Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun türevi $\frac{1}{x}\log_a e$ dir.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

Özel olarak;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Genel olarak;

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e$$

Örnek: $f(x) = \log_3(5x^2+1)$ ise $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{10x}{5x^2+1}\log_3 e$$

Örnek: $f(x) = \ln(\cos x)$ ise $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

Örnek: $y = x\log_4(\frac{1}{x})$ ise $y' = ?$

$$y' = \log_4\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\log_4 e$$

$$= \log_4\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x}\log_4 e$$

$$= -\log_4 x - \log_4 e$$

$$= -\log_4(xe)$$

Örnek: $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ise $y' = ?$

$$y' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Üstel Fonksiyonun Türevi

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ fonksiyonunun türevi $a^x . \ln a$ dır.

* $(a^x)' = a^x . \ln a$

* $(e^x)' = e^x$

Genel olarak

* $(a^{u(x)})' = u'(x)\, a^{u(x)} . \ln a$

* $(e^{u(x)})' = u'(x) . e^{u(x)}$

Örnek: $y = e^{3x^2+6x}$ ise $y' = ?$

$$y' = (6x+6)e^{3x^2+6x}$$

Örnek: $f(x) = 2^{\cos(5x)}$ ise $f'(0) = ?$

$$f'(x) = 5.(-\sin(5x))\, 2^{\cos(5x)} . \ln 2$$

$$f'(0) = 5.(-\sin 0)\; 2^{\cos 0} . \ln 2 = 0$$

Örnek: $y = \frac{2^x}{1+2^x}$ ise $y' = ?$

$$y' = \frac{2^x . \ln 2 (1+2^x) - 2^x . 2^x . \ln 2}{(1+2^x)^2}$$

$$= \frac{2^x \ln 2 + \cancel{2^x \ln 2 . 2^x} - \cancel{2^x . 2^x \ln 2}}{(1+2^x)^2}$$

$$= \frac{2^x \ln 2}{(1+2^x)^2}$$

Logaritmik Türev Alma

$y=[f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki bir ifadenin türevini almak için önce her iki tarafın logaritması alınıp

$$\ln y = g(x)\ln f(x)$$

bulur. Sonra her iki tarafın türevi alınır.

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Örnek: $y=(1+x^2)^x$ ise $y'=?$

$$\Rightarrow \ln y = x\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(1+x^2) + x\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y' = y\left[\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow y' = (1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

Örnek: $f(x)=x^{\sin x}$ ise $f'(\frac{\pi}{2})=?$

$$\ln f(x) = \sin x\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{\sin x}\left[\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$\Rightarrow f'(\tfrac{\pi}{2}) = (\tfrac{\pi}{2})^{\sin\frac{\pi}{2}}\left[\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0}\cdot\ln\tfrac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = 1$$

Örnek: $y=(\cos x)^{\pi x^2}$ ise $y'=?$

$$\ln y = \pi x^2 \ln\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\pi x \ln\cos x + \pi x^2 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y' = (\cos x)^{\pi x^2}\left[2\pi x \ln\cos x - \frac{\pi x^2 \sin x}{\cos x}\right]$$

Örnek: $y=(\sqrt{x})^{x}$ ise $y'=?$

$$\ln y = x \ln\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\sqrt{x} + x\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y' = (\sqrt{x})^{x}\left(\ln\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= (\sqrt{x})^{x}\left(\ln\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)$$

Örnek: $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$ ise $y'=?$

$$y=\ln(e^{-x}+xe^{-x}) = \ln(e^{-x}(1+x))$$

$$= \ln e^{-x} + \ln(1+x)$$

$$= -x + \ln(1+x)$$

$$y' = -1 + \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x+1}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

Örnek: $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\ln(\tan x)$ ise $y'=?$

$$y' = \frac{-2\cancel{\sin x}\cos x}{\sin^4 x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$= -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\cos x\cdot\sin x}$$

Örnek: $y = \ln\left[(2x+1)^3 (x^2-4)^4\right]$ ise $y' = ?$

$$y = \ln(2x+1)^3 + \ln(x^2-4)^4$$
$$= 3\ln(2x+1) + 4\ln(x^2-4)$$

$$\Rightarrow y' = 3 \cdot \frac{2}{2x+1} + 4 \cdot \frac{2x}{x^2-4} = \frac{6}{2x+1} + \frac{8x}{x^2-4}$$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

1) $f(x) = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

2) $f(x) = \sinh x$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

3) $f(x) = \tanh x$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x . \cosh x - \sinh x . \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

Benzer şekilde;

$$(\coth x)' = -\text{csch}^2 x, \quad (\text{sech}\, x)' = -\text{sech}\, x \tanh x$$

$$(\text{csch}\, x)' = -\text{csch}\, x . \coth x$$

Örnek: $y=\cosh(\ln x)$ ise $y'=?$

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\sinh(\ln x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\ln x}-e^{-\ln x}}{2}$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-x^{-1}}{2}$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-1}{2x}$$
$$=\frac{x^2-1}{2x^2}$$

Örnek: $f(x)=\arctan(\tanh x)$ ise $f'(0)=?$

$$f'(x)=\operatorname{sech}^2x\cdot\frac{1}{1+\tanh^2x}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\operatorname{sech}^2 0\cdot\frac{1}{1+\tanh^2 0}=1\cdot\frac{1}{1+0}=1$$

Örnek: $f(x)=\ln(\sinh 3x)-\ln(\cosh 3x)$ ise $f'\left(\frac{\ln 2}{3}\right)=?$

$$f'(x)=\frac{3.\cosh 3x}{\sinh 3x}-\frac{3\sinh 3x}{\cosh 3x}$$
$$=\frac{3\cosh^2 3x-3\sinh^2 3x}{\sinh 3x.\cosh 3x}=\frac{3}{\sinh 3x.\cosh 3x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\ln 2}{3}\right)=\frac{3}{\sinh(\ln 2)\cosh(\ln 2)}=\frac{3}{\frac{e^{\ln 2}-e^{\ln 2}}{2}\cdot\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2}}$$

$$=\frac{12}{\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{12}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}$$

$$=\cancel{12}^{\,4}\cdot\frac{4}{\cancel{15}_{\,5}}=\frac{16}{5}$$

Parametrik Denklemleri ile verilen Fonksiyonların Türevi

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $y = f(x)$ bağıntısı ile verildiği gibi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

biçiminde verilebilir. Burada t sayısına parametre denir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ yazılabilir.

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ile gösterilirse $\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$ olur.

Örnek: Parametrik denklemi $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

olan fonksiyonun türevini bulunuz. Bu fonksiyonun $t = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dx}} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ için

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$