5. BÖLÜM

BELİRLİ İNTEGRAL

5.1. Bir Aralığın Bölüntüsü

5.1.1. Tanım: i. $[a,\ b]$ kapalı aralığı verilsin. n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

şartını sağlayan $x_0,\ x_1, ..., x_n$ noktaları yardımı ile $[a,\ b]$ aralığını

$$[x_0, x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıklara bölelim. $P = \{a = x_0,\ x_1, ..., x_n = b\}$ kümesine $[a,\ b]$ aralığının bir bölüntüsü (parçalanışı) veya bölüntü kümesi denir.

ii. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $[x_{i-1},\ x_i]$ aralığının uzunluğu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ile gösterilir. $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ bölüntüsü ile oluşturulan

$$[x_0, x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıkların uzunluğu, sırasıyla

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ ...,\ \Delta x_n$$

olur. Bu uzunlukların en büyüğüne P bölüntüsünün normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir.

iii. Eğer

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ ... \ = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

ise P kümesine $[a,\ b]$ aralığının düzgün bölüntüsü denir.

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi $[a, b]$ aralığının sonsuz sayıda alt bölüntüsü bulunabilir. Aynı şey düzgün bölüntü için de geçerlidir. Ancak, belirli bir n sayısı için, düzgün bölüntünün bir tane olduğunu da unutmayalım. Düzgün bölüntüyü kullanmak işlem yapmamızı kolaylaştırır.

5.1.2. Örnek: *i.* $[0, 5]$ aralığını gözönüne alalım. $P = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ bölüntü kümesi ile bu aralık

$$[0, 1], [1, 3], [3, 4], [4, 5]$$

şeklinde alt aralıklara ayrılır. Burada sırasıyla,

$$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 2, \Delta x_3 = 1 \text{ ve } \Delta x_4 = 1$$

yazılır. Buna göre, P bölüntüsünün normu $\|P\| = 2$ olur. Aralıkların uzunlukları eşit olmadığından bu bölüntü düzgün değildir.

ii. $[0, 5]$ aralığını 4 eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda, her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{5-0}{4} = \frac{5}{4}$ olacaktır. Bölüntü kümesi $P = \{0, \frac{5}{4}, 2 \cdot \frac{5}{4}, 3 \cdot \frac{5}{4}, 5\}$ olur. Bu bir düzgün bölüntüdür. Bu bölüntünün normu $\|P\| = \frac{5}{4}$ dür.

iii. $[1, 3]$ aralığını, uzunluğu $\frac{2}{n}$ olan, n eşit alt aralığa bölersek, bölüntü kümesi $P = \{1, 1 + \frac{2}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \cdots, 1 + n \cdot \frac{2}{n} = 3\}$ olarak yazılır. Bu, verilen aralık için düzgün bir bölüntüdür ve $\|P\| = \frac{2}{n}$ dir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki aralıkları n tane eşit alt aralığa bölünüz.

i. $[0, 5]$ **ii.** $[5, 10]$ **iii.** $[2, 6]$ **iv.** $[-3, 3]$

2. Aşağıdaki her bir aralığın karşısında verilen bölüntüsünün normunu ve aralık uzunluğunu bulunuz.

i. $[0, 5], P = \{0, 1.1, 2.6, 3.7, 4.1, 5\}$
ii. $[0, 2], P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1.7, 1.9, 2\}$
iii. $[2, 6], P = \{2.3, 3.7, 4, 5.2, 6\}$
iv. $[a, b], P = \{x_i = a + \frac{i}{n}(b - a) : i = 1, ..., n\}$

5.2. Riemann Toplamı ve Belirli İntegralin Tanımı

Şimdi de, $[a,\ b]$ kapalı aralığında tanımlanan sınırlı bir f fonksiyonu gözönüne alalım. $[a,\ b]$ aralığının bir bölüntüsü $P=\{x_0,\ x_1,...,\ x_n\}$ olsun. Ayrıca,

$$x_0 \leq z_1 \leq x_1,\ x_1 \leq z_2 \leq\ x_2,\ \ldots, x_{n-1} \leq z_n \leq x_n$$

olmak üzere $z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktalarını gözönüne alalım. Fonksiyonun bu noktalardaki değerleri $f(z_1),\ f(z_2), \ldots, f(z_n)$ olmak üzere

$$f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \cdots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

toplamını teşkil edelim. f fonksiyonu $[a,\ b]$ kapalı aralığında sınırlı bir fonksiyon olduğundan her bir $f(z_1),\ f(z_2), \ldots, f(z_n)$ belirli bir reel sayıdır. Dolayısıyla (5.2.1) toplamı anlamlı olur. Eğer f fonksiyonu $[a,\ b]$ aralığında sınırlı olmazsa bir i için $f(z_i) \to \infty$ olabilir. Bu durumda yukarıdaki toplam ∞ olur. Bu bizim için istenilen bir netice değildir. Onun için verilen aralıkta fonksiyona yüklenilen sınırlılık şartı oldukça önemlidir.

5.2.2. Tanım: f, $[a,\ b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve $P=\{x_0, x_1,..., x_n\}$ bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_0 \leq z_1 \leq x_1,\ x_1 \leq z_2 \leq\ x_2,\ \ldots, x_{n-1} \leq z_n \leq x_n$$

olmak üzere $z_1,\ z_2, \ldots, z_n$ noktalarını gözönüne alalım. Bu durumda

$$R_n(f,P) = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \cdots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,\ b]$ kapalı aralığındaki Riemann toplamı denir.

$z_1,\ z_2, \ldots, z_n$ noktaları değiştiği zaman bazı fonksiyonlar için $f(z_1)$, $f(z_2),\ \ldots,\ f(z_n)$ değerleride değişebileceğinden (5.2.3) toplamıda değişebilir. (5.2.3) toplamını $R_n(f,P)$ ile göstermemizin nedeni bu toplamın P bölüntüsüne ve f fonksiyonuna bağlı olarak değiştiğini vurgulamaktır.

5.2.4. Örnek: $[1,\ 2]$ kapalı aralığında $f(x)=x^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $P=\{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \ldots, 2\}$ bu aralığın bir düzgün bölüntüsü olsun. $R_n(f,P)$ Riemann toplamını $z_1=1,\ z_2=1+\frac{1}{n},\ z_3=1+\frac{2}{n}, \ldots, z_n=\frac{2n-1}{n}$ için bulunuz.

Çözüm: Verilenlerden

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{1}{n}$$

ve

$$f(z_1) = 1,\ f(z_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2, \ldots, f(z_n) = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} R_n(f,P) &= f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \cdots + f(z_n)\Delta x_n \\ &= 1\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} \end{aligned}$$

bulunur.

5.2.5. Tanım: f, $[a,\, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bu aralığın bir bölüntüsü olsun. Ayrıca,

$$x_0 \leq z_1 \leq x_1,\ x_1 \leq z_2 \leq x_2, \ldots, x_{n-1} \leq z_n \leq x_n$$

olmak üzere $z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktalarını gözönüne alalım. Bu durumda

$$S = \lim_{||P||\to 0} R_n(f,P) = \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(5.2.6)}$$

limiti varsa f fonksiyonunun $[a,\, b]$ kapalı aralığında (Riemann anlamında) belirli integrali vardır denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. Bu semboldeki a ya integralin alt sınırı, b ye de integralin üst sınırı adı verilir.

Bu tanıma göre

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

olur. Buradaki limitin z_i noktalarına bağlı olarak değişmeyeceğini vurgulayalım.

P bölüntüsünün normu $||P|| \to 0$ olduğunda bölüntü kümesinin eleman sayısı sınırsız artarken her i için Δx_i uzunluğu da sıfıra doğru gider. Bunun tersinin de doğru olacağı aşikardır. Matematiksel olarak bunu

$$\|P\| \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty \text{ ve her } i \text{ için } \Delta x_i \to 0$$

şeklinde yazarız. $\|P\| \to 0$ olması halinde keyfi bir bölüntü düzgün bir bölüntüye yaklaşır. İlk bakışta, $n \to +\infty$ için $\|P\| \to 0$ olacakmış gibi bir izlenim bırakmasına rağmen genel olarak bu doğru değildir. Örnek olarak, $[0, 1]$ aralığının düzgün olmayan $P = \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ bölüntüsünü gözönüne alalım. Bu bölüntünün normu $\|P\| = \frac{1}{2}$ dir. Burada $n \to +\infty$ olması halinde de bölüntünün normu değişmez. Ancak düzgün bölüntüler için $n \to +\infty$ için $\|P\| \to 0$ ifadesi doğrudur.

Eğer 5.2.5. Tanımda düzgün bölüntü alınmış olsaydı (5.2.6) formülü

$$S = \lim_{n\to+\infty} R_n(f,P) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad \mathbf{(5.2.7)}$$

ve dolayısıyla belirli integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

şeklinde yazılırdı. İşlemlerin kolay yapılması açısından belirli integral hesabında düzgün bölüntü ile çalışılır.

Belirli integralin tanımı, daha önce gördüğümüz belirsiz integral gözönüne alındığında, bizi biraz şaşırtmaktadır. Belirli integral dediğimiz aslında bir özel limittir. Belirli integrali göstermek için kullandığımız $\int_a^b f(x)dx$ sadece bir semboldür.

5.2.8. Örnek: *i.* $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında belirli integralini hesaplayınız.

Çözüm: $[a, b]$ kapalı aralığını n tane eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda $1 \le i \le n$ şartını sağlayan her i için $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ dir. i.alt aralıkdan alınan bir z_i için $f(z_i) = c$ olur. Buna göre Riemann toplamı

$$\begin{aligned} R_n(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (c + c + \cdots + c)\Delta x \\ &= nc\frac{b-a}{n} \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_a^b c dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty} c(b-a) \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. $\int_0^1 f(x)dx$ integralinin olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $[0,\ 1]$ aralığını

$$[0,\ \frac{1}{n}],\ [\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}],\ ...,\ [\frac{n-1}{n},\ 1]$$

şeklinde alt aralıklara bölelim. Eğer seçeceğimiz z_i noktaları rasyonel sayı ise $f(z_i) = 1$, irrasyonel sayı ise $f(z_i) = 0$ olur. Dolayısıyla, z_i rasyonel ise

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 1.\frac{1}{n} = 1$$

ve z_i irrasyonel ise

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 0.\frac{1}{n} = 0$$

bulunur. $\int_0^1 f(x)dx$ belirli bir değer olmadığından bu integral mevcut değildir.

iii. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ integralinin olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:$f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sınırlı değildir. Çünkü $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ dur. O halde, bu aralıkta, integralini hesaplayamayız.

Riemann toplamının limitinin z_i noktalarına bağlı olarak değişebileceği yukarıda görüldü. Ancak bunun anlaşılması çok kolay değildir. Aşağıda ispatsız olarak vereceğimiz teorem hangi hallerde Riemann integralinin olabileceğini bize söylemektedir. Bu durumda belli bir z_i değeri için bulunan Riemann toplamının limiti bize belirli integrali verir.

5.2.9. Teorem: f fonksiyonu tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığında sınırlı ve parçalı sürekli ise $\int_a^b f(x)dx$ vardır.

Hatırlanacağı gibi f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında parçalı süreklidir dediğimiz zaman f nin $[a, b]$ aralığında, sonlu sayıda nokta hariç, sürekli olduğu anlaşılır.

5.2.10. Örnek: *i.* $\int_0^3 xdx$ belirli integralini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x$ fonksiyonu $[0, 3]$ aralığında sürekli olduğundan belirli integrali vardır. $[0, 3]$ aralığını, uzunluğu $\Delta x = \frac{3}{n}$ olan, n eşit alt aralığa bölelim. Buna göre alt aralıklar

$$[0, \frac{3}{n}], [\frac{3}{n}, 2\cdot\frac{3}{n}], ..., [(n-1)\cdot\frac{3}{n}, n\cdot\frac{3}{n}]$$

olur. $z_1 = \frac{3}{n}$, $z_2 = 2\cdot\frac{3}{n}$, ..., $z_n = n\cdot\frac{3}{n}$ alalım. Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
R_n(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \\
&= \frac{3}{n}\frac{3}{n} + 2\frac{3}{n}\frac{3}{n} + \cdots + n\frac{3}{n}\frac{3}{n} \\
&= \left(\frac{3}{n}\right)^2 (1 + 2 + \cdots + n) \\
&= \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\int_1^2 x^2dx$ belirli integralini bulunuz.

Çözüm: $f(x)=x^2$ fonksiyonu $[1,2]$ aralığında sürekli olduğundan belirli integrali vardır.$[1,\ 2]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda her bir aralığın uzunluğu $\Delta x=\frac{1}{n}$ olur. Buna göre alt aralıklar

$$[1,\ 1+\frac{1}{n}],\ [1+\frac{1}{n},\ 1+2\cdot\frac{1}{n}],\ \cdots,\ [1+(n-1)\cdot\frac{1}{n},\ 1+n\cdot\frac{1}{n}]$$

olur. $z_1=1,\ z_2=1+\frac{1}{n},\ \cdots,\ z_n=1+(n-1)\frac{1}{n}$ alalım. Riemann toplamı

$$\begin{aligned}R_n(f,P) &= f(z_1)\Delta x_1+f(z_2)\Delta x_2+\cdots+f(z_n)\Delta x_n \\ &= 1\cdot\frac{1}{n}+(\frac{n+1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n+(n-1)}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left((\frac{n}{n})^2+(\frac{n+1}{n})^2+\cdots+(\frac{n+(n-1)}{n})^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+(k-1)}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2+\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}+1 \\ &= \frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(7-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} R_n(P,f)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(7-\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $[-\pi,0]$ aralığında sürekli olduğundan belirli integrali vardır.$[-\pi,\ 0]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda her bir aralığın uzunluğu $\Delta x=\frac{\pi}{n}$ dir. Alt aralıklar ise

$$[-\pi,\ -\pi+\frac{\pi}{n}],\ [-\pi+\frac{\pi}{n},\ -\pi+2\cdot\frac{\pi}{n}],\cdots,\ [-\pi+(n-1)\cdot\frac{\pi}{n},\ 0]$$

olur. $z_1=-\pi$, $z_2=-\pi+\frac{\pi}{n}$, $\ldots$, $z_n=-\pi+(n-1)\cdot\frac{\pi}{n}$ alalım. Riemann toplamını teşkil edelim.

$$\begin{aligned}R_n(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}f(z_i)\Delta x_i\\ &=\sum_{i=1}^{n}f(z_i)\frac{\pi}{n}\\ &=\frac{\pi}{n}\Big(\sin(-\pi)+\sin(-\pi+\frac{\pi}{n})+\cdots+\sin(-\pi+(n-1)\frac{\pi}{n})\Big)\\ &=-\frac{\pi}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\Big(2\cdot\frac{\pi}{n}\Big)+\cdots+\sin(n-1)\frac{\pi}{n}\Big).\end{aligned}$$

Burada

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\Big(2\cdot\frac{\pi}{n}\Big)+\cdots+\sin(n-1)\frac{\pi}{n}=A$$

deyip bu eşitliğin her iki yanını $\sin\frac{\pi}{2n}$ ile çarparsak

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{2n}\sin\Big(2\cdot\frac{\pi}{n}\Big)+\cdots+\sin\frac{\pi}{2n}\sin(n-1)\frac{\pi}{n}=A\sin\frac{\pi}{2n}$$

olur.

$$\sin x\,\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

trigonometrik özdeşliğini kullanarak

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{3\pi}{2n}]$$

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}[\cos\frac{3\pi}{2n} - \cos\frac{5\pi}{2n}]$$

$$\vdots$$

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}[\cos\frac{(2n-5)\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}]$$

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{1}{2}[\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}]$$

olur. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$A = \frac{\frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}]}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

yazılır. Böylece

$$R_n(f,P) = \frac{-\frac{\pi}{2n}[\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}]}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0}\sin x dx &= \lim_{n\to+\infty} R_n(f,P)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-\frac{\pi}{2n}[\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}]}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)\\ &= -2\end{aligned}$$

elde edilir.

5.2.11. Teorem: f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sınırlı, integrallenebilir ve bu aralıktaki sonlu sayıda nokta hariç $f(x) = g(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

dir.

Bu teoremden f nin $[a, b]$ aralığındaki sonlu sayıda noktalarda aldığı değerlerin integralin sonucunu etkilemediği anlaşılır.

Alıştırmalar

1. $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu ve $[1, 5]$ aralığı veriliyor. Bu aralığın $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bölüntüsünü ve $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $z_4 = 4$ olduğunu gözönüne alarak $R_n(f, P)$ Riemann toplamını bulunuz.

2. Aşağıdaki belirli integralleri integralin tanımını kullanarak hesaplayınız.

i. $\int_0^3 x dx$ **ii.** $\int_0^5 (2x + 6)dx$ **iii.** $\int_5^0 x dx$

3. $[a, b]$ kapalı aralığının bir bölüntüsü $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ olsun. $M_k = ek\ddot{u}s\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ve $m_k = ebas\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ olmak üzere

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \text{ ve } \ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

ifadelerine sırasıyla alt toplam ve üst toplam (veya Darboux toplamları) denir. Eğer

$$\lim_{n \to +\infty} A(f, P) = \lim_{n \to +\infty} \ddot{U}(f, P)$$

ise f fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığında (Riemann anlamında) integrallenebilir denir. Bu açıklamalardan sonra aşağıdaki soruları cevaplayınız.
i. $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun herhangi bir $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olduğunu gösteriniz.
ii.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

olarak tanımlanan Drichlet fonksiyonunun herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenemediğini gösteriniz.

5.3. Belirli İntegralin Özellikleri

Belirli integrali biraz tanıttıktan sonra, şimdi de belirli integral ile ilgili bazı özellikleri verebiliriz.

5.3.1. Teorem: f ve g fonksiyonları $[a,\ b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

i. $\int_a^a f(x)dx = 0$ dır.

ii. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ dir.

iii. $c \in [a,\ b]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir.

iv. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

dir.

v. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatını yapabilmek için belirli integralin tanımını uygulamak yeterlidir.

Şimdi de belirli integralle ilgili bazı eşitsizlikleri gözden geçirelim:

5.3.2. Teorem: i. f fonksiyonu $[a,\ b]$ kapalı aralığında hem integrallenebilir hemde $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

dır.

ii. f ve g fonksiyonları $[a,\ b]$ aralığında integrallenebilir ve her $x \in [a,\ b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

dir.

iii. f fonksiyonu $[a,\ b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

dir.

5.4. İntegral Hesabın Temel Teoremleri

f, $[a,\ b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $[a,\ b]$ aralığını

$$[a,\ a+\frac{b-a}{n}],[a+\frac{b-a}{n},\ a+\frac{2(b-a)}{n}],\cdots,[a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},\ b]$$

şeklinde n tane eşit alt aralığa bölelim. Her bir aralığın alt sınırını z_i noktası olarak alalım. $f(z_i)$ değerlerinin aritmetik ortalaması

$$\frac{f(a)+f(a+\frac{b-a}{n})+\cdots+f(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n})}{n}$$

dir. Bu ifadenin pay ve paydasını $b-a$ ile çarparsak

$$\frac{1}{b-a}[\frac{b-a}{n}f(a)+\frac{b-a}{n}f(a+\frac{b-a}{n})+\cdots+\frac{b-a}{n}f(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n})]$$

yazılır. Bu toplamın $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

bulunur. Bu sayıya f nin $[a,\ b]$ aralığındaki ortalama değeri denir. Bu aslında bildiğimiz aritmetik ortalamanın genelleşmiş halidir.

5.4.1 Teorem *(İntegraller için Ortalama Değer Teoremi)*: f fonksiyonu $[a,\ b]$ aralığında sürekli ise

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,\ b)$ vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a,\ b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bu aralıkta maksimum ve minimum değer alır. O halde $x \in [a,\ b]$ için

$$m \leq f(x) \leq M$$

yazılır. 5.3.2 Teoreme göre

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

ve buradan

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

bulunur. f sürekli olduğundan, maksimum ve minimum değer arasındaki her değeri alır. O halde

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde enaz bir $c \in (a,\ b)$ vardır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Belirli integrali gösteren

$$\int_a^b f(x)dx$$

sembolünde integrasyon değişkeni olarak x alınır. İntegralin değeri integrasyonun değişkeni olarak kullanılan harfe bağlı değildir. Örneğin

$$\int_o^5 x^2 dx = \int_0^5 t^2 dt = \int_0^5 s^2 ds$$

dir. İntegralin sınırları harf olduğu zaman aynı harfi integral değişkeni olarak kullanmaktan kaçınmak gerekir.

Eğer f fonksiyonu $[a,\ b]$ aralığında integrallenebilirse $a \leq x \leq b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a,\ x]$ aralığında da integrallenebilir. Böylece $a \leq x \leq b$

olmak üzere

$$F : [a,\, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

integrali ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonundan sözedebiliriz. Bu integral $a \leq x \leq b$ şartını sağlayan üst sınır olan x değişkeninin bir fonksiyonudur. Burada $F(a) = 0$ olduğu hemen söylenir. Şimdi bu fonksiyonun türevini araştıralım.

5.4.2. Teorem *(İntegral Hesabın Birinci Temel Teoremi)*: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $F : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, F fonksiyonu diferensiyellenebilir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

İspat: x ve $x + \Delta x$, $[a,\, b]$ aralığında iki nokta olsun.

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

yazılır. 5.4.1. Teoreme göre $[x,\, x + \Delta x]$ aralığında öyle bir c sayısı vardır ki

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)$$

dir. Bu

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

demektir. Bu ifadede x i sabitleyip Δx i sıfıra yaklaştıralım. Bu durumda $c \to x$ ve $f(c) \to f(x)$ olur. Böylece

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

yani $F'(x) = f(x)$ dir. Eğer x, $[a, b]$ aralığının bir uç noktası ise $F'(x)$ tek yanlı türevdir.

Belirli integrali hesaplamak için yapılan işlemlerin aslında çok kolay olmadığını gördük. Dolayısıyla belirli integralin tanımını kullanarak integral hesaplamak çok kullanışlı bir yol değildir. Aşağıda vereceğimiz teorem belirli integralin hesaplanmasında hem çok pratiktir hem de belirli integral ile belirsiz integral arasında bir ilişki verir. Bu ilişki, belirli integral tanımında, bizde yaratılan şaşkınlığı gidermektedir.

5.4.3. Teorem *(İntegral Hesabın İkinci Temel Teoremi)*: f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelimki F, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında $F'(x) = f(x)$ olan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dır.

İspat: Hipotezde türevi $f(x)$ olan bir $F(x)$ fonksiyonu veriliyor. 5.4.2.Teoreme göre türevi $f(x)$ olan bir başka fonksiyon

$$\int_a^x f(t)dt$$

dir. G fonksiyonunu

$$G(x) = F(x) - \int_a^x f(t)dt$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilirdir. $G'(x) = 0$ olduğundan $G(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında sabittir. G fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralıkta da sabit olur. Ayrıca

$$G(a) = F(a) - 0 \text{ ve } G(b) = F(b) - \int_a^b f(t)dt$$

dir. $G(x)$ sabit olduğundan $G(b) = G(a)$ ve böylece

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

elde edilir.

$F(b) - F(a)$ farkını göstermek için $F(x)|_a^b$ sembolü kullanılır. Bu sembolü gözönüne alarak 5.4.3. Teoremdeki formülü

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

şeklinde de yazarız. Burada $F(x)$, $f(x)$ in ilkeli (belirsiz integrali) olduğunu biliyoruz. O halde belirli integrali hesaplarken belirsiz integralden istifade ederiz.

5.4.4. Örnek: *i.* $\int_0^1 (x+2)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 5.4.3. Teoremden

$$\int_0^1 (x+2)dx = (\frac{1}{2}x^2 + 2x)\Big|_0^1 = (\frac{1}{2} + 2) - 0 = \frac{5}{2}$$

yazılır.

ii. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0$$

bulunur.

iii. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$$

olur.

iv. $\int_0^1 (x^2+2x+3)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+2x+3)dx &= \left(\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 + 3x\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{3}+1+3=\frac{13}{3}\end{aligned}$$

olur.

v.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -1\le x<0\\ x^2+1, & 0\le x\le 2\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bir kere $f(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta sınırlı ve aynı zamanda süreklidir. Dolayısıyla bu fonksiyonun integralini 5.4.3.Teoremden yararlanarak bulabiliriz. 5.3.1.Teoremin *iii.*şıkkı kullanılarak

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$

yazılır. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)dx &= \int_{-1}^{0}(2x+1)dx+\int_0^2(x^2+1)dx\\ &= (x^2+x)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2\\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

bulunur.

vi.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x \le 0 \\ 9-x^2, & 0 < x \le 3 \end{cases}$$

olmak üzere $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ inegralini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen fonksiyon $[-2, 3]$ kapalı aralığında sınırlı ve parçalı süreklidir. Dolayısıyla bu fonksiyonun integralini hesaplayabiliriz. Ancak $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ da sürekli olmadığından 5.4.3. Teoremi direkt olarak kullanamayız. 5.2.11. Teoreme göre, $(0, 3]$ aralığında tanımlanan $f_1(x) = 9 - x^2$ fonksiyonu ile $[0, 3]$ aralığında tanımlanan $f_2(x) = 9 - x^2$ fonksiyonu $x = 0$ noktası hariç eşit olduklarından, $f_1(x)$ in $(0, 3]$ aralığındaki integrali $f_2(x)$ in $[0, 3]$ aralığındaki integraline eşit olur. Bu durumda

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x+2)dx + \int_{0}^{3} (9-x^2)dx$$

yazılır. 5.4.3. Teoremi kullanarak

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} f(x)dx &= \int_{-2}^{0} (x+2)dx + \int_{0}^{3} (9-x^2)dx \\ &= (\frac{1}{2}x^2 + 2x)\Big|_{-2}^{0} + (9x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{0}^{3} \\ &= 20\end{aligned}$$

elde edilir. Burada uygulanan tekniği, açıklama yapmadan, bundan sonra da kullanacağız.

Not: Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı, parçalı sürekli ve

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \le x < a_1 \\ f_2(x), & a_1 \le x < a_2 \\ f_3(x), & a_2 \le x < a_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & a_{n-1} \le x \le b \end{cases}$$

ise

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a_1} f_1(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f_2(x)dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

olur.

vii. $\int_{-2}^{2}|x|dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bilindiği gibi mutlak değer fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak yazılır. Yani,

$$|x| = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}|x|dx &= \int_{-2}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{2}xdx \\ &= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

bulunur.

viii. $\int_{-2}^{2}[[x]]dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Tam değer fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak

$$[[x]] = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}[[x]]dx &= \int_{-2}^{-1}(-2)dx + \int_{-1}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{1}(0)dx + \int_{1}^{2}(1)dx \\ &= -2x\Big|_{-2}^{-1} - x\Big|_{-1}^{0} + 0 + x\Big|_{1}^{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

elde edilir.

ix. $\int_{-2}^{2}sgn(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: İşaret fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak yazabiliriz. Buna göre

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} sgn(x)dx &= \int_{-2}^{0} (-1)dx + \int_{0}^{2} (1)dx \\ &= -x\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_{0}^{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

x. f fonksiyonunun sürekli, u ve v fonksiyonlarının da diferensiyellenebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{a}^{u(x)} f(t)dt\right) = f[u(x)]u'(x)$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right) = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *1.* $F(u) = \int_a^u f(t)dt$ alınırsa, 5.4.2. Teoreme göre, $\frac{dF}{du} = f(u)$ olur. $u = u(x)$ alınırsa

$$F[u(x)] = \int_{a}^{u(x)} f(t)dt$$

yazılır. Burada, türev alma kurallarından, zincir kuralı uygulanırsa $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx}$ veya

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{u(x)} f(t)dt\right) = f[u(x)]u'(x)$$

bulunur.

2. Bunu görmek için

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = \int_{v(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{u(x)} f(t)dt = \int_{a}^{u(x)} f(t)dt - \int_{a}^{v(x)} f(t)dt$$

olarak yazıp *1*.kısım uygulanırsa

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right) = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x)$$

bulunur.

xi. Aşağıdaki türevleri bulunuz.

i. $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right)$ *ii.* $\frac{d}{dx}\left(\int_x^3 \sqrt{t}\arcsin t\, dt\right)$ *iii.* $\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{1+x^2} \ln t\, dt\right)$

Çözüm: *i.*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

olur.

ii.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^3 \sqrt{t}\arcsin t\, dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_3^x \sqrt{t}\arcsin t\, dt\right) = -\sqrt{x}\arcsin x$$

olur.

iii.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{1+x^2} \ln t\, dt\right) = 2x\ln(1+x^2) - \cos x \ln(\sin x)$$

olur.

Alıştırmalar

1. Aşağıda integral ile tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz.

i. $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t + 1)dt$ **ii.** $F(x) = \int_{e^x}^{\ln x} \cos t dt$

iii. $F(x) = \int_{x^3}^{100} s^2 ds$ **iv.** $F(x) = \int_{20}^{30} \frac{\arctan x}{1+\ln x+x} dx$

2. i.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun $[0, 2]$ kapalı aralığında integralinin alınabileceğini söyledikten sonra

$$\int_0^2 f(x)dx$$

integralini hesaplayınız.

ii.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 < x < 2 \\ 3, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$

olmak üzere $\int_0^4 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

iii. $\int_0^4 (x - [[x]] + \frac{1}{2})dx$ **iv.** $\int_{-2}^{2} (|x| + |x+3|)dx$ **v.** $\int_{-4}^{4} sgn(x^2-1)dx$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

i. $\lim\limits_{x\to a} \int_a^x f(t)dt$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x [[t]]dt$

5.5. İntegral Alma Metodları ve Belirli İntegral

Eğer $\int_a^b f(x)dx$ integrali temel integrasyon formülleri ile hesaplanamıyorsa diğer integral alma metodlarına başvurulur. Bunlar değişken değiştirme, kısmi integrasyon, rasyonel fonksiyonların integrali, ... olarak sıralanabilir. Bu metodlar uygulanırken belirli integralin nasıl alınacağını örneklerle inceleyeceğiz.

5.5.1. Örnek: *i.* $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integrali iki yoldan hesaplayabiliriz. $u = x + 1$ denirse

$$du = dx \text{ ve } x = u - 1$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}dx &= \int (u-1)\sqrt{u}du \\
&= \int (u^{3/2} - u^{1/2})du \\
&= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + c \\
&= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{3}{2}(x+1)^{3/2} + c
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi belirli integrale geçersek

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx &= [\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{3}{2}(x+1)^{3/2}]\Big|_0^1 \\
&= (\frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{3}{2}2^{3/2}) - (\frac{2}{5} - \frac{2}{3}) \\
&= \frac{2^{7/2}}{5} - \frac{1}{3}2^{5/2} + \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci Yol: $u = x + 1$ denirse

$$du = dx \text{ ve } x = u - 1$$

olur. Değişken değiştirme yaptıktan sonra yeni bir değişkene geçeriz. $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ integralindeki sınırlar x değişkenine göredir. Şimdi bu sınırları yeni değişken olan u ya göre belirlememiz gerekir. $u = x + 1$ ifadesi x in bir fonksiyonu olduğundan bunu $u(x) = x + 1$ şeklinde de yazabiliriz. Bu durumda verilen integraldeki alt sınır $x = 0$ için $u(0) = 1$ ve üst sınır $x = 1$ için $u(1) = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx &= \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}du \\ &= \int_1^2 (u^{3/2}-u^{1/2})du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_1^2 - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2 \\ &= (\frac{2}{5}2^{5/2}-\frac{2}{5})-(\frac{3}{2}2^{3/2}+\frac{2}{3}) \\ &= \frac{2^{7/2}}{5}-\frac{1}{3}2^{5/2}+\frac{4}{15}\end{aligned}$$

bulunur.

ii. $\int_0^{\pi/2} x\cos x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Birinci örnekteki iki yolu birleştirerek de integral alabiliriz. $u = x^2$ denirse

$$du = 2xdx \text{ ve } xdx = \frac{du}{2}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\cos x^2 dx &= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos u du \\ &= \frac{1}{2}\sin u\Big|_{u(0)}^{u(\pi/2)} \\ &= \frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\int_1^4 xe^x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integrali kısmi integrasyon metodu ile hesaplayacağız. Kısmi integrasyon ile belirli integral

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

formülü ile hesaplanır. Verilen integralde $u = x$ ve $dv = e^x dx$ denirse

$$du = dx \text{ ve } v = e^x$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_1^4 xe^x dx &= xe^x\Big|_1^4 - \int_1^4 e^x dx \\ &= xe^x\Big|_1^4 - e^x\Big|_1^4 \\ &= 4e^4 - e - (e^4 - e) \\ &= 3e^4\end{aligned}$$

bulunur.

iv. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integrali hesaplamak için kısmi integrasyon metodunu kullanacağız. Burada $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ dersek $du = 2xdx$ ve $v = -\cos x$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx \\ & \quad u_1 = x \qquad dv_1 = \cos x \\ & \quad du_1 = dx \quad v_1 = \sin x \\ &= -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\{x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx\} \\ &= -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\{x\sin x\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2}\} \\ &= 0 + 2(\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 1) \\ &= \pi - 2\end{aligned}$$

bulunur.

v. $\int_4^6 \frac{2x+1}{x^2+10x+21} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\Delta > 0$ olduğundan paydadaki ifade çarpanlara ayrılır.

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x+7)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+7}$$

eşitliğini düzenlersek

$$2x+1 = A(x+7) + B(x+3)$$

yazılır. Buradan da $A = -\frac{5}{4}$ ve $B = \frac{13}{4}$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned}\int_4^6 \frac{2x+1}{x^2+10x+21}dx &= -\frac{5}{4}\int_4^6 \frac{dx}{x+3} + \frac{13}{4}\int_4^6 \frac{dx}{x+7} \\ &= -\frac{5}{4}\ln|x+3|\Big|_4^6 + \frac{13}{4}\ln|x+7|\Big|_4^6 \\ &= -\frac{5}{4}\ln\frac{9}{7} + \frac{13}{4}\ln\frac{13}{11}\end{aligned}$$

elde edilir.

vi. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $t = \tan\frac{x}{2}$ denirse

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olur. Buna göre

$$\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$$

yazılır. Burada

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

şekllindeki basit kesirlere ayrılıştan $A = 1$ ve $B = -1$ bulunur. Böylece

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|\frac{t}{t+1}| + c$$

ve buradan da

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|+c$$

elde edilir. Şimdi belirli integrale geçelim.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}&=\left(\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\pi/2}^{2\pi/3}\\&=\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{3}}\right|-\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}}\right|\\&=\ln\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\ln 2\end{aligned}$$

olur.

İkinci yol: $t=\tan\frac{x}{2}$ denirse

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olur. t değişkenine göre sınırlar

$$t(\frac{\pi}{2})=\tan\frac{\pi}{4}=1,\ t(\frac{2\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}&=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t+t^2}\\&=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t}\\&=\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{3}}-\ln|1+t|\Big|_1^{\sqrt{3}}\\&=\ln\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\ln 2\end{aligned}$$

elde edilir.

vii. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x=\sin t$ dönüşümü yapılırsa

$$dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\end{aligned}$$

ve burada

$$x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

olduğunu gözönüne alarak x değişkenine geçersek

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir.

İkinci yol: $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa

$$dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t$$

olur. Şimdi integralin sınırlarını t değişkenine göre yazalım: $x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x$ ve

$$t(0) = \arcsin 0 = 0 \text{ ve } t(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

yazılır. Böylece

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt \\
&= \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

viii. $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = 1 - x$ denirse $dx = \frac{du}{-1}$ ve $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx &= -\int_1^0 u^{1/2}du \\
&= \int_0^1 u^{1/2}du \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

i. $\int_0^3 \cos^2 x dx$ **ii.** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ **iii.** $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

iv. $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$ **v.** $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$ **vi.** $\int_1^5 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

vii. $\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx$ **viii.** $\int_0^1 x \arctan x dx$ **ix.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

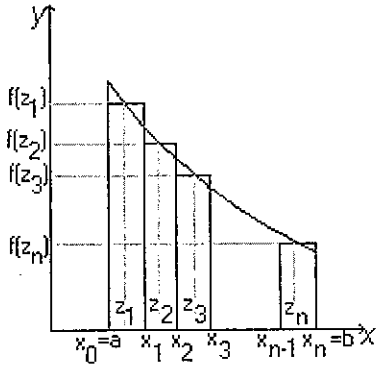
x. $\int_0^3 \frac{2x}{(1+x^2)(3+x^2)}dx$ **xi.** $\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x^2+1)}dx$ **xii.** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$

xiii. $\int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}$ **xiv.** $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ **xv.** $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$

xvi. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ **xvii.** $\int_0^1 x(2-3x)^{18}dx$ **xviii.** $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

5.6. Belirli İntegral Yardımı ile Alan Hesabı

$f(x)$ fonksiyonunun $[a,\, b]$ kapalı aralığında pozitif, sürekli ve grafiğinin aşağıdaki şekildeki gibi olduğunu kabul edelim. Şimdi $x=a$, $x=b$, x-ekseni ve



$y=f(x)$ eğrisi ile sınırlandırılmış şeklin A alanını gözönüne alalım. $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$ alalım. Şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı belirtilen şeklin yaklaşık alanını verir. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı

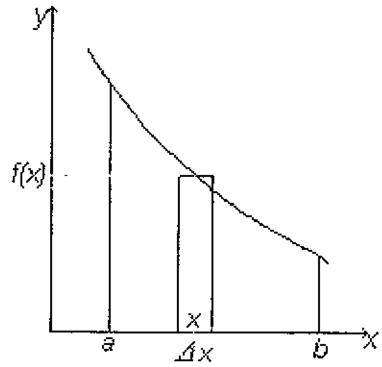
$$A \approx f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \cdots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

şeklinde olur. Bu ise $[a,\, b]$ aralığının n eşit alt aralığa bölünmesi ve bu aralıklardan z_i noktalarının alınmasıyla elde edilen Riemann toplamıdır. Buna göre istenen alan

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

olarak bulunur. Şimdi belirli integral yardımıyla alanların nasıl hesaplanacağını göreceğiz. Bunun için beş tane durumu inceleyeceğiz.

1. $y = f(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve pozitif değerli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan şekilin A alanını bulalım. Önce bu şekli geometrik olarak görelim.



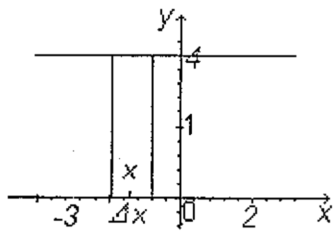
Bu alan için bir kenarı x-ekseninde ve bu kenara paralel diğer kenarı da verilen eğri üzerinde olan temsilci bir dikdörtgen seçelim. Bu temsilci dikdörtgenin alanı $A_t = f(x)\Delta x$ dir. Verilen şeklin alanı bu tip kesişmeyen dikdörtgenlerin alanları toplamının limiti alınarak bulunur.Dolayısıyla

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

olur.

5.6.1. Örnek: *i.* $y = 4$, $x = -3$ ve $x = 2$ doğruları ile x-ekseni arasında kalan şekilin A alanını bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplayacağımız alanı geometrik olarak gösterelim.



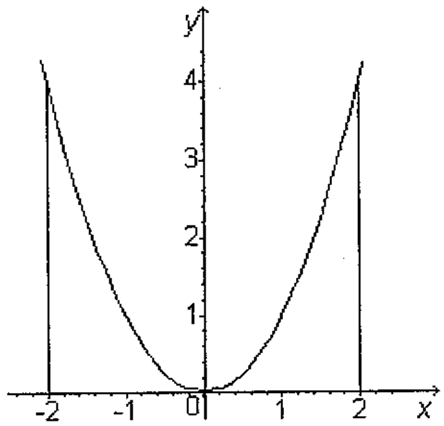
Şekildeki temsilci dikdörtgenin alanı $A_t = f(x)\Delta x = 4\Delta x$ dir. O halde istenen alan

$$A = \int_{-3}^{2} 4dx = 4x\Big|_{-3}^{2} = 20\, br^2$$

olarak bulunur. Burada ölçüler belli olmadığından alanı *birim kare*nin kısaltılmışı olan br^2 ile gösterdik. Bundan sonra da ölçüler belli olmadığı zaman bu sembol kullanılacaktır.

ii. $y = x^2$ eğrisi, x-ekseni, $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan A alanını bulunuz.

Çözüm: Hesaplanması istenen alanı geometrik olarak görelim:



Bu şekili de gözönüne alarak, formülümüze göre,

$$A = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{16}{3} br^2$$

bulunur.

Not: Eğer hesaplanacak alan bir $x = x_0$ eksenine göre simetrik ise bu simetrik parçalardan birinin alanını hesaplarsak istenen alanın yarısını hesaplamış oluruz. Buna göre yukarıdaki örneği

$$\frac{A}{2} = \int_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{8}{3} \Rightarrow A = \frac{16}{3} br^2$$

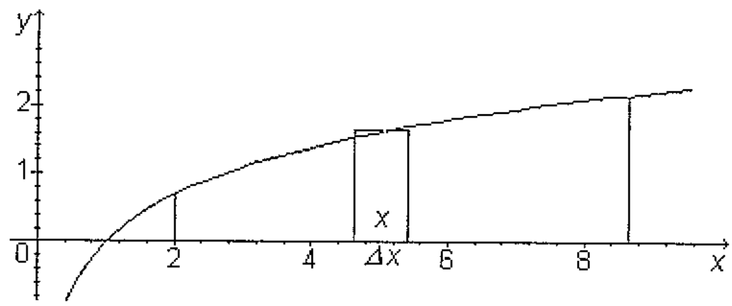
veya

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \Rightarrow A = \frac{16}{3} br^2$$

şeklinde de hesaplayabiliriz. Bu şekildeki tercih bazı hesaplamaları kolay yapmamızı sağlar.

iii. $y = \ln x$ eğrisi, x-ekseni, $x = 2$ ve $x = e^2$ doğruları ile sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplayacağımız alanı geometrik olarak gösterelim. Burada temsilci dikdörtgenin alanı $A_t = \ln x \Delta x$ dir. O halde istenen alan



$$A = \int_2^{e^2} \ln x dx$$

integrali ile bulunur. Bilindiği gibi bu integrali hesaplamak için kısmi integrasyon metodunu kullanmamız gerekir. Bunun için $u = \ln x, \; dv = dx$ denirse

$$du = \frac{1}{x} dx, \; v = x$$

olur. Dolayısıyla

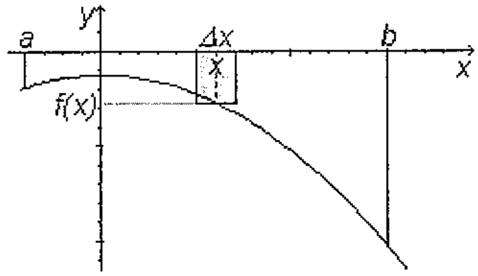
$$\begin{aligned} A = \int_2^{e^2} \ln x dx &= x \ln x \Big|_2^{e^2} - \int_2^{e^2} dx \\ &= x \ln x \Big|_2^{e^2} - x \Big|_2^{e^2} \\ &= (e^2 - 2\ln 2 + 2)\, br^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. $y = f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında negatif değerler alan sürekli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayalım. Bunun için şekildeki temsilci dikdörtgenin alanını yazalım. Bu temsilci dikdörtgenin, yüksekliği $0 - f(x) = -f(x)$ ve genişliği Δx olduğundan, alanı

$$A_t = -f(x)\Delta x$$

dir. Dolayısıyla istenen alan

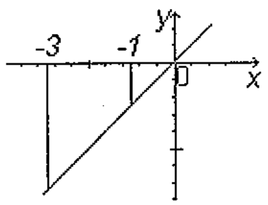


$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

ile hesaplanır.

5.6.2. Örnek: *i.* $y = x$, $x = -3$, $x = -1$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm: Hesaplayacağımız alan geometrik olarak aşağıda gösterilmiştir. Formülümüzü de gözönüne alarak istenen alanı

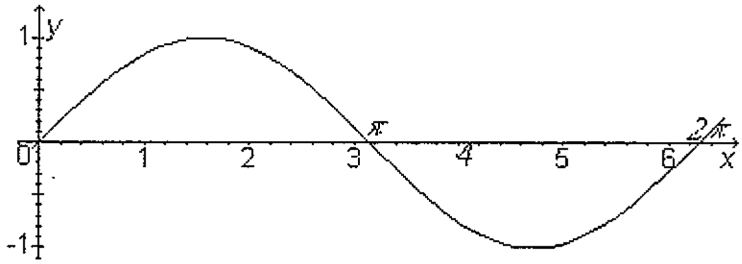


$$A = -\int_{-3}^{-1} xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-3}^{-1} = 4\,br^2$$

olarak buluruz.

ii. $y = \sin x$ eğrisinin $[\pi, 2\pi]$ aralığındaki kısmı ile x ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.

Çözüm: Hesaplayacağımız alan aşağıdaki şekilde verilmiştir. Dolayısıyla

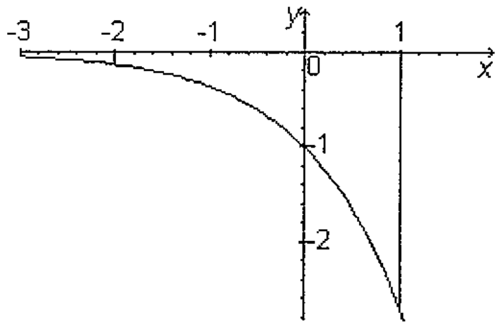


$$A = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2\, br^2$$

olarak bulunur.

iii. $y = -e^x$ eğrisi, x ekseni, $x = -2$ ve $x = 1$ doğruları ile sınırlanan alanı bulunuz.

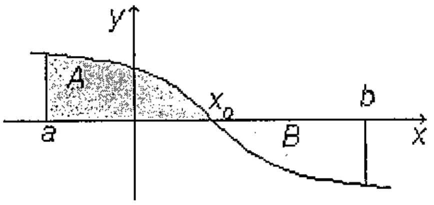
Çözüm: Hesaplanacak alan aşağıda verilmiştir. Bu alan



$$A = -\int_{-2}^{1} (-e^x) dx = e - \frac{1}{e^2}\, br^2$$

olarak bulunur.

3. $y = f(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığının bir kısmında pozitif, bir kısmında negatif değerler alan sürekli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmı ile x ekseni arasnda kalan alanı bulalım.



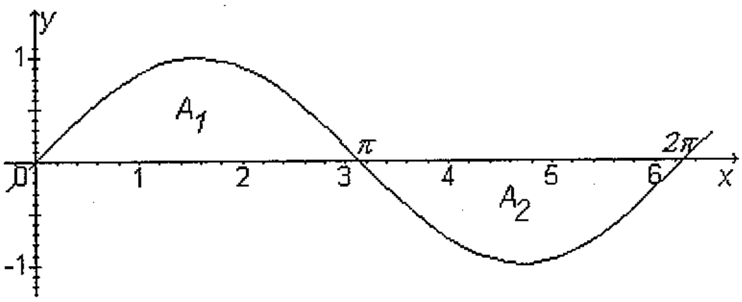
Bu birinci ve ikinci halde incelediğimiz iki durumu aynı anda ihtiva etmektedir. İstenen alan $A + B$ dir. Dolayısıyla

$$A + B = \int_a^{x_0} f(x)dx - \int_{x_0}^{b} f(x)dx$$

ile istenen alan bulunmuş olur.

5.6.3. Örnek: *i.* $y = \sin x$ eğrisinin $[0,\ 2\pi]$ aralığındaki kısmı ile x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplayacağımız alanı geometrik olarak görelim. Bulacağımız alanı A ile gösterirsek $A = A_1 + A_2$ olur.Dolayısıyla



$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4\,br^2$$

olarak bulunur.

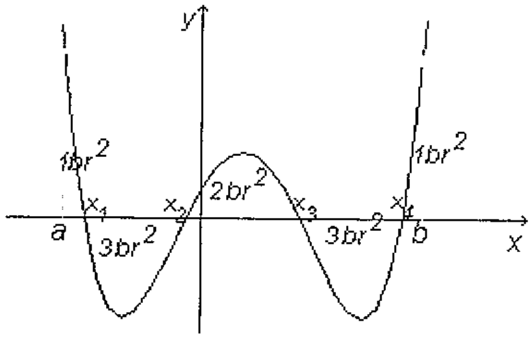
Not: Eğer $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ integralinin sonucu istenmiş olsaydı

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

bulunurdu. Bu hesaplanan integral, x ekseninin altındaki alanları negatif ve x ekseninin üstündeki alanları pozitif reel sayı düşünerek bunların cebirsel toplamını bulmaktan ibarettir. Buna göre

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = A_1 - A_2$$

dir. Daha genel olarak, aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a,\ b]$ kapalı aralığındaki grafiği ve x ekseni arasındaki alanlar verilmiştir. Bu verilenlere göre $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplayalım.



$$\int_a^b f(x)dx = 1 - 3 + 2 - 3 + 1 = -2$$

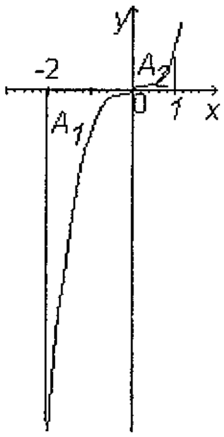
bulunur. Eğer alanı bulmak isteseydik $A = 10\,br^2$ olduğunu görürdük.

ii. $y = x^3$ eğrisinin $[-2,\ 1]$ aralığındaki kısmı ile x ekseni arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: Aşağıdaki şekile göre

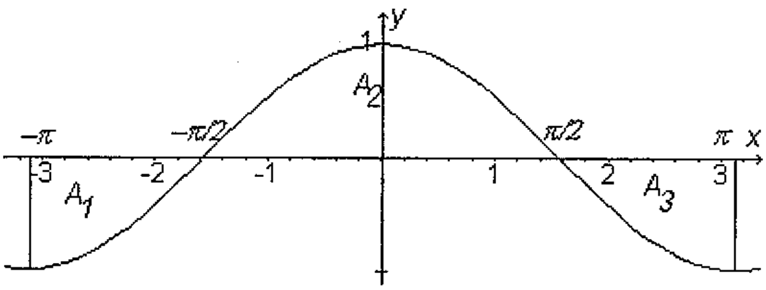
$$A = A_1 + A_2 = -\int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{17}{4}\,br^2$$

bulunur.



iii. $y = \cos x$ eğrisinin $[-\pi, \pi]$ aralığında kalan kısmı ile x ekseni arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm:



İstenen alan $A = A_1 + A_2 + A_3$ dür. Buna göre

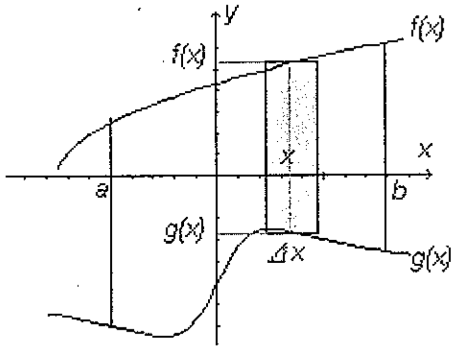
$$A = -\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = 4\, br^2$$

elde edilir.

4. $y = f(x)$ ve $y = g(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri ve $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayalım. Şekildeki temsilci dikdörtgenin alanını yazalım. Buradan da görüleceği gibi temsilci dikdörtgenin bir kenarının uzunluğu Δx, diğer kenarının uzunluğu ise $f(x) - g(x)$ dir. Dolayısıyla temsilci dikdörtgenin alanı

$$A_t = [f(x) - g(x)]\Delta x$$

dir. Dolayısıyla istenen alan



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

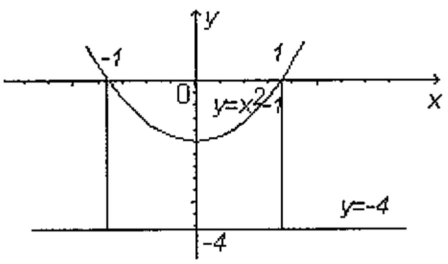
formülü ile bulunur. Yani,

$$A = \int_a^b [\text{üsteki eğrinin fonksiyonu} - \text{alttaki eğrinin fonksiyonu}]dx$$

şeklindedir.

5.6.4. Örnek: *i.* $y = x^2 - 1$, $y = -4$ eğrileri ve $x = -1$, $x = 1$ doğruları arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Hesaplanacak alan aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Bu alan



$$\int_{-1}^{1} [(x^2 - 1) - (-4)]dx = \frac{20}{3}\, br^2$$

olarak bulunur.

ii. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ve $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ eğrileri tarafından sınırlanan alanı bulunuz.

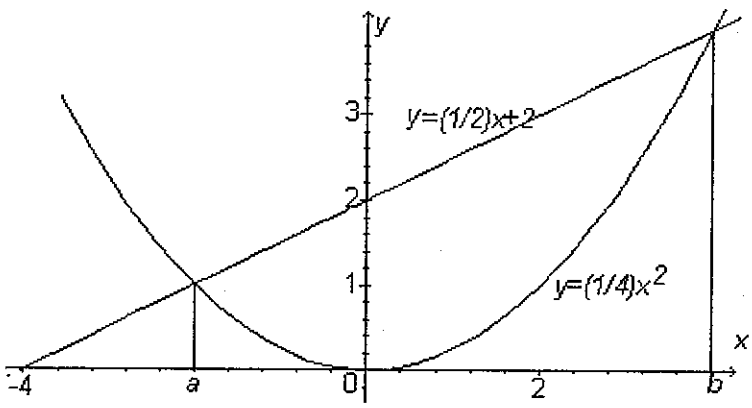
Çözüm: Önce bulunacak alanı geometrik olarak gösterelim. Bu alan şekilde taranarak gösterilmiştir. Buna göre istenen alan

$$A = \int_a^b [\frac{1}{2}x + 2 - \frac{x^2}{4}]dx$$

integrali ile bulunur. Burada a ve b nin ne olduğunu bulmamız gerekir. Dikkat edilirse bu noktalarda f ve g fonksiyonları eşit olmaktadır. O halde $f(x) = g(x)$ eşitliğinden bulunacak x değerleri bize a ve b yi verecektir. Buna göre

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x = -2 \text{ veya } x = 4$$

olarak bulunur. Yani, $a = -2$ ve $b = 4$ olur. Bu durumda istenen alan

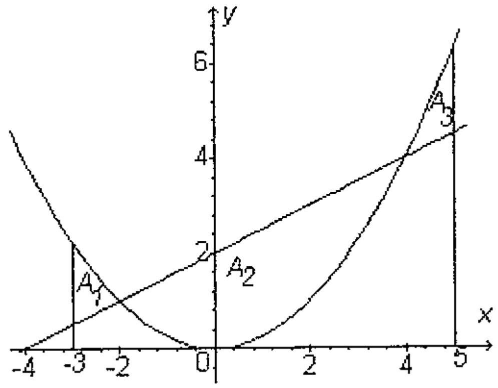


$$A = \int_{-2}^{4} [\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4}]dx = 9\, br^2$$

olarak elde edilir.

iii. *ii.*şıkta verilen eğrilerin $[-3, 5]$ aralığında kalan kısımları arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplanacak alanı geometrik olarak gösterelim.



Bu şekile göre hesaplanacak alanı A ile gösterirsek $A = A_1 + A_2 + A_3$ olur. Burada

$$A_1 = \int_{-3}^{-2}[\frac{x^2}{4} - (\frac{x}{2}+2)]dx,\ A_2 = \int_{-2}^{4}[\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}]dx,\ A_3 = \int_{4}^{5}[\frac{x^2}{4} - (\frac{x}{2}+2)]dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-2}[\frac{x^2}{4} - (\frac{x}{2}+2)]dx + \int_{-2}^{4}[\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}]dx + \int_{4}^{5}[\frac{x^2}{4} - (\frac{x}{2}+2)]dx \\ &= \frac{32}{3}br^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

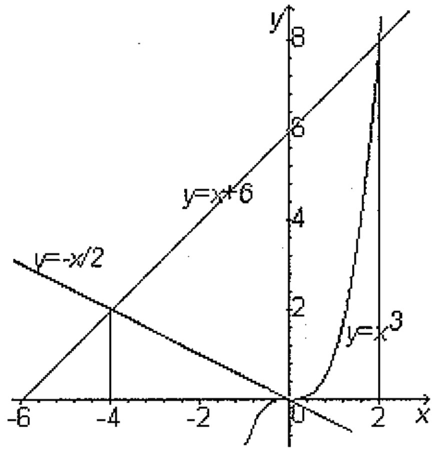
5. İkiden fazla eğri tarafından sınırlanan alanların hesaplanması ile ilgileneceğiz. Bunu yaparken iki eğri arasındaki alanın hesabından yararlanacağız. Aşağıdaki örneklerde bu durum incelenmektedir.

5.6.5. Örnek: *i.* $y = x + 6$, $y = x^3$, $y = -\frac{x}{2}$ eğrileri ile sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm: Hesaplayacağız alanı geometrik olarak gösterelim. Kesişme noktalarını bulalım. $x + 6 = -x/2$ den $x = -4$ ve $x + 6 = x^3$ den de $x = 2$ bulunur. Şekile bakılarak $[-4, 0]$ aralığındaki alan $y = x + 6$ ile $y = -x/2$ doğruları arasında ve $[0, 2]$ aralığındaki alan ise $y = x + 6$ doğrusu ile $y = x^3$ eğrisi arasındadır. Buna göre istenen alan

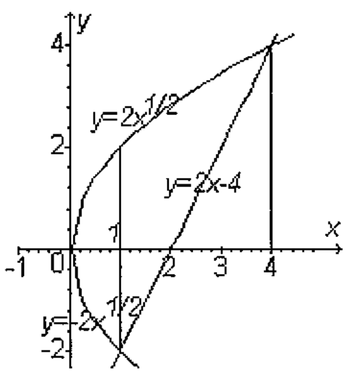
$$A = \int_{-4}^{0} [x + 6 - (- \frac{x}{2})]dx + \int_{0}^{2} [x + 6 - x^3]dx = 22\,br^2$$

olarak bulunur.



ii. $y = -2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = 2x - 4$ tarafından sınırlanan alanı bulunuz.

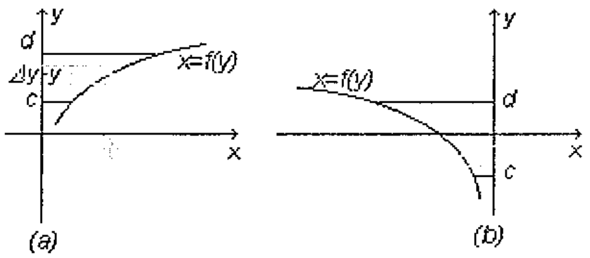
Çözüm: Bulunacak alan aşağıda geometrik olarak gösterilmiştir. Kesiştikleri noktalar, $2x^{1/2} = -2x^{1/2}$ denkleminden $x = 0$; $-2x^{1/2} = 2x - 4$ denkleminden $x = 1$; $2x^{1/2} = 2x - 4$ denkleminden de $x = 4$ olarak bulunur. Şekile dikkat edilirse [0, 1] aralığındaki alan $y = 2x^{1/2}$ ve $y = -2x^{1/2}$ eğrileri arasında ve [1, 4] aralığındaki alan $y = 2x^{1/2}$ eğrisi ve $y = 2x - 4$ doğrusu arasında kalmaktadır. Buna göre istenen alan



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 [2x^{1/2} - (- 2x^{1/2})]dx + \int_1^4 [2x^{1/2} - (2x-4)]dx \\
&= \int_0^1 4x^{1/2}dx + \int_1^4 [2x^{1/2} - (2x-4)]dx \\
&= 9\,br^2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Alan hesaplarken, bazı durumlarda, y ye göre de integral almak gerekebilir. $x = f(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile sınırlanan alanı bulurken bu yol kullanılır. Daha önce alanları x eksenine göre belirtirken eğrilerin yukarıda ve aşağıda olduğu durumlardan bahsettik. y eksenine göre değerlendirirken eğrilerin sağda ve solda olduğundan bahsedeceğiz. Örneğin



şeklinde verilen alanları gözönüne alalım. (a) daki alan

$$A = \int_c^d f(y)dy$$

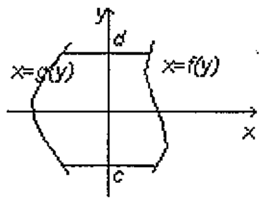
ve (b) deki alan da

$$A = -\int_c^d f(y)dy$$

formülü ile hesaplanır. Bu formülleri yazarken temsilci dikdörgenin alanından yararlanırız. Yine şekildeki alanı

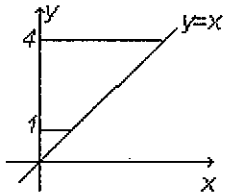
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

formülü ile hesaplarız. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyelim:



5.6.6. Örnek: *i.* $y = x$ eğrisi , $y = 1$, $y = 4$ doğruları ve y ekseni arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: Önce hesaplanacak alanı gemetrik olarak görelim. İstenen alan

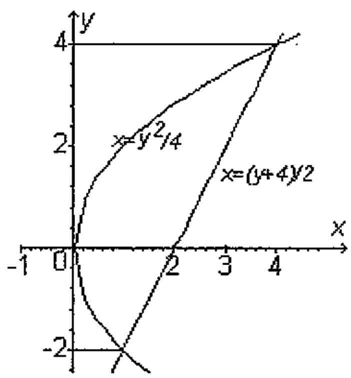


$$A = \int_1^4 y dy = \frac{15}{2} br^2$$

olarak bulunur.

ii. $y^2 = 4x$ ve $y = 2x - 4$ tarafından sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm: Bu alan 5.6.5. Örneğin *ii.* şıkkındaki alandır. Bu alanı bulurken y ye göre integral alacağız.



İstenen alan

$$A = \int_{-2}^{4} [\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}]dx = 9\,br^2$$

bulunur.

Belirli integralin bir uygulaması olarak, alanların hesaplanabileceğini gördük. Tersine bazı belirli integralleri alan yardımı ile hesaplayabiliriz. Bu çok kısıtlı haller için geçerli olduğunu unutmayınız.

5.6.7. Örnek: $\int_0^3 [\sqrt{9-x^2} - (3-x)]dx$ integralini hesaplayınız.

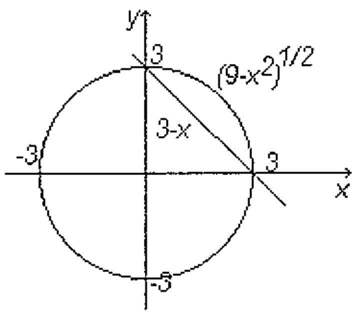
Çözüm: Bu integrali normal yollardan hesaplayabiliriz. Ancak daha basit olan aşağıdaki yolu kullanacağız. $y = \sqrt{9-x^2}$ denirse $x^2 + y^2 = 9$ bulunur. $y = 3 - x$ alalım. Bu eğrilerin [0, 3] aralığındaki grafiği aşağıda belirtilmiştir. Demek ki istenen integral şekildeki taralı alana karşılık gelmektedir.

$$\text{Taralı alan} = \frac{\text{Dairenin alanı}}{4} - \text{Üçgenin alanı} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_0^3 [\sqrt{9-x^2} - (3-x)]dx = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

olarak elde edilir. Tekrar hatırlatalım ki bu her integral için uygulanabilecek bir yol değildir.



Alıştırmalar

1. Aşağdaki her bir şıkta verilen eğriler ve doğrular arasındaki alanı bulunuz.

i. $y = \frac{1}{x^2},\ y = -x^2,\ x = 1,\ x = 2$ **ii.** $y = \sqrt{x},\ y = -x,\ x = 1,\ x = 4$
iii. $y = x^2,\ y - x = 2$ **iv.** $x = y^2, y - x = 2, y = -2,\ y = 3$
v. $y = x^2 + 2,\ y = 5$ **vi.** $y = 4 - x^2,\ y = -4$
vii. $y = x^2,\ y = 4x$ **viii.** $y = x^3,\ y = x^2$
ix. $y = x + 1, y = 7x\text{-}17, y = \text{-}2x\text{-}2$ **x.** $y = x,\ y = 3x,\ y = 4 - x$
xi. $y = x^3 - x,\ y = 0$ **xii.** $y = x^3 - x^2 - 6x,\ y = 0$

2. Merkezi orijinde ve yarıçapı r olan çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir. Bu çemberin sınırladığı dairenin alanını integral yardımı ile bulunuz.

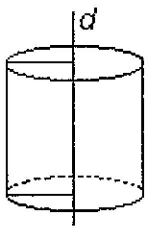
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin alanını integral yardımı ile bulunuz.

4. $y = x^{-\frac{1}{2}} \ln x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu eğri, bu eğrinin maksimum noktasından y eksenine paralel çizilen doğru ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

5.7. Cisimlerin Hacimleri

Bu başlık altında dönel cisimlerin ve dönel cisimlerden başka cisimlerin hacimlerinin hesabı üzerinde duracağız.

Dönel cisimlerin hacmi: Verilen bir eğrinin bir doğru erafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulmaya çalışacağız. Etrafında dönme yapılan doğruya dönme ekseni, eğrinin dönmesi ile oluşan cisime de dönel cisim denir. Örneğin bir düzgün silindir bir dönel cisimdir. Çünkü bir dikdörtgen kenarlarından birisi etrafında 360° döndürüldüğünde bir silindir elde edilir.



Dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için Disk metodu ve Silindirik Kabuklar Metodu dediğimiz iki metod kullanırız. Her iki metodun özünde bir düzgün silindirin hacmi vardır. Bilindiği gibi taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir düzgün silindirin V_s hacmi

$$V_s = \pi r^2 h$$

dır. Şimdi yukarıda bahsedilen metodları ayrı ayrı inceleyelim:

1. Disk Metodu: $y = f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ fonksiyonunun belirttiği eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. Bunun için bir kenarı dönme ekseni üzerinde buna paralel olan diğer kenarı da verilen eğri üzerinde olan, n tane dikdörtgene (dönme ekseni üzerindeki kenarların eşit olduğunu kabul edelim) bölelim. Bu dikdörtgenlerin dönmesi ile oluşan cismin hacmini yazabiliriz. Bilindiği gibi şekildeki temsilci dikdörtgenin x ekseni etrafında dönmesi ile yarıçapı $f(x)$ ve yüksekliği Δx olan bir silindir oluşur. Bu silindirin hacmi V_t ile gösterilirse

$$V_t = \pi[f(x)]^2 \Delta x$$

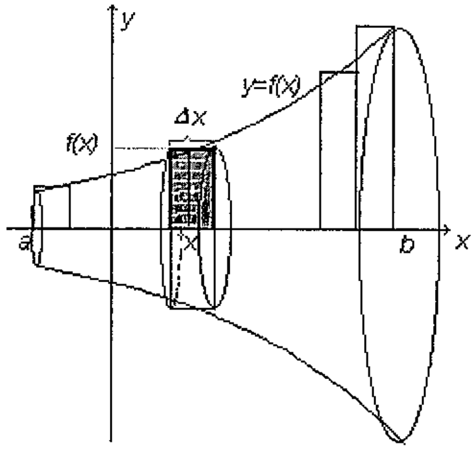
yazılır. $y = f(x)$ fonksiyonunun belirttiği eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin V hacmi yaklaşık olarak

$$V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} [f(z_i)]^2 \Delta x$$

olur. Burada z_i, dikdörtgenin dönme ekseninin karşısındaki kenarının eğriyi kestiği noktanın apsisidir. Dolayısıyla istenen V hacmi de

$$V = \lim_{n \to +\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(z_i)]^2 \Delta x$$

olarak bulunur. Hatırlanacağı gibi $\sum_{i=1}^{n} [f(z_i)]^2 \Delta x$, $[f(x)]^2$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki Riemann toplamıdır. Bu yüzden



$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(z_i)]^2\Delta x = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ve dolayısıyla

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ veya } V = \pi\int_a^b y^2 dx$$

formülü bulunur.

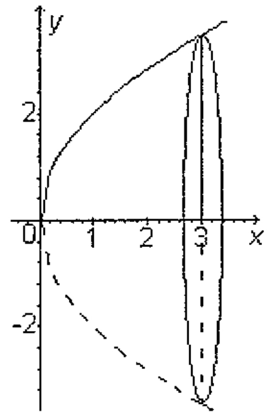
Benzer şekilde $x = f(y)$ eğrisinin $[c,\ d]$ aralığında kalan kısmının y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cisimin hacmi

$$V = \pi\int_c^d [f(y)]^2 dy \text{ veya } V = \pi\int_c^d x^2 dy$$

formülü ile hesaplanır.

5.7.1. Örnek: *i.* $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $[0,\ 3]$ aralığında kalan kısmı ile x ekseni arasındaki bölgenin x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce hacmini hesaplayacağımız cismi geometrik olarak görelim. Buna göre

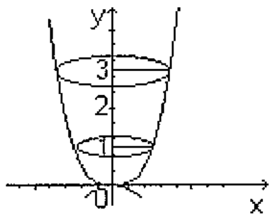


$$V = \pi \int_0^3 [2\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_0^3 4x dx = 18\pi \, br^3$$

bulunur.

ii. $y = x^3$ eğrisi, y ekseni, $y = 1$ ve $y = 3$ doğruları arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Hacmi hesaplanacak cisim şekilde gösterilmiştir. Bu durumda

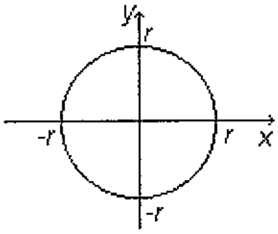


$$V = \pi \int_1^3 x^2 dy = \pi \int_1^3 y^{2/3} dy = \pi(\frac{9}{5}3^{2/3} - \frac{3}{5}) \, br^3$$

elde edilir.

iii. Merkezi orijinde yarıçapı r olan çemberin üst yarı düzlemde kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin (kürenin) hacmini bulunuz.

Çözüm: Bu çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir. Üst yarı düzlemde kalan kısmı $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nin eğrisidir. Buna göre istenen hacim



$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi r^3 \; br^3$$

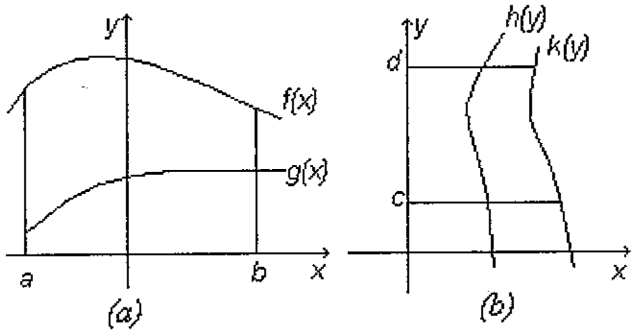
olarak bulunur.

Not: Aynı hacmi, simetriklikten dolayı,

$$\frac{V}{2} = \pi \int_{0}^{r} y^2 dx$$

formülü ile de bulabiliriz.

Bazen de iki eğri arasında kalan bölgenin x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan hacminin hesaplanması istenebilir. Bu durumda V hacmi



$$V = \begin{bmatrix} \text{Dıştaki eğrinin dönmesi} \\ \text{ile oluşan hacim} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{İçteki eğrinin dönmesi} \\ \text{ile oluşan hacim} \end{bmatrix}$$

kuralı ile bulunur. Buna göre (a) şeklindeki alanın x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cisimin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

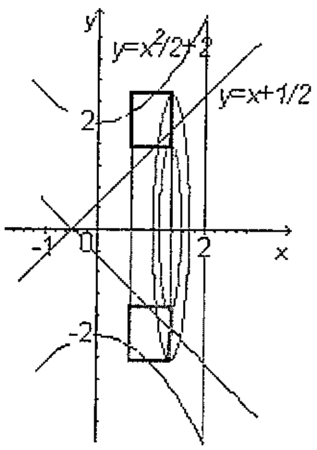
formülü ile bulunur. Benzer muhakeme ile (b) şekilindeki alanın y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi de

$$V = \pi \int_c^d [k(y)]^2 dy - \pi \int_c^d [h(y)]^2 dy = \pi \int_c^d \left([k(y)]^2 - [h(y)]^2\right) dy$$

formülü ile bulunur.

5.7.2. Örnek: *i.* $y = \frac{x^2}{2} + 2$ eğrisi ve $y = x + \frac{1}{2}$, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce bu kümeyi şekil olarak görelim.



Dönme eksenine göre dıştaki eğri $y = \frac{x^2}{2} + 2$ dir. Buna göre

$$V = \pi \int_0^2 \left([\frac{x^2}{2} + 2]^2 - [x + \frac{1}{2}]^2 \right) dx = \frac{293}{30} \pi \, br^3$$

olarak bulunur.

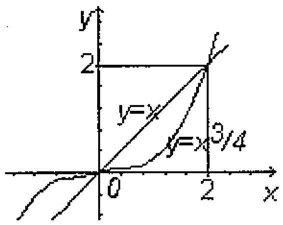
ii. $y = \frac{1}{4}x^3$ eğrisi ve $y = x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin koordinat düzleminin birinci bölgesinde kalan kısmının

a. y ekseni etrafında

b. x ekseni etrafında

dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce dönecek kısmı geometrik olarak görelim. Bu grafiklerin kesim noktalarının apsisleri $x^3/4 = x$ eşitliği ile bulunur. Bu noktalar $x = 0$ ve $x = 2$ dir. Ordinatları da $y = 0,\ y = 2$ olur.



a. Dönme ekseni $x = 0$ (y ekseni) olacağından bu eksene göre dıştaki eğri $x = \sqrt[3]{4y}$ dir. Bu durumda istenen hacim

$$V = \pi \int_0^2 \left([4y]^{2/3} - y^2\right) dy = \frac{32}{15}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

b. Dönme ekseni $y = 0$ (x ekseni) olacağından bu eksene göre $y = x$ dışta kalır. Bu durumda istenen hacim

$$V = \pi \int_0^2 \left(x^2 - [\frac{x^3}{4}]^2\right) dx = \frac{32}{21}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

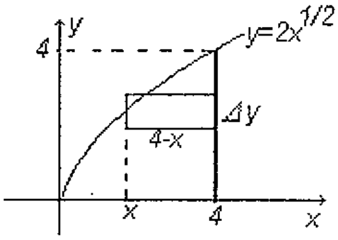
Dönel cisimlerin hacmini hesaplarken dönme ekseni olarak x ve y eksenlerini aldık. Ancak başka eksenler etrafında da dönme yapmak mükündür. Şimdi de x ve y eksenlerine paralel olan eksenler etrafında dönme yapıldığında hacmin nasıl hesaplanacağını inceleyelim. Bunu örneklerde izah edeceğiz.

5.7.3. Örnek: *i.* $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, x ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin $x = 4$ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Bir kenarı dönme ekseninde olan bir temsilci dikdörtgen çizelim. Şekildeki bu temsilci dikdörtgenin $x = 4$ etrafında dönmesi ile yüksekliği Δy ve taban yarıçapı $4 - x$ olan bir düzgün silindir elde edilir. Bu silindirin hacmi

$$V_t = \pi(4-x)^2 \Delta y$$

dir. y, $[0,\ 4]$ aralığında değişmektedir. Buna göre istenen hacim

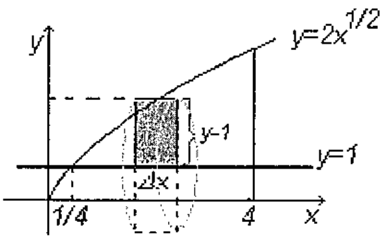


$$V = \pi \int_0^4 (4-x)^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - \frac{y^2}{4})^2 dy = \frac{512}{15}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

ii. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi $y = 1$, $x = 4$ doğruları arasında kalan alanın $y = 1$ etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce dönecek cismi geometrik olarak görelim.



Burada $y = 2\sqrt{x}$ ile $y = 1$ in kesiştiği noktanın apsisini bulalım.

$$2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

olur. Yine şekildeki temsilci dikdörtgenin $y = 1$ ekseni etrafında dönmesi ile yüksekliği Δx, taban yarıçapı $y - 1$ olan düzgün bir silindir oluşur. Bu silindirin hacmi

$$V_t = \pi(y-1)^2 \Delta x$$

olduğundan istenen hacim

$$V = \pi \int_{1/4}^{4} (y-1)^2 dx = \pi \int_{1/4}^{4} (2\sqrt{x}-1)^2 dx = \frac{117}{8}\pi\, br^3$$

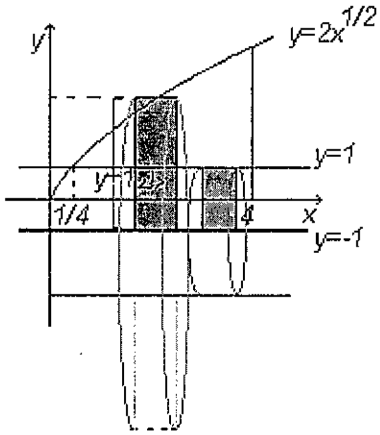
elde edilir.

iii. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, $x = 4$ ve $y = 1$ doğruları ile sınırlanan bölgenin $y = -1$ ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Şekildeki büyük temsilci dikdörtgenin $y = -1$ etrafında dönmesi ile taban yarıçap $y+1$ ve yüksekliği Δx olan düzgün bir silindir elde edilir.Benzer şekilde küçük dikdörtgenin $y = -1$ etrafında dönmesi ile taban yarıçapı 2 ve yüksekşliği Δx olan bir başka düzgün silindir bulunur. Dolayısıyla dönmesi istenen bölgede kalan dikdörtgenin $y = -1$ etrafında dönmesi ile oluşan hacim

$$V_i = \pi([2\sqrt{x}+1]^2 - 2^2)\Delta x$$

şeklindedir. İstenen hacim



$$V = \pi \int_{1/4}^{4} ([2\sqrt{x}+1]^2 - 2^2) dx = \frac{333}{8}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

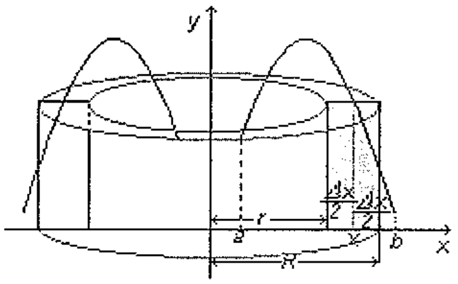
2. Silindirik Kabuklar Metodu: Bu metod, tabanı aynı merkezli çemberlerden oluşan, iç içe iki silindirin arasında kalan hacmin hesabının genişletilmişidir. Disk metodu ile hacim hesaplarken y ekseni (x ekseni) ve bu eksene paralel doğrular etrafında dönme ile oluşan cismin hacmini bulurken y ye (x e) göre integral alıyorduk. Bu metodda ise aynı hacmi bulurken x e (y ye) göre integral alacağız. Şekildeki temsilci dikdörtgenin y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi

$$V_t = \pi f(x)R^2 - \pi f(x)r^2$$

olur. Şimdi bu formülü daha kullanılır bir hale getireceğiz. Bunun için de

$$R = x + \frac{\Delta x}{2} \text{ ve } r = x - \frac{\Delta x}{2}$$

olmasını kullanacağız. Buna göre



$$\begin{aligned} V_t &= \pi f(x)R^2 - \pi f(x)r^2 \\ &= \pi f(x)(R^2 - r^2) \\ &= \pi f(x)(R - r)(R + r) \\ &= 2\pi x f(x)\Delta x \end{aligned}$$

bulunur. y ekseni etrafında döndürülecek bölge bu şekilde sonlu sayıda dikdörtgene ayrılır. Bunların dönmesi ile oluşan hacmin toplamı yaklaşık olarak dönel cismin hacmini verir. Bu toplam aynı zamanda $2\pi x f(x)$ fonksiyonunun $[a,\ b]$ kapalı aralığındaki Riemann toplamı olur. Buradanda istenen hacim

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

formülü ile hesaplanır.

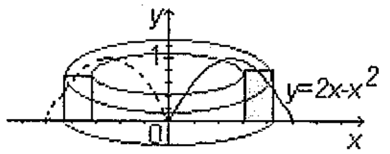
Benzer şekilde, $x = f(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasındaki bölgenin x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy$$

formülü ile hesaplanır.

5.7.4. Örnek: *i.* $y = 2x - x^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Verilen eğrinin x eksenini kestiği noktalar $2x - x^2 = 0$ eşitliğini sağlayan $x = 0$, $x = 2$ dir. y ekseni etrafında dönecek bölgeyi geometrik olarak gösterelim. İstenen hacim



$$V = 2\pi \int_0^2 xy dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8}{3}\pi \, br^3$$

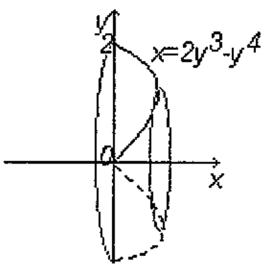
olarak bulunur.

ii. $x = 2y^3 - y^4$ eğrisi ile y ekseni arasında kalan bölgenin x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Bu eğrinin y eksenini kestiği noktalar

$$2y^3 - y^4 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ veya } y = 2$$

dir. Bu noktalar arasında fonksiyon pozitif değerler aldığından grafiği aşağıdaki şekilde çizilir.



Dönme x ekseni etrafındadır. Silindirik kabuklar metoduna göre istenen hacim

$$V = 2\pi \int_0^2 xydy = 2\pi \int_0^2 (2y^3 - y^4)ydy = \frac{64}{15}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

Silindirik kabuklar metodu ile iki eğri arasında kalan bölgenin bir eksen etrafında dönmesi ile oluşan hacimlerin bulunması mümkündür. Örneğin, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi ($[a, b]$ aralığında $g(x) < f(x)$ olmak üzere)

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

formülü kullanılır. x ekseni etrafında dönme için de benzer muhakeme uygulanır.

Silindirik kabuklar metodu x veya y eksenlerine paralel eksenler etrafındaki dönme ile oluşan hacimlerin hesabında da kullanılır. Dönme ekseni d, y eksenine paralel bir doğru olsun. $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında kalan kısmı ile x ekseni arasındaki bölgenin d ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım. Dönme ekseni verilen bölgenin sağ tarafında ise hacim

$$V = 2\pi \int_a^b (d - x)f(x)dx,$$

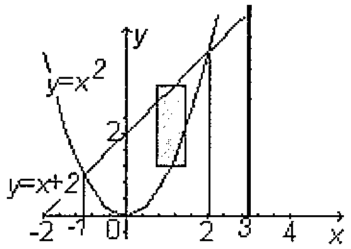
dönme ekseni verilen bölgenin sol tarafında kalıyorsa hacim

$$V = 2\pi \int_a^b (x - d)f(x)dx$$

formülü ile bulunur. Dönen bölge iki eğri arasında ise, $[a, b]$ aralığında $g(x) < f(x)$ olmak üzere, son iki formülde $f(x)$ yerine $f(x) - g(x)$ yazılarak işlem yapılır.

5.7.5. Örnek: *i.* $y = x^2$ ve $y = x + 2$ arasında kalan bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Dönecek cisim geometrik olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



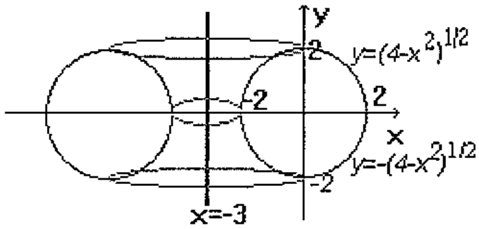
Bu bölgenin $x = 3$ ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi silindirik kabuklar metodu ile

$$V = 2\pi \int_{-1}^{2} (3 - x)(x + 2 - x^2)dx = \frac{45}{2}\pi\, br^3$$

olarak bulunur.

ii. $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile sınırlanan bölgenin $x = -3$ ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz. Bu cisime tor adı verilir.

Çözüm:



Bu şekile göre istenen hacim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-2}^{2} (x + 3)(\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2})dx \\ &= 4\pi \int_{-2}^{2} x\sqrt{4 - x^2}dx + 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx \end{aligned}$$

ile bulunur. Bu integrallerden birincisi değişken değiştirme metodu ile hesaplanır. $u = 4 - x^2$ denirse $dx = -2xdx$ olur. Sınırları yeni değişkene göre yazarsak

$$u(-2) = 0 \text{ ve } u(2) = 0$$

olup alt ve üst sınır eşit olduğundan bu integralin sonucu sıfırdır. İkinci integrali hesaplamak için $x = 2\sin t$ dönüşümü yapılır ve gerekli işlemlerden sonra

$$12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = 24\pi^2$$

bulunur. Dolayısıyla istenen hacim

$$V = 24\pi^2\, br^3$$

dür.

Dönel cisimlerin dışındaki bazı cisimlerin hacmi: Şimdi dönel cisimlerin dışındaki bazı cisimlerin hacmini de hesaplayabileceğimiz formül elde edeceğiz. Bunu yaparken konunun başında verdiğimiz disk metodunda elde edilen formülden yararlanacağız. Hatırlanacağı gibi $\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$ integrali bir dönel cismin hacmini verir. Bu integral ise $\sum \pi[f(x)]^2\Delta x$ toplamının limitidir. Burada $\pi[f(x)]^2$, temsilci dikdörtgenin dönmesiyle oluşan, silindirik bir dilimin tabanının alanıdır. Bu alanı $A(x)$ ile gösterirsek yukarıdaki toplam $\sum A(x)\Delta x$ şeklinde yazılır. Benzer muhakeme ile verilen bir cismin x ekseni üzerindeki izdüşümü olan $[a, b]$ aralığı bulunur ve bu cisim disk metodunda olduğu gibi x eksenine dik olarak dilimlenir. Taban şekilleri benzer olan bu dilimlerden temsilci bir tane alınır. Bu temsilci dilimin taban alanı $A(x)$ ve yüksekliği Δx ise hacmi $A(x)\Delta x$ olur. Bu şekildeki hacimlerin toplamının limiti

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

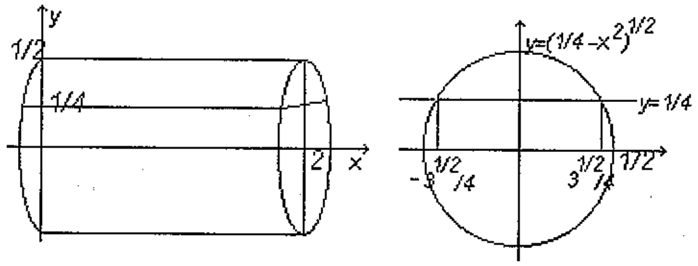
olur ve bu da istenen V hacmini verir. Eğer izdüşüm y ekseni üzerindeki $[c, d]$ aralığı olur ve dilimleme y eksenine dik yapılırsa hacmi bulmak için

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

formülü kullanılır.

5.7.6. Örnek: *i.* Evimizde silindir şeklinde bir su deposu yanal yüzeyi üzerinde yatık olarak kullanılmaktadır. Bu silindirin taban yarıçapı 1/2 m, yüksekliğide 2 m dir. Suların kesildiği bir zamanda depodan bir miktar su kullanılıyor. Çap boyunca ölçüm yapıldığında 25 cm kadar bir boşluğun olduğu görülüyor. Depodaki suyun miktarını bulunuz.

Çözüm: Önce verilenleri şekil üzerinde gösterelim.



Boş kısmın hacmini bulup silindirin hacminden çıkarırsak istenen miktar bulunmuş olur. Boş kısmın taban alanını bulalım. Tabanı çevreleyen çemberin denklemini $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ olarak yazarız. Bu durumda taban alanını bulma, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ çemberinin altında ve $y = \frac{1}{4}$ doğrusunun üstünde kalan alanı bulma problemine dönüşür. Önce bu problemi çözelim. Kesiştikleri noktaların apsisleri

$$\frac{1}{4} - x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ veya } x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

olur. Bu durumda istenen alan

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} m^2$$

olarak bulunur. Yapılacak bütün kesitlerin taban alanı eşit olacağından $A(x) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ olarak alınır. Böylece boş kısmın hacmi

$$V = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 (\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16})dx = 2(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16})\, m^3$$

dür. O halde M_s suyun miktarı

$$\begin{aligned} M_s &= \text{Silindirin hacmi} - \text{Boş kısmın hacmi} \\ &= \frac{\pi}{4}2 - 2(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}) \\ &= (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8})m^3 \end{aligned}$$

olur.

ii. Bir cismin tabanı, yarıçapı 4 birim olan bir dairedir. Cismin x eksenine dik düzlemlerle arakesiti eşkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: $A(x)$ fonksiyonunu bulurken tabanın daire oluşundan değil, kesiştiği düzlemlerle oluşan eşkenar üçgenlerden yararlanacağız. Bu daireyi merkezi orijine gelecek şekilde düzleme yerleştirelim. x eksenine dik olan ve eşkenar üçgenin çemberi kesen bir kenarının uzunluğu $a = 2\sqrt{16 - x^2}$ dir. Bir kenarının uzunluğu a olan eşkenar üçgenin alanı $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ olduğundan, bizim eşkenar üçgenin alanı

$$A(x) = \sqrt{3}\,(16 - x^2)$$

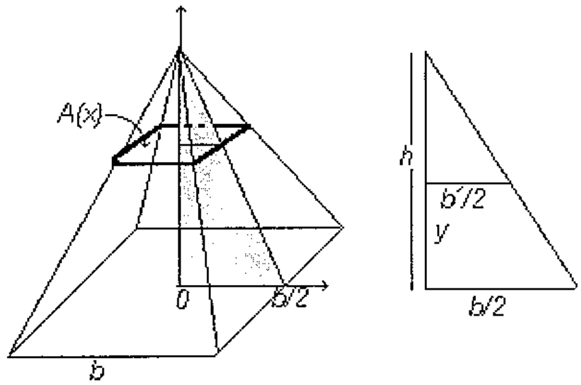
dir. Dolayısıyla istenen hacim

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)dx = \sqrt{3}\int_{-4}^{4}(16 - x^2)dx = \frac{256}{3}\sqrt{3}\,br^3$$

olarak bulunur.

iii. Yüksekliği h ve bir kenarının uzunluğu b olan kare tabanlı piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm: Piramidi y yüksekliğinde tabana paralel bir düzlemle kestiğimiz zaman bir kenarının uzunluğu b' olan bir kare elde edilir. Benzer üçgenlerden



$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \quad \text{veya} \quad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

yazılır. Böylece temsilci karenin alanı

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2$$

olur. Bu durumda istenen hacim

$$V = \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2 dy = \frac{1}{3} b^2 h \, br^3$$

olarak bulunur.

Alıştırmalar

1. $y^2 = 8x$ parabolü ve $x = 2$ ile sınırlanan bölgeyi gözönüne alalım.

i. Bu bölgenin birinci bölgede kalan kısmının x ekseni etrafında,

ii. Verilen bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında,

iii. Verilen bölgenin y ekseni etrafında
dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

2. $y = 4x - x^2$ parabolü ile x ekseni arasındaki bölgenin $y = 6$ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

3. $y = -x^2 - 3x + 6$ eğrisi ile $x + y - 3 = 0$ doğrusu arasındaki bölgenin
i. $x = 3$
ii. x ekseni
etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

4. Aşağıda a şıkkında verilen eğriler arasındaki bölgenin b şıkkında verilen eksen etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

i. $a.\ y = x^3,\ y = 4x;\ \ b.\ y = 8$ **ii.** $a.\ x + y = 3,\ y + x^2 = 3;\ b.\ x = 2$

iii.$a.\ y = x^3,\ y = 4x;\ b.\ x = 4$ **iv.** $a.\ y = 1 - x^2,\ x - y = 1;\ \ b.\ y = 3$

v. $a.\ x^2 + y^2 = 1;\ \ \ b.\ x = 5$ **vi.** $a.\ y = x^2 - 5x,\ y = 0;\ \ \ b.\ x = 0$

vii. $a.y = x^2, y^2 = 8x; b.\ x = 0$ **viii.** $a.y = x^3 + 1, x + 2y = 2, x = 1; b.x=0$

ix. $a.\ y^3 = x,\ y = 3,\ x = 0; b.\ x$ ekseni

5. Yüksekliği h ve tabanı r yarıçaplı bir daire olan düzgün bir koninin hacmini bulunuz.

6. Tabanı $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = -1 + \frac{x}{2}$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlanan cismin x eksenine dik düzlemlerle arakesiti eşkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

5.8. Yay Uzunluğu ve Dönel Cisimlerin Alanı

Yay uzunluğu: Önce, hangi eğrilerin yay uzunluklarını hesaplayabileceğimizi belirterek işe başlayalım. Bunun için bir tanım vereceğiz.

5.8.1. Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ bir aralıkta sürekli ise $f(x)$ fonksiyonuna bu aralıkta düzgün fonksiyon denir.

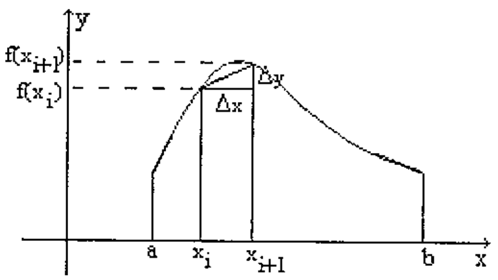
Şimdi bir $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün olan bir fonksiyonun yay uzunluğunu bulmaya çalışacağız. $[a, b]$ kapalı aralığı için $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ düzgün bölüntüsünü gözönüne alalım. Yay uzunluğunu hesaplarken yayı kirişler yardımıyla doğru parçalarına ayıracağız. Bu doğru parçalarının toplamı yaklaşık olarak yay uzunluğunu verecektir. Buna göre şekildeki temsilci parçanın uzunluğu $(x_i, f(x_i))$ noktasından $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ noktasına uzanan yay uzunluğunun yaklaşık değeridir. Bu doğru parçasının s_t uzunluğu

$$s_t = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

ve dolayısıyla verilen eğrinin s uzunluğu yaklaşık olarak

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

olur. $n \to +\infty$ için limit alınırsa



$$s = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

yazılır. $(x_i,\, x_{i+1})$ aralığında $f'(x)$ mevcut olduğundan Ortalama Değer Teoremine göre

$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=f'(c_i)\Rightarrow\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(c_i)$$

olacak şekilde $c_i\in(x_i,\, x_{i+1})$ vardır. Buna göre

$$s=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i$$

olur. Diğer yandan $f'(x)$, $[a,\, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ de aynı aralıkta süreklidir. $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i$, $\sqrt{1+(f'(c_i))^2}$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki Riemann toplamı olduğundan istenen uzunluk formülü

$$s=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

olarak bulunur.

5.8.2. Örnek: *i.* $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ eğrisinin $[\frac{1}{2},2]$ aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})$ olduğundan yay uzunluğu

$$\begin{aligned}s&=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\\&=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+[\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})\,]^2}\,dx\\&=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1/2}^{2}=\frac{33}{16}\,br\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. Aralarındaki uzaklık 200 m olan iki kule arasına bir elektrik kablosu çekilmek isteniyor. Bu kablonun kulenin ayaklarını birleştiren hatta en yakın noktası 150 m olarak ölçülüyor. Bu durumda kablonun teşkil ettiği eğrinin denklemi

$$y = 75\left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}\right)$$

olarak veriliyor. İki kule arasındaki kablonun uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun türevi

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}}\right)$$

olur. Buradan

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} - 2 + e^{-x/75})$$

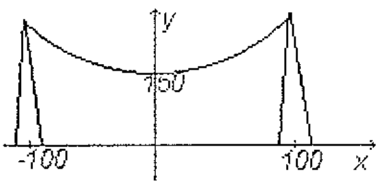
ve

$$1 + (y')^2 = \left(\frac{1}{2}(e^{x/150} + e^{-x/150})\right)^2$$

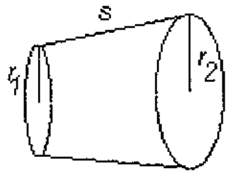
yazılır. Böylece kablonun uzunluğu

$$\begin{aligned} s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx &= \frac{1}{2}\int_{-100}^{100}(e^{x/150} + e^{-x/150})dx \\ &= 75(e^{x/150} - e^{-x/150})\Big|_{-100}^{100} \\ &= 215\,m \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Dönel cisimlerin alanı: Şimdi de dönel yüzeylerin alanı için bir formül elde etmeye çalışalım. Bunun için kesik koninin yanal yüzeyinin alanından faydalanacağız. Şekildeki kesik koninin yanal yüzeyinin alanı $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ olmak üzere $A = 2\pi rs$ dir. Dönel cismi, merkez ekseni dönme ekseni olan,



kesik konilerle örtebiliriz. İşte bu kesik konilerin yanal yüzeylerinin alanının toplamı yaklaşık olarak dönel yüzeyin alanını verir. Temsilci bir kesik koninin yanal yüzeyinin alanı

$$A_t = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta s_i = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

olur. Bu alanların toplamı yaklaşık olarak dönel yüzeyin alanını verir. Δx_i ler ne kadar küçük seçilirse yaklaşıklık o derece iyi olur. Bu durumda $[a, b]$ aralığında pozitif değerler alan $y = f(x)$ düzgün eğrisinin x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin alanı

Tanım 5.8.1

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

formülü ile hesaplanır. Karekökün dışındaki $f(x)$ in yerine verilen eğrinin dönme eksenine olan uzaklığı $r(x)$ olarak alınırsa daha genel olan

$$A = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

formül kullanılır. Eğer verilen aralıkta $f(x)$ pozitif ise $f(x) = r(x)$ olduğuna dikkat ediniz.

5.8.3. Örnek: $f(x) = x^3$ eğrisinin $[0, 1]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin alanını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 3x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} A = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx &= 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3(1 + 9x^4)^{1/2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{27}(10^{3/2}-1)\,br^2$$

bulunur.

Alıştırmalar

1. $y = x^2$ eğrisinin $[1,\ 5]$ aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulunuz.

2. $f(x) = x^2$ eğrisinin $[0, \sqrt{2}]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin alanını bulunuz.

3. $f(x) = ax + b$ doğrusunun $(x_1,\ y_1)$ noktasından $(x_2,\ y_2)$ noktasına uzanan kısmının uzunluğunu veren bir formül bulunuz.

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$ eğrisinin $[0,\ \frac{1}{3}]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin alanını bulunuz.

5.9. Has Olmayan İntegraller

$[a,\ b]$ aralığının sonlu ve bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun sınırlı ve parçalı sürekli olması halinde $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralini tanımladık. Böyle integrallere bazen has integral denir. İntegrasyon aralığının uç noktalarından en az birinin sonsuz veya integrandın $[a,\ b]$ aralığında sonlu sayıda noktada sınırsız olması halinde belirli integral kavramını tanımlamak istiyoruz. Bu tip integrallere has olmayan integral adı verilir. Örneğin

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x},\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1},\ \int_1^5\frac{dx}{\sqrt{x-1}},\ \int_{-2}^2\frac{dx}{(x+1)^2}$$

integrallerinin her biri has olmayan integraldir. Çünkü, ilk iki integralde integrasyon sınırlarından enaz biri sonsuz, son iki integralde ise integrasyon aralığında fonksiyon sınırsızdır.

Önce integral aralığının sınırsız olması halini gözönüne alarak has olmayan integralin tanımını verelim:

5.9.1. Tanım: i. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, +\infty)$ aralığında sürekli ise

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

ii. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, b]$ aralığında sürekli ise

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

iii. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında sürekli ise c herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Her bir durumda eğer limit mevcutsa has olmayan integrale yakınsak, aksi takdirde ıraksaktır denir.

5.9.2. Örnek: *i.* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - 0) = +\infty$$

olarak bulunur. Dolayısıyla bu has olmayan integral ıraksaktır.

ii. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

olur. Dolayısıyla verilen integral yakınsaktır.

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrand $(-\infty, +\infty)$ aralığında süreklidir. Bu integrali $c = 0$ alarak iki kısma ayıralım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan e^x \Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \arctan e^x \Big|_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\arctan e^b - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu integral yakınsaktır.

iv. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: İntegrand $(-\infty, +\infty)$ aralığında süreklidir. $c = 0$ alarak bu integrali iki kısma ayıralım.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_a = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{a^2}{2}\right) = -\infty$$

limit olmadığından $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ integrali ıraksaktır. (İntegralin ıraksadığını

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^2}{2} = \infty$$

olmasından da söyleyebiliriz).

5.9.3. Tanım: $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

limiti mevcutsa buna $f(x)$ fonksiyonunun $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki Cauchy Esas Değeri denir ve

$$CED\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

olarak yazılır.

5.9.4. Örnek: $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\infty,\ +\infty)$ aralığındaki Cauchy Esas Değerini bulunuz.

Çözüm:

$$CED\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p} xdx = \lim_{p\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-p}^{p} = 0$$

olur.

Cauchy Esas Değeri ile integral arasındaki ilişki şudur: *1.* Eğer integral yakınsaksa Cauchy Esas Değeri integralin değerine eşit olur.

2. İntegral ıraksak olduğu durumlarda Cauchy Esas Değeri bulunabilir. Örneğin, $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\infty,\ +\infty)$ aralığındaki Cauchy Esas Değeri ile bu aralıktaki integralini karşılaştırınız (5.9.3.Örneğin iv.şıkkı ile 5.9.4.Örneğe bakınız).

5.9.5. Tanım: i. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,\ b)$ aralığında sürekli ve b de sınırsız ise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx,$$

ii. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(a,\ b]$ aralığında sürekli ve a da sınırsız ise

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx,$$

iii. Eğer $f(x)$ fonksiyonu, (a, b) aralığında sınırsız olduğu bir c noktası hariç, $[a, b]$ aralığında sürekli ise

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Her bir durumda eğer limit mevcutsa has olmayan integrale yakınsak, aksi takdirde ıraksaktır denir.

5.9.6. Örnek: *i.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrand $x=1$ noktasında sınırsız, $[0,1)$ aralığında süreklidir. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^b\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left(-\sqrt{1-b^2}-1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen integral yakınsaktır.

ii. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u=\ln x$, $dv=dx$ diyerek kısmi integrasyon metodunu uygularsak

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x dx\\ &= \lim_{a\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_a^1\\ &= \lim_{a\to 0^+}(0-1-a\ln a + a)\\ &= -1\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lim\limits_{a\to 0^+}(a\ln a)=0$ olduğunu göstermek için L'Hospital kuralını kullandık.

iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integrali hesaplamak için, uygun bir nokta seçerek integrali iki kısma ayıracağız. Bu nokta $x=1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{c\to +\infty} \int_1^c \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{a\to 0^+} \left(2\arctan\sqrt{x}\right)\Big|_a^1 + \lim_{c\to +\infty} \left(2\arctan\sqrt{x}\right)\Big|_1^c \\
&= \pi
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Has olmayan integral kullanılarak, belirli integralin tanımına uymayan, bazı uygulamalar yapabiliriz.

5.9.7. Örnek: *i.* Merkezi orijinde ve yarıçapı r olan küre yüzeyinin alanını bulunuz.

Çözüm: Küre elde etmenin çeşitli yolları vardır. Biz $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ eğrisinin (çemberin üst yarıdüzlemde kalan kısmı) x ekseni etrafında dönmesi ile oluşturulan küreyi gözönüne alacağız. Hesaplamaları kolay yapma açısından bu küre yüzeyinin y ekseninin sağında kalan kısmının alanını bulup 2 ile çarpacağız. $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} = 2\pi \int_0^r f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx &= 2\pi \lim_{b\to r^-} \int_0^b \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\pi r \lim_{b\to r^-} \int_0^b \sqrt{r^2-x^2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \\
&= 2\pi r \int_0^r dx \\
&= 2\pi r^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $A = 4\pi r^2$ yazılır.

ii. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin çevresinin uzunluğunu integral yardımı ile bulunuz.

Çözüm: Bu merkezi orijinde yarıçapı r olan bir çemberdir. Bunun dörtte birinin uzunluğunu hesaplayıp 4 ile çarparsak istenen uzunluk bulunmuş olur. Verilen ifadede $y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{s}{4} &= \lim_{b\to r^-}\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx\\ &= r\lim_{b\to r^-}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}\\ &= r\lim_{b\to r^-}\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r\\ &= \frac{\pi}{2}r\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre istenen uzunluk $s = 2\pi r$ olarak bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki has olmayan integralleri hesaplayınız. Bu integrallerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını söyleyiniz.

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ **ii.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{x^2}dx$ **iii.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

iv. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ **v.** $\displaystyle\int_{3}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ **vi.** $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

vii. $\displaystyle\int_{1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ **viii.** $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2}$ **ix.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

2. $x^2+y^2=4$ çemberinin $x=-3$ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan cismin alanını bulunuz.

3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsinin x ekseni etrafında dönmesi ile meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

4. Gamma fonksiyonu $\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx,\ n>0$ olarak tanımlanıyor. Bu fonksiyonun $n=1,\,2,\,3$ için değerini bulunuz. Ayrıca, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ olduğunu gösteriniz (Kısmi integrasyon metodunu kullanınız).

5. $x\geq 0$ için $y=e^{-x}$ ve x ekseni ile sınırlanan sınırsız bölgenin alanını bulunuz.