi - t) = \frac{|AC|}{r} = \frac{|BD|}{r}$$
$$\cos t = -\cos(\pi - t) = -\frac{|AP|}{r}.$$

olur. Buradan da

$$|AP| = -r\cos t \quad \text{ve} \quad |BD| = r\sin t$$

yazılır. OD doğru parçasının uzunluğu ile DP yayının uzunluğu eşit olacağından $|OD| = rt$ dir. Diğer yandan $|AB| = |CD| = r$ dir. Buna göre

$$x = |OD| - |BD| = r(t - \sin t), \quad y = |AP| + |AB| = r(1 - \cos t)$$

olarak bulunur. Bu ise sikloid eğrisinin parametrik denklemidir.

7.2. Parametrik İfadelerle Türev ve Yay Uzunluğu

Yukarıda bahsedildiği gibi $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrik denkleminde t yok edilerek kartezyen koordinatlara geçilebilir. Ancak, kartezyen koordinatlara geçmeden bu fonksiyonun $\frac{dy}{dx}$ türevinin parametrik ifadesini bulabiliriz. Bunun için daha önce gördüğümüz türevin tanımından yararlanacağız. f ve g fonksiyonları türevlenebilir olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{f(t+\Delta t)-f(t)}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}}{\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}\\ &= \frac{g'(t)}{f'(t)}\\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\end{aligned}$$

elde edilir. Türevin geometrik yorumundan, yukarıdaki türevin $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin (x, y) noktasındaki teğetinin eğimi olduğu söylenir.

Yüksek mertebeden türevler de yukarıdaki muhakemeye benzer olarak

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

şeklinde yazılır.

7.1.2. Örnek: *i.* $x = \sqrt{t}$, $y = \frac{1}{4}(t^2 - 4)$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $(2, 3)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm: İlk olarak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t^{-1/2}} = t^{3/2}$$

dir. $(x, y) = (2, 3)$ olarak verildiğinden $t = 4$ olarak bulunur. O halde eğim

$$m = 4^{3/2} = 8$$

dir.

ii. $x = 3\sin t,\ \ y = 4\cos t$ parametrik denklemi veriliyor. $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin t}{3\cos t} = -\frac{4}{3}\tan t$$

olur. İkinci türev de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{3}(1+\tan^2 t)}{3\cos t}$$

olarak bulunur.

Yay Uzunluğu: Hatırlanacağı gibi kartezyen koordinatlarda verilen $y = h(x)$ eğrisinin $[x_0, x_1]$ aralığındaki yay uzunluğu

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$

olarak yazılır. Eğrinin bu aralıktaki parametrik denklemi $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ ve $f'(t)$ ve $g'(t)$ sürekli ise yay uzunluğu formülü

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$$

olarak elde edilir.

7.1.3. Örnek: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ sikloidinin $0 \leq t \leq 2\pi$ için yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Yay uzunluğu formülünü kullanacağız.

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t), \ \frac{dy}{dt} = r\sin t$$

ve böylece

$$(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = 2r^2(1 - \cos t)$$

olur. O halde yay uzunluğu

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r\sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

formülü ile bulunur. Bu integrali hesaplamak için $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$ trigonometrik özdeşliğini kullanırız. Buna göre

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2}\, r \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 8r \ br \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki parametrik denklemlerin kartezyen koordinatlardaki denklemini yazınız.

i. $x = 3t - 1, \ y = 2t + 1$ **ii.** $x = \sqrt[3]{t}, \ y = t + 1$

iii. $x = t - 1, \ y = \frac{1}{t-1}$ **iv.** $x = e^{2t}, \ y = e^t$

2. Aşağıdaki parametrik denklemler için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevlerini hesaplayınız.

i. $x = 3(1 - \cos t), \ y = 3(t - \sin t)$ **ii.** $x = \sinh t, \ y = \cosh t - t$

iii. $x = e^{2t}, \ y = e^t$ **iv.** $x = r\cos^3 t, \ y = r\sin^3 t$

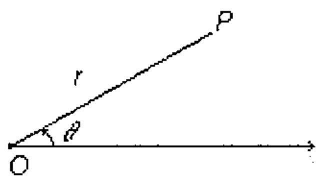
3. $x = at^2, \ y = 2at$ parametrik denklemi ile verilen eğri, x ekseni, $t = 1$ ve $t = 2$ arasında kalan alanı bulunuz. [*Yol gösterme:* $A = \int_1^2 y dx$ olduğunu hatırlayınız]

4. Aşağıda a şıkkında verilen eğrilerin b şıkkındaki aralıkta kalan kısımlarının yay uzunluğunu bulunuz.

i. *a.* $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$ *b.* $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
ii. *a.* $x = 5(2t - \sin 2t),\ y = 10\sin^2 t$ *b.* $0 \leq t \leq \pi$
iii. *a.* $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ *b.* $0 \leq t \leq 2\pi$

7.3. Kutupsal Koordinat Sistemi

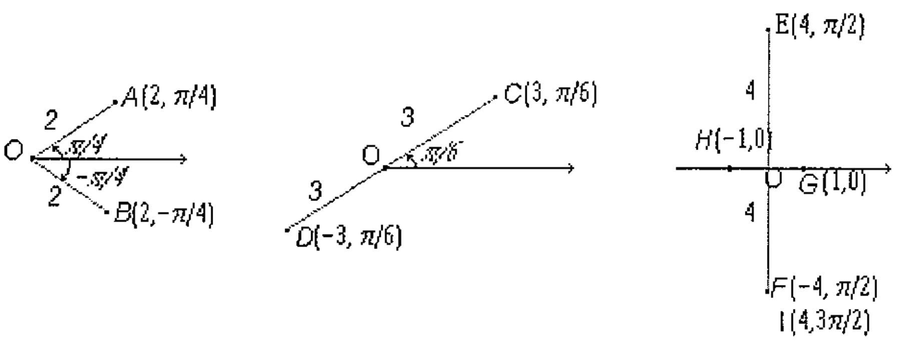
Bu sistem, düzlemde seçilen bir O başlangıç noktası ve bu noktadan başlayan yarı doğrudan oluşur. Kolaylık sağlaması açısından kartezyen koordinat sisteminin orijini başlangıç noktası, x ekseninin pozitif kısmı da yarı doğru olarak alınır. Başlangıç noktasına kutup, yarı doğruya da kutup ekseni adı verilir. Düzlemde keyfi bir P noktası seçelim. Bu P noktası ile başlangıç noktasını birleştiren OP doğru parçasını gözönüne alalım. Bu OP doğru parçasının uzunluğu r ve kutup ekseni ile yaptığı açı θ olsun. İşte (r,θ) noktası düzlemde bir tek P noktasını gösterir. Buna P noktasının kutupsal koordinatı denir.



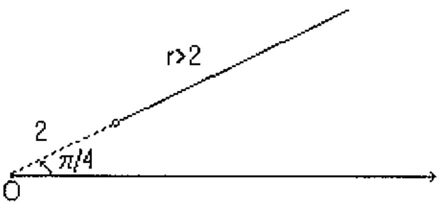
7.3.1. Şekil: (r,θ) noktasının kutupsal olarak gösterilişi

P noktası verildiğinde OP doğru parçasını O tarafından r kadar uzatalım ve bu noktaya P' diyelim. Bu noktanın kutupsal koordinatı $(r,\theta+\pi)$ veya $(-r,\theta)$ ile gösterilir. Bundan anlaşılacağı gibi bir noktanın kutupsal koordinatlar ile gösterilmesi tek değildir. Örneğin, (r,θ) noktası ile k bir tamsayı olmak üzere $(r,\theta+2k\pi)$ düzlemde aynı noktayı gösterir. θ ne olursa olsun $(0,\theta)$ başlangıç noktasının kutupsal koordinatıdır.

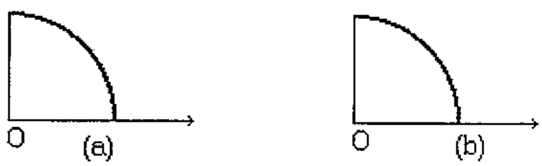
7.3.1.Örnek: *i.* $A(2,\frac{\pi}{4})$, $B(2,-\frac{\pi}{4})$, $C(3,\frac{\pi}{6})$, $D(-3,\frac{\pi}{6})$, $E(4,\frac{\pi}{2})$, $F(-4,\frac{\pi}{2})$, $G(1,0)$, $H(-1,0)$, $I(4,\frac{3\pi}{2})$ kutupsal koordinatlar ile verilen noktaları düzlemde gösterelim.



ii. $T = \{(r, \frac{\pi}{4}) : r > 2\}$ kümesini düzlemde aşağıdaki şekilde gösteririz:



iii. $K = \{(2, \theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ ve $L = \{(r, \theta) : 0 < r < 2,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ kümeleri düzlemde sırasıyla (a), (b) şekillerinde gösterilmiştir.



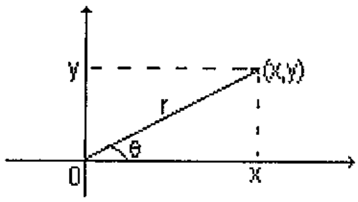
Alıştırmalar

1. $A(3, \frac{\pi}{4})$, $B(3, \frac{9\pi}{4})$, $C(-3, \frac{5\pi}{4})$, $D(-3, -\frac{5\pi}{4})$, $E(0, \pi)$ noktalarını kutupsal koordinat sisteminde gösteriniz.

2. Aşağıdaki kümeleri kutupsal koordinat sisteminde gösteriniz.
i. $A = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{3}\}$ **ii.** $B = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{3},\ r > 3\}$

7.4. Dik ve Kutupsal Koordinatlar Arasındaki İlişki

Daha kullanışlı olması açısından kutup ekseni olarak dik (kartezyen) koordinat sistemindeki x ekseninin pozitif kısmını tercih ettik. Bu seçimle, kutupsal koordinatlar ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişkiyi görebiliriz.



Dik koordinatlarda verilen bir eğriyi kutupsal koordinatlarda yazmak için

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

yazılır. Kutupsal koordinatlarda verilen bir eğriyi de dik koordinatlarda yazmak için

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

eşitlikleri kullanılır. θ açısının bulunduğu bölgeyi belirlemek için

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

bağıntılarından faydalanılır.

7.4.1. Örnek: *i.* Kutupsal koordinatlarda $(2, \frac{3\pi}{4})$ ve $(-2, \frac{\pi}{6})$ olarak verilen noktaların dik koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

ii. Dik koordinatlarda $(3, 3)$ olarak verilen noktayı kutupsal koordinatlarda yazınız.

iii. (r_1, θ_1) ve (r_2, θ_2) kutupsal koordinatlı iki nokta olmak üzere bu noktalar arasındaki uzaklığın

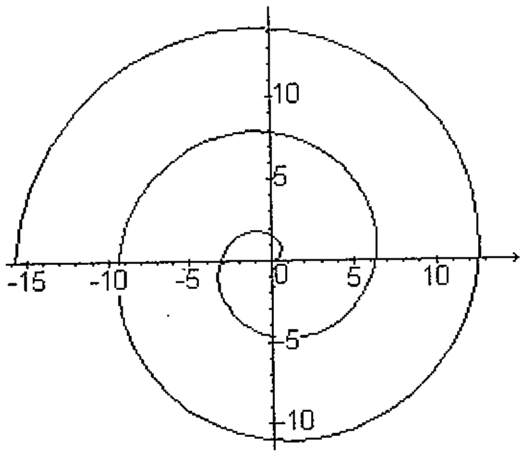
$$d = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) + r_2^2}$$

ii. Bunun anlamı r ne olursa olsun θ daima $\frac{\pi}{4}$ dür. $\theta = \frac{\pi}{4}$ ün dık koordinatlardaki ifadesi $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ olduğundan $y = (\tan\ \theta)x$ yazılır. Buna göre $y = x$ olur. Bu da bildiğimiz $y = x$ doğrusudur.

iii. Bunu iki halde inceleyeceğiz. Birinci halde $\theta \geq 0$; ikinci halde $\theta \leq 0$ için inceleme yapacağız. $\theta \geq 0$ durumunu inceleyelim. Bunun için aşağıdaki tabloyu yapabiliriz:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	...
r	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	...

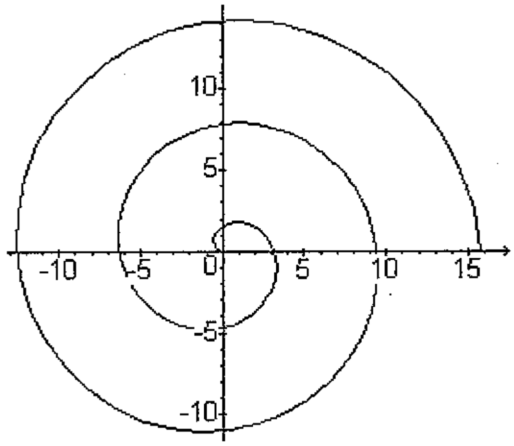
Bu durumda istenen grafik $0 \leq \theta \leq 5\pi$ için aşağıdaki şekildeki gibi olur.



$\theta \leq 0$ için

θ	0	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{2}$	-2π
r	0	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{2}$	-2π

tablosu yapılır. Bu tabloya göre $-5\pi \leq \theta \leq 0$ için istenen eğri aşağıdaki şekilde gibi çizilir.

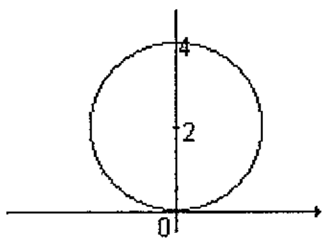


$k \neq 0$ olmak üzere $r = k\theta$ eğrisi benzer şekilde çizilir ve buna Arşimed spirali adı verilir.

iv. Önce tablomuzu yapalım:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$ ≈ 2.8	$2\sqrt{3}$ ≈ 3.4	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0

Bu tabloya göre istenen şekil aşağıdaki gibi çizilir:



Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen kutupsal denklemli eğrilerin grafiğini çiziniz.

i. $r = 3$ **ii.** $r = -2$ **iii.** $\theta = \frac{\pi}{6}$ **iv.** $\theta = -\pi$

v. $r = \frac{\theta}{2}$ **vi.** $r = \frac{|\theta|}{2}$ **vii.** $r = 4\sin\theta$ **viii.** $\tan\theta = 3$

7.6. Kutupsal Koordinatlarda Bazı Özel Eğriler

Kutupsal koordinatlarda grafik çizerken simetrilerden yararlanılır. Bu, grafik çiziminde kolaylık sağlar. $r = f(\theta)$ ile verilen eğrinin simetrileri aşağıdaki yollarla belirlenir:

1. $f(-\theta) = f(\theta)$ veya $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$ oluyorsa kutup ekseni simetri eksenidir.

2. $f(-\theta) = -f(\theta)$ veya $f(\pi - \theta) = f(\theta)$ oluyorsa $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir.

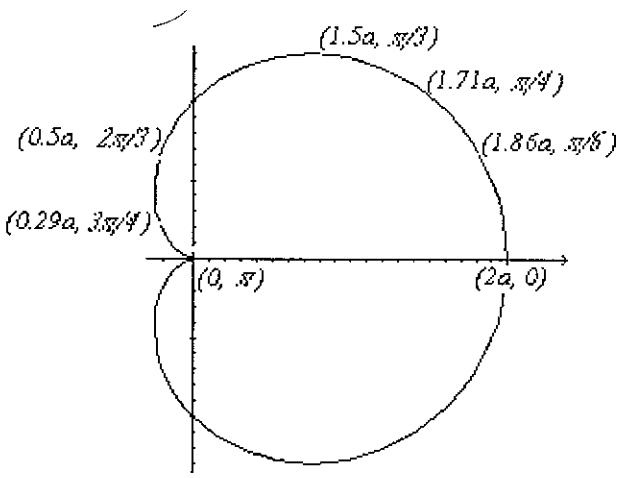
3. $f(\pi + \theta) = f(\theta)$ oluyorsa eğri kutup noktasına göre simetriktir.

Kardoidler: Grafikleri kalp şeklinde olan eğrilerdir. $a > 0$ olmak üzere

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

bir kardoid denklemidir. $f(-\theta) = a(1 + \cos(-\theta)) = f(\theta)$ olduğundan kutup eksenine göre simetriktir. Onun için grafiği $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında çizmek yeterlidir. İstenen grafik ise bu çizilen eğri ve onun kutup eksenine göre simetriği alınırak elde edilir.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
r	$2a$	$(1+\sqrt{3}/2)a$ $\approx 1.86a$	$(1+\sqrt{2}/2)a$ $\approx 1.71a$	$\frac{3}{2}a$	a	$(1-\sqrt{2}/2)a$ $\approx 0.29a$	0



$a > 0$ olmak üzere $r = a(1 - \cos\theta)$ ve $r = a(-1 - \cos\theta)$ her biri yine kardoiddir. Bunların grafiği ise yukarıdaki şeklin $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriğidir. Kardoid denklemlerinde $\cos\theta$ yerine $\sin\theta$ yazarak elde edilen her bir denklem yine bir kardoiddir. Örneğin $r = a(1 + \cos\theta)$ ifadesinde $\cos\theta$ yerine $\sin\theta$ yazarsak $r = a(1 + \sin\theta)$ kardoidi elde edilir. Bunun grafiği ise yukarıdaki grafiği $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürmekle elde edilir.

Limaçonlar: Bu eğriler $a > 0,\ b > 0$ olmak üzere

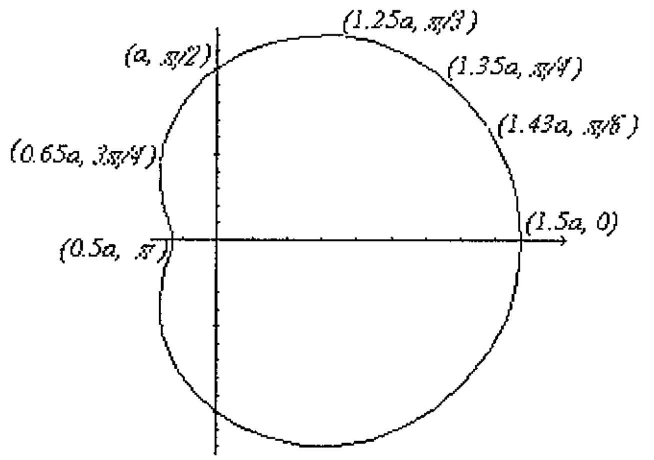
$$r = a(1 + b\cos\theta)$$

denklemi ile verilir. Bu denklemde $b = 1$ alınırsa kardoid elde edilir. Dolayısıyla limaçonlar kardoidlerin genelleştirilmiş halidir. $0 < b < 1$, $b = 1$ ve $b > 1$ olmasına göre ayrı ayrı incelenir. $b = 1$ olması hali kardoidlerde incelendi. Diğer iki durumu inceleyeceğiz. Önce

$$r = a(1 + 0.5\cos\theta)$$

eğrisini gözönüne alalım. Grafik kutup eksenine göre simetriktir. Bu grafiği $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında çizmek yeterlidir. İstenen grafik ise bu çizilen eğri ve onun kutup eksenine göre simetriği alınırak elde edilir.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
r	$\frac{3a}{2}$	$(1+\sqrt{3}/4)a$ $\approx 1.43a$	$(1+\sqrt{2}/4)a$ $\approx 1.35a$	$\frac{5a}{4}$	a	$(1-\sqrt{2}/4)a$ $\approx 0.65a$	$\frac{a}{2}$



$0 < b < 1$ olmak üzere limaçonların grafiği yukarıdaki şekle benzerdir.

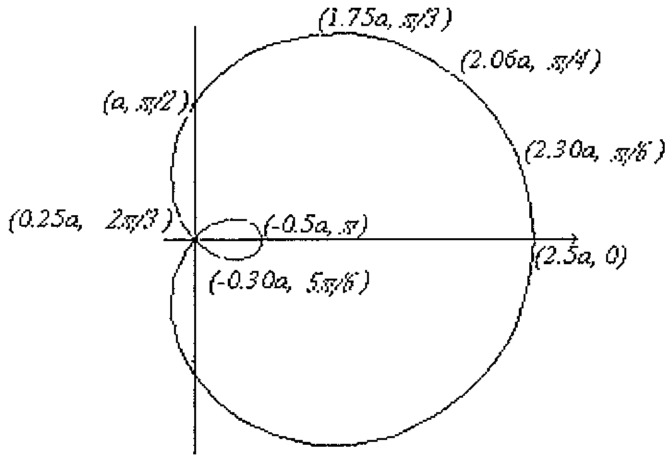
Şimdi de

$$r = a(1 + 1.5\cos\theta)$$

eğrisini gözönüne alalım. Grafik kutup eksenine göre simetriktir. Bu grafiği $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında çizmek yeterlidir. İstenen grafik ise bu çizilen eğri ve onun kutup eksenine göre simetriği alınırak elde edilir.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	$\frac{5a}{2}$	$(1+\frac{3\sqrt{3}}{4})a$ $\approx 2.30a$	$(1+\frac{3\sqrt{2}}{4})a$ $\approx 2.06a$	$\frac{7a}{4}$	a	$\frac{a}{4}$	$(1-\frac{3\sqrt{2}}{4})a$ $\approx -0.06a$	$(1-\frac{3\sqrt{3}}{4})a$ $\approx -0.30a$	$\frac{-a}{2}$

Bu tabloya göre grafik aşağıdaki şekilde çizilir.

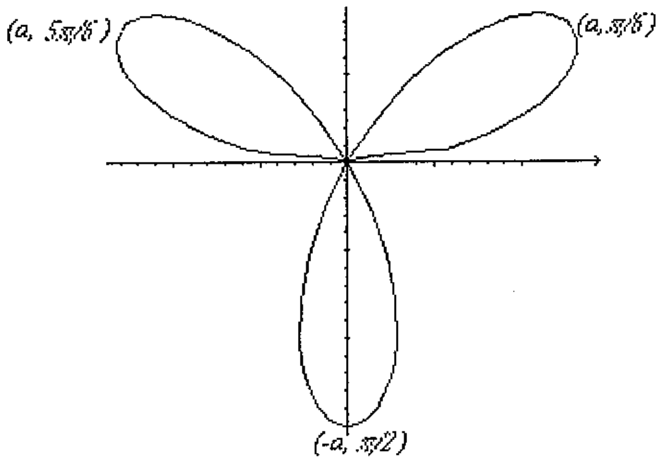


$b > 1$ olmak üzere bütün limoçanların grafiği yukarıdaki şekile benzerdir. Limaçonların değişik şekilleri kardiyodların tartışmasında olduğu gibi elde edilir.

Yaprak Eğrileri: Önce iki tane grafik çizelim. İlk olarak

$$r = a\sin 3\theta, \ a > 0$$

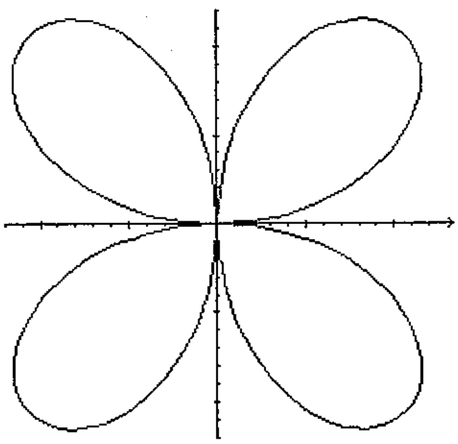
ile verilen eğrinin grafiğini çizelim. Her şeyden önce grafiğini çizeceğimiz eğri $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. $|\sin 3\theta| \leq 1$ olduğundan $|r| \leq a$ olur. θ, 0 dan $\frac{\pi}{3}$ e kadar değişirken 3θ da 0 dan π ye kadar değişir ve dolayısıyla $\sin 3\theta$ önce sıfırdan 1 e kadar artar daha sonra tekrar sıfıra doğru azalır. Benzer şekilde $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ ve $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ aralıklarında çizim işlemleri yapılır. Dolayısıyla istenen şekil aşağıdaki gibi çizilir.



Şimdi de

$$r = a\sin 2\theta$$

eğrisini çizelim. Bu eğri $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$ ve $f(-\theta) = -f(\theta)$ olduğundan hem kutup eksenine ve hemde $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Dolayısıyla $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ için grafiği çizmek yeterlidir. O halde bu eğrinin grafiği de aşağıdaki şekildeki gibi çizilir.



Genel olarak yaprak eğrileri $a \neq 0$ ve $n > 1$ olmak üzere

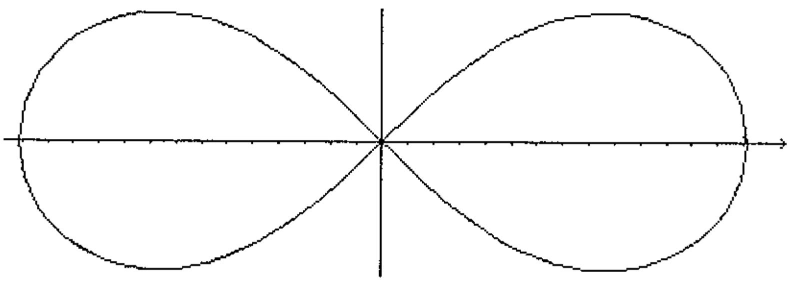
$$r = a\sin n\theta \quad \text{veya} \quad r = a\cos n\theta$$

denklemleri ile verilir. Eğer n tek tam sayı ise eğri n yapraklı, eğer n çift ise eğri $2n$ yapraklı olur.

Lemniskatlar: $a > 0$ olmak üzere

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

denklemini gözönüne alalım. Bu eğri kutup eksenine, $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna ve kutup noktasına göre simetriktir. Böyle bir eğrinin grafiğini çizmek için $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ seçmek uygun olur. Eğri ise aşağıdaki şekildeki gibi çizilir:



Bu eğriye lemniskat eğrisi adı verilir. Eğer yukarıdaki denklemde $\cos 2\theta$ yerine $\sin 2\theta$ yazılırsa yine lemniskat eğrisi olur ve grafiği de yukarıdaki grafiğin kutup etrafında $\theta = \frac{\pi}{4}$ kadar döndürülmesi ile elde edilir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki eğrileri çiziniz.

i. $r = 2\sin\theta$	**ii.** $r = 5\cos^2\theta$	**iii.** $r = \sin 2\theta$
iv. $r = 1 + \cos\theta$	**v.** $r = 1 + 3\cos\theta$	**vi.** $r = 3 + \cos\theta$

7.7. Kutupsal Koordinatlarda Alan

Önce kutupsal koordinatlarda alan kavramını inceleyelim. $r = f(\theta)$ eğrisi $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayacağız. Bu, kartezyen koordinatlarda gördüğümüz $y = f(x)$ eğrisi $x = a$, $x = b$

doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulma problemi ile aynıdır. Kutupsal koordinatlarda alan bulurken r yarıçaplı bir çemberde θ merkez açılı bir dairesel parçanın alanından istifade edeceğiz. Bu alanın

$$A_t = (\pi r^2)(\frac{\theta}{2\pi}) = \frac{\theta r^2}{2}$$

olduğunu biliyoruz. $r = f(\theta)$ eğrisi $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğruları ile sınırlanan alanı $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, ..., \theta_{n-1}, \theta_n = \beta\}$ bölüntüsü ile n tane eşit alt aralığa bölelim. Bu aralıkların her birini dairesel parça olarak alalım. Bu dairesel parçaların toplamı bize yaklaşık alanı verecektir. Yani,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

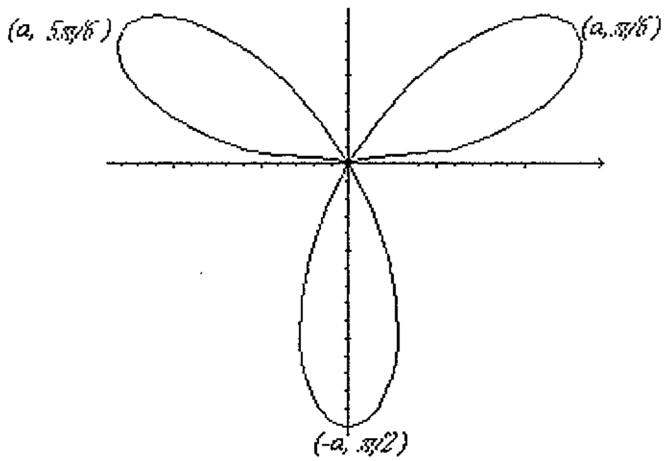
olur. Dolayısıyla istenen alan

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

formülü ile bulunur.

7.7.1. Örnek: *i.* $r = a\sin 3\theta$ yaprak eğrisinin bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm:



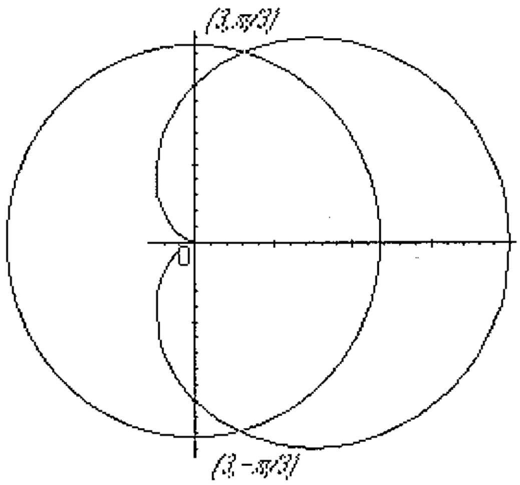
Bu eğrinin birinci bölgede kalan kısmının alanını hesaplayalım. Bu alan $r = f(\theta)$ eğrisi $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ ışınları arasında kalır. Buna göre istenen alan

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (a\sin 3\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi a^2}{12}\, br^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii. $r = 2(1 + \cos\theta)$ kardoidinin içinde ve $r = 3$ çemberinin dışında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplayacağımız alanı geometrik olarak gösterelim.



Bu iki eğrinin kesim noktalarını bulalım. Bunun için

$$2(1 + \cos\theta) = 3$$

denklemini çözmemiz gerekir. Buradan da $\theta = \frac{\pi}{3}$ ve $\theta = -\frac{\pi}{3}$ bulunur. Diğer yandan alan kutup eksenine göre simetriktir. O halde istenen alan

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}[4(1+\cos\theta)^2 - 9]d\theta$$

ile hesaplanır. Buna göre

$$\begin{aligned}\frac{A}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}[4(1+\cos\theta)^2 - 9]d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{9}{4}\sqrt{3}\end{aligned}$$

veya

$$A = -\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,br^2$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $r = 2$ çemberinin dışında ve $r = 2(1+\cos\theta)$ kardoidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

2. $r = 1 + 2\cos\theta$ limaçonu veriliyor. Buna göre dış halka ile iç halka arasındaki alanı bulunuz.