Problemler ve Çözümleri

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $y=3\sin x+4\cos x$

b. $y=\sin x\cos x$

c. $y=\sin^2 x+\sin(x^2)$

ç. $y=\tan x\sec x$

d. $y=-3x^2+4\sec x$

e. $y=\cot x\csc x$

f. $y=\sec x\csc x$

g. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

h. $y=\cos(\sin x)$

ı. $y=\sqrt{x}\sec\sqrt{x}$

i. $y=\dfrac{\sin x}{x}+\sin^2\sqrt{x}$

j. $y=\sin x\cos^2 x$

k. $y=\cos 2x\sin 3x$

l. $y=\sin^2(x^2)+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

m. $y=\sec(\sin x)+\sin(\sec x)$

n. $y=\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+x$

o. $y=\dfrac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)$

ö. $y=\dfrac{(\tan^2 x-1)(\tan^4 x+10\tan^2 x+1)}{3\tan^3 x}$

p. $y=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x+\cos x}$

Çözüm

a. $y=3\sin x+4\cos x$

$y'=3\cos x-4\sin x$

b. $y=\sin x\cos x$

$y'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

c. $y=\sin^2 x+\sin(x^2)$

$y'=2\sin x\cos x+2x\cos(x^2)$

ç. $y=\tan x\sec x$

$$y'=\frac{\cos^3 x+2\cos x\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

d. $y=-3x^2+4\sec x$

$y'=-6x+4\sin x\sec^2 x$

e. $y=\cot x\csc x=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$$y'=\frac{-\sin^3 x-2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x}=-\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

f. $y=\sec x\csc x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$

$$y'=-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

g. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

$y'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x$

$=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$=2\sin 2x(-\cos 2x)=-\sin 4x$

h. $y=\cos(\sin x)$

$y'=-\sin(\sin x)\,.\,\cos x$

ı. $y=\sqrt{x}\sec\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}$

$$y'=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

i. $y=\dfrac{\sin x}{x}+\sin^2\sqrt{x}$

$y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

j. $y=\sin x\,\cos^2 x$

$y'=\cos^3 x-2\cos x\,\sin^2 x$

$=\cos x\,(\cos^2 x-2\sin^2 x)$

k. $y=\cos 2x\,\sin 3x$

$y'=-2\sin 2x\,\sin 3x+3\cos 3x\,\cos 2x$

l. $y=\sin^2(x^2)+\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}$

$y'=2x\sin(2x^2)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{x}$

m. $y=\sec(\sin x)+\sin(\sec x)$

$y'=\sin(\sin x)/\sec^2(\sin x)+\cos(\sec x)\,.\,\sin x\sec^2 x$

n. $y=\dfrac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x$

$y'=\tan^2 x(1+\tan^2 x)-(1+\tan^2 x)+1=\tan^4 x$

o. $y=\dfrac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)$

$y'=\dfrac{1}{15}\left[-3\cos^2 x\sin x(3\cos^2 x-5)-6\cos^4 x\sin x\right]$

$=\dfrac{1}{15}(-9\cos^4 x\sin x+15\cos^2 x\sin x-6\cos^4 x\sin x)$

$=-\cos^4 x\,\sin x+\cos^2 x\,\sin x$

$=\sin x\,\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\sin^3 x\,\cos^2 x$

ö. $y=\dfrac{(\tan^2 x-1)\,(\tan^4 x+10\tan^2 x+1)}{3\tan^3 x}$

$=\dfrac{\tan^6 x+9\tan^4 x-9\tan^2 x-1}{3\tan^3 x}$

$=\dfrac{1}{3}\tan^3 x+3\tan x-\dfrac{3}{\tan x}-\dfrac{1}{3\tan^3 x}$

$y'=\tan^2 x(1+\tan^2 x)+3(1+\tan^2 x)+\dfrac{3(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}+\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}$

$=\tan^4 x+4\tan^2 x+4\tan^{-2} x+\tan^{-4} x+6$

$=\dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x}+4\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+4\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{\cos^4 x}{\sin^4 x}+6$

$=\dfrac{\sin^8 x+4\sin^6 x\cos^2 x+4\sin^2 x\cos^6 x+6\sin^4 x\cos^4 x+\cos^8 x}{\sin^4 x\cos^4 x}$

$=\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^4}{\sin^4 x\,\cos^4 x}=\dfrac{1}{(\sin x\,\cos x)^4}=\dfrac{16}{\sin^4 2x}$

p. $y=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x+\cos x}$

$y'=\dfrac{-x\sin x(x\sin x+\cos x)-x\cos x(x\cos x-\sin x)}{(x\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-x^2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(x\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{-x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

a. $f(x)=(3x-\sin x)\,(x^2+\cos x)$, $\quad f'(0)$

b. $g(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$, $\quad g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

c. $h(x)=\sqrt{x}\sec\sqrt{x}$, $\quad h'(\pi^2)$

d. $k(x)=(\tan x)^7+\tan 7x$, $\quad k'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Çözüm

a. $f(x)=(3x-\sin x)\,(x^2+\cos x)$

$f'(x)=(3-\cos x)\,(x^2+\cos x)+(2x-\sin x)(3x-\sin x)$

$f'(0)=(3-1)\,(0+1)+(0-0)\cdot(0-0)=2$

b. $g(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

$g'(x)=\dfrac{-\cos x+\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=0$

c. $h(x)=\sqrt{x}\sec\sqrt{x}$

$h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\sec x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}$

$h'(\pi^2)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot(-1)+0=-\dfrac{1}{2\pi}$

d. $k(x)=(\tan x)^7+\tan 7x$

$k'(x)=7\tan^6 x\,.\,(1+\tan^2 x)+7\,(1+\tan^2 7x)$

$k'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=7\,.\,1\,.\,2+7(1+1)=21$

3. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y=5\arctan(3x)$ b. $y=\arccos(x^2)$

c. $y=\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{3}$ d. $y=\operatorname{arccsc}(1+x^2)$

e. $y=\operatorname{arccsc}\sqrt{x}+\operatorname{arcsec}\sqrt{x}$

f. $y=\operatorname{arccot}\sqrt{x-1}$

g. $y=x\sqrt{1-x^2}-\arccos x$

h. $y=\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arcsec}x$

ı. $y=\arctan x-\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

i. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

j. $y=\arcsin(x^{100})$ k. $y=\arctan(e^x)$

l. $y=\operatorname{arcsec}(x^2)$ m. $y=\arcsin(\tan$

n. $y=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ o. $y=(\arcsin\sqrt{x}$

ö. $y=\arctan e^x+\operatorname{arccot}e^x$

p. $y=\sin(\arctan x)+\tan(\arcsin x)$

r. $y=\dfrac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]$

Çözüm

a. $y=5\arctan(3x)$

$y'=5\cdot\dfrac{3}{1+(3x)^2}=\dfrac{15}{1+9x^2}$

b. $y=\arccos(x^2)$

$y'=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

c. $y=\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{3}$

$y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{9+x^2}$

d. $y=\operatorname{arccsc}(1+x^2)$

$y'=-\dfrac{2x}{|1+x^2|\sqrt{(1+x^2)^2-1}}$

$=-\dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^4+2x^2}}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)\,|x|\,\sqrt{2+x^2}}$

e. $y = \operatorname{arccsc}\sqrt{x} + \operatorname{arcsec}\sqrt{x}$

$$y' = \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} + \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} = 0$$

f. $y = \operatorname{arccot}\sqrt{x-1}$

$$y' = -\frac{(\sqrt{x-1})'}{1+(\sqrt{x-1})^2} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{x} = \frac{-1}{x\sqrt{x-1}}$$

g. $y = x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}$$

h. $y = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

ı. $y = \arctan x - \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

i. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

j. $y = \arcsin(x^{100}) \Rightarrow y' = \frac{100x^{99}}{\sqrt{1-x^{200}}}$

$\frac{100x^{99}}{\sqrt{1-x^{200}}}$

k. $y = \arctan(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

$y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

l. $y = \operatorname{arcsec}(x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

$\frac{2x}{|x^2|\sqrt{x^4}}$

m. $y = \arcsin(\tan x) \Rightarrow y' = \frac{(\tan x)'}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

n. $y = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$y' = -\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = \frac{2 \cdot x^{-3}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

o. $y = (\arcsin\sqrt{x})^2$

$$y' = 2\arcsin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1-x)} = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1-x)}$$

ö. $y = \arctan e^x + \operatorname{arccot} e^x \Rightarrow y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = 0$

p. $y = \sin(\arctan x) + \tan(\arcsin x)$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

r. $y=\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x-x^2+2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right]=\sqrt{2x-x^2}$$

4. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

a. $f(x)=\left[\arcsin(2x^2)\right]$, $\quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b. $g(x)=\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{5\sin x+4}{5+4\sin x}\right)$, $\quad g'(0)$

c. $h(x)=2\arctan\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$, $\quad h'(4)$

d. $k(x)=\frac{1}{a}\arcsin ax$, $\quad k'(0)$

Çözüm

a. $f(x)=\arcsin(2x^2)$

$$\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{0}=\text{yok}$$

$$f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-1}}$$

0

olduğundan $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yoktur.

b. $g(x)=\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{5\sin x+4}{5+4\sin x}\right)$

$$g'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{5\cos x(5+4\sin x)-4\cos x(5\sin x+4)}{(5+4\sin x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\sin x+4}{5+4\sin x}\right)^2}}$$

$g'(0)=\frac{1}{5}$ olur.

c. $h(x)=2\arctan\sqrt{\frac{2x+1}{3}}\Rightarrow h'(x)=2\cdot\frac{\sqrt{\frac{2x+1}{3}}}{1+\frac{2x+1}{3}}$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3}}\cdot\frac{2x+4}{3}}=\frac{1}{(x+2)\sqrt{\frac{2x+1}{3}}}\Rightarrow$$

$$h'(4)=\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}$$

bulunur.

ç. $k(x)=\frac{1}{a}\arcsin ax$

$$k'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$k'(0)=1$ olur.

$$\frac{1}{a}\;\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{1}{2}$$

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $y = e^{4x}$ b. $y = e^{-\sqrt{x}}$

c. $y = e^{(x^2)}$ ç. $y = (x+1)\ e^{-x}$

d. $y = e^{\cos x}$ e. $y = e^{-\ln x}$

f. $y = 3^{\tan x}$ g. $y = 2^{1/x}$

h. $y = 3^{5x-2}$ ı. $y = a^x \sin bx$

i. $y = \tan e^x$ j. $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$

Çözüm

a. $y = e^{4x} \Rightarrow y' = 4e^{4x}$

b. $y = e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{-\sqrt{x}}$

c. $y = e^{(x^2)} \Rightarrow y' = 2x\ e^{(x^2)}$

ç. $y = (x+1)\ e^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}$

d. $y = e^{\cos x} \Rightarrow y' = -\sin x\ \ e^{\cos x}$

e. $y = e^{-\ln x} = e^{\ln(x^{-1})} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$

f. $y = 3^{\tan x} \Rightarrow y' = 3^{\tan x}.\ (1+\tan^2 x)\ .\ \ln 3$

g. $y = 2^{1/x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}\ 2^{1/x} \ln 2$

h. $y = 3^{5x-2} \Rightarrow y' = 5\ .\ 3^{5x-2}.\ \ln 3$

ı. $y = a^x \sin bx \Rightarrow y' = a^x \ln a\ \sin bx + ba^x \cos bx$

i. $y = \tan e^x \Rightarrow y' = (1+\tan^2 e^x)\ .\ e^x$

j. $y = \dfrac{2^x}{1+2^x} \Rightarrow y' = \dfrac{2^x \ln 2(1+2^x) - 2^x \ln 2\ .\ 2^x}{(1+2^x)^2}$

$$= \frac{2^x \ln 2}{(1+2^x)^2}$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \ln(3x-1)$ b. $y = \ln(1-x^2)$

c. $y = \ln\sqrt{2x+3}$ ç. $y = \ln(1+x)^3$

d. $y = \ln(\sin^2 x)$ e. $y = \cos(\ln x)$

f. $y = (\ln x)^3$ g. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

h. $y = \ln(\ln x)$ ı. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

i. $y = \ln(2\sin x)$ j. $y = \sin(\ln 2x)$

k. $y = \log_5 e^x$ l. $y = x\ \log_4 \dfrac{1}{x}$

m. $y = \log_3(3x^2+1)$ n. $y = x\log_2 x$

o. $y = \log_{10}\sqrt{x+1}$ ö. $y = x^{3/2}\ln(x+1)$

p. $y = \sqrt{x}\left[\cos(\ln x)\right]^2$ r. $y = \log_2 x\ \ \log_3 x$

Çözüm

a. $y = \ln(3x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{3}{3x-1}$

b. $y = \ln\left(1-x^2\right) \Rightarrow y' = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

c. $y = \ln\sqrt{2x+3} = \dfrac{1}{2}\ln(2x+3) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2x+3}$

ç. $y=\ln(1+x)^3 \Rightarrow y'=\dfrac{3(1+x)^2}{(1+x)^3}=\dfrac{3}{1+x}$

d. $y=\ln\ (\sin^2 x) \Rightarrow y'=\dfrac{2\sin x\ \cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x}$

e. $y=\cos(\ln x) \Rightarrow y'=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

f. $y=(\ln x)^3 \Rightarrow y'=3(\ln x)^2.\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$

g. $y=\dfrac{1}{\ln x} \Rightarrow y'=\dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\dfrac{1}{x\ (\ln x)^2}$

h. $y=\ln(\ln x) \Rightarrow y'=\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ \ln x}$

ı. $y=\ln\ (x+\sqrt{x^2+1})$

$$y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

i. $y=\ln(2\sin x) \Rightarrow y'=\dfrac{2\cos x}{2\sin x}=\cot x$

j. $y=\sin(\ln 2x) \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}\cdot\cos(\ln 2\ x)$

k. $y=\log_5 e^x \Rightarrow y'=\dfrac{e^x}{e^x}\ \log_5 e=\log_5 e$

l. $y=x\log_4\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=\log_4\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\cdot x\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\log_4\ e$

$$=\log_4\frac{1}{x}-\log_4 e$$

$$=-\log_4 x-\log_4 e=-\log_4(ex)$$

m. $y=\log_3(3x^2+1) \Rightarrow y'=\dfrac{6x}{3x^2+1}\cdot\log_3 e$

n. $y=x\log_2 x \Rightarrow y'=\log_2 x+x\cdot\dfrac{1}{x}\log_2 e$

$$=\log_2 x+\log_2 e=\log_2(ex)$$

o. $y=\log_{10}\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\log_{10}(x+1)$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\log_{10} e=\frac{1}{2x+2}\log e$$

p. $y=\sqrt{x}\,[\cos(\ln x)]^2$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}[\cos(\ln x)]^2+2[\cos(\ln x)]\left[-\sin(\ln x)\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

r. $y=\log_2 x\log_3 x$

$$y'=\frac{1}{x}\log_2 e\cdot\log_3 x+\frac{1}{x}\log_3 e\cdot\log_2\ x$$

$$=\frac{1}{x}[\log_2 e\log_3 x+\log_3 e\log_2\ x]$$

3. Aşağıdaki ifadeler için y' türevini hesaplayınız.

a. $y=x^x$

b. $y=x^{\sin x}$

c. $y=x^{2/x}$

ç. $y=(\cos x)^{\cos x}$

d. $y=(\ln x)^{\ln x}$

e. $y=(\cos x)^{\pi x^2}$

f. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

g. $y=x^{\ln x}$

h. $y=(\sqrt{x})^x$

ı. $y=(1-x)^x$

Çözüm

a. $y=x^x \Rightarrow \ln y = x \ \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow$

$y' = y(1+\ln x) = x^x\,(1+\ln x)$

b. $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ . \ \ln x \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \cos x \ . \ \ln x + \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow$

$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ . \ \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

c. $y = x^{2/x} \Rightarrow \ln y = \dfrac{2}{x}\ \ln x \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{2}{x^2}\ \ln x + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}\ (1-\ln x) \Rightarrow$

$y = y\ \left[\dfrac{2}{x^2}\,(1-\ln x)\right] = x^{2/x}.\ \dfrac{2}{x^2}\ (1-\ln x)$

ç. $y = (\cos x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \ . \ \ln(\cos x) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = -\sin x\ \ln(\cos x) + \cos x \cdot \dfrac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$y' = -(\cos x)^{\cos x}.\ \sin x\ [1+\ln(\cos x)]$

d. $y = (\ln x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \ . \ \ln(\ln x) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}\ \ln(\ln x) + \ln x \ . \ \dfrac{1}{x\ \ln x} = \dfrac{1}{x}\ [1+\ln(\ln x)]$

$y' = (\ln x)^{\ln x}\ \dfrac{1}{x}\ [1+\ln(\ln x)]$

e. $y = (\cos x)^{\pi x^2} \Rightarrow \ln y = \pi x^2 \ln(\cos x) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = 2\pi x\ \ln(\cos x) - \pi x^2\ \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$y' = (\cos x)^{\pi x^2}\left[2\pi x \ln\ (\cos x) - \pi x^2\ \dfrac{\sin x}{\cos x}\right]$

f. $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ \ln\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \cdot x = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow$

$y' = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}\right]$

g. $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \ . \ \ln x \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2\ln x}{x} \Rightarrow y' = x^{\ln x}\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)$

h. $y = (\sqrt{x})^x = x^{x/2} \Rightarrow \ln y = \dfrac{x}{2}\ \ln x \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\ \ln x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^x(1+\ln x)$

ı. $y = (1-x)^x \Rightarrow \ln y = x \ln(1-x) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \ln(1-x) - \dfrac{x}{1-x} \Rightarrow$

$y' = (1-x)^x\left[\ln(1-x) - \dfrac{x}{1-x}\right]$

4. Aşağıdaki ifadeler için y' türevini hesaplayınız.

a. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

b. $y = e^x \ln x - x$

c. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

d. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

e. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

f. $y = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

g. $y = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2+x}$

h. $y = \arctan x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

ı. $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$

i. $y = \ln\left(1+x+\sqrt{2x+x^2}\right)$

j. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$

k. $y = \ln(x^2-1) + \ln\frac{x-1}{x+1}$

l. $y = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)$
$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

m. $y = \sqrt{x^2-1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

Çözüm

a. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

$= \log_{5^2} e^x - \log_5 x^{1/2} = \frac{1}{2}\log_5 e^x - \frac{1}{2}\log_5 x$

$= \frac{1}{2}\log_5 \frac{e^x}{x}$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{xe^x - e^x}{x^2}}{\frac{e^x}{x}}\log_5 e = \frac{1}{2}\,\frac{x-1}{x}\log_5 e$$

b. $y = e^x \ln x - x \Rightarrow y' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} - 1$

c. $y = \ln\left(e^{-x} + xe^{-x}\right) = \ln\left[e^{-x}(1+x)\right]$

$= \ln e^{-x} + \ln(1+x) = -x + \ln(1+x)$

$$y' = -1 + \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

d. $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

$$y' = \frac{-2\sin x\,\cos x}{\sin^4 x} + \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$$= \frac{-2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x\,\cos x} = \frac{-2\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x\,\cos x}$$

e. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

f. $y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan x$$

g. $y = \ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}\right) - \sqrt{x^2+x}$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+x^2}} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$$

h. $y = \arctan x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^4}$$

ı. $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1+1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

i. $y = \ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$

$$y' = \frac{1+\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$$

j. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2-4})$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} + \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} - 2\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - 2\,\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right] - \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x^2-2-2}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4}$$

k. $y = \ln(x^2-1) + \ln\frac{x-1}{x+1}$

$$= \ln(x^2-1) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1}$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1}$$

l. $y = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$$y' = \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3+4x^2-4x+1}$$

$$= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-4}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right] = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^3+1}$$

m. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$$= \sqrt{x^2+1} - \ln\left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right]$$

$$= \sqrt{x^2+1} - \ln(1+\sqrt{x^2+1}) + \ln x$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

5. Logaritma özelliklerinden yararlanarak, aşağıdaki ifadeleri basit ifadelerin logaritmaları haline getirip türevlerini hesaplayınız.

a. $y=\ln\left[(2x+1)^3(x^2-4)^4\right]$

b. $y=\ln\sqrt{\dfrac{4-x^2}{9+x^2}}$

c. $y=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Çözüm

a. $y=\ln\left[(2x+1)^3(x^2-4)^4\right]$

$=\ln(2x+1)^3+\ln(x^2-4)^4$

$=3\ln(2x+1)+4\ln(x^2-4)$

$$y'=\frac{3\,.\,2}{2x+1}+4\,.\,\frac{2x}{x^2-4}=\frac{6}{2x+1}+\frac{8x}{x^2-4}$$

b. $y=\ln\sqrt{\dfrac{4-x^2}{9+x^2}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(4-x^2)-\ln(9+x^2)\right]$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-2x}{4-x^2}-\frac{2x}{9+x^2}\right]$$

$$=-x\left(\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9+x^2}\right)=-\frac{13x}{(4-x^2)(9+x^2)}$$

c. $y=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln(\sin x)-\ln x$

$$y'=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı denklemleri sağladığını gösteriniz.

a. $y=x\,e^{2x}$, $\quad xy'=y\,(1+2x)$

b. $y=x\,e^{-x^2/2}$, $\quad xy'=y\,(1-x^2)$

Çözüm

a. $y=xe^{2x}\Rightarrow y'=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x)$

ifadeleri

$xy'=y\,(1+2x)$

denkleminde yerine yazılırsa

$x\cdot e^{2x}(1+2x)=xe^{2x}(1+2x)\;\Rightarrow\;1=1$

bulunur. O halde denklem sağlanır.

b. $y=xe^{-x^2/2}\Rightarrow y'=e^{-x^2/2}-x^2\,.\,e^{-x^2/2}$

$$=e^{-x^2/2}(1-x^2)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$xy'=y\,(1-x^2)$

$x\,.\,e^{-x^2/2}(1-x^2)=xe^{-x^2/2}(1-x^2)$

bulunur ki bu da denklemin sağlandığını gösterir.

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $y = \sinh\sqrt{x}$

b. $y = \cosh(3x-2)$

c. $y = \operatorname{sech} e^{2x}$

d. $y = \ln(\sinh 3x)$

e. $y = e^{\operatorname{csch} x}$

f. $y = \cosh(\ln x)$

g. $y = \sin(\sinh x)$

h. $y = \arctan(\tanh x)$

ı. $y = \sinh(x^4)$

i. $y = \sinh^4 x$

j. $y = \coth^3 4x$

k. $y = x^2 \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$

l. $y = \cosh^2 5x - \sinh^2 5x$

m. $y = \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x$

n. $y = x \sinh x - \cosh x$

Çözüm

a. $y = \sinh\sqrt{x}$

$y' = \cosh\sqrt{x} \,.\, \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cosh\sqrt{x}$

b. $y = \cosh(3x-2) \Rightarrow y' = 3\sinh(3x-2)$

c. $y = \operatorname{sech} e^{2x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} \,.\, \operatorname{sech} e^{2x} \,.\, \tanh e^{2x}$

d. $y = \ln(\sinh 3x) \Rightarrow y' = \dfrac{3\cosh 3x}{\sinh 3x} = 3\coth 3x$

e. $y = e^{\operatorname{csch} x} \Rightarrow y' = -e^{\operatorname{csch} x} \,.\, \operatorname{csch} x \,.\, \coth x$

f. $y = \cosh(\ln x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \sinh(\ln x)$

g. $y = \sin(\sinh x) \Rightarrow y' = \cosh x \cos(\sinh x)$

h. $y = \arctan(\tanh x) \Rightarrow y' = \dfrac{\operatorname{sech}^2 x}{1 + \tanh^2 x}$

ı. $y = \sinh(x^4) \Rightarrow y' = 4x^3 \cosh(x^4)$

i. $y = \sinh^4 x \Rightarrow y' = 4\sinh^3 x \cosh x$

j. $y = \coth^3 4x$

$y' = 3\coth^2 4x \,.\, (-\operatorname{csch}^2 4x) \,.\, 4$

$= -12\coth^2 4x \,.\, \operatorname{csch}^2 4x$

k. $y = x^2 \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$y' = 2x \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2 . \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sech}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= 2x \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right) - \operatorname{sech}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

l. $y = \cosh^2 5x - \sinh^2 5x$

$y' = 10\cosh 5x \sinh 5x - 10 \sinh 5x \cosh 5x = 0$

olur. Bu $\cosh^2 5x - \sinh^2 5x = 1$ olmasının sonucudur.

m. $y=\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x$

$y'=2\operatorname{sech} x\,.\,(-\operatorname{sech} x\,.\,\tanh x)+2\tanh x\,.\,\operatorname{sech}^2 x$

$=-2\operatorname{sech}^2 x\ \tanh x+2\tanh x\,.\,\operatorname{sech}^2 x=0$

olur. Bu sonuç $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=c$ olacak biçimde bir c sabitinin varlığını gösterir. Bu c sabitini bulunuz.

n. $y=x\ \sinh x-\cosh x$

$y'=\sinh x+x\ \cosh x-\sinh x=x\cosh x$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $y=\operatorname{arcsinh} 2x$

b. $y=\operatorname{arccosh}(\sec x)$

c. $y=\operatorname{arctanh}(\cos x)$

ç. $y=\operatorname{arcsech}(\sin 2x)$

d. $y=\operatorname{arccosh}(x^2)$

e. $y=\operatorname{arcsinh}\sqrt{x-1}$

f. $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh} x$

g. $y=\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$

h. $y=2\ \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

ı. $y=\operatorname{arccosh}(x^2+1)+\operatorname{arctanh}\sqrt{x}$

i. $y=\operatorname{arcsinh}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctanh} x)$

Çözüm

a. $y=\operatorname{arcsinh} 2x \Rightarrow y'=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

b. $y=\operatorname{arccosh}(\sec x)$

$$y'=\frac{(\sec x)'}{\sqrt{\sec^2 x-1}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}}=\sec x$$

c. $y=\operatorname{arctanh}(\cos x)$

$$y'=\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x-1}=\frac{-\sin x}{-\sin^2 x}=\csc x$$

ç. $y=\operatorname{arcsech}(\sin 2x)$

$$y'=\frac{-2\cos 2x}{\sin 2x\sqrt{1-\sin^2 2x}}=-2\csc(2x)$$

d. $y=\operatorname{arccosh}(x^2)\Rightarrow y'=\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$

e. $y=\operatorname{arcsinh}\sqrt{x-1}$

$$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

f. $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arccosh} x$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

g. $y=\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

h. $y = 2\ \text{arccos h}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

$$y' = 2.\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} + \frac{x}{2}.\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{2}.\frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$$

ı. $y = \text{arccos h}\ (x^2+1) + \text{arctan h}\ \sqrt{x}$

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^2-1}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2-1}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x-1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x-1)}$$

i. $y = \text{arcsin h}\,(\ln x) + \ln(\text{arctan h}\,x)$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln^2 x+1}} + \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\text{arctan h}x}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x+1}} + \frac{1}{(x^2-1)\ \text{arctan h}x}$$

3. Aşağıdaki bağıntılardan y' türevini bulunuz.

a. $x^2+y^2=4$

b. $x^2+y^2-3xy+x-y=0$

c. $x^{2/3}+y^{2/3}=4$

d. $x=y+\tan y$

e. $x^3+y^3=3xy$

Çözüm

a. $x^2+y^2=4 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}$

b. $x^2+y^2-3xy+x-y=0 \Rightarrow$

$2x+2yy'-3y-3xy'+1-y'=0 \Rightarrow$

$(2y-3x-1)\,y'=-2x+3y-1 \Rightarrow$

$$y'=\frac{-2x+3y-1}{-3x+2y-1}$$

c. $x^{2/3}+y^{2/3}=4 \Rightarrow$

$\dfrac{2}{3}x^{-1/3}+\dfrac{2}{3}y^{-1/3}.\ y'=0 \Rightarrow$

$$y'=\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

d. $x=y+\tan y \Rightarrow$

$1=y'+(1+\tan^2 y).\ y' \Rightarrow$

$1=(2+\tan^2 y).\ y' \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2+\tan^2 y}$

e. $x^3+y^3=3xy \Rightarrow$

$3x^2+3y^2.\ y'=3y+3xy' \Rightarrow$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

4. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini, karşılarında yazılı parametreler için hesaplayınız.

a. $\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=3t^3+2 \end{cases},\qquad t=1$

b. $\begin{cases} x=t\ \sin t \\ y=t\ \cos t \end{cases},\qquad t=\dfrac{\pi}{4}$

c. $\begin{cases} y = e^{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 0$

d. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $t = 1$

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \ddot{x}\ \dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

a. $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t^3 + 2 \end{cases}$, $t = 1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{9t^2}{4t} = \frac{9t}{4} \Rightarrow \dot{y}\,\Big|_{t=1} = \frac{9}{4}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3} = \frac{4t\,.\,18t - 4\,.\,9t^2}{(4t)^3} = \frac{9}{16t}$$

$$y''\Big|_{t=1} = \frac{9}{16}$$

b. $\begin{cases} x = t\ \sin t \\ y = t\ \cos t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$

$$\dot{x} = \sin t + t\cos t \Rightarrow \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ddot{x} = \cos t + \cos t - t\sin t \Rightarrow$$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\dot{y} = \cos t - t\sin t \Rightarrow \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ddot{y} = -\sin t - \sin t + t\cos t \Rightarrow$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 - \pi}{4 + \pi}$$

$$y'' = \frac{\dot{x}\,.\,\ddot{y} - \ddot{x}\,.\,\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 2\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\right]^3}$$

$$= 32\sqrt{2}\,\frac{\pi - 8}{(4 + \pi)^3}$$

bulunur.

c. $\begin{cases} y = e^{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 0$

$$\dot{x} = e^{t} \Rightarrow \dot{x}\ (0) = 1$$

$$\ddot{x} = e^{t} \Rightarrow \ddot{x}\ (0) = 1$$

$$\dot{y} = -e^{-t} \Rightarrow \dot{y}\ (0) = -1$$

$$\ddot{y} = e^{-t} \Rightarrow \ddot{y}\ (0) = 1$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y'' = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \dot{y}\ \ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{1\,.\,1 + 1\,.\,1}{1} = 2$$

d. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $t = 1$

$$\dot{x} = \frac{3(1+t^3)-9t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2} \Rightarrow \dot{x}\ (1) = -\frac{3}{4}$$

$$\ddot{x} = \frac{-18t^2(1+t^3)^2 - 2(1+t^3)\ 3t^2(3-6t^3)}{(1+t^3)^4} \Rightarrow$$

$$\ddot{x}\ (1) = \frac{-36}{16} = -\frac{9}{4}$$

$$\dot{y} = \frac{6t(1+t^3)-9t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2} \Rightarrow \dot{y}\ (1) = \frac{3}{4}$$

$$\ddot{y} = \frac{(6-12t^3)\ (1+t^3)^2 - 2(1+t^3)\ 3t^2(6t-3t^4)}{(1+t^3)^4} \Rightarrow$$

$$\ddot{y}(1) = -\frac{15}{4}$$

$$y' = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} - 1$$

$$y'' = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = -\frac{32}{3}$$

5. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların n türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = \ln x$ **b.** $f(x) = \sin x$

c. $f(x) = \cos 3x$ **d.** $y = \sqrt{x}$

e. $f(x) = \sin^2 x$

Çözüm

a. $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1\ .\ 2\ .\ 3}{x^4}, \ldots$$

olacağından

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\ !}{x^n}$$

olacaktır.

b. $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

olacağından

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

olacaktır.

c. $f(x) = \cos 3x$

$$f'(x) = -3\sin 3x = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -3^2\cos 3x = 3^2\cos\left(3x + 2\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 3^3\sin 3x = 3^3\cos\left(3x + 3\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = 3^4\cos 3x = 3^4\cos\left(3x + 4\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

olduğundan, n. türev

$$f^{(n)}(x) = 3^n\cos\left(3x + n\ .\ \frac{\pi}{2}\right)$$

olacaktır.

d. $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{2^2}\, x^{-3/2} \Rightarrow$$

$$y''' = \frac{1\,.\,3}{2^3}\, x^{-5/2} \Rightarrow y^{(4)} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^4}\, x^{-7/2}$$

olacağından, $n \geq 2$ için

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-3)}{2^n}\, x^{-(2n-1)/2}$$

olur.

e. $f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2\sin x\,\cos x = \sin 2x$

olur. $\sin 2x$ ifadesinin $(n-1)$. türevi

$$2^{n-1}\sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

olacağından

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$= 2^{n-1}\sin\left[2x + (n-1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

bulunur.

6. $f(x) = x^n$ için

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

olduğundan, $x = 1$ yazılarak

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

bulunur.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

olduğundan

$$f(x) = x^n \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n = \binom{n}{1}$$

$$f''(x) = n(n-1)\,x^{n-1} \Rightarrow f''(1) = n(n-1) = \binom{n}{2}\,.\,2$$

$$f'''(x) = n(n-1)\,(n-2)\,x^{n-2} \Rightarrow$$

$$f'''(1) = n(n-1)\,(n-2) = \binom{n}{3}\,.\,3!$$

bulunur. Benzer şekilde

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\,.\,1 = n! = \binom{n}{n}\,n!$$

yazılabileceğinden

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

$$= 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ olur.}$$

1. Türev tanımından yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $f(x)=x^2-3x$

b. $g(x)=\cos 2x$

Çözüm

a. $f(x)=x^2-3x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-x^2+3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh-3h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x-3+h)$$

$$=2x-3$$

b. $f(x)=\cos 2x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\ \cos 2h-\sin 2x\ \sin 2h-\cos 2x}{h}$$

$$=\cos 2x\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x.\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}$$

$$=\cos 2x\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{1-2\sin^2 h-1}{h}-\sin 2x\ .\ 2$$

$$=\cos 2x\ .\ 0\ .\ 1-2\sin 2x=-2\sin 2x$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $y=-\dfrac{15}{4\,(x-3)^4}-\dfrac{10}{3\,(x-3)^3}-\dfrac{1}{2\,(x-3)^2}$

b. $y=\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$

c. $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

Çözüm

a. $$y=-\frac{15}{4(x-3)^4}-\frac{10}{3(x-3)^3}-\frac{1}{2(x-3)^2}$$

$$=-\frac{15}{4}(x-3)^{-4}-\frac{10}{3}(x-3)^{-3}-\frac{1}{2}(x-3)^{-2}$$

$$y'=15(x-3)^{-5}+10\ .\ (x-3)^{-4}+(x-3)^{-3}$$

$$=\frac{15}{(x-3)^5}+\frac{10}{(x-3)^4}+\frac{1}{(x-3)^3}$$

b. $$y=\frac{1}{8}\left(1+x^3\right)^{8/3}-\frac{1}{5}\left(1+x^3\right)^{5/3}$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(1+x^3\right)^{5/3}.3x^2-\frac{1}{3}\left(1+x^3\right)^{2/3}.\ 3x^2$$

$$=x^2\left(1+x^3\right)^{2/3}.\ \left(1+x^3-1\right)=x^5\left(1+x^3\right)^{2/3}$$

c. $$y=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{a}x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$$

3. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalarda türevli olmadıklarını gösteriniz.

a. $f(x)=3\,|x|+2, \qquad x=0$

b. $g(x)=\sqrt[5]{x^3}, \qquad x=0$

c. $h(x)=\sqrt[3]{x-1}, \qquad x=1$

d. $k(x)=|\ln x|, \qquad x=1$

Çözüm

a. $f(x)=3\,|x|+2, \qquad x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|+2-2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|}{x}=3$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|+2-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x}{x}=-3$$

olur. Sağ ve sol türevler farklı olduğundan türev yoktur.

b. $g(x)=\sqrt[5]{x^3}, \qquad x=0$

$$g'(x)=(x^{3/5})'=\frac{3}{5}x^{-2/3}=\frac{3}{5x^{2/3}}$$

olduğundan $g'(0)$ tanımsızdır.

c. $h'(x)=\sqrt[3]{x-1}, \qquad x=1$

$$h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$ olur.

$h'(1)$ tanımsızdır.

d. $k(x)=|\ln x|, \qquad x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|\ln x|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-\frac{\ln x}{x-1}=-1$$

olacağından, $x=1$ de türev yoktur.

4. Aşağıdaki verilen fonksiyonların karşılarında noktalardaki türevlerini hesaplayınız.

a. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{16}{x} \qquad x=8$

b. $g(x)=e^x(\cos x+\sin x) \qquad x=0$

c. $h(x)=\ln^6(\tan 3x) \qquad x=\dfrac{3\pi}{4}$

Çözüm

a. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{16}{x} \qquad x=8$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{16}{x^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{16}{x^2}$$

$$f'(8)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}-\frac{16}{64}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

b. $g(x)=e^x(\cos x+\sin x) \qquad x=0$

$$g'(x)=e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)$$

$$=2e^x\cos x$$

$$g'(0)=2\ e^0\cos 0=2\,.\,1\,.\,1=2$$

c. $h(x)=\ln^6(\tan 3x) \qquad x=\dfrac{3\pi}{4}$

$$h'(x)=6\ \ln^5(\tan 3x)\,.\,(1+\tan^2 3x)\,.\,3$$

$$h'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=6\ \ln^5(1)\,.\,(1+1)\ .\ 3=0$$

5. Aşağıdaki fonksiyon

a. $f(x)=\arcsin(t$

b. $g(x)=(\cos x)$

c. $h(x)=x^{(x^x)}$

Çözüm

a. $f(x)=\arcsin(\tanh$

$f'(x)=\dfrac{(\tanh x}{\sqrt{1-\tanh}}$

b. $g(x)=(\cos x)^{\sin}$

$\ln g(x)=\sin x$

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\cos x$

$g'(x)=(\cos x$

c. $h(x)=x^{(x^x)}$

$\dfrac{h'(x)}{h(x)}=(x^x)$

olacaktır. Şi

$\ln u(x)=x$

$u'(x)=x^x$

Buna göre

$\dfrac{h'(x)}{h(x)}=x$

$h'(x)=x$

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a. $f(x) = \arcsin(\tanh x)$

b. $g(x) = (\cos x)^{\sin x}$

c. $h(x) = x^{(x^x)}$

Çözüm

a. $f(x) = \arcsin(\tanh x)$

$$f'(x) = \frac{(\tanh x)'}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{\sec h^2 x}{\sec hx} = \sec hx$$

b. $g(x) = (\cos x)^{\sin x} \Rightarrow$

$\ln g(x) = \sin x \ \ln\cos x \Rightarrow$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \cos x \ \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$g'(x) = (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x \ \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

c. $h(x) = x^{(x^x)} \Rightarrow \ln h(x) = x^x \ln x \Rightarrow$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = (x^x)' \ln x - x^x . \frac{1}{x}$$

olacaktır. Şimdi $u(x) = x^x$ ifadesinin türevini bulalım.

$$\ln u(x) = x\ln x \Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow$$

$u'(x) = x^x(1+\ln x)$ olur.

Buna göre

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = x^x(1+\ln x)\ln x - \frac{x^x}{x} \Rightarrow$$

$$h'(x) = x^{(x^x)} x^x\left[(1+\ln x)\ln x - \frac{1}{x}\right]$$

6. Aşağıdaki fonksiyonların n. türevlerini hesaplayınız.

a. $y = \sin 5x \ \cos 2x$

b. $y = \sin 3x \ \cos^2 x$

c. $y = \ln(x^2 + x - 2)$

Çözüm

a. $y = \sin 5x \ \cos 2x = \frac{1}{2}\left[\sin 7x - \sin 3x\right]$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[7^n \sin\left(7x + n\frac{\pi}{2}\right) - 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

olur.

b. $y = \sin 3x \ \cos^2 x = \sin 3x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \ \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin x$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} . 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}5^n \sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

c. $y = \ln(x^2 + x - 2) = \ln\left[(x+2)(x-1)\right]$

$$= \ln(x+2) + \ln(x-1)$$

olur.

$$y' = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y''' = \frac{1.2}{(x+2)^3} + \frac{1.2}{(x-1)^3}$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{(x+2)^{n}}+\frac{(n-1)!}{(x-1)^{n}}\right]$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+2)^{n}}+\frac{1}{(x-1)^{n}}\right]$$

bulunur.

7. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu için

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n}\frac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\ (bc-ad)$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{2}}=(ad-bc)\ .\ (cx+d)^{-2}$$

$$f''(x)=(ad-bc)\ (-2)c(cx+d)^{-3}$$

$$=-1\ .\ 2\ c(ad-bc)\ (cx+d)^{-3}$$

$$f'''(x)=1\ .\ 2\ .\ 3\ c^{2}\ (ad-bc)\ (cx+d)^{-4}$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\ n!\ \ c^{n-1}(ad-bc)\ (cx+d)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n}\ \frac{n!\ c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\ (bc-ad)$$

bulunur.

8. $f(x)=\dfrac{x}{x^{2}-1}$ için

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}-n!\ , & n \text{ tek ise}\\ 0\ , & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm

$$f(x)=\frac{x}{x^{2}-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right]$$

bulunur.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(x-1)^{2}}-\frac{1}{(x+1)^{2}}\right]$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1\ .\ 2}{(x-1)^{3}}+\frac{1\ .\ 2}{(x+1)^{3}}\right]$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1\ .\ 2\ .\ 3}{(x-1)^{4}}-\frac{1\ .\ 2\ .\ 3}{(x+1)^{4}}\right]$$

....

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\ .\ (-1)^{n}\ n!\ \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

olacağından

$$f^{(n)}=\frac{1}{2}\ (-1)^{n}\ n!\ \left[(-1)^{n+1}+1\right]$$

$$=\begin{cases}-n!, & n \textit{ tek ise}\\ 0\ , & n \textit{ çift ise}\end{cases}$$

bulunur.

9. $y=u(x)\cdot v(x)$ için

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ u^{(k)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x)$$

olacağını gösteriniz. [Leibniz formülü]

Çözüm

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n=1$ için

$$[u(x)\,.\,v(x)]' = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{0} u^{(k)}(x)\,.\,v^{(1-k)}(x)$$

$$= u(x)\,.\,v'(x) + u'(x)\,.\,v(x)$$

bulunur. Bu eşitliğin doğruluğu bilinmektedir.

Verilen eşitlik p için doğru olsun;

$$[u(x)\,.\,v(x)]^{(p)} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} u^{(k)}(x)\,.\,v^{(p-k)}(x)$$

Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa

$$[u(x)\,.\,v(x)]^{(p+1)} = \left[\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} u^{(k)}(x)\,.\,v^{(p-k)}(x)\right]'$$

$$= \left[\binom{p}{0}uv^{(p)} + \binom{p}{1}u'v^{(p-1)} + \ldots + \binom{p}{p}u^{(p)}v\right]'$$

$$= \binom{p}{0}u'v^{(p)} + \binom{p}{0}u\,v^{(p+1)} + \binom{p}{1}u''v^{(p-1)} + \binom{p}{1}u'v^{(p)}$$

$$+ \binom{p}{2}u'''v^{(p-2)} + \binom{p}{2}u''v^{(p-1)} + \ldots + \binom{p}{p}u^{(p+1)}v + \binom{p}{p}u^{(p)}v'$$

$$= \binom{p}{0}u\,v^{(p+1)}v + \left[\binom{p}{0}+\binom{p}{p}\right]u'v^{(p)} + \left[\binom{p}{1}+\binom{p}{2}\right]u''v^{(p-1)}$$

$$+ \ldots + \binom{p}{p}u^{(p+1)}v$$

$$= \binom{p+1}{0}u\,v^{(p+1)}\binom{p+1}{1}u'v^{(p)} + \binom{p+1}{2}u''v^{(p)}$$

$$+ \ldots + \binom{p+1}{p+1}u^{(p+1)}v$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}u^{(k)}v^{(p+1-k)}$$

bulunur. Bu, verilen eşitliğin $n=p+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Şu halde verilen eşitlik her n doğal sayısı için doğrudur.

10. Leibniz formülünden yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini hesaplayınız.

a. $f(x) = x^2 \sin x$ $\qquad f^{(30)}(x)$

b. $g(x) = e^x (x^2+3)$ $\qquad g^{(25)}(x)$

c. $h(x) = e^x \sin x$ $\qquad h^{(20)}(x)$

ç. $k(x) = (\cos 3x)\ln x$ $\qquad k^{(30)}(x)$

d. $l(x) = x^3 \ln 2x$ $\qquad l^{(50)}(x)$

Çözüm

a. $f(x) = x^2 \sin x, \qquad f^{(30)}(x) = ?$

$$(x^2\sin x)^{(30)} = \binom{30}{0}(x^2)(\sin x)^{(30)}$$

$$+\binom{30}{1}(x^2)'(\sin x)^{(29)}$$

$$+\binom{30}{2}(x^2)''(\sin x)^{(28)} + 0 + \ldots$$

$$= x^2(\sin x)^{(30)} + 30\,.\,2x(\sin x)^{(29)}$$

$$+ 435.\,2(\sin x)^{(28)}$$

olur.

$$(\sin x)^{(28)} = \sin\left(x + 28\,.\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin(x+14\pi) = \sin x$$

$$(\sin x)^{(29)} = (\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)^{(30)} = (\cos x)' = -\sin x$$

olacağından

$$(x^2\sin x)^{(30)} = -x^2\sin x + 60x\,.\,\cos x + 870\,\sin x$$

bulunur.

b. $g(x)=e^x(x^2+3),\quad g^{(25)}(x)=?$

$$\left[e^x(x^2+3)\right]^{(25)}=e^x(x^2+3)+\binom{25}{1}e^x(x^2+3)'$$

$$+\binom{25}{2}e^x(x^2+3)''$$

$$=e^x(x^2+3+25\,.\,2x+300\,.\,2)$$

$$=e^x(x^2+50x+603)$$

olur.

c. $h(x)=e^x\sin x,\qquad h^{(20)}(x)=?$

$$\left(e^x\sin x\right)^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(e^x\right)^{(k)}(\sin x)^{(20-k)}$$

olur. $\left(e^x\right)^{(k)}=e^x$ ve

$$(\sin x)^{(20-k)}=\sin\left(x+(20-k)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-k\,.\,\frac{\pi}{2}\right)$$

olacağından

$$(e^x\sin x)^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}e^x\sin\left(x-k\,.\,\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur.

ç. $k(x)=(\cos 3x)\,.\,\ln x,\qquad k^{(30)}(x)=?$

$$(\cos 3x)^{(n)}=3^n\cos\left(3x+n\,.\,\frac{\pi}{2}\right)\text{ ve}$$

$$(\ln x)^{(30-n)}=(-1)^{30-n-1}\,.\,\frac{(30-n-1)!}{x^{30-n}}$$

$$=(-1)^{n+1}\,.\,\frac{(29-n)!}{x^{30-n}}$$

olacağından

$$(\cos 3x\ \ln x)^{(30)}=(\cos 3x)^{(30)}\ln x$$

$$+\sum_{k=1}^{30}3^k\cos\left(3x+k\,.\,\frac{\pi}{2}\right)(-1)^{k+1}\frac{(29-k)!}{x^{30-k}}$$

$$=3^{30}\cos 3x\ln x+\sum_{k=1}^{30}(-1)^{k+1}3^k(29-k)!\frac{\cos\left(3x+k\,.\,\frac{\pi}{2}\right)}{x^{30-k}}$$

bulunur.

d. $l(x)=x^3\ln 2x,\qquad l^{(50)}(x)=?$

$$l^{(50)}(x)=\left(x^3\right)\left(\ln x\right)^{(50)}+\binom{50}{1}\left(x^3\right)'\left(\ln 2x\right)^{(49)}$$

$$+\binom{50}{2}\left(x^3\right)''\left(\ln 2x\right)^{(48)}+\binom{50}{3}\left(x^3\right)'''\left(\ln 2x\right)^{(47)}$$

$$\left(\ln 2x\right)'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x},\quad\left(\ln 2x\right)''=-\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\ln 2x\right)'''=\frac{1\,.\,2}{x^3},\ldots,\quad\left(\ln 2x\right)^{(48)}=-\frac{47\,!}{x^{48}},$$

$$\left(\ln 2x\right)^{(49)}=\frac{48\,!}{x^{49}}\text{ ve }\left(\ln 2x\right)^{(50)}=-\frac{49\,!}{x^{50}}$$

olacağından

$$l^{(50)}(x)=-(x^3)\cdot\frac{49\,!}{x^{50}}+50\cdot 3x^2\cdot\frac{48\,!}{x^{49}}$$

$$-1225\cdot 6x\cdot\frac{47\,!}{x^{48}}+19\,600\cdot 6\cdot\frac{46\,!}{x^{47}}$$

$$=-\frac{49\,!}{x^{47}}+150\cdot\frac{48\,!}{x^{47}}-7350\cdot\frac{47\,!}{x^{47}}$$

$$+\frac{117\,600\cdot 46\,!}{x^{47}}$$

olur.

11. $y=x^n\left[a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)\right]$ fonksiyonunun

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm

$$y=x^n\left[a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)\right]$$

$$y'=nx^{n-1}\left[a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)\right]$$

$$+x^n\left[\frac{-a}{x}\sin(\ln x)+\frac{b}{x}\cos(\ln x)\right]$$

$$=x^{n-1}\left[(na+b)\cos(\ln x)+(nb-a)\sin(\ln x)\right]$$

$$y''=(n-1)x^{n-2}\left[(na+b)\cos(\ln x)+(nb-a)\sin(\ln x)\right]$$

$$+x^{n-1}\left[-\frac{na+b}{x}\sin(\ln x)+\frac{nb-a}{x}\cos(\ln x)\right]$$

$$=x^{n-2}\left[(na+b)(n-1)+(nb-a)\right]\cos(\ln x)$$

$$+x^{n-2}(n^2b-2an-bn+a-b)\sin(\ln x)$$

ifadeleri

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$x^n\left(n^2a-an+2bn-a-b\right)\cos(\ln x)$$

$$+x^n\left(n^2b-2an-bn+a-b\right)\sin(\ln x)$$

$$+(1-2n)x^n\left[(na+b)\cos(\ln x)+(nb-a)\sin(\ln x)\right]$$

$$+\left(1+n^2\right)x^n\left[a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)\right]$$

$$=x^n\left[\left(n^2a-an+2bn-a-b\right)\right.$$

$$\left.+(na+b)(1-2n)+\left(1+n^2\right)a\right]\cos(\ln x)$$

$$+x^n\left[n^2b-2an-bn+a-b+(1-2n)(nb-a)\right.$$

$$\left.+\left(1+n^2\right)b\right]\sin(\ln x)$$

$$=x^n\cdot 0\cdot\cos(\ln x)+x^n\cdot 0\cdot\sin(\ln x)=0$$

bulunur.

12. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden türevlerini hesaplayınız.

a. $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ b. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$

Çözüm

a. $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ $y''=?$

$$\dot{x}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$\ddot{x}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$$

$$\dot{y}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$$

$$\ddot{y}=e^t(\sin t+\cos t+\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$$

olduğundan

$$y''=\frac{\dot{x}\ \ddot{y}-\ddot{x}\ \dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

$$=\frac{2e^{2t}(\cos^2 t-\sin t\cos t)+2e^{2t}(\sin^2 t+\sin t\cos t)}{e^{3t}(\cos t-\sin t)^3}$$

$$=\frac{2e^{2t}(\cos^2 t-\sin t\cos t+\sin^2 t+\sin t\cos t)}{e^{3t}(\cos t-\sin t)^3}$$

$$=\frac{2e^{-t}(\cos^2 t+\sin^2 t)}{(\cos t-\sin t)^3}$$

$$=\frac{2e^{-t}}{(\cos t-\sin t)^3}$$

bulunur.

b. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$$\dot{x} = a\ (-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\ \cos t$$

$$\ddot{x} = a\ (\cos t - t\sin t)$$

$$\dot{y} = a\ (\cos t - \cos t + t\sin t) = at\ \sin t$$

$$\ddot{y} = a\ (\sin t + t\cos t)$$

olacağından

$$y'' = \frac{a^2 t\cos t(\sin t + t\cos t) - a^2 t\sin t(\cos t - t\sin t)}{(at\ \cos t)^3}$$

$$= \frac{a^2 t\left(\cos t\ \sin t + t\cos^2 t - \sin t\ \cos t + t\sin^2 t\right)}{a^3 t^3 \cos^3 t}$$

$$= \frac{a^2 t\ .\ t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}{a^3 t^3 \cos^3 t} = \frac{1}{a\,t\cos^3 t}$$

13. $f(x) = x^2 e^{-x/a}$ olsun.

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm

$f(x) = x^2 e^{-x/a}$ fonksiyonuna leibniz formülü uygulanırsa

$$f^{(n)} = \left(x^2 e^{-x/a}\right)^{(n)}$$

$$= x^2\left(e^{-x/a}\right)^{(n)} + \binom{n}{1} 2x\ \left(e^{-x/a}\right)^{(n-1)} + \binom{n}{2} 2\left(e^{-x/a}\right)^{(n-2)}$$

$$= \left[\frac{x^2}{(-a)^n} + \frac{n\ .\ 2x}{(-a)^{n-1}} + \frac{n\ (n-1)}{(-a)^{n-2}}\right] e^{-x/a}$$

olur.

x yerine sıfır yazılırsa,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n\ (n-1)}{(-1)^{n-2} a^{n-2}} = (-1)^{n-2} \frac{n\ (n-1)}{a^{n-2}}$$

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

bulunur.

14. $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $f^{(n)}(0) = -2(n-1)\ f^{(n-2)}(0)$

b. $f^{(2m-1)}(0) = 0$

c. $f^{(2m)}(0) = (-2)^m (2m-1)\ (2m-3) \ldots 5\ .\ 3\ .\ 1$

Çözüm

a. $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x\ e^{-x^2}$

olur. Her iki tarafın $n-1$. mertebeden türevi alınırsa

$$f^{(n)}(x) = \left(-2x\ e^{-x^2}\right)^{(n-1)}$$

$$= -2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1-k)}$$

$$= -2\ x\left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} - 2(n-1)\left(e^{-x^2}\right)^{(n-2)}$$

olur. Buradan

$$f^{(n)}(x) = -2x\ f^{(n-1)}(x) - 2(n-1)\ f^{(n-2)}(x)$$

bulunur. x yerine sıfır yazılırsa

$$f^{(n)}(0) = -2(n-1)\ f^{(n-2)}(x)$$

bağıntısı bulunur.

b. $f'(x) = -2x\ e^{-x^2} \Rightarrow f'(0)=0$ olur.

(a) daki bağıntıya göre

$$f'''(0)=-2\ .\ 2\ .\ f'(0)=0$$

$$f^{(5)}(0)=2\ .\ 4\ .\ f'''(0)=0$$

....

$$f^{(2m-1)}(0)=0 \text{ bulunur.}$$

c. $f^{(n)}(0)=-2(n-1)f^{(n-2)}(0)$

eşitliğinde n yerine 2, 4, 6, ... , $2m$ değerleri yazılırsa

$$f''(0)=-2\ .\ 1\ .\ f(0)$$

$$f^{(4)}(0)=-2\ .\ 3\ .\ f''(0)$$

$$f^{(6)}(0)=-2\ .\ 5\ .\ f^{(4)}(0)$$

....

$$f^{(2m)}(0)=-2(2m-1)\ f^{(2m-2)}(0)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılır ve her iki tarafta bulunan türevler sadeleştirilirse

$$f^{(2m)}(0)=(-2)^m.\ 1\ .\ 3\ .\ 5...(2m-1)\ f(0)$$

$$=(-2)^m.\ 1\ .\ 3\ .\ 5...(2m-1)$$

bulunur.

15. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ için

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} n!, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

olduğundan

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

olur. $x=0$ yazılırsa

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[n!+(-1)^n n!\right]=\begin{cases} n!, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur.

16. $f(x)=x^4\ln x$ fonksiyonunun 5. türevininin $4!/x$ olacağını gösteriniz.

Çözüm

$$f^{(5)}(x)=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(x^4\right)^{(k)}(\ln x)^{(5-k)}$$

$$=x^4(\ln x)^{(5)}+\binom{5}{1}4x^3(\ln x)^{(4)}+\binom{5}{2}12x^2(\ln x)'''$$

$$+\binom{5}{3}24x\ (\ln x)''+\binom{5}{4}24\ (\ln x)'+0$$

olur. Diğer yandan

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\ (\ln x)''=-\frac{1}{x^2},\ (\ln x)'''=\frac{2}{x^3},$$

$$(\ln x)^{(4)}=-\frac{6}{x^4},\ (\ln x)^{(5)}=\frac{24}{x^5}$$

olduğundan

$$f^{(5)}(x)=x^4.\frac{24}{x^5}+5.4x^3.\left(\frac{-6}{x^4}\right)+10\ .\ 12x^2.\ \frac{2}{x^3}$$

$$+10\ .\ 24x\ .\left(-\frac{1}{x^2}\right)+5\ .\ 24\ .\ \frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}(24-120+240-240+120)=\frac{24}{x}=\frac{4!}{x}$$

17. Aşağıdaki fonksiyonların, $x=0$ noktasındaki ikinci mertebeden türevli olup olmadıklarını araştırınız.

a. $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \ \ ise \\ 0, & x=0 \ \ ise \end{cases}$

b. $g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \ \ ise \\ 0, & x=0 \ \ ise \end{cases}$

c. $h(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \ \ ise \\ 0, & x=0 \ \ ise \end{cases}$

Çözüm

a. $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}-0}{x}=+\infty$$

olduğundan $f'(0)$ yoktur.

Dolayısıyla $f''(0)$ yoktur.

b. $$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

limiti mevcut olmadığından $g'(0)$ türevi ve dolayısıyla $g''(0)$ türevi yoktur.

c. $$h'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

dır.

Dolayısıyla

$$h''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$$

olur. Bu limit mevcut olmadığından $h''(0)$ yoktur. O halde birinci türevin varlığı ikinci türevin varlığını gerektirmez.

18. f, $a>0$ noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

limitini $f'(a)$ cinsinden yazınız.

Çözüm

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=2\sqrt{a}\,f'(a)$$

19. $(x+y)^{a+b}=x^a\,y^b$ eğrisinin $xy'=y$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm

$F(x,y)=(x+y)^{a+b}-x^a\,y^b=0$ olsun.

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-ax^{a-1}\,y^b}{(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-bx^a\,y^{b-1}}$$

olduğundan

$$\frac{xy'}{y}=-\frac{x(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-ax^a y^b}{y(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-bx^a y^b}$$

$$=-\frac{x(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-a(x+y)^{a+b}}{y(a+b)\,(x+y)^{a+b-1}-b(x+y)^{a+b}}$$

$$=-\frac{x(a+b)-a(x+y)}{y(a+b)-b(x+y)}=\frac{ay-bx}{ay-bx}=1$$

bulunur. Bu durumda $xy'=y$ olur.

20. Türevlenebilen periyodik fonksiyonların türevinin de periyodik olacağını gösteriniz.

Çözüm

f fonksiyonunun periyodu T olsun. Bu taktirde her x için $f(x+T)=f(x)$ olur.

Her iki tarafın türevi alınırsa

$$f'(x+T)=f'(x)$$

bulunur. Bu da f' nin periyodu T olan bir fonksiyon olduğunu gösterir.

21. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^{\alpha} \end{cases}$ inin $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\alpha\ t^{\alpha-1}}{\frac{1}{t}}=\alpha\ t^{\alpha}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\alpha^2 t^{\alpha-1}}{\frac{1}{t}}=\alpha^2 t^{\alpha}$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\alpha^n t^{\alpha}$$

bulunacağı açıktır.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalardaki teğetlerinin eğimini bulunuz.

a. $y = x^3$, $\quad A(1, 1)$

b. $y = x^2 + 4x$, $\quad B(-1, -3)$

Çözüm

a. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 \Rightarrow m = 3.1 = 3$

b. $y = x^2 + 4x \Rightarrow y' = 2x + 4 \Rightarrow$

$m = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğrilere, karşılarında apsisleri yazılı noktalarından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

a. $y = 3x^3 - 2x^2 + 4$, $\quad x = 1$

b. $y = x^3 - x$, $\quad x = 1$

c. $y = x^2 + 2x + 3$, $\quad x = -1$

ç. $y = 2 - x - x^2$, $\quad x = 2$

d. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 1$, $\quad x = -1$

e. $y = \sqrt{x}$, $\quad x = 4$

f. $y = \sin x$, $\quad x = \pi$

g. $y = \sin x + \cos x$, $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

h. $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $\quad x = 0$

ı. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\quad x = 0$

i. $y = (1 + x^{1/3})^{2/3}$, $\quad x = -8$

j. $y = \sin\sqrt{x}$, $\quad x = \pi^2$

k. $y = e^{2x}$, $\quad x = 0$

l. $y = x\sqrt{x-1}$, $\quad x = 5$

m. $y = (x-2)^{1/3}$, $\quad x = 10$

Çözüm

a. $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 - 2 + 4 = 5$ olur.

$y' = 9x^2 - 4x \Rightarrow m = 9 - 4 = 5$ dir.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = 5(x - 1) \Rightarrow$

$y = 5x$

b. $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 - 1 = 0$ dir.

$y' = 3x^2 - 1 \Rightarrow m = 3 - 1 = 2$ olur.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 2(x - 1)$

c. $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 - 2 + 3 = 2$ olur.

$y' = 2x + 2 \Rightarrow m = 2(-1) + 2 = 0$ dır.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 0(x + 1) \Rightarrow y = 2$

ç. $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 - 2 - 4 = -4$ olur.

$y' = -1 - 2x \Rightarrow m = -1 - 2.2 = -5$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 4 = -5(x - 2) \Rightarrow$

$y = -5x + 6$ olur.

d. $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{4}{3}$ olur.

$y' = x^2 \Rightarrow m = 1$ bulunur.

Teğetin denklemi $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$y + \dfrac{4}{3} = 1(x + 1) \Rightarrow 3x - 3y - 1 = 0$

e. $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \sqrt{4} = 2$ dir.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ olur.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-4) \Rightarrow$

$x - 4y + 4 = 0$

f. $x_0 = \pi \Rightarrow y_0 = \sin\pi = 0$ dır.

$y' = \cos x \Rightarrow m = \cos\pi = -1$ olur.

$y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi$

g. $x_0 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow y_0 = \sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$y' = \cos x - \sin x \Rightarrow m = 0$

$y - \sqrt{2} = 0\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}$

h. $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{2}$ dir.

$y' = \dfrac{2(x-2) - 1.(2x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow m = -\dfrac{5}{4}$

$y + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{4}(x - 0) \Rightarrow 5x + 4y + 2 = 0$

ı. $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$ olur.

$y' = \dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = -\dfrac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow m = -2$

$y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$

i. $x_0 = -8 \Rightarrow y_0 = 1$ *dir.*

$y' = \dfrac{2}{3}(1 + x^{1/3})^{-1/3}\left(\dfrac{1}{3}x^{-2/3}\right) \Rightarrow m = -\dfrac{1}{18}$

$y - 1 = -\dfrac{1}{18}(x+8) \Rightarrow x + 18y - 10 = 0$

j. $x_0 = \pi^2 \Rightarrow y_0 = \sin\pi = 0$ *dir.*

$y' = \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2\pi}$

$y - 0 = -\dfrac{1}{2\pi}(x - \pi^2) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{\pi}{2}$

k. $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$ dir.

$y' = 2e^{2x} \Rightarrow m = 2$ olur.

Teğet denklemi

$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$

l. $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 5\sqrt{4} = 10$

$y' = \sqrt{x-1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow m = 2 + \dfrac{5}{2.2} = \dfrac{13}{4}$

$y - 10 = \dfrac{13}{4}(x-5) \Rightarrow 13x - 4y - 25 = 0$

m. $x_0 = 10 \Rightarrow y_0 = 2$ dir.

$y' = \dfrac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \Rightarrow m = \dfrac{1}{12}$ olur.

$y - 2 = \dfrac{1}{12}(x - 10) \Rightarrow x - 12y + 14 = 0$

3. Aşağıda denklemleri verilen eğrilere, karşılarındaki apsisleri yazılı noktalarından çizilen teğet ve normallerin denklemini yazınız.

a. $y = x^2 + 1$, $x = 1$

b. $y = 1 - x^3$, $x = -1$

c. $y = x^4 - 6x^2 + 2$, $x = 2$

d. $y = 2\sin x + 3\cos x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

e. $y = \sqrt{1-x}$ $x = 1$

Çözüm

a. $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ dir.

$y' = 2x \Rightarrow m = 2.1 = 2$ olur.

Teğet denklemi

$y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x$

Normal denklemi

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

b. $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 + 1 = 2$ *dir.*

$y' = -3x^2 \Rightarrow m = -3.(-1)^2 = -3$

Teğet denklemi

$y - 2 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 1$

Normal denklemi

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow x - 3y + 7 = 0$$

c. $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 16 - 24 + 2 = -6$ olur.

$y' = 4x^3 - 12x \Rightarrow m = 4.8 - 12.2 = 8$

Teğet denklemi

$y + 6 = 8(x-2) \Rightarrow y = 8x - 22$

Normal denklemi

$$y + 6 = -\frac{1}{8}(x-2) \Rightarrow x + 8y + 46 = 0$$

d. $x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_0 = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2} = 2$

olur.

$y' = 2\cos x - 3\sin x \Rightarrow m = -3$ tür.

Teğet denklemi

$$y - 2 = -3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -3x + \frac{3\pi + 4}{2}$$

Normal denklemi

$$y - 2 = \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x - 3y + 6 - \frac{\pi}{2} = 0$$

e. $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$ olur.

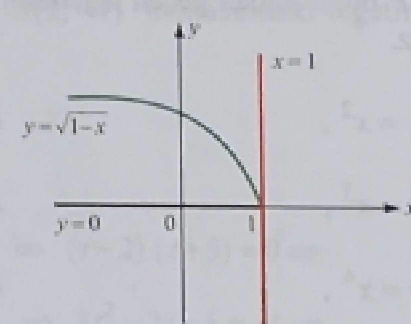
$y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ olduğundan m tanımlı değildir.

Bu teğetin düşey bir doğru olduğunu gösterir.

$(1, 0)$ dan geçen düşey doğrunun denklemi

$x = 1$ dir. Normal yatay olacağından denklemi

$y = 0$ dır.



4. $y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orjinden geçer?

Çözüm

Söz konusu nokta $(a, a^2 + 1)$ olsun.

$y' = 2x \Rightarrow m = 2a$ olur. Teğetin denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

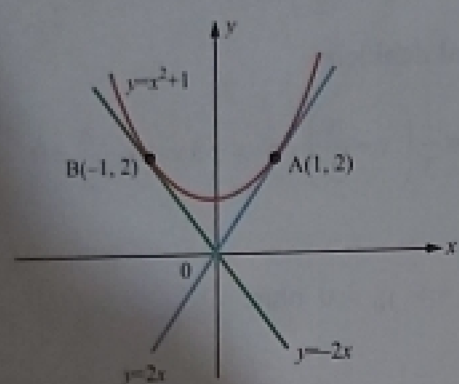
olur. Bu doğru $O(0, 0)$ noktasından geçeceğinden

$$0 - (a^2 + 1) = 2a(0 - a) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow$$

$a = \pm 1$ bulunur.

Buna göre söz konusu noktalar

$A(1, 2)$, $B(-1, 2)$ noktalarıdır.



A noktasından geçen teğetin denklemi $y = 2x$,

B noktasından geçen teğetin denklemi $y = -2x$ olur.

5. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı P noktasından geçen teğetlerin denklemlerini yazınız.

a. $y = x^2$, $P(3, 5)$

b. $y = x^3$, $P(0, 2)$

c. $y = x^4$, $P(0, -3)$

ç. $y = 4x - x^2$, $P(2, 5)$

Çözüm

a. Değme noktası (a, a^2) olsun. Teğetin denklemi

$y - a^2 = 2a(x - a)$

olur. Bu doğru $P(3, 5)$ noktasından geçtiğinden

$5 - a^2 = 2a(3 - a) \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow$

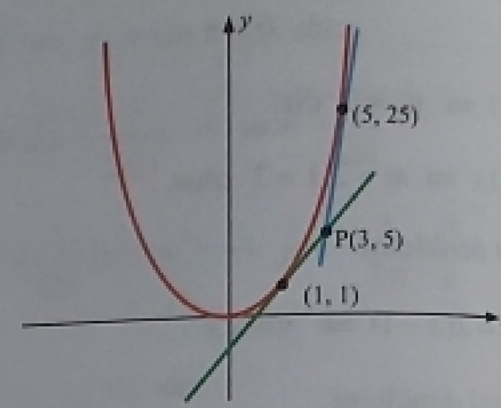
$a_1 = 1$, $a_2 = 5$ olur. $a_1 = 1$ için teğetin denklemi

$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$ ve

$a_2 = 5$ için teğetin denklemi

$y - 25 = 10(x - 5) \Rightarrow y = 10x - 25$

olur.



b. Değme noktası (a, a^3) olsun.

Teğetin denklemi

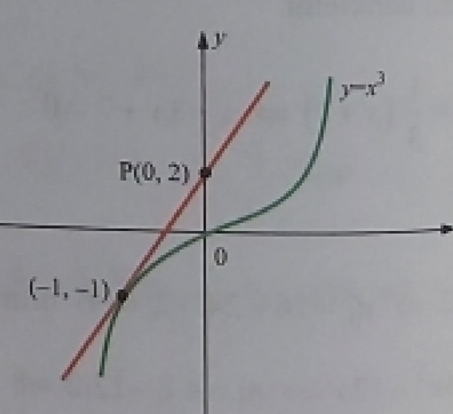
$y - a^3 = 3a^2(x - a)$

olur. Bu doğru $P(0, 2)$ noktasından geçtiğinden

$2 - a^3 = -3a^3 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$

olmalıdır. Buna göre teğetin denklemi

$y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2$ olacaktır.



c. Değme noktası (a, a^4) olsun.

Teğetin denklemi

$y - a^4 = 4a^3(x - a)$

olacaktır. Bu doğru $P(0, -3)$ noktasından geçtiğinden

$-3 - a^4 = -4a^4 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -1$

olur. Buna göre, $P(0, -3)$ noktasından geçen teğetlerin denklemi

$y - 1 = -4(x + 1) \Rightarrow y = -4x - 3$ ve

$y - 1 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 3$ olur.

ç. Değme noktası $(a, 4a-a^2)$ olsun. Teğetin denklemi

$y-(4a-a^2)=(4-2a)(x-a)$ olur.

Teğet $P(2,5)$ noktasından geçtiğinden

$5-(4a-a^2)=(4-2a)(2-a) \Rightarrow a=1$ veya $a=3$ olmalıdır.

$a=1$ için teğetin denklemi

$y-3=2(x-1) \Rightarrow y=2x+1,$

$a=3$ için teğetin denklemi

$y-(12-9)=(4-6)(x-3) \Rightarrow y=-2x+9$ olur.

6. $$f(x)=\begin{cases} 2\sin x\ , & x<0 \text{ ise} \\ 3x^2+2x, & x\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$$m=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

olur. Sağ ve soldan yaklaşalım

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(3x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x}{x}=2$$

olduğundan $f'(0)=2=m$ dir.

Teğetin denklemi

$y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$ olur.

7. $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki teğetini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

olur. Çünkü $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ve $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ dir.

O halde $m=0$ dır. Teğetin denklemi

$y-0=0(x-0) \Rightarrow y=0$ olur.

8. $$\begin{cases} x=t^2+3t-8 \\ y=2t^2-2t-5\end{cases}$$

eğrisinin $A(2,-1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm

$t^2+3t-8=2 \Rightarrow (t-2)(t+5)=0 \Rightarrow$

$t_1=2,\ t_2=-5 \Rightarrow 2t^2-2t-5=-1 \Rightarrow$

$(t-2)(t+1)=0 \Rightarrow t_1=2, t_2=-1$

olacağından $A(2,-1)$ noktası $t=2$ parametresine karşılık gelir.

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-2}{2t+3}$$

olacağından

$$m=\frac{4.2-2}{2.2+3}=\frac{6}{7}$$

dir. Buna göre, teğetin denklemi

$$y+1=\frac{6}{7}(x-2) \Rightarrow 6x-7y-19=0$$

olacaktır.

9. $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$

parametrik denklemi ile verilen eğriye $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini çiziniz.

Çözüm

$t = \frac{\pi}{4}$ için $x_0 = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$y_0 = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ olur.

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$$

olacağından

$$m = \frac{\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4+\pi}{4-\pi}$$

olur. Teğetin denklemi

$$y - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right) \Rightarrow$$

$(\pi+4)x + (\pi-4)y = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$ olur.

10. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalarındaki teğetlerinin denklemini yazınız.

a. $4x^3 - 3xy^2 + 5 = 0$, $A(1, 2)$

b. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ $B(1, 1)$

c. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 6$ $C(2, 2)$

Çözüm

a. $4x^3 - 3xy^2 + 5 = 0$

$12x^2 - 3(y^2 + 2yy'x) = 0$ eşitliğinde

$x = 1$, $y = 2$ yazılırsa $y' = m$ olur.

$12 - 3(4 + 2.2.2.m) = 0 \Rightarrow m = 0$

Teğetin denklemi:

$y - 2 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 2$

b. $5x^4 + 5y^4 \cdot y' - 2(y + xy') = 0$

$5 + 5m - 2(1 + m) = 0 \Rightarrow m = -1$

Teğetin denklemi:

$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$

c. $2x + 2(y + xy') + 2yy' + 1 + y' = 0$

$2.2 + 2(2 + 2m) + 2.2m + 1 + m = 0 \Rightarrow$

$9m + 9 = 0 \Rightarrow m = -1$ olur.

Teğetin denklemi:

$y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$

11. $y = x^2 - 2x + 5$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $y = x$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm

$m = 1$ olacağından $y' = 1$ olmalıdır.

$y' = 2x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{17}{4} \Rightarrow$

$y = \frac{9}{4} - 2\cdot\frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2}$ olur.

istenen nokta $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$ noktasıdır.

12. $x^2+y^2=25$ eğrisinin hangi noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{3}{4}$ olur?

Çözüm

$y'=\frac{3}{4}$ olmalıdır.

$2x+2yy'=0 \Rightarrow x+y\,.\,\frac{3}{4}=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{4}{3}x$ olmalıdır.

$x^2+y^2=25 \Rightarrow x^2+\frac{16}{9}x^2=25 \Rightarrow$

$x^2=9 \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=3$ olur.

$y_1=-\frac{4}{3}x_1=-\frac{4}{3}(-3)=4,$

$y_2=-\frac{4}{3}x_2=-\frac{4}{3}(3)=-4$

olacağından istenen noktalar $A(-3,4)$ ve $B(3,-4)$ noktalarıdır.

13. $2xy=a^2$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetinin koordinat eksenleriyle oluşturduğu üçgenin alanının sabit ve a^2 sayısına eşit olacağını gösteriniz.

Çözüm

$2xy=a^2 \Rightarrow y=\frac{a^2}{2x} \Rightarrow y'=-\frac{a^2}{2x^2} \Rightarrow$

$m=-\frac{a^2}{2a^2}=-\frac{1}{2}$ olur.

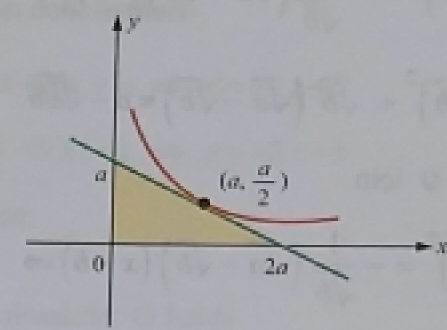
$x=a$ için $y=\frac{a}{2}$ olacağından, teğetin denklemi,

$y-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}(x-a) \Rightarrow x+2y-2a=0$

olur.

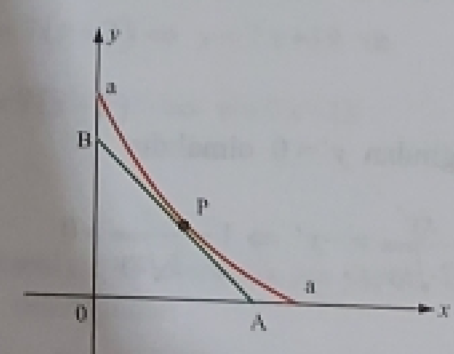
$x=0$ için $y=a$ ve $y=0$ için $x=2a$ olacağından,

üçgenin alanı $A=\frac{1}{2}\,.\,x\,.\,y=\frac{1}{2}\,.\,2a\,.\,a=a^2$ olur.



14. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ eğrisinin herhangi bir noktasından çizilen teğet, eksenleri A ve B noktalarında kesiyor. $|OA|+|OB|=a$ olacağını gösteriniz.

Çözüm



Teğetin değme noktasının apsisi b olsun.

$y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$ olduğundan

ordinatı $y=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ dir.

$y'=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$m=-\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

dir. Buna göre teğetin denklemi

$y-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=-\frac{1}{\sqrt{b}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(x-b)$

olacaktır.

Bunun eksenleri kestiği noktaları bulalım:

$x = 0$ için

$$y - \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)(-b) \Rightarrow$$

$$y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{b}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - \sqrt{ab}$$

bulunur. $y = 0$ için

$$-\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)(x - b) \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{x - b}{\sqrt{b}} \Rightarrow x = \sqrt{ab} \text{ bulunur.}$$

$|OA| + |OB| = \sqrt{ab} + a - \sqrt{ab} = a$ olur.

15. $x - \sqrt{xy} = 1 - y$ denklemiyle verilen eğrinin $0x$-eksenine paralel olan teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$m = 0$ olacağından $y' = 0$ olmalıdır.

$$1 - \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy'}{2\sqrt{xy}} = -y' \Rightarrow 1 - \frac{y}{2\sqrt{xy}} = 0$$

$\dfrac{y}{2\sqrt{xy}} = 1$ olmalıdır. Bu eşitlikten $y > 0$ ve dolayısıyla $x > 0$ olacağı açıktır. Her iki tarafın karesi alınırsa

$y^2 = 4xy \Rightarrow y = 4x$ bulunur.

Bu değer verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$x - \sqrt{x \cdot 4x} = 1 - 4x \Rightarrow x - 2|x| = 1 - 4x \Rightarrow$$

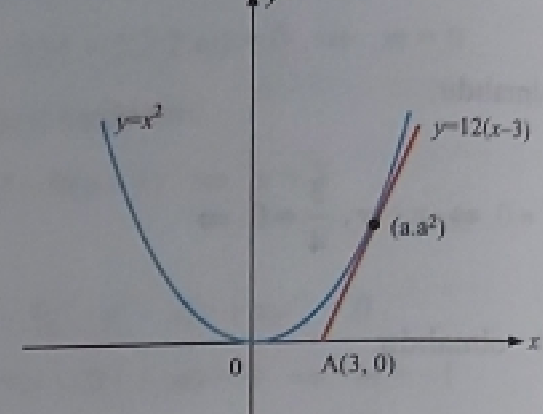
$$x - 2x = 1 - 4x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

bulunur.

$A\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ noktasından geçen ve $0x$- eksenine paralel olan doğrunun denklemi $y = \dfrac{4}{3}$ olur.

16. $y = x^2$ eğrisine $A(3, 0)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm



Teğetin değme noktası (a, a^2) olsun.

Teğetin eğimi $m = 2a$ olacağından denklemi,

$y - a^2 = 2a(x - a)$ dir.

Bu teğet $A(3, 0)$ noktasından geçeceğinden

$0 - a^2 = 2a(3 - a) \Rightarrow a(a - 6) = 0 \Rightarrow$

$a = 0$ veya $a = 6$ olacaktır.

$a = 0$ için teğetin denklemi $y = 0$,

$a = 6$ için teğetin denklemi

$y - 36 = 12(x - 6) \Rightarrow y = 12x - 36$ olur.

17. $y = \dfrac{1}{1+x}$ ile $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrilerinin kesim noktalarından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x = 1 + x^2 \Rightarrow$$

$x^2 = x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$ olur.

$x_1 = 0$ için $y_1 = 1$, $x_2 = 1$ için $y_2 = \dfrac{1}{2}$

olacağından iki eğrinin kesim noktaları

$A(0, 1)$, $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ dir.

Eğrisinin $A(0, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini bulalım:

$y' = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow m_1 = -1$ olacağından teğetin denklemi

$y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$ olur.

$y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisine $A(0, 1)$ noktasından çizilen teğetin

eğimi, $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)} \Rightarrow m_2 = 0$ olacağından denklemi

$y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$ olur.

$B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ noktasındaki teğetlerin denklemini bulalım:

$m_3 = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}$ olacağından

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ olur.

$y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisinin B noktasındaki teğetin denklemi

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$ olur.

18. $y = x^3 - 5x + 3$ eğrisinin

a. $y = -2x$ doğrusuna paralel

b. $y = -\frac{x}{7}$ doğrusuna dik

c. $0x$- ekseni ile 45 derecelik açı yapan

teğetlerin denklemini yazınız.

Çözüm

a. $m = -2$ olacağından $y' = -2 \Rightarrow$

$3x^2 - 5 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$ olmalıdır.

$x = -1$ için $y = -1 + 5 + 3 = 7$

$x = 1$ için $y = 1 - 5 + 3 = -1$

olur. Şu halde $y = -2x$ doğrusuna paralel olan teğetlerin denklemleri

$y - 7 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 5$

$y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 1$

olacaktır.

b. $m = 7$ olmalıdır. O halde

$y' = 3x^2 - 5 = 7 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

olmalıdır.

$y_1 = -8 - 5(-2) + 3 = 5$

$y_2 = 8 - 10 + 3 = 1$

olacağından $y = -\frac{x}{7}$ doğrusuna dik olan teğetlerin

denklemleri

$y - 5 = 7(x + 2) \Rightarrow y = 7x + 19$ ve

$y - 1 = 7(x - 2) \Rightarrow y = 7x - 13$

olur.

c. $0x$- ekseniyle 45 derecelik açı yapan teğetin eğimi $m = 1$ olacağından

$3x^2 - 5 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$ olur.

$y_1 = -2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3 = 3\sqrt{2} + 3$ ve

$y_2 = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3 = -3\sqrt{2} + 3$

olacağından söz konusu teğetlerin denklemleri

$y - \left(3\sqrt{2} + 3\right) = 1\left(x + \sqrt{2}\right) \Rightarrow y = x + 3 + 4\sqrt{2}$ ve

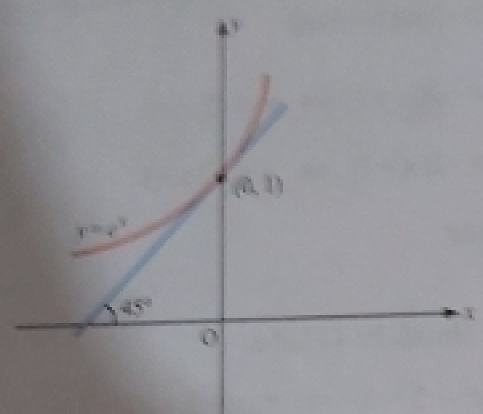
$y - \left(-3\sqrt{2} + 3\right) = 1\left(x - \sqrt{2}\right) \Rightarrow y = x + 3 - 4\sqrt{2}$

olur.

19. $y = e^x$ eğrisi Oy- eksenini kaç derecelik açı altında keser?

Çözüm

$y = e^x$ eğrisi Oy- eksenini $(0, 1)$ noktasında keser.



Eğrinin Oy- ekseniyle yaptığı açı onun kesim noktasındaki teğetinin Oy- ekseniyle yaptığı açıdır.

$y' = e^x \Rightarrow m = e^0 = 1$ olur.

Teğet Ox- ekseniyle 45 derecelik açı yaptığından Oy- ekseniyle de 45 derecelik açı yapar.

20. Aşağıda denklemleri verilen eğriler hangi açı altında kesişirler?

a. $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$

b. $y = 4 - x$, $\quad y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$

c. $y = 3x^2 - 1$, $\quad y = 2x^2 + 3$

d. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$, $\quad y = 1 - \dfrac{1}{2}x^2$

e. $y = x^2$, $\quad y = x^3$

Çözüm

a. İki eğri arasındaki açı, onların kesim noktalarındaki teğetleri arasındaki açıdır.

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

olur.

Önce $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ için inceleme yapalım:

$$y_0 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

$y = \sin x$ eğrisinin $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasındaki teğ...

eğimi, $y' = \cos x$ olacağından,

$$m_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

$y = \cos x$ eğrisinin $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasındaki teğe...

eğimi

$$m_2 = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

İki teğet arasındaki ölçüsü θ ise

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

olur. Diğer kesim noktalarındaki açıların da ... olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

b. $y = 4 - x$ doğrusu ile $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$ eğrisinin kes...

noktasındaki teğetlerinin oluşturduğu açının ölç... bulunacaktır.

$$4 - x = 4 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = x \Rightarrow$$

$x_1 = 0$ ve $x_2 = 2$ bulunur.

Doğruyla eğrinin kesim noktaları $(0, 4)$ ve (2, ... dir.

$y = 4 - x$ doğrusunun eğimi $m_1 = -1$ dir.

$y=4-\dfrac{x^2}{2}$ eğrisinin $(0,4)$ noktasındaki teğetinin eğimi

$$m_2=\left(4-\frac{x^2}{2}\right)'(0)=0 \text{ olur.}$$

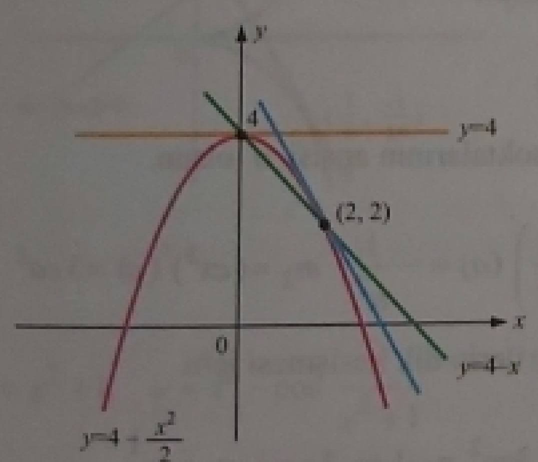
$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-1-0}{1-0}=-1 \Rightarrow \theta=135^\circ \text{ olur.}$$

$y=4-\dfrac{x^2}{2}$ eğrisinin $(2,2)$ noktasından çizilen teğetin eğimi

$$m_3=\left(4-\frac{x^2}{2}\right)'(2)=-2 \quad \text{olacağından}$$

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_3}{1+m_1m_3}=\frac{-1-(-2)}{1+2}=\frac{1}{3} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{1}{3}$$

olacaktır.



c. $3x^2-1=2x^2+3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$x=-2$ apsisli kesim noktasındaki teğetlerin eğimleri

$$m_1=(3x^2-1)'(-2)=-12,$$

$$m_2=(2x^2+3)'(-2)=-8$$

olacağından

$$\tan\theta=\frac{-8+12}{1+96}=\frac{4}{97} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{4}{97}$$

olur.

$x=2$ apsisli noktadan çizilen teğetlerin eğimleri

$$m_3=(3x^2-1)'(2)=12$$

$$m_4=(2x^2+3)'(2)=8$$

olacağından

$$\tan\theta=\frac{4}{97} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{4}{97}$$

bulunur.

d. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}=1-\dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \sqrt{x}=2-x^2 \Rightarrow x=1$

bulunur. $x=1$ apsisli noktada eğrilere çizilen teğetlerin eğimleri

$$m_1=\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)'(1)=\frac{1}{4},$$

$$m_2=\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)'(2)=-2$$

olacağından

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{9}{2} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{9}{2}$$

bulunur.

e. $x^2=x^3 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1$

olur. $x=0$ apsisli noktalardaki teğetlerin eğimleri

$$m_1=(x^2)'(0)=0,\quad m_2=(x^3)'(0)=0$$

olacağından teğetleri çakışık dolayısıyla aralarındaki açı sıfır derecedir.

$x=1$ apsisli noktadan çizilen teğetlerin eğimleri

$$m_3=(x^2)'(1)=2,\quad m_4=(x^3)'(1)=3$$

olacağından

$$\tan\theta=\frac{3-2}{1+2.3}=\frac{1}{7} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{1}{7}$$

21. Aşağıda denklemleri verilen eğri çiftlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.

a. $y = x^2 + 2x - 3$, $\quad y = x^2 - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{4}$

b. $y^2 = 6x + 9$, $\quad y^2 = 9 - 6x$

c. $x^2 - y^2 = 5$, $\quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

Çözüm

Kesim noktalarında $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

a. $x^2 + 2x - 3 = x^2 - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = 1$ olur.

$m_1 = (x^2 + 2x - 3)'(1) = 4$,

$m_2 = \left(x^2 - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{4}\right)'(1) = -\dfrac{1}{4}$

olacağından $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

b. $6x + 9 = 9 - 6x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 3$

Kesim noktaları $(0, -3)$, $(0, 3)$ tür.

$(0, -3)$ noktasındaki teğetlerin eğimleri

$2yy' = 6 \Rightarrow 2 \,.\, (-3) \,.\, m_1 = 6 \Rightarrow m_1 = -1$

$2yy' = -6 \Rightarrow 2 \,.\, (-3) \,.\, m_2 = -6 \Rightarrow m_2 = 1$

olup $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir.

Benzer şekilde $(0, 3)$ noktalarındaki teğetlerin eğimleri çarpımının -1 olduğu gösterilebilir.

c. $x^2 - y^2 = 5$, $4x^2 + 9y^2 = 72 \Rightarrow$

$4x^2 + 9(x^2 - 5) = 72 \Rightarrow 13x^2 = 117 \Rightarrow$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ olur.

$x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow 9 - y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm 2$

bulunur. Eğrilerin kesim noktaları

$A(3, 2)$, $B(3, -2)$, $C(-3, 2)$, $D(-3, -2)$ dir.

$A(3, 2)$ noktasında eğrilere teğet olan doğru[illegible] eğimini bulalım:

$x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow$

$2.3 - 2 \,.\, 2 \,.\, m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \dfrac{3}{2}$

$4x^2 + 9y^2 = 72 \Rightarrow 8x + 18yy' = 0 \Rightarrow$

$8 \,.\, 3 + 18 \,.\, 2 \,.\, m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\dfrac{2}{3}$

$m_1 \,.\, m_2 = \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -1$

olduğundan teğetler birbirine dik, dolayısıyla eğ[illegible] dik kesişirler. Diğer kesim noktalarında durumun [illegible] olduğu gösterilebilir.

22. Hangi c ler için $y = \dfrac{1}{x}$ ile $y = cx^3$ eğrileri dik ke[illegible] sişirler?

Çözüm

Kesim noktalarının apsisi a olsun.

$m_1 = \left(\dfrac{1}{x}\right)'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, $\quad m_2 = (cx^3)'(a) = 3ca^2$

olur. Eğrilerin dik kesişmesi için

$-\dfrac{1}{a^2} \,.\, 3ca^2 = -1 \Rightarrow 3c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{3}$

olmalıdır.

23. $y^2 = 2x^3$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $4x - 3y + 2 = 0$ doğrusuna diktir?

Çözüm

$4x - 3y + 2 = 0$ doğrusunun eğimi $\dfrac{4}{3}$ olduğundan eğ[illegible] teğetinin eğimi $-\dfrac{3}{4}$ olmalıdır.

$y^2=2x^3 \Rightarrow 2yy'=6x^2 \Rightarrow$

$2\cdot y\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=6x^2 \Rightarrow y=-4x^2$ olmalıdır.

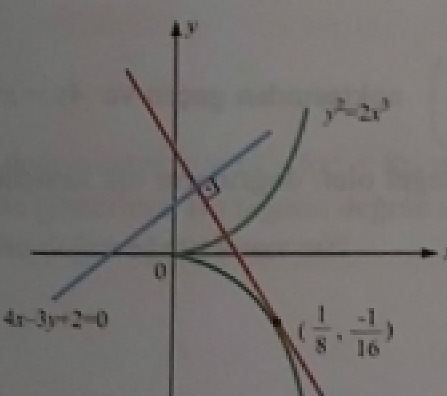
$y^2=2x^3 \Rightarrow 16x^4=2x^3 \Rightarrow 2x^3(8x-1)=0$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{1}{8} \Rightarrow y_1=0,\ y_2=-\frac{1}{16}$

Eğrinin $(0,0)$ noktasındaki teğeti $0x$- ekseni olup $4x-3y+2=0$ doğrusuna dik olamaz.

O halde $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{16}\right)$ noktasındaki teğet doğruya diktir.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



24. $y=x^2+1,\quad y=x^2-\cos\dfrac{\pi}{x^2+1}$

eğrilerinin kesim noktalarında aynı teğete sahip olduklarını gösteriniz. Bu durumda eğriler kesişme noktasında teğettirler denir.

Çözüm

$x^2+1=x^2-\cos\dfrac{\pi}{x^2+1} \Rightarrow$

$\cos\dfrac{\pi}{x^2+1}=-1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{x^2+1}=\pi \Rightarrow$

$x^2+1=1 \Rightarrow x=0$ olur. Eğrilerin kesim noktası $A(0,1)$ dir.

Bu noktadaki teğetlerin eğimlerinin aynı olduğunu, bunun için de türevlerinin $x=0$ da eşit olacağını göstermek yeterlidir.

$(x^2+1)'(0)=2.0=0$

$$\left(x^2-\cos\frac{\pi}{x^2+1}\right)'=2x+\left(\sin\frac{\pi}{x^2+1}\right)\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

olduğundan

$\left(x^2-\cos\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)'(0)=0+0=0$ dır.

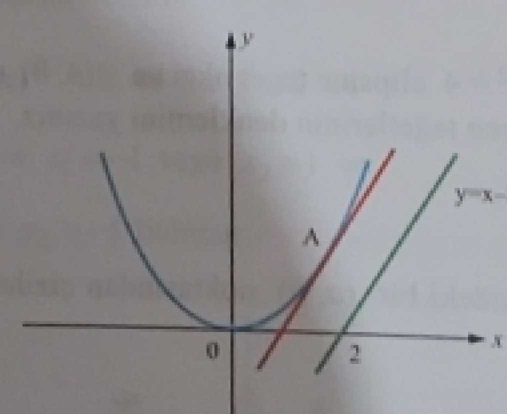
25. $y=x^2$ eğrisinin $y=x-2$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$y=x^2$ eğrisi üzerinde $y=x-2$ doğrusuna en yakın nokta eğrinin bu doğruya paralel olan teğetinin değme noktasıdır. Şu halde $f'(x)=1$ denkleminin kökü istenen noktanın apsisidir.

$2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

olacağından istenen nokta $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ noktasıdır.



26. $y=x^2$ parabolüne $P(a,a^2)$ noktasından çizilen teğetin $0x$- eksenini daima $\left(\frac{a}{2},0\right)$ da kestiğini gösteriniz.

Çözüm

$y' = 2x \Rightarrow m = 2a$ olur. Teğetin denklemi

$y - a^2 = 2a(x-a)$ olacaktır.

Bu doğrunun $0x$- eksenini kestiği noktanın apsisi

$$0 - a^2 = 2a\,(x-a) \Rightarrow$$

$$-a^2 = 2ax - 2a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \text{ olur.}$$

O halde teğetin $0x$- eksenini kestiği nokta $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ dır.

27. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ eğrisine orjinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm

$$y' = \frac{1\,(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'(0) = m = 1$$

olduğundan teğetin denklemi

$y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$

olur.

28. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve $A(4, 0)$ noktasından geçen teğetlerinin denklemini yazınız.

Çözüm

Elipse üzerindeki bir (a, b) noktasından çizilen teğetin eğimi,

$$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow m = -\frac{a}{4b},$$

teğetin denklemi,

$$y - b = -\frac{a}{4b}\,(x-a) \Rightarrow$$

$$4by - 4b^2 = a^2 - ax \Rightarrow 4by + ax = a^2 + 4b^2 \text{ olur.}$$

Bu doğru $(4, 0)$ noktasından geçeceğinden

$4a = a^2 + 4b^2$ olur. Diğer tarafdan (a, b) elipsin bir noktası olduğundan $a^2 + 4b^2 = 4$ tür.

Şu halde $4a = 4 \Rightarrow a = 1$ olacaktır.

$a = 1$ için $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olur. a ve b nin bu değerleri

$4by + 4x = a^2 + 4b^2$ teğet denkleminde yerine yazılırsa

$$\sqrt{3}x + 6y = 4\sqrt{3} \text{ ve } \sqrt{3}x - 6y = 4\sqrt{3}$$

denklemleri elde edilir.

29. $A\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçen ve $4y = x^2 + 4$ parabolüne teğet olan doğruların dik kesiştiklerini gösteriniz.

Çözüm

$4y = x^2 + 4$ parabolüne üzerindeki (a, b) noktasından çizilen teğetin denklemi

$$y - b = \frac{a}{2}\,(x-a)$$

olur. Bu doğru $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçtiğinden

$$-b = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{2} - a\right) \Rightarrow 4b = 2a^2 - 3a$$

olur. (a, b) parabol üzerinde bulunduğundan

$4b = a^2 + 4$ olur. Buna göre

$$2a^2 - 3a = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$$

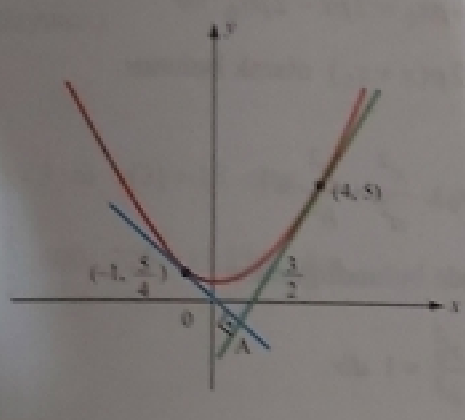
$$\Rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{4},\ b_2 = 5$$

olur.

Teğetlerin eğimleri

$$m_1 = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ ve } m_2 = \frac{a_2}{2} = 2$$

olacağından $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir. Şu halde teğetler birbirine diktir.



30. $y = -x$ doğrusunun $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz. Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?

Çözüm

$(a, a^3 - 6a^2 + 8a)$ noktasından çizilen teğetin eğimi -1 olacağından

$$3a^2 - 12a + 8 = -1 \;\Rightarrow\; 3(a^2 - 4a + 3) = 0$$

$a = 1$ veya $a = 3$ olmalıdır. Bu iki değere karşılık gelen teğetlerden birinin $y = -x$ olduğunu göstermeliyiz. $a = 1$ için değme noktası $(1, 3)$ olacağından teğetin denklemi

$$y - 3 = -1(x - 1) \;\Rightarrow\; y = -x + 4$$

olur. $a = 3$ için değme noktası $(3, -3)$ olur. Dolayısıyla bu noktadaki teğetin denklemi

$$y + 3 = -1(x - 3) \;\Rightarrow\; y = -x$$

olur. O halde $y = -x$ eğriye $x = 3$ apsisli noktada teğettir.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \;\Rightarrow\; x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\; x_2 = x_3 = 3$$

olacağından $y = -x$ doğrusu eğriyi $x = 0$ apsisli noktada, yani $(0, 0)$ noktasında keser. $x = 3$ apsisli noktada teğet olur.

31. m nin hangi değerler için $y = mx$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberine teğet olur? Değme noktasının apsisini bulunuz.

Çözüm

Çember ile doğrunun bir tek ortak noktası olmalıdır.

$$x^2 + (m^2x^2) - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + m^2)x^2 - 4x + 3 = 0$$

denkleminin

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1 + m^2)\cdot 3 = 0 \Rightarrow 4 - 3(1 + m^2) = 0$$

$$4 - 3 - 3m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

olmalıdır.

32. $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ eğrisine, bu eğrinin $y = -x$ doğrusu ile kesim noktasından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

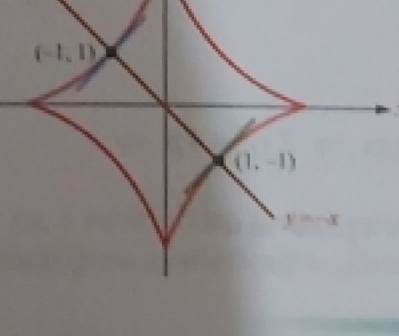
Çözüm

Önce $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ eğrisiyle $y = -x$ doğrusunun kesim noktalarını bulalım.

$$x^{2/3} + (-x)^{2/3} = 2 \Rightarrow 2x^{2/3} = 2 \Rightarrow$$

$$x^{2/3} = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ veya } x_2 = 1 \Rightarrow$$

$y_1 = 1$ ve $y_2 = -1$ bulunur.



$(-1, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini bulalım.

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}.\ y'=0 \Rightarrow$$

$$x^{-1/3}+y^{-1/3}.\ y'=0 \Rightarrow$$

$$1-1.\ m_1=0 \Rightarrow m_1=1$$

olur. Dolayısıyla teğetin denklemi

$$y-1=1(x+1) \Rightarrow y=x+2$$

olacaktır. Benzer şekilde $(1, -1)$ noktasındaki teğetin denkleminin $y=x-2$ olacağı kolayca gösterilebilir.

33. $y=x(|x|+2)$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\geq 0 \text{ ise} \\ -x^2+2x, & x<0 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{olur.}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

ve benzer biçimde $f'(0^-)=2$ olduğu gösterilebilir. Şu hâlde $m=2$ dir. Teğetin denklemi

$$y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$$

olur.

34. Aşağıdaki eğrilerin üzerindeki (x_0, y_0) noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

a. $y^2=4px$

b. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Çözüm

a. $y^2=4px \Rightarrow 2yy'=4p \Rightarrow$

$$2y_0m=4p \Rightarrow m=\frac{2p}{y_0}$$

olacağından teğetin denklemi

$$y-y_0=\frac{2p}{y_0}(x-x_0) \Rightarrow$$

$$yy_0-y_0^2=2px-2px_0 \Rightarrow$$

$$yy_0-4px_0=2px-2px_0 \Rightarrow$$

$yy_0=2p(x+x_0)$ olarak bulunur.

b. (x_0, y_0), $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

üzerinde bulunduğundan

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \ dir.$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0\,m}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

olacağından teğetin denklemi

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0) \Rightarrow$$

$$a^2yy_0-a^2y_0^2=-b^2x_0x+b^2x_0^2$$

$$a^2yy_0+b^2x_0x=a^2y_0^2+b^2x_0^2$$

$$a^2yy_0+b^2x_0x=a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

35. Yol denklemi

$$s=5+3t+t^2$$

olan hareketlinin başlangıçtan 4 saniye sonraki hızını ve ivmesini bulunuz.

Çözüm

$v=s'=3+2t \Rightarrow v(4)=11$ olur.

$a=v'=2$ dir. İvme sabittir.

36. Kütlesi 100 kg olan bir hareketlinin yol denklemi

$$s = 2t^2 + 3t + 1$$

dir. Bu hareketlinin 3. saniyedeki kinetik enerjisini hesaplayınız. (Kinetik enerjisinin $\frac{1}{2}mv^2$ olduğunu hatırlayınız.)

Çözüm

$v = s' = 4t + 3 \Rightarrow v(3) = 15$ olur.

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} . 100 . 225 = 11\,250$ olur.

37. Kütlesi 6 gram olan bir hareketlinin yol denklemi

$$s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$$

dir. Cismin hareketten 1 saniye sonraki kinetik enerjisini hesaplayınız.

Çözüm

$v = s' = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2 \Rightarrow v(1) = \frac{25}{2}$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} . 6 . \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{1875}{4}$

38. $p = 8 - q$ talep fonksiyonu veriliyor.

a. Esnekliğini hesaplayınız.

b. Marjinal hasılat fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

a. $\frac{Ep}{Eq} = \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = \frac{q}{8-q} \cdot (-1) = \frac{q}{q-8}$

b. $R = pq = (8-q)q = 8q - q^2$ olacağından

$R' = 8 - 2q$ olur.

39. Talep eğrisi $p = a$ (a sabit) olan fonksiyon için marjinal hasılat ne olur?

Çözüm

$R = p.q = a.q \Rightarrow R' = a$ olur.

Şu halde marjinal hasılat sabit olan talep fonksiyonuna eşit olur.

40. $p = 10 - 3q$ talep eğrisi veriliyor.

a. Talep esnekliğini bulunuz.

b. $q = 1$, $q = 25$, $q = 0{,}5$ için esnekliğin değerlerini hesaplayınız.

Çözüm

a. Esneklik

$\frac{Ep}{Eq} = \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = \frac{q}{10-3q} \cdot (-3)$

$= \frac{-3q}{10-3q}$ olur.

b. $q = 1$ için esneklik $-\frac{3}{7}$,

$q = 25$ için $+\frac{15}{13}$,

$q = 0{,}5$ için $-\frac{3}{17}$,

bulunur.

41. $qp^a = b$ (a, b sabit) talep fonksiyonunun her noktadaki esnekliğinin aynı olacağını gösteriniz.

Çözüm

Esnekliğin q ya bağlı olmadığını göstereceğiz.

$$qp^a = b \Rightarrow \ln q + a\ln p = \ln b \Rightarrow$$

$$\frac{1}{q} + a \cdot \frac{p'}{p} = 0 \Rightarrow 1 + a \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{Ep}{Eq} = -\frac{1}{a} \quad \text{(sabit)}$$

42. $pq = a$ (a sabit) talep eğrisinin esnekliğinin her noktada -1 olacağını gösteriniz.

Çözüm

$$pq = a \Rightarrow \ln p + \ln q = \ln a \Rightarrow$$

$$\frac{p'}{p} + \frac{1}{q} = 0 \Rightarrow \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} = -1 \Rightarrow \frac{Ep}{Eq} = -1$$

Problemler ve Çözümleri

1. Aşağıdaki fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+5$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$

c. $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cos x-\sin x$

ç. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-x^2$

Çözüm

a. $f'(x)=3x^2-12x=0\Rightarrow 3x(x-4)=0\Rightarrow$

$x_1=0,\ x_2=4$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

f, $(-\infty, 0]$ da artan, $[0, 4]$ de azalan ve $[4, +\infty)$ da artandır.

b. $f'(x)=\dfrac{1.(4+x^2)-2x^2}{(4+x^2)^2}=\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$

x	$-\infty$	−2		2	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

f, $(-\infty,-2]$ de azalan, $[-2, 2]$ de artan ve $[2,+\infty)$ da azalandır.

c. $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

olur. $x\in[0,2\pi]$ olduğundan $f'(x)$ in işareti $\sin x$ in işaretine bağlıdır. $\sin x>0$ ise $f'(x)<0$, $\sin x<0$ ise $f'(x)>0$ dır.

$0<x\le\pi$ için $\sin x>0$ ve dolayısıyla $f'(x)<0$ olur. O halde $[0,\pi]$ aralığında f azalandır.

$\pi<x<2\pi$ *için* $\sin x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$

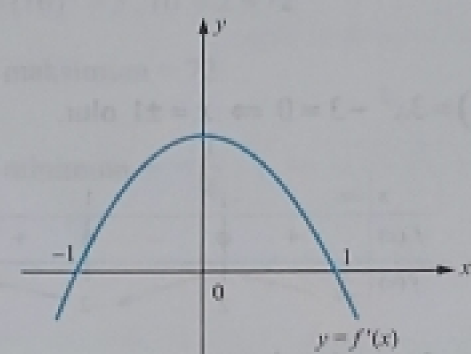
f, $[\pi, 2\pi]$ de artandır.

ç. $f'(x)=2-2x=0\Rightarrow x=1$ olur.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

f, $(-\infty, 1]$ de artan, $[1,+\infty)$ de azalandır.

2.



Yukarıda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

a. f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

b. Hangi noktalarda yerel maksimum hangilerinde yerel minimum vardır?

Çözüm

a. $x<-1$ için $f'(x)<0$ olduğundan $(-\infty,-1]$ aralığında f azalandır. $[-1, 1]$ aralığında $f'(x)\ge 0$ olduğundan f artandır. $[1,+\infty)$ da $f'(x)<0$ dır, dolayısıyla f azalandır.

b. $(-1, 0)$ noktasında $f$nin yerel minimumu vardır.

$(1, 0)$ noktasında $f$nin yerel maksimumu vardır.

3. Aşağıdaki fonksiyonların yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2(x^2-4)$

c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

d. $f : R\setminus\{0\} \to R,\quad f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

e. $f : R \to R,\quad f(x) = (x-1)^2 (x+2)$

f. $f : R \to R,\quad f(x) = x\,e^x$

Çözüm

a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ olur.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

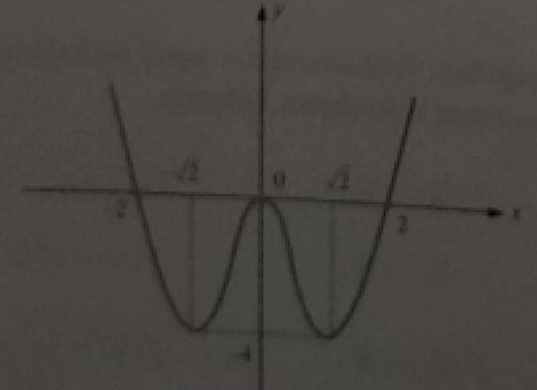
$x = -1$ de yerel maksimum,
$x = 1$ de yerel minimum vardır.
Yerel maksimum değeri 2,
yerel minimum değeri -2 dir.

b. $f'(x) = 2x(x^2-4) + 2x(x^2) = 2x(2x^2-4) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}$ olur.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4 min	↗	0 max	↘	-4 min	↗	$+\infty$

$x = -\sqrt{2}$ ve $x = \sqrt{2}$ de yerel minimum,
$x = 0$ da yerel maksimum vardır. Yerel minimum değeri -4, yerel maksimum değeri sıfırdır.



c. $f'(x) = \dfrac{1.(1+x^2) - 2x.x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$ min	↗	$\frac{1}{2}$ max	↘	0

$x = -1$ de yerel minimum,
$x = 1$ de yerel maksimum vardır.
Yerel maksimum değeri $1/2$,
yerel minimum değeri $-1/2$ dir.

d. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	$+\infty$

$x = -1$ de yerel maksimum, yerel maksimum değeri
$x = 1$ de yerel minimum vardır. Yerel minimum değeri
2 dir.

e. $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + 1(x-1)^2 = (x-1)(3x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

$x = -1$ de yerel maksimum,
$x = 1$ de yerel minimum vardır.

f. $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$-e^{-1}$ min	↗	

$x = -1$ de yerel minimum vardır. Yerel minimum değeri $-e^{-1}$ dir.

4. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklardaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

a. $f(x)=x^2-3x+2,\qquad I=[-3,10]$

b. $f(x)=x^2-3x+2,\qquad I=[-2,10]$

c. $f(x)=x^3-3x+1,\qquad I=[0,1]$

ç. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\qquad I=[0,\ 2]$

d. $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\qquad I=\left[\dfrac{1}{100},100\right]$

e. $f(x)=\sqrt{3-4x},\qquad I=[-1,\ 0]$

f. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1},\qquad I=[-1,\ 0]$

g. $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}\qquad I=[-2,\ 1]$

h. $f(x)=x^{2/3},\qquad I=[1,8]$

ı. $f(x)=4\sin x+2\cos 2x,\qquad I=[0,\pi]$

i. $f(x)=2^x,\qquad I=[-1,5]$

Çözüm

a. $f(x)=x^2-3x+2 \Rightarrow$

$f'(x)=2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}+2=-\dfrac{1}{4}$

$f(-3)=9+9+2=20$

$f(10)=100-30+2=72$

Mutlak maksimum $=72$

Mutlak minimum $=-\dfrac{1}{4}$

b. $f(x)=x^2-3x+2 \Rightarrow f'(x)=2x-3$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ olur.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-3\left(\dfrac{3}{2}\right)+2=-\dfrac{1}{4}$

$f(-2)=(-2)^2-3(-2)+2=12$

$f(10)=(10)^2-3.10+2=72$

Mutlak maksimum $=72$

Mutlak minimum $=-\dfrac{1}{4}$

c. $f(x)=x^3-3x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$

$f(-1)=-1+3+1=3,\quad f(1)=1-3+1=-1,$

$f(0)=1,$

olacağından

Mutlak maksimum $=3$

Mutlak minimum $=-1$

ç. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$

$f(-1)=-\dfrac{1}{2},\quad f(1)=\dfrac{1}{2},\quad f(0)=0,\quad f(2)=\dfrac{2}{5}$

Mutlak maksimum $=\dfrac{1}{2}$

Mutlak minimum $=-\dfrac{1}{2}$

d. $f(x)=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$

$f(-1)=-2,\ f(1)=2,\ f\left(\dfrac{1}{100}\right)=100,01$

$f(100)=100,01$ olacağından

Mutlak maksimum değeri = 100,01

Mutlak minimum değeri = −2

e. $f(x)=\sqrt{3-4x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{3-4x}} \neq 0$

$f(-1)=\sqrt{7},\ f(0)=\sqrt{3}$

Mutlak maksimum değeri = $\sqrt{7}$

Mutlak minimum değeri = $\sqrt{3}$

f. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ f(-1)=1,\ f(0)=1$

Mutlak maksimum değeri $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Mutlak minimum değeri = 1

g. $f(x)=\sqrt{2-x-x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1-2x}{2\sqrt{2-x-x^2}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2},\ f(-2)=0,\ f(1)=0$

Mutlak maksimum değeri $=\dfrac{3}{2}$

Mutlak minimum değeri = 0

h. $x \in [1, 8]$ için

$f(x)=x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3x^{1/3}}>0$

$f(1)=1,\ f(8)=4$ olacağından

Mutlak maksimum değeri = 4

Mutlak minimum değeri = 1

ı. $f(x)=4\sin x+2\cos 2x \Rightarrow$

$f'(x)=4\cos x-4\sin 2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4(\cos x-2\sin x\cos x)=0 \Rightarrow$

$\cos x(1-2\sin x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{\pi}{6},\ x_3=\dfrac{\pi}{2},$

bulunur, zira $x \in [0, \pi]$ dir.

$f(0)=2,\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2,\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3,$

Mutlak maksimum değeri = 3,

Mutlak minimum değeri = 2

i. $f(x)=2^x \Rightarrow f'(x)=2^x \ln 2>0$

$f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2},\ f(5)=2^5=32$

Mutlak maksimum değeri = 32,

Mutlak minimum değeri $=\dfrac{1}{2}$ olur.

5. $f(x)=(x-c_1)^2+(x-c_2)^2+...+(x-c_n)^2$

fonksiyonu hangi noktada minimum değerini alır?

Çözüm

$f(x)=(x-c_1)^2+(x-c_2)^2+...+(x-c_n)^2 \Rightarrow$

$f'(x)=2(x-c_1)+2(x-c_2)+...+2(x-c_n)=0 \Rightarrow$

$x=\dfrac{c_1+c_2+...+c_n}{n}$

bulunur.

$f''(x)=2+2+...+2=2n>0$

olduğundan

Fonksiyon $x=\dfrac{c_1+c_2+...+c_n}{n}$ noktasında minimum değerini alır.

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıkta bir mutlak ekstremuma sahip oluğunu gösterip bu değeri bulunuz.

a. $f(x)=\cot x-\sqrt{2}\csc x, \quad I=(0,\pi)$

b. $f(x)=\tan x+3\cot x, \quad I=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Çözüm

a. $f(x)=\cot x-\sqrt{2}\csc x \Rightarrow$

$f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}+\sqrt{2}\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=0 \Rightarrow$

$-1+\sqrt{2}\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-1$ dir.

$x<\dfrac{\pi}{4}$ için $f'(x)>0$, $x>\dfrac{\pi}{4}$ için $f'(x)<0$

olduğundan $x=\dfrac{\pi}{4}$ bir maksimum noktasıdır.

O halde mutlak maksimum değer -1 dir.

b. $f(x)=\tan x+3\cot x, \quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-3\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}$

olur.

$f'(x)=0 \Rightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=0 \Rightarrow$

$\tan^2 x=3 \Rightarrow \tan x=\sqrt{3} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ de mutlak minimum vardır.

Mutlak minimum değer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ tür.

7. $f(x)=x^2+2ax+3$ biçiminde tanımlanan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun en küçük değeri -6 olduğuna göre, a nedir?

Çözüm

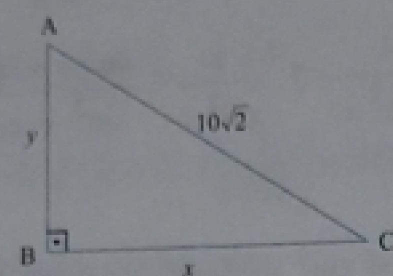
$f'(x)=2x+2a=0 \Rightarrow x=-a$ da yerel minimum vardır.

$f(-a)=-6 \Rightarrow a^2-2a^2+3=-6 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$

olur.

8. Hipotenüs uzunluğu $10\sqrt{2}$ birimkare olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç birimkaredir?

Çözüm



$x^2+y^2=200 \Rightarrow y=\sqrt{200-x^2}$ olur.

$Alan(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}x.y=\frac{1}{2}x\sqrt{200-x^2}=f(x)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{200-x^2}-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0 \Rightarrow$

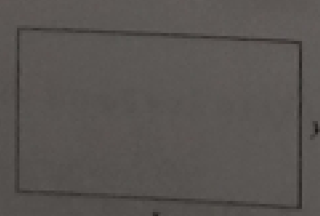
$200-2x^2=0 \Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=10$

$A=\frac{1}{2}.x.y=\frac{1}{2}.10.10=50\ br^2$

olur.

9. Alanı 36 cm^2 olan bir dikdörtgenin çevresi en az kaç cm olur?

Çözüm



$x.y=36$

$Ç=2(x+y)=2\left(x+\frac{36}{x}\right)$

$Ç'=2\left(1-\frac{36}{x^2}\right)=0 \Rightarrow$

$x^2-36=0 \Rightarrow x=6$ cm bulunur.

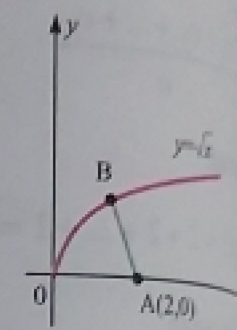
$x\cdot y=36 \Rightarrow 6y=36 \Rightarrow y=6$ cm olur.

Çevre en az $2(x+y)=24$ cm olur.

Buna göre alanı sabit olan dikdörtgenler içinde çevresi en az olanı karedir.

10. $A(2,0)$ noktasının $y=\sqrt{x}$ eğrisine olan uzak... hesaplayınız.

Çözüm



Eğri üzerinde bir nokta

$B(x,\sqrt{x})$ olsun.

$|AB|^2=(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2$

$=x^2-3x+4$

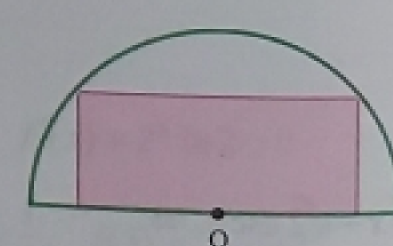
olur. $|AB|$ yi en küçük yapan x değeri $f(x)=x^2-3x...$ fonksiyonunu en küçük yapan x değeridir.

$f'(x)=2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ olur.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4=\frac{7}{4}$ olduğundan

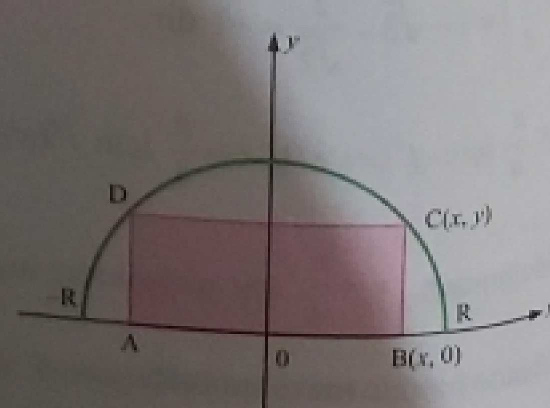
$|AB|=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ birimdir.

11.



Yukarıda R yarıçaplı bir yarıçemberin içine bir dik- dörtgen çizilmiştir. Dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?

Çözüm



Çemberin denklemi $x^2+y^2=R^2$ ise $ABCD$ dikdörtgeninin alanı

$$A=(2x)\cdot y=2x\sqrt{R^2-x^2}$$

olur. Bunun maksimumu bulunacaktır.

$$A'=2\left(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$R^2-2x^2=0\Rightarrow x=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

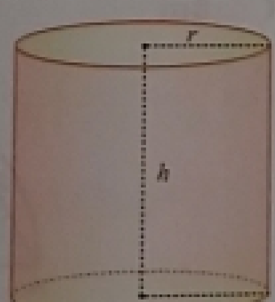
olacaktır. Buna göre maksimum alan

$$A=2\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}=R^2$$

olur.

12. Dairesel dik silindir biçiminde ve $16\pi\ cm^3$ hacminde bir konserve kutusu yapılacaktır. En az sac kullanmak için taban yarıçapı ve kutunun yüksekliği kaç cm olmalıdır?

Çözüm



$$V=\pi r^2h=16\pi\ \Rightarrow$$

$$r^2h=16\Rightarrow h=\frac{16}{r^2}$$

olur. Yüzey alanı

$$S=2\pi rh+2\pi r^2$$

$$=2\pi r\cdot\frac{16}{r^2}+2\pi\cdot r^2$$

$$=\frac{32\pi}{r}+2\pi r^2$$

olacağından

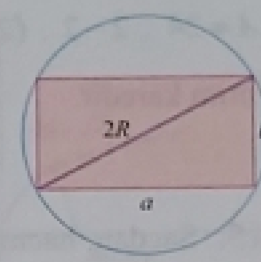
$$S'=-\frac{32\pi}{r^2}+4\pi r=0\Rightarrow-\frac{8}{r^2}+r=0\Rightarrow r^3=8$$

$\Rightarrow r=2$ cm bulunur.

$$h=\frac{16}{r^2}=\frac{16}{4}=4\ cm\ \text{ olur.}$$

13. R yarıçaplı bir çember içine çizilebilen maksimum alanlı dikdörtgenin çevresi kaç birimdir?

Çözüm



$a^2+b^2=4R^2$ dir.

$$A=ab=a\sqrt{4R^2-a^2}$$

$$A'=\sqrt{4R^2-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{4R^2-a^2}}$$

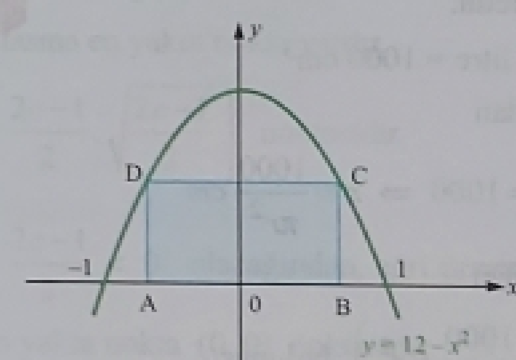
$$=\frac{4R^2-2a^2}{\sqrt{4R^2-a^2}}=0\Rightarrow a=\sqrt{2}R\Rightarrow b=\sqrt{2}R$$

bulunur. Bu durumda maksimum alan

$$A=a\sqrt{4R^2-a^2}=\sqrt{2}R\sqrt{4R^2-2R^2}=2R^2$$

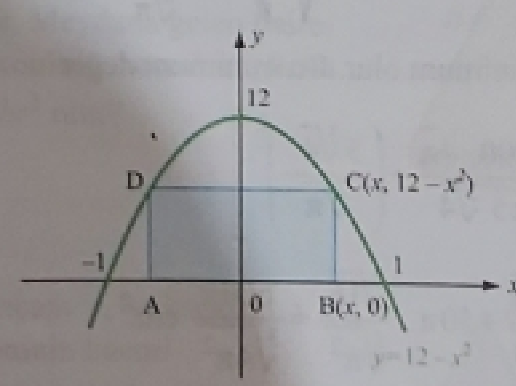
Çevre $Ç=4a=4\sqrt{2}\,R$ birim olur.

14.



İki köşesi Ox- ekseni, iki köşeyi de $y=12-x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenin alanı en fazla kaç birimkare olabilir?

Çözüm



B noktasının apsisi x olsun.

$|BC|=12-x^2$ olur. Dikdörtgenin alanı

$$A=|AB|\cdot|BC|=2x\cdot(12-x^2)=24x-2x^3$$

$$A'=24-6x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$$

olur.

Buna karşılık gelen alan (maksimum alan)

$A = 24\ .\ 2 - 2\ .\ (2)^3 = 32$

birim karedir.

15. Sacdan, hacmi 1 litre olan kapalı bir dik dairesel silindir yapmak için en az kaç cm^2 saca ihtiyaç vardır? Bu silindirin boyutları nedir?

Çözüm

Kullanılacak sacın alanı

$A = 2\pi r\ .\ h + 2\pi r^2$

$= 2\pi(r\ .\ h + r^2)$

birim karedir.

Hacim 1 litre = 1000 cm^3 olduğundan

$\pi r^2\ .\ h = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}\ cm$

olacağından

$A = 2\pi\left(\dfrac{1000}{\pi r} + r^2\right)$ bulunur.

$A' = 2\pi\left(-\dfrac{1000}{\pi r^2} + 2r\right) = 0 \Rightarrow$

$-1000 + 2\pi r^3 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = \dfrac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}$

için alan minimum olur. Bu minimum değer

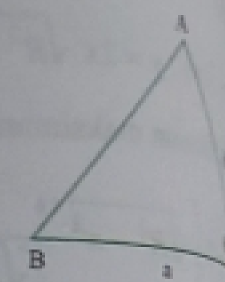
$A = 2\pi\left[\dfrac{1000.\sqrt[3]{\pi}}{\pi 5\sqrt[3]{4}} + \left(\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2\right]$

$= 400\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{4}} + 50\pi\ .\ \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{\pi^2}} = \dfrac{600\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}}\ cm^2$

olur.

16. Bir üçgenin iki kenarı a ve b, bu iki kenarın oluşturduğu açının ölçüsü θ olduğuna göre, bu üçgenin alanı θ nın hangi değeri için maksimum olur? Maksimum alanlı üçgenin alanı ne olur?

Çözüm



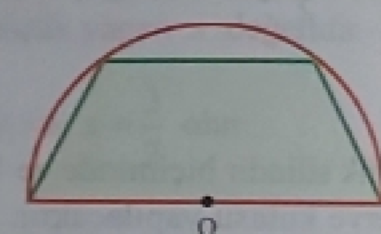
$A(\theta) = \dfrac{1}{2}\ a\ .\ b \sin\theta$

$A'(\theta) = \dfrac{1}{2}\ a\ .\ b\ .\ \cos\theta$

$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

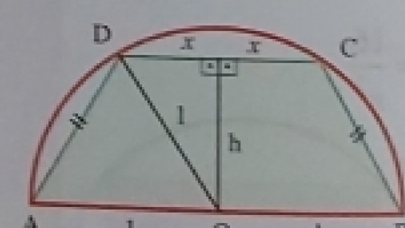
$A\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ a.b.\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}\ a.b$

17.



Yarıçapı 1 cm olan yarıçember içine çizilebilen yamuğun alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?

Çözüm



$Alan(ABCD) = \dfrac{2+2x}{2} \cdot h = (x+1)\sqrt{1-x^2}$

olacağından, alanın maksimum olması için

$f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$

fonksiyonu maksimuma sahip olmalıdır.

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x - 2x^2 = 0 \Rightarrow$

$(1-2x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

olmalıdır.

x bir uzunluk olduğundan $x=-1$ olamaz.

$x=\frac{1}{2}$ için $|DC|=1$ olur. Şu halde yamuğun alanı en fazla

$$A=\frac{1}{2}(2+1)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

olur. Alan maksimum olduğunda $|BC|=|CD|=|DA|$ olduğuna dikkat ediniz.

18. Çevresi aynı sayıya eşit olan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanının kare olacağını gösteriniz.

Çözüm

Çevresi a olan dikdörtgenlerin eni x, boyu y olsun.

$$2x+2y=a \Rightarrow y=\frac{a}{2}-x$$

olur. Dikdörtgenin alanı

$$A=x\,.\,y=x\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a}{2}x-x^2$$

olur. Bu alanın maksimum olması için

$$A'=\frac{a}{2}-2x=0 \Rightarrow x=\frac{a}{4}$$

olmalıdır. $y=\frac{a}{2}-x=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$

olacağından $x=y=\frac{a}{4}$ olmalıdır.

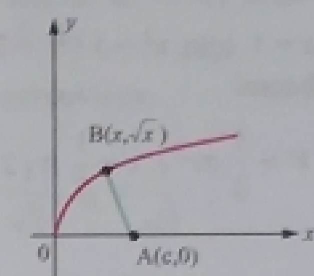
Bu da dikdörtgenin kare olacağını gösterir.

19. $y=\sqrt{x}$ eğrisinin $(c,0)$ noktasına en yakın noktası hangi noktadır?

($c\geq\frac{1}{2}$ ve $c<\frac{1}{2}$ için irdeleyiniz.)

Çözüm

Eğri üzerinde bulunan ve $A(c,0)$ noktasına en yakın olan nokta $B(x,\sqrt{x})$ olsun.



$$|AB|=\sqrt{(x-c)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$$

$$=\sqrt{(x-c)^2+x}$$

olduğundan $|AB|$ uzaklığını minimum yapan x değeri $f(x)=(x-c)^2+x$ fonksiyonunu minimum yapan x değeridir.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x-c)+1=0 \Rightarrow x=\frac{2c-1}{2}$$

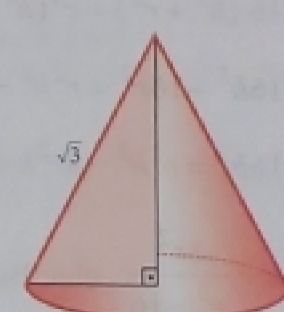
bulunur. $\sqrt{x}$ ifadesi $x\geq 0$ için tanımlı olduğundan

$2c-1\geq 0 \Rightarrow c\geq\frac{1}{2}$ ise $y=\sqrt{x}$ eğrisi üzerinde $A(c,0)$ noktasına en yakın nokta vardır.

Bu nokta $\left(\frac{2c-1}{2},\sqrt{\frac{2c-1}{2}}\right)$ noktasıdır.

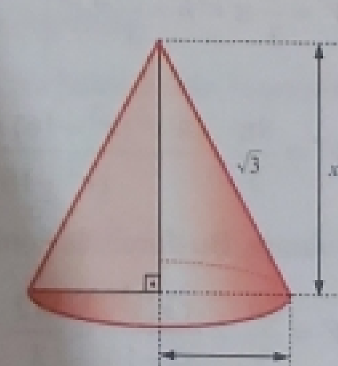
$c<\frac{1}{2}$ *ise* $\frac{2c-1}{2}<0$ olacağından, eğri üzerinde $(c,0)$ noktasına en yakın nokta $(0,0)$ noktasıdır.

20. Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir diküçgen, dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel koninin hacmi en fazla kaç br^3 olur?



Çözüm

Taban yarıçapı r, yüksekliği x olsun. Koninin hacmi



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2.\ x$$

$$=\frac{\pi}{3}(3-x^2)\,.\,x$$

$$=\frac{\pi}{3}(3x-x^3)\ \text{olur.}$$

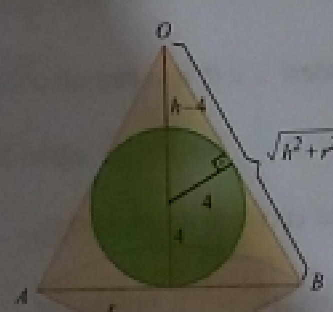
$V' = \pi (1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 1$ olur.

$x = 1$ için $r^2 = 3 - 1 = 2$ dir. Şu halde koninin maksimum hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . x = \frac{1}{3}\pi . 2 . 1 = \frac{2\pi}{3} \ br^3 \text{ olur.}$$

21. İçine 4 *cm* yarıçaplı bir küre yerleştirilebilen bir dik dairesel koninin hacmi en az kaç cm^3 olur?

Çözüm



Koninin taban yarıçapı r, yüksekliği h olsun.

Üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{4}{r} = \frac{h-4}{\sqrt{h^2+r^2}} \Rightarrow 4\sqrt{h^2+r^2} = r(h-4) \Rightarrow$$

$$16(h^2+r^2) = r^2(h^2-8h+16) \Rightarrow$$

$$16h^2 + 16r^2 = r^2h^2 - 8r^2h + 16r^2 \Rightarrow$$

$$16h^2 = r^2h^2 - 8r^2h \Rightarrow 16h = r^2h - 8r^2 \Rightarrow$$

$h = \dfrac{8r^2}{r^2-16}$ olur. Bu takdirde koninin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{8r^2}{r^2-16}\right) = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(\frac{r^4}{r^2-16}\right) \text{ olur.}$$

$$V' = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{4r^3(r^2-16) - 2r . r^4}{(r^2-16)^2} = 0 \Rightarrow r^2 = 32$$

bulunur. Bu durumda koninin hacmi

$$V = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{(32)^2}{32-16} = \frac{512}{3}\pi$$

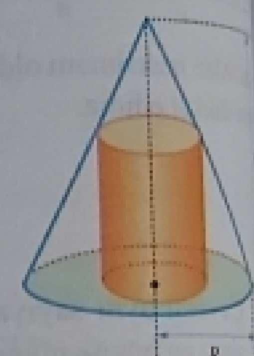
birimküp olur.

Kürenin hacmi $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi . 4^3 = \dfrac{256}{3}\pi$ olduğundan,

ninin hacminin kürenin hacmine oranı

$$\frac{512}{3}\pi : \frac{256}{3}\pi = 2 \text{ dir.}$$

22. Taban yarıçapı R, yüksekliği H olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?

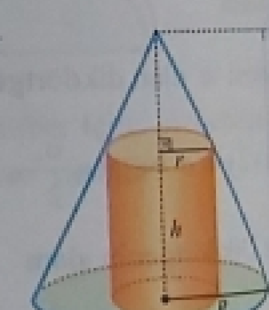


Çözüm

Silindirin taban yarıçapı r, yüksekliği h olsun. Benzerlikten

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow$$

$$r = \frac{R}{H}(H-h)$$



olur. Silindirin hacmi

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 . h$$

olur.

$$V' = \pi \frac{R^2}{H^2}\left[2(H-h)(-1)h + (H-h)^2\right] = 0$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2}(H-h)(H-3h) = 0 \Rightarrow$$

$h = H$ veya $h = \dfrac{H}{3}$ bulunur.

$h = H$ için $r = 0$ olacağından silindirin hacmi sıfır olur. h minimum hacme karşılık gelir. O halde

$h = \dfrac{H}{3}$ olmalıdır. Bu değere karşılık gelen hacim

$$V = \pi \frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{H}{3}\right)^2 . \frac{H}{3} = \frac{4}{27}\pi R^2$$

olur.

Problemler ve Çözümleri

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda Rolle teoremin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen c noktasını bulunuz.

a. $f(x)=x^2-2x$ $\quad [0,2]$

b. $f(x)=9x^2-x^4$ $\quad [-3,3]$

c. $f(x)=x-x^3$ $\quad [0,1]$

ç. $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$ $\quad [0,5]$

d. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad [-1,1]$

Çözüm

a. $f(x)=x^2-2x$ fonksiyonu bir polinom olduğundan $[0,2]$ üzerinde sürekli olup $(0,2)$ aralığının her noktasında türevlidir.

$f(0)=0$ ve $f(2)=4-4=0 \Rightarrow f(0)=f(2)$ dir.

Rolle Teoreminin hipotezleri sağlanmış olur.

$f'(x)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan $c=1$ dir.

b. f bir polinom olduğundan $[-3,3]$ aralığında sürekli ve bu aralığın her iç noktasında türevlidir.

$f(-3)=f(3)=0$ olduğundan Rolle Teoreminin hipotezleri sağlanır.

$$f'(x)=18x-4x^3=0 \Rightarrow 2x(9-2x^2)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0,\ x_2=\frac{3}{\sqrt2},\ x_3=-\frac{3}{\sqrt2} \text{ dir.}$$

Bunların tümü $[-3,3]$ aralığında bulunduğundan hepsi birer c dir. Şu halde

$$c_1=0,\ c_2=\frac{3}{\sqrt2},\ c_3=-\frac{3}{\sqrt2} \text{ dir.}$$

c. f bir polinom olup $[0,1]$ de sürekli ve $(0,1)$ aralığında türevlidir. $f(0)=f(1)=0$ dır.

Rolle Teoreminin hipotezleri gerçekleşir.

$$f'(x)=1-3x^2=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt3},\ x_2=\frac{1}{\sqrt3}$$

olur. Bu kökler içinde $(0,1)$ aralığında bulunan

$\dfrac{1}{\sqrt3}$ olduğundan $c=\dfrac{1}{\sqrt3}$ tür.

ç. $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$ fonksiyonu $[0,5]$ aralığında sürekli ve

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{-1/3}-\frac{5}{3}x^{2/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(2-x)$$

türev fonksiyonu $(0,5)$ aralığının her noktasında varolduğundan f fonksiyonu $(0,5)$ aralığında türevlidir.

$f(0)=0$ ve $f(5)=0$ olduğundan $f(0)=f(5)$ dir.

O halde f fonksiyonu Rolle Teoreminin hipotezlerini sağlar.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{-1/3}(2-x)=0 \Rightarrow x=2$$

olduğundan $c=2$ dir.

d. f bir rasyonel fonksiyondur. $1+x^2\neq 0$ olduğundan f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli ve $(-1,1)$ aralığının herbir noktasında türevlidir.

Ayrıca $f(-1)=f(1)=0$ dır. Şu halde Rolle Teoreminin hipotezleri sağlanır.

$$f'(x)=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0 \Rightarrow$$

$$-4x=0 \Rightarrow x=0\in[-1,1]$$

olduğundan $c=0$ dır.

2. $m, n \in Z^+$ olmak üzere, $f(x) = x^m(1-x)^n$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen c noktasının $[0, 1]$ aralığını $\frac{m}{n}$ oranında böldüğünü gösteriniz.

Çözüm

f bir polinom olduğundan sürekli ve $(0, 1)$ aralığının her noktasında türevlidir. Ayrıca $f(0) = f(1) = 0$ dır.

Şu halde f fonksiyonu Rolle Teoreminin hipotezini gerçekler.

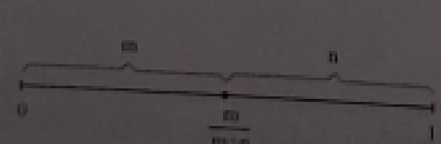
$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - n(1-x)^{n-1}x^m = 0$$

$$x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left[m(1-x) - nx\right] = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{m}{m+n} \text{ olur.}$$

$(0, 1)$ aralığında bulunan kök $c = \frac{m}{m+n}$ dir.

$[0, 1]$ aralığı $m+n$ parçaya bölünür ve baştan m parçası alınırsa $\frac{m}{m+n}$ noktası bulunur. $\frac{m}{m+n}$ den sonraki parçaların sayısı n dir. Şu halde $\frac{m}{m+n}$ noktası $[0, 1]$ aralığını $\frac{m}{n}$ oranında böler.



3. $f(x) = 1 - x^{2/3}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde sürekli ve $f(-1) = f(1) = 0$ dır. $(-1, 1)$ de $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c var mıdır? Bu sonuç Rolle Teoremiyle çelişir mi?

Çözüm

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

olduğundan $f'(x) \neq 0$ dır. Yani $f'(c) = 0$ olacak şe... bir c sayısı yoktur. Bu sonuç Rolle teoremiyle çeliş... Çünkü f fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığının her nokta... türevli değildir. Örneğin fonksiyonun $x = 0$ nokta... türevi yoktur.

4. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu için

$f(0) = f(1) = 0$ dir. $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = 1 \neq$ ...

Bu sonuç Rolle Teoremiyle çelişir mi?

Çözüm

Sonuç Rolle Teoremiyle çelişmez. Çünkü fonksiyon [... aralığında sürekli değildir. Fonksiyonun $x = 1$ nokta... sürekli olmadığı kolayca gösterilebilir.

5. Rolle Teoreminden yararlanarak

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu g... teriniz.

Çözüm

$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ fonksiyonunun a ve b gibi iki kö... kü olsun. f fonksiyonu bir polinom olduğundan [a... aralığında sürekli ve (a, b) aralığının her bir nokta... türevlidir. Rolle Teoremine göre $f'(x) = 0$ denklem... $[a, b]$ aralığında en az bir kökü vardır.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0$ denklemi için

$\Delta = 4 - 4.1.3 = -8 < 0$ olduğundan $3x^2 + 2x + 1$ ... denkleminin bir kökü yoktur.

O halde $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin iki kökü ola...

Şimdi tek kökü bulalım.

$x^3+x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2(x+1)+(x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)\,(x^2+1)=0 \Rightarrow x=-1$ bulunur.

O halde verilen denklemin bir tek kökü vardır.

6. $x^7+x^5+x^3+x+1=0$ denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$f(x)=x^7+x^5+x^3+x+1$ olsun. $f(x)=0$ denklemin a ve b gibi iki farklı kökünün varolduğunu kabul edelim. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezini sağlar.

Dolayısıyla $f'(c)=0$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ vardır.

Halbuki her $x \in \mathbb{R}$ için

$f'(x)=7x^6+5x^4+3x^2+1 \neq 0$ dır. Şu halde

$f(x)=0$ denkleminin farklı iki kökü olamaz.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

olduğundan $f(x)=0$ olacak şekilde bir x noktası vardır, zira f süreklidir.

7. $x^8+x-1=0$ denkleminin sadece iki reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm

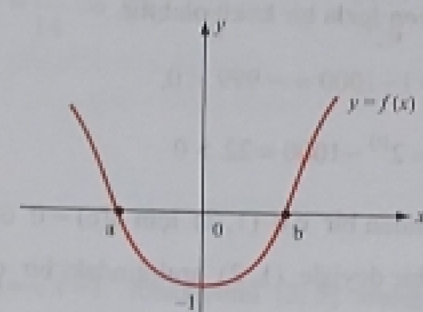
$x^8+x-1=0$ denkleminin ikiden fazla sayıda reel kökü olamaz. Çünkü $8x^7+1=0$ denkleminin birtek kökü vardır. Bu kök $x=-1/\sqrt[7]{8}$ dir.

$f(x)=x^8+x-1$ fonksiyonu için $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$ olduğundan bir $x_0 \in (0, 1)$ için

$f(x_0)=0 \Rightarrow x_0^8+x_0-1=0$ dır.

Şu halde verilen denklemin köklerinden biri $(0, 1)$ aralığındadır.

f polinomu II. bölgeden başlayıp I. bölgede biteceğinden ve $f(0)=-1$ olduğundan eğri $0x$- eksenini iki noktada keser.



8. Aşağıdaki denklemlerin, karşılarında yazılı aralıklarda bir tek köke sahip olduğunu gösteriniz.

a. $x^5+2x-1=0$ $[0, 1]$

b. $x^{10}=1000$ $[1, 2]$

c. $x^4-3x=20$ $[2, 3]$

ç. $x-\dfrac{2}{x}=0$ $[1, 3]$

d. $2x-\cos x=0$ $[-\pi, \pi]$

Çözüm

a. $x^5+2x-1=0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında iki kökü olsaydı türevinin de bu aralıkta bir kökü olurdu. Halbuki $5x^4+2=0$ denkleminin reel kökü yoktur. Zira sol taraf daima pozitiftir. O halde verilen denklemin $[0, 1]$ aralığında birden fazla kökü olamaz.

$f(0)=-1<0$ ve $f(1)=2>0$

olduğundan $(0, 1)$ aralığındaki bir c noktasında $f(c)=0$ dır. O halde verilen denklemin $(0, 1)$ aralığında bir tek kökü vardır.

b. $f(x)=x^{10}-1000$ olsun. $f(x)=0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında iki kökü olsaydı $f'(x)=0 \Rightarrow 10x^9=0$ denkleminin de $[1, 2]$ aralığında en az bir kökü olurdu. Halbuki bu denklemin kökü $x=0$ olup $[1,2]$ aralığına ait değildir. Şu halde denklemin $[1, 2]$ aralığında en fazla bir kökü olabilir.

$f(1)=1-1000=-999<0,$

$f(2)=2^{10}-1000=22>0$

olduğundan bir $c \in (1,2)$ için $f(c)=0$ olur.

Başka bir deyişle $(1, 2)$ aralığındaki bir c sayısı

$x^{10}-1000=0$ denkleminin köküdür.

c. $f(x)=x^4-3x-20$ olsun.

$f(2)=16-6-20=-10<0$ ve

$f(3)=81-9-20=52>0$

olduğundan en az bir $c \in (2,3)$ için $f(c)=0 \Rightarrow c^4-3c-20=0$ olur. Şu halde verilen denklemin $(2, 3)$ aralığında en az bir kökü vardır.

Şimdi bu kökün bir tek olduğunu gösterelim.

Eğer denklemin farklı iki kökü olsaydı türevinin de, yani

$4x^3-3=0$

denkleminin de $(2, 3)$ aralığında bir kökü olurdu.

Halbuki bu denklemin kökü $\sqrt[3]{3/4}$ olup bu aralığa ait değildir. Şu halde denklemin $(2, 3)$ aralığında bir tek kökü vardır.

ç. $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$ fonksiyonu $[1,3]$ aralığında sürekli ve iç bölgesinde türevli bir fonksiyondur.

$f(1)=1-2=-1<0,\ f(3)=3-\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}>0$

olduğundan en az bir $c \in (1,3)$ için $f(c)=0$ dır. Yani denklemin $[1,3]$ aralığında en az bir kökü vardır.

Denklemin $(1,3)$ aralığında birden çok kökü olsaydı türevinin de bu aralıkta en az bir kökü olurdu. Halbuki

$$1+\frac{2}{x^2}=0 \Rightarrow x^2+2=0$$

denkleminin reel kökü yoktur.

d. $f(x)=2x-\cos x$ diyelim.

$f(-\pi)=-2\pi+1<0,\ f(\pi)=2\pi+1>0$

olduğundan $f(x)=0$ denkleminin $(-\pi,\pi)$ aralığında en az bir kökü vardır.

$f(x)=0$ denkleminin $[-\pi,\pi]$ aralığında birden fazla sayıda kökü olsaydı

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2+\sin x=0$$

denkleminin de $(-\pi,\pi)$ aralığında en az bir kökü olurdu. Halbuki $2+\sin x=0$ denkleminin reel kökü yoktur.

9. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda ortalama değer teoreminin şartlarını sağladığını gösterip, teoremde adı geçen x_0 noktalarını bulunuz.

a.	$f(x)=x^3$	$[-1,1]$
b.	$f(x)=3x^2+6x-5$	$[-2,1]$
c.	$f(x)=\sqrt{x}$	$[9,25]$
ç.	$f(x)=x^{2/3}$	$[1,8]$
d.	$f(x)=\sqrt{x-1}$	$[2,5]$
e.	$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f.	$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$	$[1,2]$
g.	$f(x)=\sin x$	$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Çözüm

a. $f(x)=x^3$ polinomu $[-1,\ 1]$ aralığında sürekli ve $(-1,\ 1)$ aralığının her bir noktasında türevlidir. O.D.T nin hipotezi gerçeklediğinden

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$$

olacak biçimde en az bir $x_0 \in (-1,\ 1)$ vardır.

Şimdi bu x_0 noktasını bulalım.

$$3x_0^2=\frac{1^3-(-1)^3}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow x_0^2=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ veya $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olur.

Bu köklerden her ikisi de $(-1,\ 1)$ aralığına ait olduğundan her ikisi de sözü geçen noktalardır.

b. $f(x)=3x^2+6x-5$ fonksiyonu bir polinom olduğundan O.D.T nin hipotezini sağlar.

$$f'(x)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} \Rightarrow 6x+6=\frac{4+5}{3} \Rightarrow$$

$6x+6=3 \Rightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}$ bulunur.

c. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu $[9,25]$ aralığında sürekli ve iç kısmında türevli olduğundan O.D.T nin hipotezi gerçekleşir.

$$f'(x)=\frac{f(25)-f(9)}{25-9} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5-3}{25-9} \Rightarrow$$

$\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$ olur. $x_0=16 \in (9,25)$

ç. $f(x)=x^{2/3}$ fonksiyonu $[1,\ 8]$ aralığında sürekli ve bu aralığın iç noktalarında türevlidir.

O.D.T nin hipotezi sağlandığından

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{4-1}{8-1}=\frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$x_0^{-1/3}=\frac{9}{14} \Rightarrow \sqrt[3]{x_0}=\frac{14}{9} \Rightarrow x_0=\frac{2744}{729} \in (1,8)$$

olur.

d. $f(x)=\sqrt{x-1}$ fonksiyonu $[2,\ 5]$ aralığında sürekli ve $(2,\ 5)$ aralığının her noktasında türevlidir. O.D.T den

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}=\frac{2-1}{5-2} \Rightarrow 2\sqrt{x_0-1}=3 \Rightarrow$$

$x_0-1=\dfrac{9}{4} \Rightarrow x_0=\dfrac{13}{4}$ olur.

e. $f(x)=\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x-x^2}$

fonksiyonu $[0,\ 1]$ aralığında sürekli ve bu aralığın her bir iç noktasında türevlidir.

O halde O. D. T. nin hipotezleri gerçekleşir.

Bu durumda

$$\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-0}{1}=0 \Rightarrow$$

$1-2x=0 \Rightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

f. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $[1,\ 2]$ aralığında sürekli ve iç noktalarında türevlidir. Dolayısıyla O.D.T. nin hipotezleri sağlanır.

$$f'(x)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}=\frac{\frac{5}{2}-2}{2-1}\Rightarrow$$

$x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ olur.

Bu köklerden $[1, 2]$ aralığında bulunanı $\sqrt{2}$ olduğundan O.D.T. de adı geçen nokta

$$x_0=\sqrt{2}$$

9. $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında sürekli ve iç kısmında türevli olduğundan

$$f'(x)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}$$

olacak şekilde bir $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ noktası vardır.

$$\cos x_0=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow x_0=\arccos\frac{2}{\pi}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

10. $$f(x)=\begin{cases}3, & x=0 \text{ ise}\\ -x^2+3x+c, & 0<x<1 \text{ ise}\\ mx+n, & 1\le x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini gerçekleşmesi için c, m, n ne olmalıdır? c, m, n nin bu değerleri için teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm

Fonksiyonun $[0, 2]$ aralığında sürekli olması için

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow c=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow 5=m+n$$

olmalıdır. Şimdi de

$$f(x)=\begin{cases}3, & x=0 \text{ ise}\\ -x^2+3x+3, & 0<x<1 \text{ ise}\\ mx+5-m, & 1\le x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0, 2)$ aralığında türevli olması için m nin alabileceği değeri bulalım.

Bunun için fonksiyonun $x=1$ noktasında türevli olması yeterlidir.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+3x+3-5}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(2-x)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{mx+5-m-5}{x-1}=m$$

olduğundan $m=1$ olmalıdır.

Bu durumda

$$f(x)=\begin{cases}3, & x=0\\ -x^2+3x+3, & 0<x<1\\ x+4, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

olur.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{6-5}{2-1}=1$$

olacağından $f'(x)=1$ denkleminin kökü bulunmalıdır. Yukarıda $f'(1)=1$ olduğunu göstermiştir.

Şu halde $x_0=1$ dir.

11. $f(x)=x^{2/3}$ fonksiyonunun $[-1, 27]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin koşullarını sağlamadığını fakat $[-1, 27]$ aralığında

$$f'(x_0)=\frac{f(27)-f(-1)}{27-(-1)}$$

olacak şekilde bir x_0 noktasının varolduğunu gösteriniz.

Çözüm

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ olduğundan f fonksiyonu

$(-1, 27)$ aralığının bir noktası olan $x=0$ noktasında türevli değildir. Dolayısıyla O.D.T. nin hipotezi gerçeklenmez.

$$f'(x_0)=\frac{f(27)-f(-1)}{27-(-1)}=\frac{9-1}{28}=\frac{2}{7}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{7}\Rightarrow 3\sqrt[3]{x_0}=7\Rightarrow x_0=\left(\frac{7}{3}\right)^3$$

bulunur. $\left(\frac{7}{3}\right)^3=\frac{343}{27}\in(-1,27)$ dir.

Bu durum bize O.D.T. nin "yeter" koşulları verdiğini "gerek" koşulları içermediğini göstermektedir. Yani O.D.T. "gerek ve yeter" koşulları içermemektedir.

12. $[a, b]$ aralığında f' bir sabit fonksiyon olsun. f nin $[a, b]$ üzerinde $f(x)=mx+n$ biçiminde bir fonksiyon olacağını gösteriniz.

Çözüm

$x\in[a, b]$ olsun. $[a, x]$ aralığında O.D.T. uygulanırsa,

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

$f'(x)$ ifadesi her x için sabit olduğundan $f'(x)=m$ olsun. Buna göre

$$m=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f(x)=mx+f(a)-ma$$

bulunur. $f(a)-ma=n$ denirse

$f(x)=mx+n$ olur.

13. $f(x)=Ax^2+Bx+C$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında ortalama değerini $x_0=\frac{a+b}{2}$ noktasında aldığını gösteriniz.

Çözüm

$f'(x)=2Ax+B$ olduğundan

$$2Ax_0+B=\frac{Ab^2+Bb+C-(Aa^2+Ba+C)}{b-a}$$

$$=\frac{A(b^2-a^2)+B(b-a)}{b-a}=A(b+a)+B$$

olacağından

$$2Ax_0+B=A(b+a)+B\Rightarrow x_0=\frac{a+b}{2}\text{ olur.}$$

14. $f(0)=3$ ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)=0$ olsun.

Her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=3$ olacağını gösteriniz.

Çözüm

$x\geq 0$ olmak üzere $[0, x]$ aralığında f fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow 0=\frac{f(x)-3}{x}\Rightarrow$$

$f(x)=3$ bulunur. $x<0$ için de benzer biçimde ispat yapılabilir.

15. Rolle Teoreminden yararlanarak $\cot x = x$ denkleminin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

(YG : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $f(x) = x\cos x$ fonksiyonuna Rolle teoremini uygulayınız.)

Çözüm

$f(x) = x\cos x$ fonksiyonu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında sürekli ve $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığının her noktasında türevlidir.

$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ olduğundan, Rolle Teoremi gereğince $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

$f'(x) = \cos x - x\sin x$ olacağından

$\cos c - c \cdot \sin c = 0 \Rightarrow \cot c = c$ olur.

Bu da c sayısının $\cot x = x$ denkleminin bir kökü olduğunu gösterir.

16. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\forall x > 0$ için $x + \frac{1}{x} \geq 2$

b. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\tan x > x$

c. $x > -1$ ve $0 < \alpha < 1$ için $(1+x)^{\alpha} < 1 + \alpha x$

ç. $x > 0$ için $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

d. $x > 0$ için $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

Çözüm

a. I. yol : $x > 0$ için $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow$$

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ olur.

II. yol : $f : (0, +\infty) \to R$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ olsun

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ olur.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			↘	2	↗	

Bu tabloya göre f nin mutlak minimum değeri 2

Şu halde $x > 0$ için $f(x) \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

b. $f(x) = \tan x$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında O.D. uygulanırsa,

$$1 + \tan^2 x_0 = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \Rightarrow 1 + \tan^2 x_0 = \frac{\tan x}{x}$$

olacak şekilde bir x_0 noktası vardır.

$1 + \tan^2 x \geq 1$ olduğundan $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olur.

$\frac{\tan x}{x} > 1 \Rightarrow \tan x > x$ olur.

c. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında O.D. ni uygulayalım

$$\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha(1+x_0)^{\alpha - 1}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (0, x)$ vardır.

$0<a<1$ olduğundan $a-1<0$ ve dolayısıyla $(1+x_0)^{a-1}<(1+0)^{a-1}=1$ dir. Bu durumda

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}<\alpha \Rightarrow (1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$$

olur.

c. $f(x)=\arctan x$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında ortalama değer toremi uygulanırsa $(0,x)$ aralığında

$$\frac{\arctan x-\arctan 0}{x-0}=\frac{1}{1+x_0^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+x_0^2}$$

olacak biçimde en az bir x_0 noktası vardır.

$0<x_0<x$ olduğundan $1<1+x_0^2<1+x^2$ ve dolayısıyla $\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+x_0^2}<1$ dir.

Bu durumda

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan x}{x}<1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$$

eşitsizliği elde edilir.

d. $f(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında O.D.T. ni uygulayalım.

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}=\frac{1}{1+x_0},\quad 0<x_0<x$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+x_0}\ \text{olur.}$$

$1<1+x_0<1+x$ olacağından

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ \text{bulunur.}$$

17. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan eğrilerin konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz. Varsa dönüm noktalarını bulunuz.

a. $y=2x^2+1$ b. $y=x^3-3x^2+4$

c. $y=x^3-x$ d. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3}$

e. $y=\frac{x^4}{3}-2x^2+4$ f. $y=x^5-5x^4-240$

g. $y=x+\frac{1}{x}$ h. $y=\frac{x}{1+x^2}$

ı. $y=e^{-x^2}$ i. $y=x\sqrt{x-1}$

j. $y=\sin 2x$

Çözüm

a. $y'=4x \Rightarrow y''=4>0$ olduğundan eğri $(-\infty,+\infty)$ aralığında konvekstir.

b. $y'=3x^2-6x \Rightarrow y''=6x-6$

x		1	
y''	−	0	+
y	konkav	2	konveks

Eğri $(-\infty, 1]$ aralığında konkav, $[1,+\infty)$ aralığında konvekstir. $(1, 2)$ noktası dönüm noktasıdır.

c. $y=x^3-x \Rightarrow y'=3x^2-1 \Rightarrow y''=6x$ olur. $x>0$ için $y''>0$ ve $x<0$ için $y''<0$ olduğundan, eğri $(-\infty, 0]$ da konkav, $[0,+\infty)$ da konvekstir. $x=0$ dönüm noktasıdır.

d. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3} \Rightarrow y'=x^2-x-2 \Rightarrow$

$y''=2x-1 \Rightarrow y''=0$ için $x=\frac{1}{2}$ dir.

x		$1/2$	
y''	$-$		$+$
y	konkav		konveks

Eğri $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ konkav, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ da konvekstir.

$x=\frac{1}{2}$ noktası dönüm noktasıdır.

e. $y=\frac{x^4}{3}-2x^2+4 \Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^3-4x \Rightarrow$

$y''=4x^2-4$

x		-1		1	
y''	$+$		$-$		$+$
y	konveks		konkav		konveks

Eğri $(-\infty, -1]$ de ve $[1, +\infty)$ da konveks, $[-1, 1]$ de konkavdır. $x_1=-1$ ve $x_2=1$ noktaları birer dönüm noktasıdır.

f. $y=x^5-5x^4-240 \Rightarrow y'=5x^4-20x^3 \Rightarrow$

$y''=20x^3-60x^2=20x^2(x-3)$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
y''	$-$		$-$		$+$
y	konkav		konkav		konveks

Eğri $(-\infty, 3]$ de konkav $[3, +\infty)$ da konvekstir. $x=3$ dönüm noktasıdır.

g. $y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow y'=1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow y''=\frac{2}{x^3}$

$x<0$ için $y''<0$ olacağından eğri $(-\infty, 0)$ da konkavdır. $x>0$ için $y''>0$ olduğundan eğri $(0, +\infty)$ da konvekstir. Eğri $x=0$ da tanımlı olmadığından dönüm noktası yoktur.

h. $y=\frac{x}{1+x^2} \Rightarrow y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
y''	$-$		$+$		$-$		$+$
y	konkav		konveks		konkav		konveks

Eğri $(-\infty, -\sqrt{3}]$ ve $[0, \sqrt{3}]$ de konkav $[-\sqrt{3}, 0]$ ve $[\sqrt{3}, +\infty)$ da konvekstir.

$x_1=-\sqrt{3}, x_2=0, x_3=\sqrt{3}$ birer dönüm noktasıdır.

ı. $y=e^{-x^2} \Rightarrow y'=e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow$

$y''=e^{-x^2}(4x^2-2)$

x	$-\infty$	$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$	$+\infty$
y''	$+$		$-$		$+$
y	konveks		konkav		konveks

Eğri $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ ve $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ da konveks $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ de konkavdır.

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ birer dönüm noktasıdır.

i. $y=x\sqrt{x-1} \Rightarrow y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow y''=\frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}$

$y''=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

Verilen fonksiyon $x \geq 1$ için tanımlı olduğundan tablo aşağıdaki biçimde olacaktır.

x	1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$	
y		konkav	D.N	konveks	

$\left[1, \frac{4}{3}\right]$ de konkav, $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ da konvekstir.

$x=\frac{4}{3}$ dönüm noktasının apsisidir.

i. $y=\sin 2x \Rightarrow y'=2\cos 2x \Rightarrow y''=-4\sin 2x$

Fonksiyonun periyodu π olduğundan $[0, \pi]$ deki değişimini inceliyelim.

x	0		$\pi/2$		π
y''		$-$	ϕ	$+$	
y		konkav	D.N	konveks	

$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, eğri $\left[k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ aralıklarında konkav

$\left[k\pi+\frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right]$ aralıklarında konvekstir.

$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ noktaları birer dönüm noktasıdır.

18. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini sağladığını gösterip teoremde adı geçen x_0 noktalarını bulunuz.

a. $f(x)=x^3, \quad g(x)=x^2+4x, \quad [-1,1]$

b. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad g(x)=\frac{1}{x^2}, \quad [1,2]$

Çözüm

a. f ve g fonksiyonları $[-1, 1]$ aralığında sürekli ve bu aralığın iç kısmında türevlidir.

Ayrıca $x\in(-1, 1)$ için $g'(x)=2x+4\neq 0$ dır.

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \Rightarrow \frac{1+1}{5+3}=\frac{3x^2}{2x+4}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}=\frac{3x^2}{2x+4}\Rightarrow 12x^2-2x-4=0\Rightarrow$$

$$x_0=-\frac{1}{2},\ x_0=\frac{2}{3}$$

olur. İki farklı x_0 noktası vardır.

b. f ve g fonksiyonları $[1, 2]$ aralığında sürekli ve $(1, 2)$ aralığında türevlidir.

Ayrıca $\forall x\in(1, 2)$ için $g'(x)=-\frac{2}{x^3}\neq 0$ dır.

O halde genleştirilmiş O.D.T. nin hipotezi gerçeklenmiş olur.

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}\Rightarrow$$

$x_0=\frac{4}{3}$ bulunur.

19. $y=x^3+bx^2+cx+d$ eğrisinin $x=1$ de bir dönüm noktasına sahip olması için b ne olmalıdır? Burada b, c, d birer sabit sayıdır.

Çözüm

$y'=3x^2+2bx+c\Rightarrow y''=6x+2b$

olduğundan $x=1$ için $y''=0$ olmalıdır.

$0=6\cdot 1=2b \Rightarrow b=-3$ olmalıdır.

20. $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ eğrisinin bir dönüm noktasına sahip olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$y=ax^2+bx+c \Rightarrow y'=2ax+b \Rightarrow$

$y''=2a$ olur. $a>0$ ise $y''>0$, $a<0$ ise $y''<0$ dır.

Yani $a>0$ ise fonksiyon her yerde konveks, $a<0$ ise fonksiyon her yerde konkavdır. Dolayısıyla dönüm noktası yoktur.

21. $y = ax^3 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ eğrisinin bir tek dönüm noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow$$

$y'' = 6ax + 2b = 0$ denkleminin bir tek $x = -\dfrac{b}{3}$ kökü bulunduğundan dönüm noktası birtektir.

22. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $y = x^n$ eğrisinin en fazla bir dönüm noktasına sahip olabileceğini gösteriniz.

Çözüm

$n = 1$ ve $n = 2$ için dönüm noktasının olmadığı açıktır.

$n > 2$ olsun. $y' = nx^{n-1} \Rightarrow y'' = n(n-1)x^{n-2}$ ifadesinin işareti, $n-2$ sayısının dolayısıyla n sayısının tek veya çift oluşuna bağlıdır. n çift ise $y'' \geq 0$ olacağından fonksiyon her yerde konveks olup dönüm noktası yoktur. n tek ise $x < 0$ için $y'' < 0$, $x > 0$ için $y'' > 0$ olur. Bu takdirde $x = 0$ dönüm noktasıdır. Şu halde $y = x^n$ eğrisinin en fazla bir dönüm noktası olabilir.

23. f çift ve f nin grafiği $(0, +\infty)$ üzerinde konveks ise $(-\infty, 0)$ üzerinde de konveks midir?

Çözüm

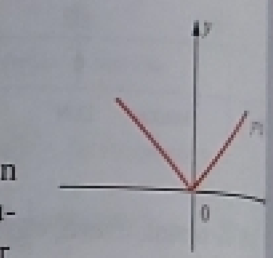
Çift fonksiyonun $(-\infty, 0)$ daki parçası, $(0, +\infty)$ daki parçasının simetriği olacağından o da konvekstir.

24. $y = |x|$ eğrisini çiziniz. Bu eğri konveks midir?

Çözüm

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \ ise \\ -x, & x < 0 \ ise \end{cases}$$

Eğrinin üst tarafında bulunan bölge bir konveks bölge olduğundan eğri bir konveks eğridir.



25. Ortalama değer teoreminden yararlanarak Teorem ispatlayınız.

Çözüm

Teorem 1 in ifadesi f, $[a, b]$ de sürekli ve (a, b) nin her noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) >$ f, $[a, b]$ de artan, $f'(x) < 0$ ise f, $[a, b]$ de azalandır.

x_1 ve x_2, (a, b) de herhangi iki nokta olsun. $x_1 < x_2$ olduğunu kabul edelim. f, $[x_1, x_2]$ aralığında türevlenebilir

Ortalama değer teoreminden

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

olacak biçimde en az bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

$f'(c) > 0$ ise $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$, artandır.

$f'(c) < 0$ ise $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f$, azalandır.

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7+5x^3-6}{x^2-1}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x}$

ç. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2+2x-3}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

g. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x}$

h. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$

ı. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

i. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$

j. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

k. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{15}-a^{15}}{x-a}$

l. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$

m. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

n. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{x}$

o. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4^x-3^x-1}{x-1}$

ö. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{x^3-3x+2}$

p. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh x-\sinh x}{x^2}$

r. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$

s. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

ş. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

t. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

u. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$

ü. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$

v. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

y. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$

z. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7+5x^3-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^6+15x^2}{2x}=\dfrac{22}{2}=11$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{3\cos 3x}=0$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x}=\dfrac{1}{1}=1$

ç. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+\tan^2 x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan^2 x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2(1+\tan^2 x)}{\cos x}=-2$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x+2}=\dfrac{1}{4}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{1}=2$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{\sin x}\cos x\right)=1+1\,.\,1=2$

g. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{2x+4}}}{1}=0$

h. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3$

h. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2}{-\sin x} = \dfrac{2}{-1} = -2$

ı. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

j. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

k. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{15}-a^{15}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{15x^{14}}{1} = 15a^{14}$

l. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} \quad \left(\dfrac{1}{x}=t\right)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

m. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

n. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-3^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x \ln 5 - 3^x \ln 3}{1}$

$= \ln 5 - \ln 3 = \ln \dfrac{5}{3}$

o. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4^x-3^x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3}{1}$

$= \ln 4 - \ln 3 = \ln \dfrac{4}{3}$

ö. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x^3-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{3x^2-3}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = -\dfrac{1}{6}$

p. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh x - \sinh x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\tanh^2 x - \cosh x}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\left[2\tanh x\,(1+\tan^2 hx) - \sinh x\right] = 0$

r. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{b^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x \ln a}{b^x \ln b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

s. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (a^x \ln a - b^x \ln b)$

$= \ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

ş. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{a \sin ax}{\cos ax}}{-\frac{b \sin bx}{\cos bx}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos bx}{\cos ax} \cdot \dfrac{a \sin ax}{b \sin bx} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{a.a}{b.b} = \dfrac{a^2}{b^2}$

t. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{\left(-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}} = +\infty$

u. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{4}x^{-3/4} - \frac{1}{5}x^{-4/5}}$

$= \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} = \dfrac{-1/6}{1/20} = -\dfrac{20}{6} = -\dfrac{10}{3}$

ü. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1 - \tan^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{-2\tan x\,(1+\tan^2 x)}$

$$= \frac{-\sqrt{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2\,.\,1\,.\,(1+1)} = \frac{1}{4}$$

v. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$$

y. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\tan 4x - 12\tan x}{3\sin 4x - 12\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3(1+\tan^2 4x)\,.\,4 - 12(1+\tan^2 x)}{12\cos 4x - 12\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 4x - \tan^2 x}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\tan 4x - \tan x)\,(\tan 4x + \tan x)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 4x\cos x - \sin x\cos 4x)(\sin 4x\cos x + \sin x\cos x)}{\cos^2 x.\cos^4 x.(\cos 4x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x\,.\,\sin 5x}{\cos^2 x.\cos^4 x\,.\,(-2\sin\frac{5x}{2}\,.\,\sin\frac{3x}{2})}$$

$$= -\frac{3.5}{2\,.\,\frac{5}{2}\,.\,\frac{3}{2}} = -2$$

z. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2+x}}$

$$= \lim_{x \to \infty} 2\frac{x^2+x}{x^2+1} = 2$$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \ln x}{e^x + x}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$

d. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+7x-1}{2x^2+5x+2}$

e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}}$

f. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{\sec x + 1}$

g. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x}$

h. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$

ı. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\ln(\ln x)}$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{m\,.\,\frac{\cos mx}{\sin mx}}{n\,.\,\frac{\cos nx}{\sin nx}}$

$$= \frac{m}{n} \lim_{x \to 0} \frac{\cos mx}{\cos nx}\,.\,\frac{\sin nx}{\sin mx} = \frac{m}{n}\,.\,\frac{1}{1}\,.\,\frac{n}{m} = 1$$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \ln x}{e^x + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \frac{1}{x}}{e^x + 1} = 1$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+e^x}{x+e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

d. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+7x-1}{2x^2+5x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x+7}{4x+5}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t}{e^{t^2}} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{2te^{t^2}} = 0$

f. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{\sec x + 1} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1/\cos^2 x}{\sin x / \cos^2 x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\sin x} = 1$

g. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x = +\infty$

h. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

ı. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\ln(\ln x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{(\ln x)'}{\ln x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x \ln x}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^3} e^x$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x \ln(x-1)$

ç. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 4x^2) \tan x$

d. $\lim\limits_{x \to 0} x^{1/4} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \left(5 \arctan \dfrac{\sqrt{x}}{5} - 4 \arctan \dfrac{\sqrt{x}}{4} \right)$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^3} e^x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{6} = \infty$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x \ln(x-1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x(\ln x)^2}} = -\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(\ln x)^2}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) \, . \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(\ln x)^2}{x-1}$

$= -1 \, . \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\frac{2}{x} \ln x}{1} = 0$

ç. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 4x^2) \tan x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x \, . \dfrac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x \, . \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

$= 1 \, . \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-8x}{-\sin x} = 4\pi$

d. $\lim\limits_{x \to 0} x^{1/4} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0 \quad \left(\sqrt{x} = \dfrac{1}{t} \right.$

dır. Zira $\sin t$ sınırlı ve $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0$ dır.

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(5\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{5}-4\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{4}\right)$ $(0\cdot\infty)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{5}-4\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{4}}{x^{3/2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\dfrac{\frac{1}{10\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{25}}-4\cdot\dfrac{\frac{1}{8\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{16}}}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{25}{2\sqrt{x}\,(25+x)}-\dfrac{16}{2\sqrt{x}\,(16+x)}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{25}{25+x}-\dfrac{16}{16+x}}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{3x\,(25+x)(16+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{(25+x)\,(16+x)}=\frac{3}{400}$$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

ç. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\,(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-x+1})\,(x+\sqrt{x^2-x+1})}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

ç. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)$ $(\infty-\infty)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-2+2\cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{\sin^3 x+2\sin x\cos x\,(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2}{\sin^2 x + 2\cos x - 2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x}{2\sin x\,\cos x - 2\sin x + 4\cos x\,\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{2\cos x - 2 + 4\cos x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ $(\infty - \infty)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\sin^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\sin^2 x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x + x\sin 2x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x\cos x + \sin 2x + 2x\cos 2x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos 2x + 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2+2+2} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

g. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\alpha x)^{\beta/x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-2^x)$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)$

e. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

f. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

h. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \sin x)$

h. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/\ln x}$

i. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ j. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

k. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{1/x} + \dfrac{1}{x} \right)^{x}$

Çözüm

a. $y = (1+\alpha x)^{\beta/x}$ diyelim. $\ln y = \dfrac{\beta}{x} \ln(1+\alpha x)$

olur.

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+\alpha x)^{\beta/x} = \lim_{x \to 0} \frac{\beta}{x} \ln(1+\alpha x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \beta . \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \beta . \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}{1} = \beta . \alpha$$

olacağından

$$\lim_{x \to 0} (1+\alpha x)^{\beta/x} = e^{\alpha . \beta}$$

bulunur.

b. $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1-2^x)^{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin x \ln(1-2^x)$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-2^x \ln 2}{1-2^x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{1-2^x} . \lim_{x \to 0^-} \frac{2^x \ln 2}{\cos x}$$

$$= \ln 2 . \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{1-2^x} = \ln 2 . \lim_{x \to 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-2^x \ln 2}$$

$$= \ln 2 . 0 = 0$$

olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0^-} (1-2^x)^{\sin x} = e^0 = 1$ dir.

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \sin x . \frac{\sin x}{x} \left(-\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= 0 . 1 . (-1) = 0$$

olduğundan

$= \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$ dir.

d. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(\ln x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln x} = \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln x)^{1/x} = +\infty$$

e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x^x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

dir.

f. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\sec x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos x}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

olacağından

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\sec x} = e^0 = 1$$

dir.

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(\ln x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln x}=0$$

olacağından

$\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}=e^0=1$ dir.

h. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+\sin x)^x = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+\sin x)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1+\cos x}{x+\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^2}{x+\sin x}(1+\cos x)$$

$$=-2\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x+\sin x} = -2\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{1+\cos x}=0$$

olur. Bu durumda

$\lim\limits_{x\to0^+}(x+\sin x)^x=e^0=1$ bulunur.

ı. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/(1+x^2)}{\pi/2-\arctan x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

olacağından

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ dir.

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\ln\sin x$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln\sin x}{\cos x}\cdot\sin x\right)=1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=0$$

olduğundan

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$ dir.

j. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\cdot\ln(\tan x)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos 2x}\cdot\sin 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1+\tan^2x}{\tan x}}{-2\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{-2\sin 2x\cdot\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{-2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

olacağından

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ dir.

k. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e^{1/x}+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to0}\frac{\ln(e^t+t)}{t} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t+1}{e^t+t}=2$$

olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)=e^2 \quad \text{dir.}$$

6. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$$

b. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

c. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Çözüm

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\frac{e-e}{0}=\frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır. Zira $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

olduğu Problem 5(a) dan elde edilir.

Önce $y=(1+x)^{1/x}$ in türevini bulalım.

$$\ln y=\frac{\ln(x+1)}{x}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\Rightarrow$$

$$y'=(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

olur. Buna göre

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

$$=e\,.\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x(1+x)+x^2}=e\,.\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}$$

$$=-e\,.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{6x+2}=-e\,.\frac{1}{2}=-\frac{e}{2}\quad\text{olur.}$$

b. $$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x+2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{3}$$

olacağından

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-1/3}\quad\text{bulunur.}$$

c. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2\arcsin x}$$

$$=1\,.\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{4x\arcsin x+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{4\arcsin x+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{4\arcsin x+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=1\,.\lim_{x\to 0}\frac{1}{4+\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{x}{\arcsin x}}=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}$$

olduğundan

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{1/6}$$

dır.

7. $a_k>0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^{\,x}+a_2^{\,x}+\ldots+a_n^{\,x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[\frac{a_1^x+a_2^x+\ \ldots\ +a_n^x}{n}\right]^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ \ldots\ +a_n^x}{n}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ (a_1^x+a_2^x+\ \ldots\ +a_n^x)-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\ \ldots\ +a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\ \ldots\ +a_n^x}$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(a_1.a_2.\ \ldots\ .a_n\right)=\ln\sqrt[n]{a_1.a_2.\ \ldots\ .a_n}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right]^{1/x}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

bulunur.

8. $a,b>0$ için

$$\lim_{x\to 0}\ (a^x+b^x-1)^{\frac{1}{x}}=ab$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\ln\ (a^x+b^x-1)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ (a^x+b^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x-1}=\ln a+\ln b=\ln(ab)$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\ (a^x+b^x-1)^{1/x}=e^{\ln(ab)}=ab\ \text{ dir.}$$

9. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ fonksiyonun sürekli olması için a ne olmalıdır?

Çözüm

f, $x=0$ da sürekli olursa $[-1,\,1]$ de sürekli olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=a \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}}{1}=a \Rightarrow 2=a$$

olmalıdır.

10. Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L' Hospital Kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}$

Çözüm

a. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{9}{2\sqrt{9x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}$$

$$=9\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$$

olur. Devam edildiği taktirde yine başa dönülür.

Dolayısıyla L' Hospital kuralı yararlı olamaz.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{9x+1}{x+1}}=\sqrt{9}=3$$

bulunur.

b. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x\ \sec x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}$$

olur ki bu sonuç vermez.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1$$

olur.

11. $$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1 \text{ fakat } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=2$$

olduğunu gösteriniz. Bu sonuç L' Hospital Kuralı ile çelişir mi?

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}=1$$

Bu durum L' Hospital kuralı ile çelişmez. L' Hospital kuralının kullanılması için f ve g nin $x=0$ noktasında sürekli olması gerekir. Halbuki her iki fonksiyon da $x=0$ da sürekli değildir.

12. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\tan x)^2}{\sin\left(\dfrac{4x^2}{\pi}\right)}, & x\neq 0 \text{ ise}\\ m, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini sağlaması için m ne olmalıdır?

Çözüm

f nin $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ aralığında sürekli olması için

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=m$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2}{\sin\frac{4x^2}{\pi}}=\lim_{x\to 0}2\frac{\tan x\,(1+\tan^2 x)}{\cos\frac{4x^2}{\pi}\cdot\frac{8x}{\pi}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{\cos\frac{4x^2}{\pi}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{8}.2\frac{\tan x}{x}\right)=1.\frac{\pi}{8}.2=\frac{\pi}{4}$$

olacağından $m=\frac{\pi}{4}$ olmalıdır.

13. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerleri bulunuz.

a. $\sqrt{7}$ b. $\sqrt[3]{28}$ c. $\sqrt[4]{17}$

Çözüm

a. $f(x+\Delta x)\cong f(x)+\Delta x\,.\,f'(x)$

ifadesinde

$f(x)=\sqrt{x},\ x=(2{,}7)^2=7{,}29,\ \Delta x=-0{,}29$

alınırsa

$$f(7)\cong f(7{,}29)-0{,}29\,.\,f'(7{,}29)\Rightarrow$$

$$\sqrt{7}\cong\sqrt{7{,}29}-0{,}29\,.\,\frac{1}{2\sqrt{7{,}29}}$$

$$\cong 2{,}7-\frac{0{,}29}{2\,.\,(2{,}7)}\cong 2{,}7-0{,}05=2{,}65$$

b. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x=27,\ \Delta x=1$

alınırsa

$$f(28)\cong f(27)+\Delta x\,.\,f'(27)\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{28}\cong\sqrt[3]{27}+1\,.\,\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}$$

$$\cong 3+\frac{1}{3.9}=3+\frac{1}{27}\cong 3+0{,}03=3{,}03$$

c. $f(x)=\sqrt[4]{x},\ x=16,\ \Delta x=1,\ f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

değerleri

$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+\Delta x\,.\,f'(x)$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\sqrt[4]{17}\cong\sqrt[4]{16}+1\,.\,\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}$$

$$=2+\frac{1}{4.8}\cong 2+0{,}03=2{,}03$$

bulunur.

1. Aşağıdaki denklemleri verilen eğrilerin asimtotlarını bulunuz.

a. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

b. $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

c. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

ç. $y=2^{-1/x^2}$

d. $y=\dfrac{x}{1+|x|}$

e. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

f. $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

g. $y=\sqrt{x^2-4x}$

Çözüm

a. $x=1$ doğrusu düşey asimtottur.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$

olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimtottur.

b. $x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x=2$ bulunur.

Bu değerler için $x^2-3x\neq 0$ olacağından $x=-2$ ve $x=2$ doğruları düşey asimtottur.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-4}=1$$

olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimtottur.

c. $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$ olur.

$x=1$ payın da da bir kökü olduğundan sadece $x=3$ doğrusu düşey asimtottur.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay asimtottur.}$$

ç. $$\lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2}=0$$

olduğundan $x=0$ doğrusu düşey asimtottur.

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2^{-1/x^2}=2^0=1 \Rightarrow y=1 \text{ doğrusu}$$

yatay asimtottur.

d. Düşey asimtot yoktur.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}=-1 \text{ ve}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=+1$$

olduğundan $y=1$ ve $y=-1$ doğruları birer yatay asimtottur.

e. $x=1$ düşey asimtottur.

$$\frac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$$

olduğundan $y=x^2+x+1$ eğri asimtottur.

f. Düşey asimtot yoktur.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=1$$

olduğundan $y=1$ yatay asimtottur.

g. $y=\sqrt{x^2-4x}=\sqrt{(x-2)^2+4}$

olduğundan

$$y=|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$$

eğik asimtotlardır.

2. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - mx - 4}$ eğrisinin düşey asimtotları arasındaki uzaklığın 4 birim olması için m ne olmalıdır?

Çözüm

$x^2 - mx - 4 = 0$ denkleminin kökleri farkı 4 olmalıdır.

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4 \Rightarrow \frac{\Delta}{a^2} = 16 \Rightarrow$$

$$m^2 - 4.1.(-4) = 16 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

olmalıdır.

3. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 2mx + 4}$ eğrisinin düşey asimtota sahip olmaması için m ne olmalıdır?

Çözüm

Düşey asimtotun olmaması için $x^2 + 2mx + 4 = 0$ denkleminin kökleri bulunmamalıdır. Bunun için de $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = 4m^2 - 4.1.4 < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$$

olmalıdır.

4. $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$ eğrisinin asimtotları hangi noktada kesişir?

Çözüm

$1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ doğrusu düşey asimottur.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - e^x} = 0 \text{ ve } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - e^x} = 1$$

olacağından $y = 0$ ve $y = 1$ yatay asimtotlardır.

Düşey asimtotla yatay asimtotlar $O(0, 0)$ ve $A(0, 1)$ noktalarında kesişir.

5. $y = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x + 4}$ eğrisi koordinat ekseklerini ka noktalarda keser?

Çözüm

$x = 0$ için $y = -\dfrac{5}{4}$ olduğundan eğri Oy- eksenini $\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$ noktasında keser.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 5$ bulunur.

Eğri Ox- eksenini $(-1, 0)$ ve $(5, 0)$ noktalarında kese

6. $y = \dfrac{x^2 - bx + 4}{x^2 + 4}$ eğrisinin Ox- eksenini kesmemes için b ne olmalıdır?

Çözüm

$x^2 - bx + 4 = 0$ denkleminin kökü olmamalıdır.

Bunun için de $\Delta = b^2 - 4.1.4 < 0 \Rightarrow b^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow -4 < b < 4$ olmalıdır.

7. Aşağıdaki denklemleri verilen eğrilerin asimtotların bulunuz.

a. $y = x^2(x-1)$

b. $y = x^6 - x^2$

c. $y = 3x - x^3$

ç. $y = \dfrac{x}{x-1}$

d. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

e. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

f. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

g. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$

h. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ ı. $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$

i. $y=\dfrac{2}{x-3}$ j. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

k. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ l. $y=\dfrac{3}{(x-1)^2}$

m. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ n. $y=x-\dfrac{1}{x}$

o. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ ö. $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$

p. $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ r. $y=\dfrac{x}{1+|x|}$

s. $y=\dfrac{2x^2}{1+|x|}$ ş. $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

t. $y=\sqrt{2x-4}$ u. $y=\sqrt{x^2-6x}$

ü. $y=x\ln x$ v. $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)$

y. $y=x\sqrt{1-x^2}$ z. $y=e^{-x^2}$

Çözüm

a. $y=x^2(x-1)$

1. $T=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
2. Asimtot yok
3. $x=0$ için $y=0$ ve $y=0$ için $x_1=x_2=0$ ve $x_3=1$
4. $y'=3x^2-2x=x(3x-2)$

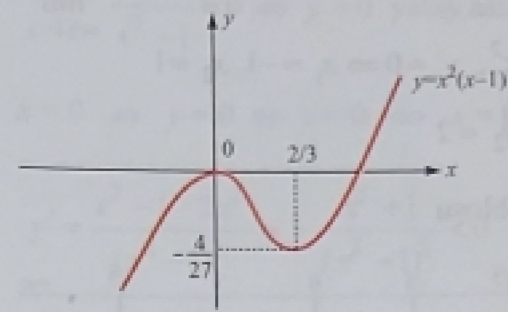
$y'=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=\dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$y_1=0, \; y_2=-\dfrac{4}{27}$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		$2/3$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-4/27$	↗	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



b. $y=x^6-x^2=x^2(x^4-1)$

1. $T=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
2. Asimtot yok
3. $x=0$ için $y=0$ ve $y=0$ için $x_1=x_2=0$ ve $x_3=-1, \; x_4=1$ olur.
4. $y'=2x(x^4-1)+4x^5=2x(3x^4-1)$

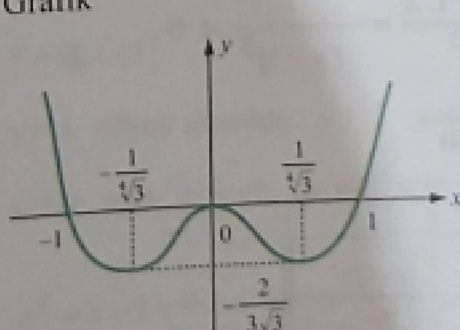
$y'=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}, x_3=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$\Rightarrow y_1=0, \; y_2=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \; y_3=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1		$+\infty$
y'		−		−	0	+	0	−	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



c. $y = 3x - x^3$

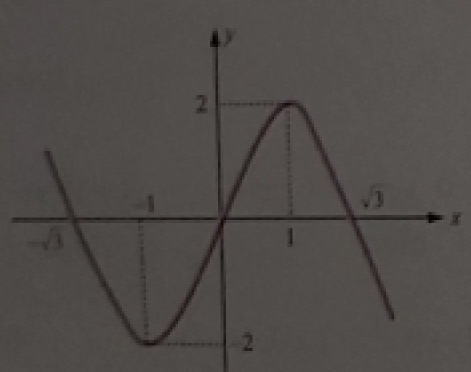
1. $T = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
2. Asimtot yok
3. $x = 0$ için $y = 0$ ve $y = 0$ için

   $x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}$
4. $y' = 3 - 3x^2,\ y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

   $y_1 = -2,\ y_2 = 2$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

6. Grafik

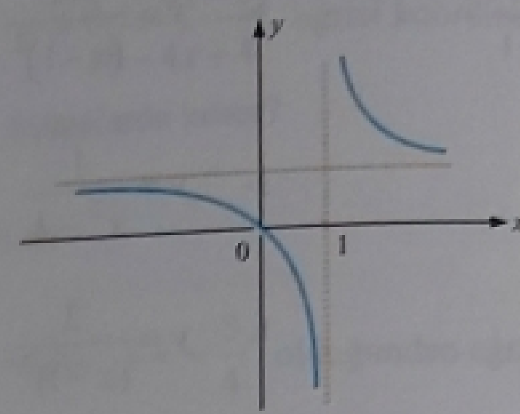


ç. $y = \dfrac{x}{x-1}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $x = 1$ düşey asimtot, $y = 1$ yatay asimtot
3. $x = 0$ için $y = 0$ ve $y = 0$ için $x = 0$ olur.
4. $y' = \dfrac{1.(x-1) - 1.x}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. Grafik



d. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2. $y = x$ eğik asimtot $x = -1$ ve

   $x = 1$ düşey asimtottur.

   $$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} x^3 - x & x \\ \hline x & \end{array}$$
3. $x = 0$ için $y = 0$ ve

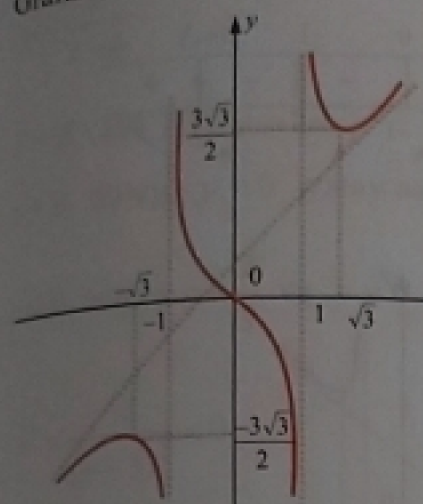
   $y = 0$ için $x = 0$ dır.
4. $y' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x.x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

   $y' = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\quad x_3 = -\sqrt{3},\quad x_4 = \sqrt{3} \Rightarrow$

   $y_1 = y_2 = 0,\quad y_3 = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2},\quad y_4 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Grafik



e. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
2. $x=-1$ ve $x=1$ doğruları düşey asimtot,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1 \Rightarrow y=1 \quad \text{yatay asimtottur.}$$

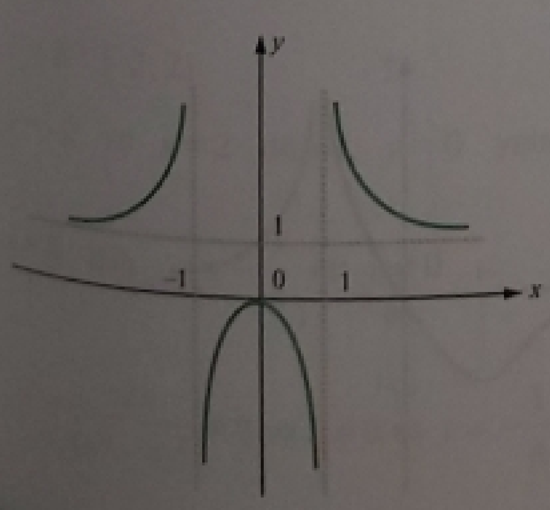
3. $x=0 \Rightarrow y=0$ ve $y=0 \Rightarrow x=0$ dır.
4. $y'=\dfrac{2x(x^2-1)-2x.x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$y'=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

6. Grafik



f. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

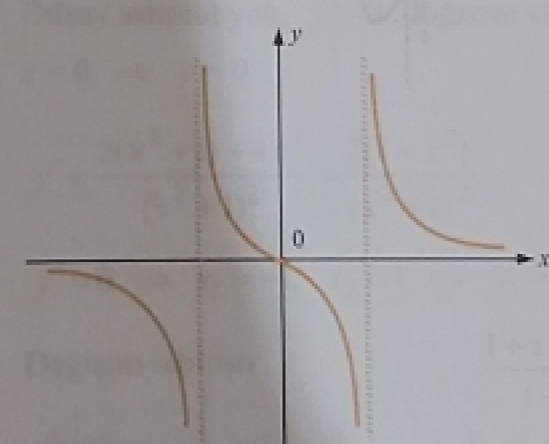
1. $T=\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
2. $x=-1$ ve $x=1$ düşey asimtot

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0 \Rightarrow y=0 \quad \text{yatay asimtottur.}$$

3. $x=0 \Rightarrow y=0$ ve $y=0 \Rightarrow x=0$ dır.
4. $y'=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}<0$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	‖	−		−	‖	−	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6. Grafik



g. $y=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. $x=1$ düşey asimtot, $y=1$ yatay asimtottur.
3. $x=0$ için $y=-1$, $y=0$ için

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

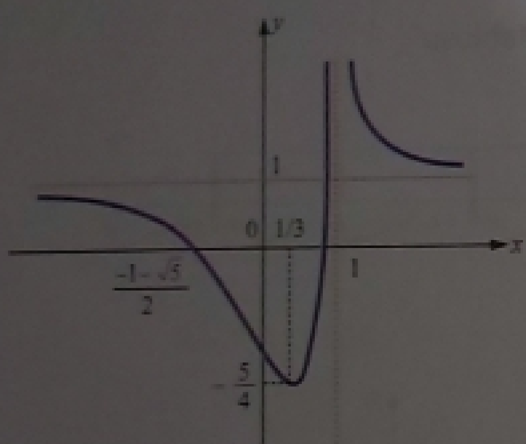
4. $y' = \dfrac{(2x+1)(x^2-2x+1)-(2x-2)(x^2+x-1)}{(x-1)^4}$

$= -\dfrac{3x-1}{(x-1)^3}$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$1/3$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

6. Grafik



h. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $x = 1$ düşey asimtot

   $y = x+2$ eğik asimtot
3. $x = 0$ için $y = -1$ ve

   $y = 0$ için $x^2+x+1 = 0$ olur. Bu denklemin kökü olmadığı için eğri Ox- eksenini kesmez.

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+1 & x-1 \\ x^2-x & \overline{x+2} \\ \hline 2x+1 & \\ 2x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

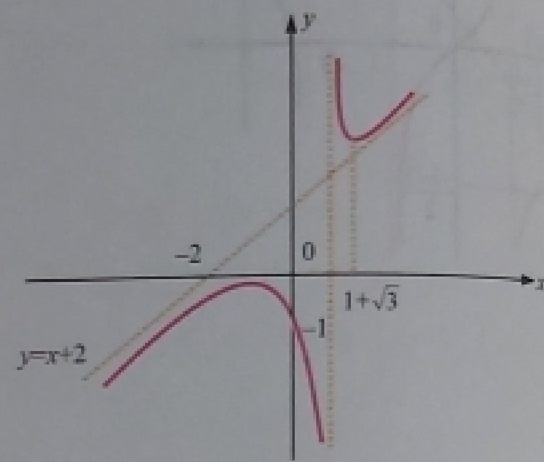
4. $y' = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1-\sqrt{3},$

   $x_2 = 1+\sqrt{3} \Rightarrow y_1 = 3-2\sqrt{3},\ y_2 = 3+2\sqrt{3}$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Grafik



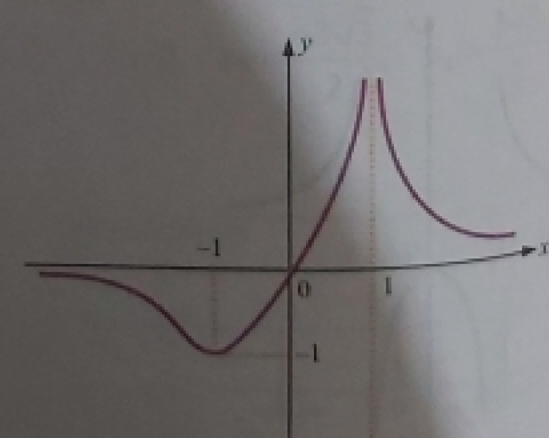
ı. $y = \dfrac{4x}{(x-1)^2}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $x = 1$ düşey asimtot, $y = 0$ yatay asimtottur
3. $x = 0$ için $y = 0$, $y = 0$ için $x = 0$ dır.
4. $y' = \dfrac{4(x-1)^2 - 2(x-1)4x}{(x-1)^4} = \dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$

   $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

6. Grafik

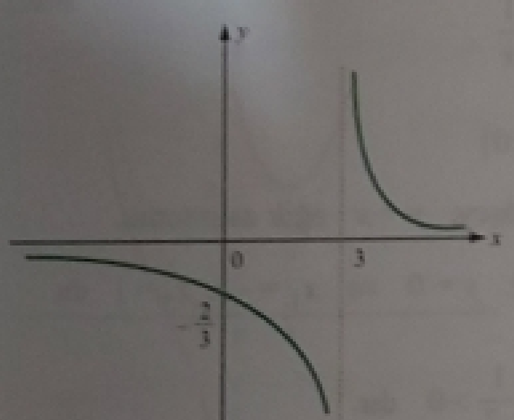


i. $y=\dfrac{2}{x-3}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{3\}$
2. $x=3$ düşey, $y=0$ yatay asimtottur.
3. $x=0$ için $y=-\dfrac{2}{3}$ ve $y\neq 0$ dır.
4. $y'=\dfrac{-2}{(x-3)^2}<0$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$	‖	$-$	
y	0	↘	$-\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6. Grafik

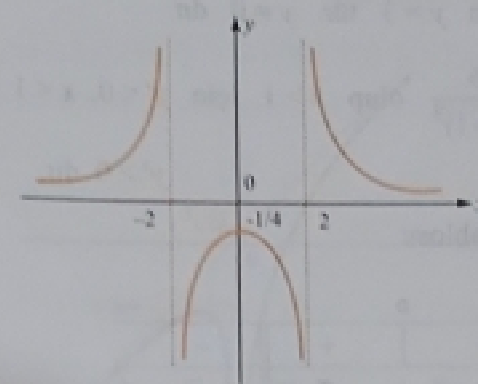


j. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$
2. $x=-2$ ve $x=2$ düşey, $y=0$ yatay asimtottur.
3. $x=0$ için $y=-\dfrac{1}{4}$ ve $y\neq 0$
4. $y'=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{4}$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6. Grafik



k. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

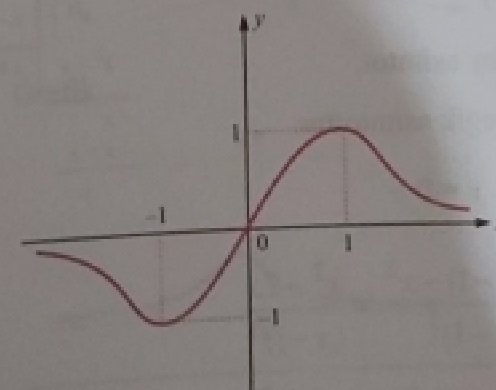
1. $T=\mathbb{R}$
2. Düşey asimtot yok, $y=0$ doğrusu yatay asimtottur.
3. $x=0 \Rightarrow y=0$
4. $y'=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1 \Rightarrow y_1=-1,\ y_2=1$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

6. Grafik



l. $y=\dfrac{3}{(x-1)^2}$

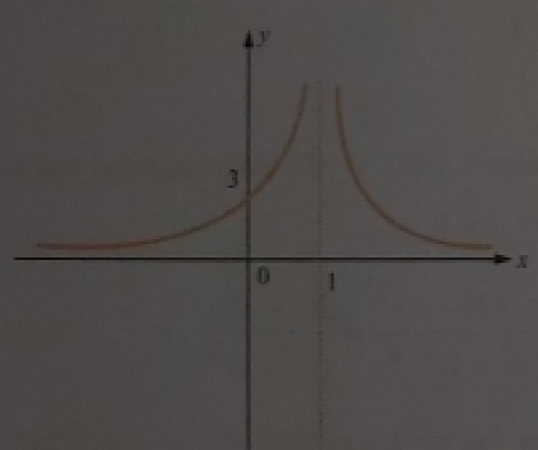
1. $T=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. $x=1$ düşey, $y=0$ yatay asimtottur.
3. $x=0$ için $y=3$ tür. $y\neq 0$ dır.
4. $y'=-\dfrac{6}{(x-1)^3}$ olup $x>1$ için $y'<0$, $x<1$ için

$y'>0$ dır.

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	‖	$-$	
y	0	↗	3	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

6. Grafik



m. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. $x=1$ düşey asimtot,

$y=x+1$ eğik asimtottur.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & \overline{x+1} \\ x & \\ \underline{x-1} & \\ 1 & \end{array}$$

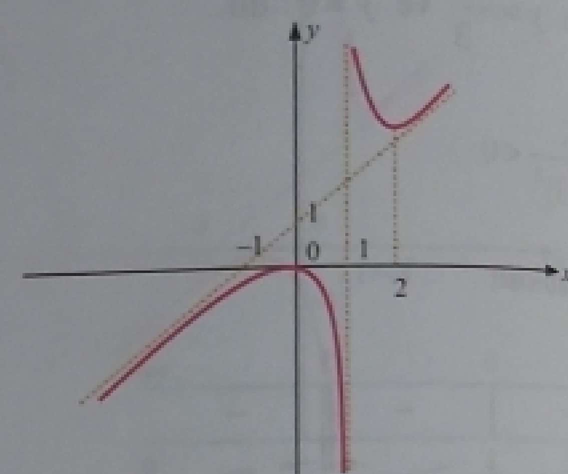
3. $x=0 \Rightarrow y=0$
4. $y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y'=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=4$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

6. Grafik

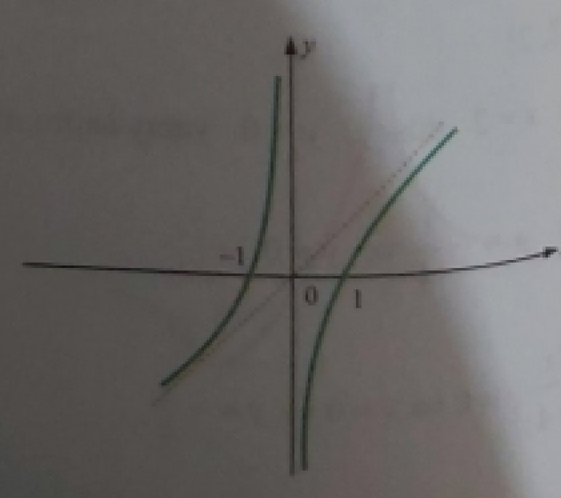


n. $y=x-\dfrac{1}{x}$

1. $T=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
2. $x=0$ düşey, $y=x$ eğik asimtottur.
3. $x\neq 0$ dır. $y=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$ dir.
4. $y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0$ dır.
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



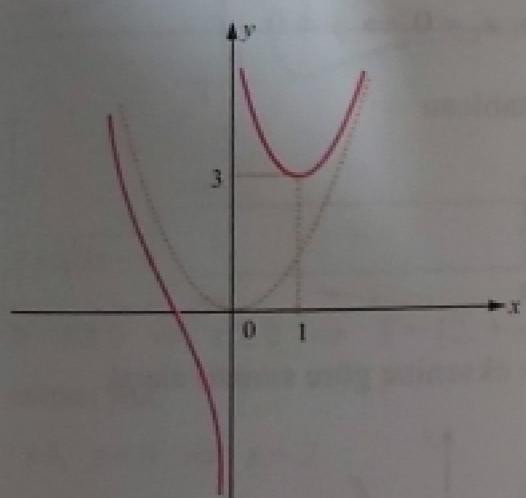
n. $y = x^2 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^3+2}{x}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $x = 0$ düşey, $y = x^2$ eğri asimtottur.
3. $x \neq 0,\ y = 0 \Rightarrow x^3 = -2 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$
4. $y' = \dfrac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \dfrac{2\,(x^3-1)}{x^2}$

   $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

6. Grafik



o. $y = \dfrac{x^3-8}{x^2}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $x = 0$ düşey,
3. $y = x$ eğik asimtottur.

$$\begin{array}{r|l} x^3-8 & x^2 \\ \cline{2-2} x^3 & x \\ \hline -8 & \end{array}$$

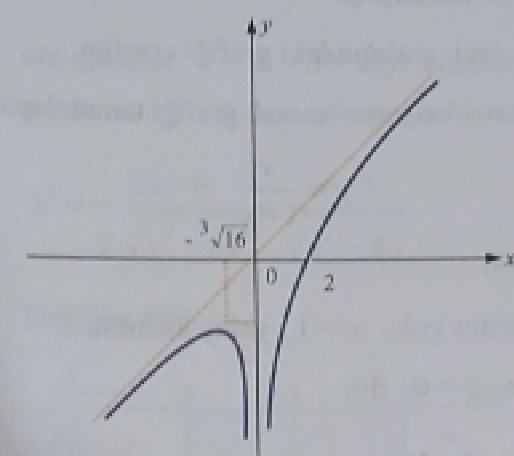
4. $y' = \dfrac{3x^4 - 2x^4 + 16x}{x^4} = \dfrac{x\,(x^3+16)}{x^4}$

   $= \dfrac{x^3+16}{x^3}$

   $y' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{16}$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{16}$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$4\sqrt[3]{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



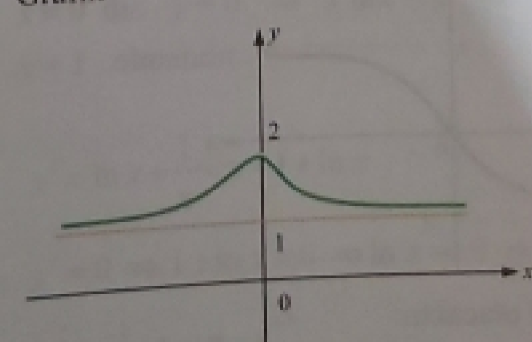
p. $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{-\infty, \infty\}$
2. Düşey asimtot yok, $y = 1$ yatay asimtot.
3. $x = 0$ için $y = 2$ dir. $y \neq 0$ dır.
4. $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

   $y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	2	↘	1

6. Grafik



r. $y = \dfrac{x}{1+|x|}$

$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ tek fonksiyon olduğundan grafik orijine göre simetriktir.

Önce $[0, +\infty)$ aralığındaki grafiği çizelim.

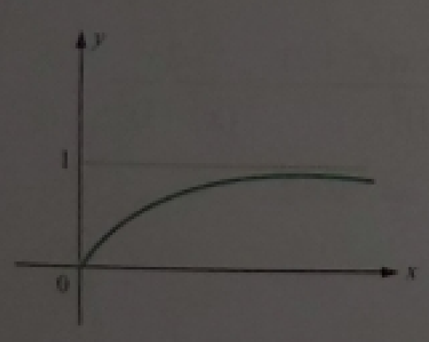
Sonra simetriden yararlanarak grafiği tamamlayalım.

$$y = \frac{x}{1+x}$$

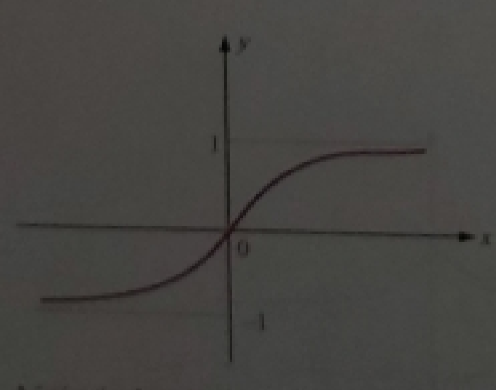
1. $T = [0, +\infty)$
2. Düşey asimtot yok, $y = 1$ yatay asimtot.
3. $x = 0$ için $y = 0$ dır.
4. $y' = \dfrac{1.(1+x) - 1.x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$
5. Değişim tablosu

x	0		$+\infty$
y'		+	
y	0	↗	1

6. Grafik



Buna göre $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ in grafiği



biçiminde olacaktır.

s. $y = \dfrac{2x^2}{1+|x|}$

$f(x) = \dfrac{2x^2}{1+|x|}$ fonksiyonu çiftir. Bu nedenle $[0, +\infty)$ aralığında grafiği çizip bulunan eğrinin Oy- eksenine göre simetriğini almak yetecektir. $x \geq 0$ için

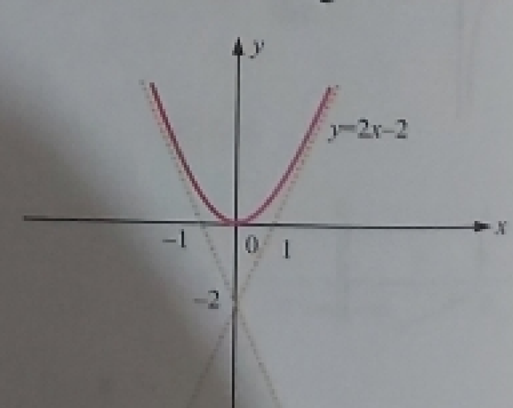
$y = \dfrac{2x^2}{1+x}$ dir.

1. $T = [0, +\infty)$
2. Düşey asimtot yok, $y = 2x - 2$ eğik asimtot
3. $x = 0$ için $y = 0$ dır.
4. $y' = \dfrac{4x(1+x) - 2x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x}{(1+x)^2} = \dfrac{2x(x+2)}{(1+x)^2} \geq 0$

   $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y = 0$
5. Değişim tablosu

x	0		$+\infty$
y'	0	+	
y	0	↗	$+\infty$

6. Grafik, y- eksenine göre simetri alarak



şeklinde olacaktır.

ş. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$

1. $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $x = 0$ düşey, $y = 0$ yatay asimtottur.
3. $y = 0 \Rightarrow x = 1$

4. $y' = \dfrac{-x^2 - 2x(1-x)}{x^4} = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4}$

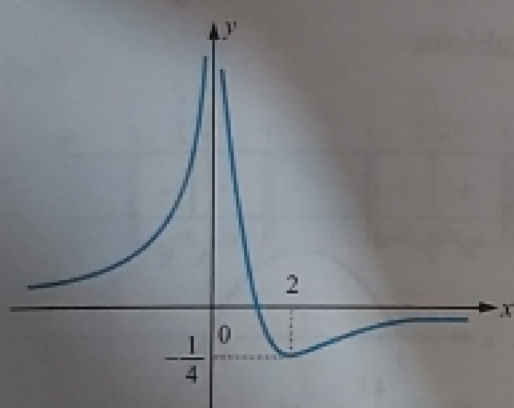
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ olur.

$x = 2$ için $y = -\dfrac{1}{4}$ tür.

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

6. Grafik

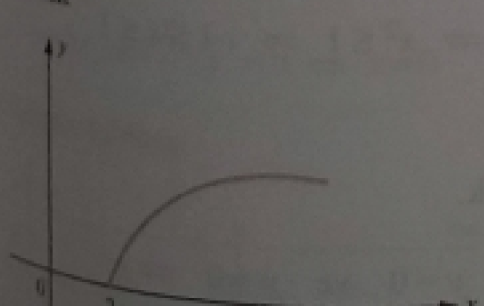


t. $y = \sqrt{2x-4}$

1. $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow T = [2, +\infty)$
2. Asimtot yok.
3. $x \neq 0,\ y = 0 \Rightarrow x = 2$
4. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}} > 0$
5. Değişim tablosu

x	2		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



u. $y = \sqrt{x^2 - 6x}$

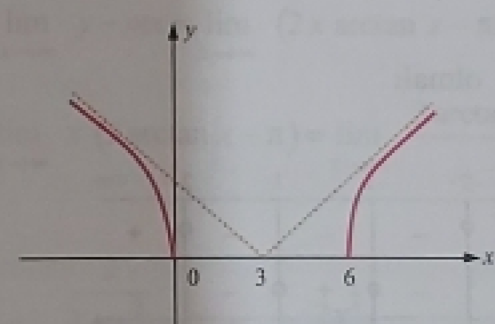
x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							

1. $x^2 - 6x \geq 0$
   $T = (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$
2. $y = \sqrt{(x-3)^2 - 9} = |x-3|\ \sqrt{1 - 9/(x-3)^2}$

   olduğundan $y = |x-3|$ eğri asimtottur.
3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ve $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 6$
4. $y' = \dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}} = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x}}$
5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		3		6		$+\infty$
y'		$-$						$+$	
y	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

6. Grafik



ü. $y = x \ln x$

1. $T = (0, +\infty)$

   $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
2. Asimtot yok.
3. $x \neq 0$ dır. $y = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow$
   $x = 1$ olmalıdır.
4. $y' = \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot x = 1 + \ln x$

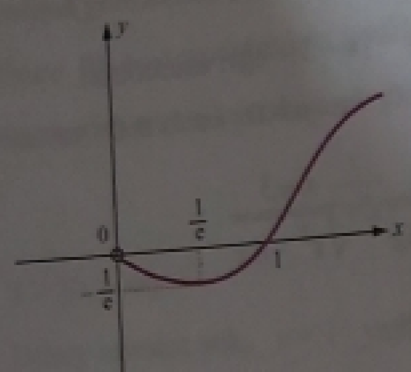
   $y' = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow$

   $x = e^{-1} \Rightarrow y = -e^{-1}$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$	0		e^{-1}		1		$+\infty$
y'		‖	$-$	0	$+$		$+$	
y		‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	0	↗	$+\infty$

6. Grafik



v. $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)$

1. $\dfrac{x^2-4}{1-x^2}>0$ olmalı

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$1-x^2$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{x^2-1}{1-x^2}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

$T=(-2,-1)\cup(1,2)$ dir.

2. $\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} y=\lim\limits_{x\to2^-}\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)=-\infty$

olduğundan $x=-2$, $x=1$, $x=1$ ve $x=2$ doğruları düşey asimtotlardır. Yatay asimtot yoktur. Zira tanım kümesi sınırlıdır.

3. $x\neq0$ dır. $y=0\Rightarrow\dfrac{x^2-4}{1-x^2}=1\Rightarrow x=\pm$

4. $y'=\dfrac{\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)'}{\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)}=\dfrac{2x(1-x^2)+2x(x^2-4)}{(1-x^2)(x^2-4)}$

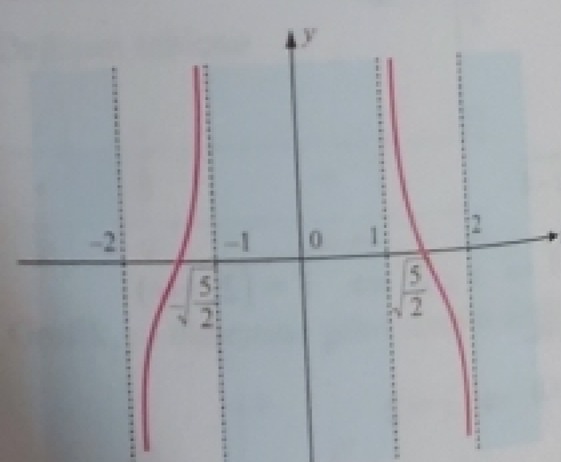
$$=\frac{-6x}{(1-x^2)(x^2-4)}$$

$y'=0\Rightarrow x=0\notin T$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		2	$+\infty$
y'		‖	$+$		$+$	‖		‖	$-$		$-$	‖	
y		‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖	

6. Grafik



y. $y=x\sqrt{1-x^2}$

1. $1-x^2\geq0\Rightarrow x^2\leq1\Rightarrow -1\leq x\leq1$

$T=[-1,1]$

2. Asimtot yok.

3. $x=0\Rightarrow y=0$ ve $y=0\Rightarrow$

$x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1$ dir.

4. $y' = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

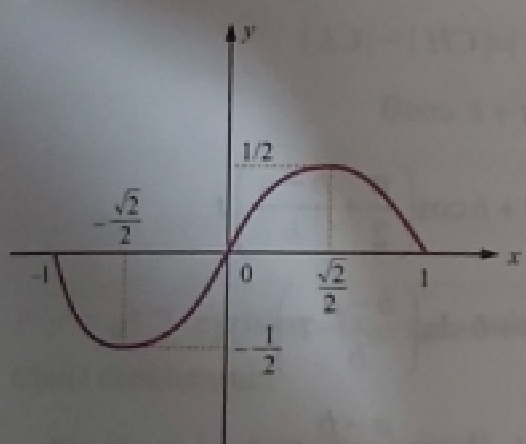
$$y' = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}$$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$	-1		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		1	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
y		0	↘	$-1/2$	↗	0	↗	$1/2$	↘	0	

6. Grafik



7. $y = e^{-x^2}$

1. $T = (-\infty, +\infty)$

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimtottur. Düşey asimtot yok.

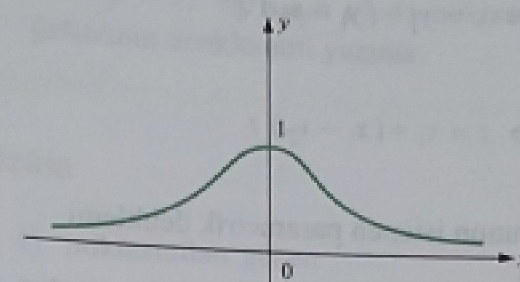
3. $x = 0 \Rightarrow y = 1$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $y > 0$

4. $y' = -2x \,.\, e^{-x^2}$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

6. Grafik



8. $y = 2x\arctan x$ eğrisinin eğik asimtotunun denklemlerini bulunuz.

Çözüm

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x \arctan x}{x} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$n = \lim_{x\to\infty} y - mx = \lim_{x\to\infty} (2x\arctan x - \pi x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\,(2\arctan x - \pi) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\arctan x - \pi}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = -2$$

olacağından eğik asimtotun denklemi $y = \pi x - 2$ dir.

9. (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemini yazınız.

Çözüm

Doğrunun denklemi

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \text{ dir.}$$

Bu orana t denirse

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=t \Rightarrow y=y_1+(y_1-y_2)\,t$$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=t \Rightarrow x=x_1+(x_1-x_2)\,t$$

bulunur. Doğrunun istenen parametrik denklemi

$$\begin{cases} x=x_1+(x_1-x_2)\,t \\ y=y_1+(y_1-y_2)\,t \end{cases}$$

olur.

10. a yarıçaplı bir merkezli çembere içten teğet ve yarıçapı $b(a>b)$ olan bir çember veriliyor. Küçük çember büyük çembere teğet olacak şekilde hareket ettirildiğinde, küçük çember üzerindeki sabit bir nokta bir eğri çizer. **Hipoksikloid** denilen bu eğrinin denkleminin

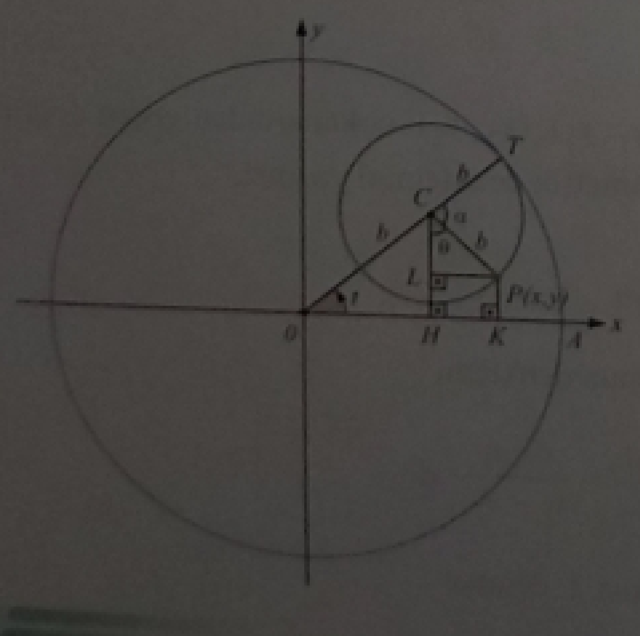
$$x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}\,t$$

$$y=(a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}\,t$$

olacağını gösteriniz. $a=4b$ olması durumunu inceleyeniz.

Çözüm

Küçük çemberin sabit P noktası $A(a,0)$ noktasından hareket etsin.



$\widehat{AT}=\widehat{PT}$ olduğundan $\alpha b=at \Rightarrow$

$\alpha=\dfrac{at}{b}$ olur. Bu durumda

$$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}+t \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+t-\frac{at}{b} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+\frac{b-a}{b}t$$

bulunur.

$$x=|OK|=|OH|+|HK|=|OH|+|LP|$$
$$=(a-b)\cos t+b\sin\theta$$
$$=(a-b)\cos t+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{b-a}{b}t\right)$$
$$=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t \quad \text{olur.}$$

$$y=|PK|=|LH|=|CH|-|CL|$$
$$=(a-b)\sin t+b\cos\theta$$
$$=(a-b)\sin t+b\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{b-a}{b}\right)t$$
$$=(a-b)\sin t+b\sin\left(\frac{b-a}{b}t\right)$$
$$=(a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}t$$

olur. $a=4b$ ise

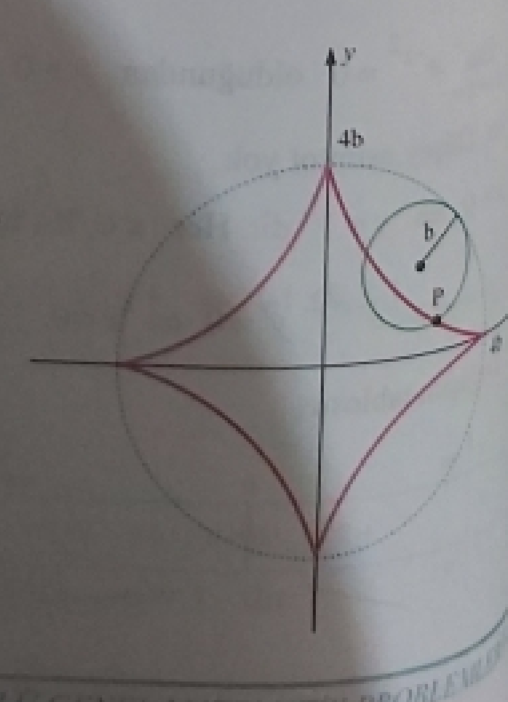
$$x=3b\cos t+b\cos 3t=b\,(3\cos t+\cos 3t)$$
$$=b(3\cos t+4\cos^3 t-3\cos t)=4b\cos^3 t$$
$$y=3b\sin t-b\sin 3t=b(3\sin t-3\sin t+4\cos^3 t)$$
$$=4b\sin^3 t$$

bulunur.

Bilindiği gibi

$$\begin{cases} x=4b\cos^3 t \\ y=4b\sin^3 t \end{cases}$$

astroid eğrisinin parametrik denklemidir.

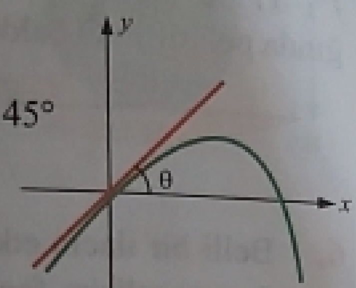


1. $y=x-x^2$ eğrisine $x=0$ absisli noktasından çizilen teğetin Ox- ekseniyle yapmış olduğu açının ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$y=x-x^2=x\,(1-x)$

$m=f'(0)=1-2x\big|_{x=0}=1 \Rightarrow \theta=45°$



2. $x^m y^n = a^{m+n}$ eğrisine (x_0, y_0) noktasından çizilen teğetin denkleminin

$$my_0\,(x-x_0)+n\,x_0\,(y-y_0)=0$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm

$x^m y^n = a^{m+n}$

$mx^{m-1}y^n + nx^m y^{n-1}\,.\,y'=0 \Rightarrow$

$x^{m-1}y^{n-1}(my+nx\,.\,y')=0 \Rightarrow$

$y'=-\dfrac{my}{nx} \Rightarrow$ eğim $=-\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}$

olur. Teğetin denklemi

$y-y_0=-\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}\,(x-x_0) \Rightarrow$

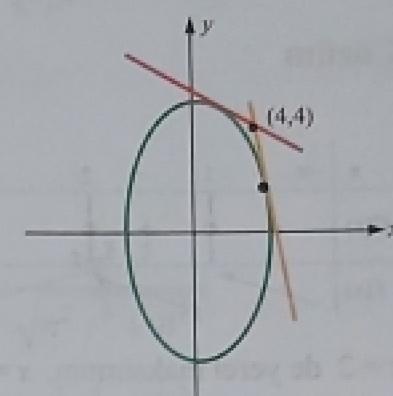
$my_0(x-x_0)+nx_0\,(y-y_0)=0$

olur.

3. $4x^2+y^2=72$ eğrisinin $(4,4)$ noktasında kesişen teğetlerinin denklemini yazınız.

Çözüm

$(4, 4)$ noktasından geçen bir teğetin elipse değme noktası (a, b) olsun. Bu durumda $4a^2+b^2=72$ (1) olur. Şimdi (a, b) noktasındaki teğetin denklemini bulalım.



$8x+2yy'=0 \Rightarrow 4x+yy'=0 \Rightarrow$

$4a+b.m=0 \Rightarrow m=-\dfrac{4a}{b}$

$y-b=m(x-a) \Rightarrow y-b=-\dfrac{4a}{b}\,(x-a)$

$4ax+by=b^2+4a^2 \Rightarrow 4ax+by=72$

olur. Bu doğru $(4, 4)$ noktasından geçeceğinden

$4a\,.\,4+b.4=72 \Rightarrow 4a+b=18$

olacaktır. $b=18-4a$ değeri (1) de yerine yazılırsa

$5a^2-36a+63=0$

bulunur. Bu denklemin kökleri

$a_1=3,\ a_2=\dfrac{21}{5}$ dir.

Bunlara karşılık gelen b değerleri

$b_1=6,\ b_2=\dfrac{6}{5}$

olacağından istenen teğet denklemleri

$4ax+by=72 \Rightarrow 12x+6y=72 \Rightarrow 2x+y=12$

$4\,.\,\dfrac{21}{5}\,x+\dfrac{6}{5}\,y=72 \Rightarrow 14x+y=60$ olur.

4. Bir f fonksiyonu için

$$f'(x) = (x-1)^2 (x-2)(x-4)$$

dir. f fonksiyonunun yerel ekstremum ve dönüm noktalarını bulunuz.

Çözüm

x	$-\infty$	1		2		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

$x = 2$ de yerel maksimum, $x = 4$ de yerel minimum vardır.

$$f''(x) = 2(x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)^2 + (x-4)$$
$$+ (x-1)^2 (x-2)$$

$$= (x-1)(2x^2 - 12x + 16 + x^2 - 5x + 4 + x^2 - 3x + 2)$$

$$= 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	1		$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	konkav		konveks		konkav		konveks

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

birer dönüm noktasıdır.

5. f çift ve f nin grafiği $(0, +\infty)$ üzerinde konveks ise $(-\infty, 0)$ üzerinde de konveks midir?

Çözüm

f çift olduğundan

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f''(-x) = f''(x)$$

olur. Şu halde f'', $(0, +\infty)$ aralığında pozitif ise $f''(-x)$ de $(0, +\infty)$ da dolayısıyla $f''(-x)$, $(-\infty, 0)$ aralığında pozitiftir. O halde f, $(-\infty, 0)$ da konvekstir.

6. Belli bir ilacın etkisinde tutulan bir bakteri topluluğunun gelişim fonksiyonu, t saat olarak zamanı, y de sayıyı göstermek üzere

$$y = -(10t)^2 + 10^3 t + 2.10^4$$

ile verilmektedir.

a. Başlangıçta topluluğun kaç üyesi vardır?

b. Kaçıncı saatten sonra toplulukta azalma başlar?

c. Kaç saat sonra topluluktaki tüm bakteriler ölür?

Çözüm

a. $t = 0$ için $y = 2 \cdot 10^4 = 20.000$ üye vardır.

b. $y' = -200t + 1000$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow y = 22500$

t	0		5		$+\infty$
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

5. saatten sonra azalma başlar.

c. $y = 0 \Rightarrow -100t^2 + 1000t + 200000 = 0$

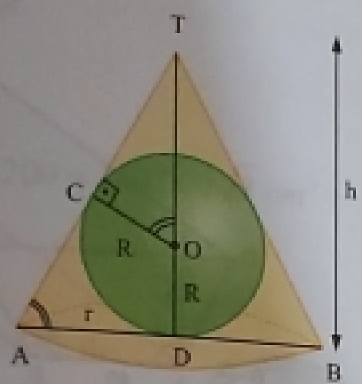
$t^2 - 10t - 200 = 0 \Rightarrow t_1 = 20,\ t_2 = -10$

bulunur. $t \geq 0$ olacağından $t = 20$ saat sonra tüm bakteriler ölür.

7. R yarıçaplı bir küreyi içinde bulunduran bir dik koninin hacmi en az kaç br^3 olur?

Çözüm

$\overset{\Delta}{TOC} \equiv \overset{\Delta}{TAD}$ dir.



$\frac{R}{r} = \frac{|TC|}{h}$ dir.

$|TC| = \sqrt{(h-R)^2 - R^2}$

$= \sqrt{h^2 - 2hR}$

olduğundan

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{h^2-2hR}}{h} \Rightarrow r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2-2hR}} \text{ dir.}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2R^2}{h^2-2hR} h = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h^2}{h-2R}$$

olur.

$$V' = \frac{\pi}{3}R^2 \frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}$$

$$= \frac{\pi}{3}R^2 . \frac{h^2-4Rh}{(h-2R)^2} = 0 \Rightarrow h = 4R$$

bulunur.

$h = 4R$ için

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 . \frac{16R^2}{2R} = \frac{8}{3}\pi R^3$$

olur.

8. Hacmi V olan bir koninin yanal yüzey alanı en az kaç birim karedir? [Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan koninin yanal yüzey alanı $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ dir.]

Çözüm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi r\sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}$$

olur.

$$S' = -\frac{1}{r^2}\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{3\pi^2 r^5}{\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}$$

$$= \frac{-\pi^2 r^6 - 9V^2 + 3\pi^2 r^6}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}} = \frac{2\pi^2 r^6 - 9V^2}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}$$

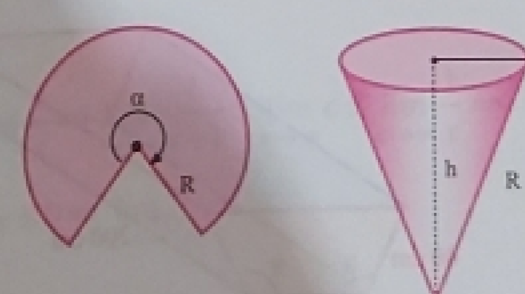
olur.

$$S' = 0 \Rightarrow \pi^2 r^6 = \frac{9}{2}V^2 \text{ dir.}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{9}{2}V^2 + 9V^2} = 3\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{2}}$$

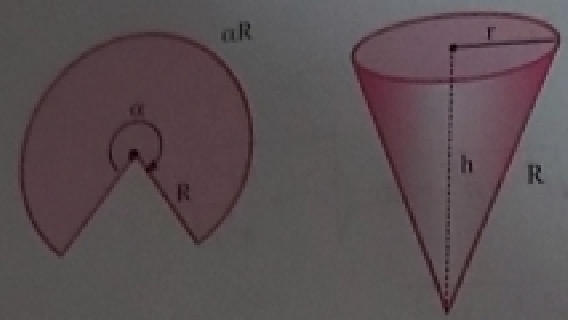
bulunur.

9.



Merkez açısının ölçüsü α, yarıçapı R olan bir daire diliminden, taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir koni yapılıyor. Bu koninin maksimum hacimli olması için α ne olmalıdır?

Çözüm



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}\Rightarrow$$

$$V'=\frac{\pi}{3}\left(2r\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$2r(R^2-r^2)-r^3=0\Rightarrow r(2R^2-3r^2)=0$$

$\Rightarrow r=0$ veya $r^2=\frac{2}{3}R^2$ olur.

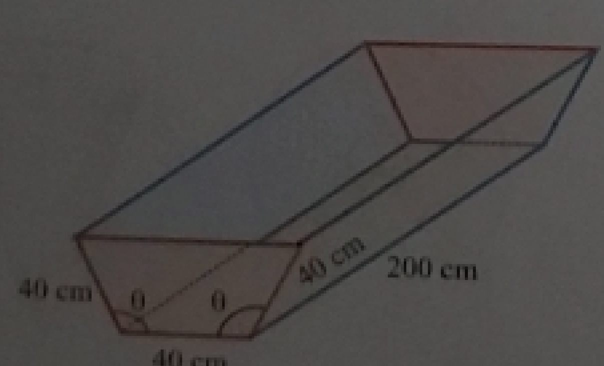
$r=0$ için $V=0$ olur. $r^2=\frac{2}{3}R^2$ için

$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}R^2\cdot\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3$ olur.

$$\alpha R=2\pi r\Rightarrow\alpha R=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\Rightarrow$$

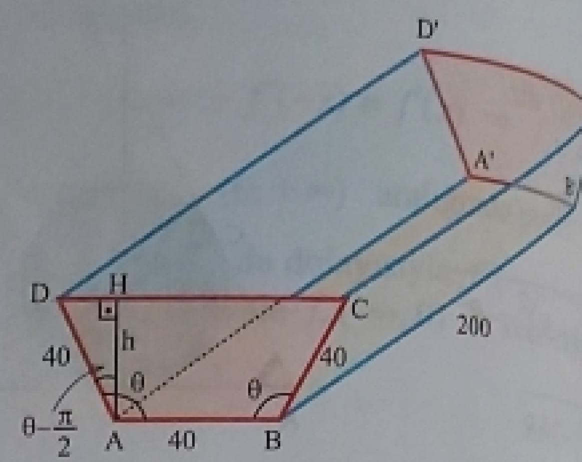
$\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\cong 294^\circ$ bulunur.

10.



Şekildeki hamur teknesinin boyutları üzerine yazılmışır. Bu teknenin hacminin maksimum olması için θ kaç derece olmalıdır?

Çözüm



Tabanı ABCD yamuğu olan prizmanın maksimum hacimli olması için ABCD yamuğunun maksimum olması gerekir.

$$Alan(ABCD)=\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot|AH|=\frac{40+|CD|}{2}$$

olur.

$$|CD|=|AB|+2|HD|=40+2\cdot 40.\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=40+80\cdot(-\cos\theta)=40-80\cos\theta$$

$$|AH|=40.\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=40\sin\theta$$

olacağından

$$Alan(ABCD)=\frac{40+40-80\cos\theta}{2}\cdot 40\sin\theta$$

$$=1600(1-\cos\theta)\sin\theta$$

olur. Bunun maksimum olması için

$f(\theta)=(1-\cos\theta)\sin\theta$ maksimum olmalıdır.

$$f'(\theta)=\sin^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta$$

$$=1+\cos\theta-2\cos^2\theta=0$$

$$(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)=0\Rightarrow$$

$\cos\theta=1$ veya $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

olmalıdır.

$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0° \Rightarrow V = 0$ olur.

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$ olur.

Bu durumda hacim

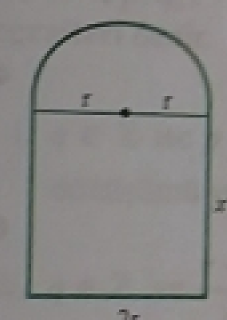
$V = 1600(1-\cos 120°)\sin 120°.200 = 240.000\sqrt{3}\ cm^3$

olur.

11. Şekildeki pencere dikdörtgen ile bir yarım çemberden oluşmuştur. Pencerenin çevresi $40(\pi + 4)$ cm olduğuna göre, pencerenin en fazla ışık geçirmesi için boyutları ne olmalıdır?

Çözüm

Alan maksimum olmalıdır.



$\pi r + 2r + 2x = 40(\pi + 4)$

$x = 20\pi + 80 - \dfrac{\pi}{2}r - r$

olur. Alan S ile gösterilirse

$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2 + 2rx = \dfrac{1}{2}\pi r^2 + 2r(20\pi + 80 - \dfrac{\pi}{2}r - r)$

$= \dfrac{1}{2}\pi r^2 + 40\pi r + 160r - \pi r^2 - 2r^2$ olur.

$S' = \pi r + 40\pi + 160 - 2\pi r - 4r = 0$

$(\pi + 4)r = 40(\pi + 4) \Rightarrow r = 40$

bulunur. Bu durumda

$x = 20\pi + 80 - 20\pi - 40 = 40$ cm olur.

12. Aşağıdan yukarıya doğru atılan bir cismin yüksekliği, S metre ve t saniye olmak üzere,

$S = 112 + 96t - 16t^2$

ile veriliyor.

a. $t = 0$ anındaki ivmesini bulunuz.

b. Çıkabileceği maksimum yüksekliği hesaplayınız.

c. $S = 0$ için ivmesini bulunuz.

Çözüm

a. $V = S' = 96 - 32t$

$a = V' = S'' = -32$

b. $S' = 0 \Rightarrow 96 - 32t = 0 \Rightarrow t = 3$ olur.

$t = 3$ için $S = 112 + 288 - 144 = 256$ m

c. Her t için $a = -32$ olduğundan hareket boyunca ivme değişmez.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$f(x) = e^t$ fonksiyonuna $\left[\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x}\right]$ aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım:

$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}} = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right).e^c$

olacak şekilde en az bir $c \in \left(\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x}\right)$ noktası vardır.

Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/x+1}) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x(x+1)} e^c$$

$$= 1 . \lim_{x\to\infty} e^c$$

olur.

$$\frac{1}{x+1} < c < \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} \le \lim_{x\to\infty} c \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} c \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} c = 0$$

olacağından

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/x+1}) = 1 . e^0 = 1$$

bulunur.