GENEL MATEMATİK

Doç. Dr.
Ekrem KADIOĞLU
Atatürk Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Erzurum

Doç. Dr.
Muhammet KAMALİ
Atatürk Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Erzurum

Erzurum-2005

Önsöz

Üniversitede okuyan öğrencilerimizin problemlerinden birisi yararlanacağı Türkçe kaynakların sayısının az olmasıdır. Yabancı dilde yazılmış kitapları okuyup anlayacak kadar yabancı dil bilinmediğinden öğrenmek için yapılan araştırmalar çok dar kalıplarda kalmaktadır. Üniversitelerimizin birinci sınıfında okutulan ve genel olarak aynı konuları içeren Genel Matematik I-II, Yüksek Matematik I-II, Analize Giriş I-II, Analiz I-II gibi dersler için yukarıda belirttiğimiz problem, diğer derslere göre, biraz daha azdır. Çünkü bu dersler için yazılmış Türkçe kaynak sayısı diğer derslere göre daha çoktur. Kaynak sayısının çok oluşu konulara yaklaşıma zenginlik katacağı bir gerçektir. Hazırladığımız kitabın bu yönde öğrencilere katkı sağlayacağı kanaatindeyiz.

Bu kitap yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm ilerideki konuların daha iyi anlaşılmasına yarayacak temel kavramlardan oluşmuştur. Bu yüzden birinci bölümdeki konular daha önce görülmüş olsa bile hatırlanması açısından mutlaka gözden geçirilmesi gerekir. Diğer bölümler sıralanırken önceki bölümlerden yararlanma ilkesine bağlı kalınmış ve eserin bütünlüğü sağlanmıştır. Konuları sunarken yeteri kadar açıklama yapmaya ve bol örnek vermeye özen gösterilmiştir. Bütün gayretlerimize rağmen yine de bazı hatalarımız olacaktır. Bundan sonraki baskılarda daha az hata olması için okuyucularımızın uyarıları bizleri memnun edecektir.

Bu notun hazırlanmasında bizleri teşvik eden ve yapıcı ikazlarını esirgemeyen başta Doç. Dr. Ahmet Kaçar (Gazi Üniversitesi, Kastamonu Eğitim Fakültesi), Doç.Dr. Ahmet Küçük, Doç.Dr. Abdullah Kopuzlu, Doç.Dr. Murat Özdemir, Y.Doç.Dr. Sezgin Akbulut, Y.Doç.Dr. Halit Orhan, Y.Doç.Dr. Arzu Aykut, Y.Doç.Dr. Ömer Durmazpınar olmak üzere bölümdeki ve Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim ve İlköğretim Matematik Anabilim dallarındaki arkadaşlara teşekkür ederiz.

Bu yeni baskıda, önceki baskılarda görülen eksiklikler için düzeltmeler yapılmıştır.

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

1.1. Kümeler

Küme, iyi tanımlanmış tekrarsız nesnelerin bir topluluğudur. Bu nesnelere kümenin elemanları denir. Kümeler genellikle büyük harflerle, elemanlar ise küçük harflerle gösterilir. x, A kümesinin bir elemanı ise bunu $x \in A$; y, A kümesinin bir elemanı değilse bunu da $y \notin A$ ile gösteririz.

1.1.1. Örnek: *i.* Türk alfabesindeki 29 harfin oluşturduğu topluluk bir kümedir. Bu kümeyi T ile gösterelim. Buna göre a $\in T$, b $\in T$, z $\in T$ ancak $\alpha \notin T$ dir.

ii. Atatürk Üniversitesi kütüphanesinde bulunan kitapların topluluğu bir kümedir.

iii. Kütüphanede bulunan kitapların oluşturduğu topluluk bir küme değildir. Çünkü, "Kütüphane" nin hangi kütüphane olduğu belirtilmemiş yani, *iyi tanımlanmamıştır.*

Bu son örnekten anlaşılacağı gibi, bir kümeden sözedildiği zaman bu kümeye neyin ait olduğu ve neyin ait olmadığı tam olarak belirlenmelidir. Ayrıca kümede bir eleman sadece bir defa yazılır.

Kümeleri genel olarak üç yolla gösteririz:

1. *Açık olarak gösterme:* Kümenin elemanları $\{\,,\}$ parantezleri arasına tek tek aralarına virgül konarak yazılır.

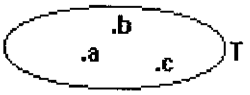
2. *Kapalı olarak gösterme:* Bu durumda $\{$ ve $\}$ parantezleri arasına kümenin temsilci bir x elemanını yazarak üst üste iki nokta koyduktan sonra x i karakterize eden özellik belirtilir. Burada x i karakterize eden özellik kümenin her elemanı tarafından taşınan ortak bir özelliktir. Yani, p özelliğini taşıyan elemanların kümesini A ile gösterirsek $A = \{x : x, \text{p özelliğine sahiptir}\}$ olarak yazılır. Kümeyi bu şekilde gösterdiğimiz zaman p özelliğine sahip *her* elemanın A kümesine ait olduğu kabul edilir.

3. *Venn diyagramı (şeması) ile gösterme:* Kümenin elemanları, kendisini kesmeyen, kapalı bir eğri içine tek tek yazılır.

1.1.2. Örnek: ***i.*** Türk alfabesinin ilk üç harfinden oluşan A kümesinin açık yazılışı $A = \{a, b, c\}$ dir.

ii. Türk alfabesindeki harflerin oluşturduğu T kümesinin kapalı gösterimi $T = \{x : x,$ Türk alfabesindeki harf$\}$ şeklindedir.

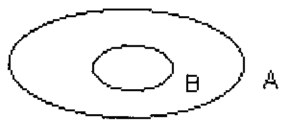
iii. Türk alfabesinin ilk üç harfinden oluşan A kümesinin Venn diyagramı ile gösterilişi



şeklindedir.

A ve B kümeleri aynı elemanlardan oluşmuşsa, A ve B eşit kümelerdir denir ve $A = B$ ile gösterilir. Buna göre, bir kümedeki elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. Yani, {a, b, c} kümesi ile {c, b, a} kümesi eşittir. Eğer iki küme eşit değilse bunlara farklı kümeler denir ve $A \neq B$ ile gösterilir.

A ve B iki küme olsun. B kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı oluyorsa B, A kümesinin altkümesidir denir ve $B \subset A$ ile gösterilir. (Bazı kaynaklar, B, A nın altkümesi ve $B \neq A$ olması durumu için $B \subset A$ sembolünü; B, A nın altkümesi ve B nin A ya eşit olması ihtimali için de $B \subseteq A$ sembolünü kullanır. Biz $B \subset A$ ile ikinci durumu kastediyoruz.). $B \subset A$ olması Venn diyagramı ile



şeklinde gösterilir. Eğer $B \subset A$ ve $A \subset B$ ise $A = B$ olduğu açıktır.

Bir kümenin hiç bir elemanı yoksa, bu kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Boş küme her kümenin altkümesi olarak kabul edilir. Elemanı olmayan kümeler birbirine eşit olacağından bir tek boş küme vardır.

1.2. Kümeler Arasındaki İşlemler

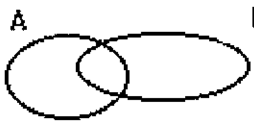
Burada, kümeler ile yapılan işlemlerin tanımını vereceğiz. Bu işlemler birleşim, arakesit ve iki kümenin farkıdır.

1.2.1. Tanım: A ve B kümelerinin elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin birleşimi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

yazılır. Venn diyagramı ile $A \cup B$ kümesini



şeklinde gösteririz. Birleşim ile ilgili

$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A$
$A \subset A \cup B, \; B \subset A \cup B$
$A \cup B = B \cup A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

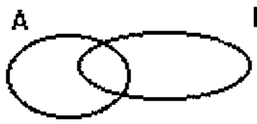
özellikler vardır.

1.2.2. Tanım: A ve B kümesinin ortak elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin arakesiti denir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

Tanıma göre

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

yazılır. Venn diyagramı ile $A \cap B$ kümesi



şeklinde gösterilir. Arakesit ile ilgili

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A$$
$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

özellikler vardır.

1.2.3. Tanım: A ve B kümeleri verilsin. A da bulunup B de bulunmayan elemanların kümesine A nın B kümesine göre farkı (veya B nin A ya göre tümleyeni) denir ve $A \backslash B$ (veya $A - B$) ile gösterilir.

Dolayısıyla

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

yazılır. Venn diyagramı ile

şeklinde gösterilir.

1.2.4. Tanım: Çalıştığımız kümeleri ihtiva eden kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir. Özel olarak, $E \backslash B$ kümesine B kümesinin tümleyeni denir ve B' ile gösterilir.

Yukarıda verdiğimiz işlemler arasında

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{(De Morgan kuralı)}$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{(De Morgan kuralı)}$$

bağıntıları vardır.

1.2.5. Örnek: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\}$ evrensel kümesi veriliyor. $A = \{1, 2, 3, 4, a, d, e\}$, $B = \{1, 3, 5, a, e\}$, $C = \{1, 4, 6, a, b, c, d\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeleri yazınız:

i. $A \cup B$ *ii.* $A \cap B$ *iii.* $(A \cap B) \cap C$ *iv.* $A \backslash C$ *v.* C'
vi. $C' \cup C$ *vii.* $C' \cap C$

Çözüm: ***i.*** A ve B kümelerinin elemanlarından oluşan küme, bu iki kümenin birleşimini verir. Bir kümede aynı eleman bir defa yazılacağından

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, d, e\}$$

dır.

ii. A ve B kümelerindeki ortak elemanlardan oluşan küme bu iki kümenin arakesitini verir. Buna göre

$$A \cap B = \{1, 3, a, e\}$$

dır.

iii. $A \cap B = \{1, 3, a, e\}$ ve $C = \{1, 4, 6, a, b, c, d\}$ kümelerindeki ortak elemanlar 1 ve a dır. O halde

$$(A \cap B) \cap C = \{1, a\}$$

olur.

iv. $A \backslash C$ kümesi A da olan ancak C de olmayan elemanlardan oluşur. Böylece

$$A \backslash C = \{2, 3, e\}$$

dir.

v. $C' = E \backslash C$ olduğundan

$$C' = \{2, 3, 5, 7, e\}$$

dır.

vi. $C' \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\} = E$ dir.

vii. C' ve C nin ortak elemanı olmadığından $C' \cap C = \emptyset$ dur.

Alıştırmalar

1. Evrensel küme $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olsun. $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 6\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki kümeleri bulunuz.
i. $A \cup B$ **ii.** $A \cap B$ **iii.** $A \backslash B$ **iv.** $B \backslash A$ **v.** A'

2. 1.Alıştırmadaki kümeleri gözönüne alarak aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu görünüz.
i. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **ii.** $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **iii.** $A \cap B \subset A$

3. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz.
( ) $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$ dir.
( ) $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$ dir.
( ) B herhangi bir küme olmak üzere $\phi \subset B$ dir.
( ) $A = B$ ise $A \subset B$ ve $B \subset A$ dır.
( ) $A \neq B$ ise ya $A \subset B$ ya da $B \subset A$ dır.

1.3. Sayılar

Kullanacağımız sayılar,

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ (doğal sayılar)

$\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ (tam sayılar)

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\}$ (rasyonel sayılar)

$\mathbb{R}$, reel sayılar

şeklinde gösterilir. Bu sayı kümeleri için

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

yazılır.

Bir de rasyonel olmayan reel sayılar vardır. Bunlara irrasyonel sayı denir. Örneğin, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, ... v.s. sayıları irrasyonel sayılardır. İrrasyonel sayıların kümesinin $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ olacağı açıktır. Bundan sonra, sayı denildiği zaman reel sayıdan bahsedildiği anlaşılacaktır.

Negatif olmayan reel sayı kümesi denildiğinde $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$; pozitif olmayan reel sayı kümesi denildiğinde de $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ kümesi anlaşılacaktır. Ayrıca, $\mathbb{R}^+$ ile pozitif reel sayılar kümesi, yani $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ve $\mathbb{R}^-$ ile de negatif reel sayılar kümesi, yani $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ gösterilecektir.

Sayılarla işlem yaparken dikkat edeceğimiz en önemli nokta, sıfırdan farklı bir sayının sıfır ile bölünemeyeceğidir. Matematikte sıfırdan farklı bir sayının sıfır ile bölümü tanımsızdır. Çünkü, $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{0}$ tanımlı olsaydı $\frac{a}{0} = c$ olacak şekilde bir c reel sayısı bulunurdu. Bu durumda $a = 0.c$, yani $a = 0$ olurdu. Bu da, $a \neq 0$ oluşuyla çelişir. O halde sıfırdan farklı bir sayıyı sıfır ile bölmek yasaktır diyebiliriz.

Şimdi de sıfırın sıfır ile bölümünün ne anlama geldiğini inceleyelim: Eğer $a = 0$ alınırsa $0 = 0.c$ eşitliği her c için doğru olur. c nin belirli bir değeri olmadığından $\frac{0}{0}$ belirsizlik olarak adlandırılır.

Herhangi iki a ve b reel sayısı için

$$a < b,\ a = b,\ b < a$$

ifadelerinden yalnız birisi doğrudur. Bu ifadelerle ilgili şu özellikler vardır:

1. $a < b$ ise $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a + c < b + c$ ve $a - c < b - c$ dir.

2. $a < b$ ise $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a.c < b.c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir.

3. $a < b$ ise $c \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere $a.c > b.c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir. Yani bir eşitsizlik negatif bir sayı ile çarpılırsa, eşitsizlik yön değiştirir. Özel olarak, $c = -1$ alınırsa $a < b$ iken $-b < -a$ olur.

4. $a = b$ ise $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ac = bc$; $a + c = b + c$; $a - c = b - c$ ve $c \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ dir.

5. $0 < a < b$ veya $a < b < 0$ ise $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ dır.

1.3.1. Örnek: *i.* $5 < 8$ eşitsizliğini -1 ile çarparsak $-8 < -5$ olur. $5 < 8$ eşitsizliğini, örneğin -4 ile çarparsak $-32 < -20$ olur. Aynı eşitsizliği 4 ile çarparsak $20 < 32$ olduğu görülür. Demek ki bir eşitsizlik negatif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

ii. $5 < 8$ iken $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$ dir.

Alıştırmalar

1. a rasyonel sayı ise $\frac{a}{2}$ sayısının da bir rasyonel sayı olduğunu gösteriniz.

2. Aşağıdaki işlemde yapılan hatayı belirtiniz:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2 \Rightarrow (x - x)(x + x) = x(x - x) \Rightarrow 2x = x \Rightarrow 2 = 1$$

3. $5 < 7$ eşitsizliğinin her iki yanını -3 ile çarpınız.

4. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz:
( ) İki rasyonel sayının toplamı yine bir rasyonel sayıdır.
( ) İki irrasyonel sayının toplamı yine bir irrasyonel sayıdır.
( ) $\frac{0}{0} = 1$ olur.
( ) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ olur.
( ) $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{0}$ tanımsızdır.

1.4. Üslü ve köklü ifadeler

$a \in \mathbb{R}$ ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere a nın kendisiyle n defa çarpımı a^n ile gösterilir. Yani,

$$a^n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ tane}}$$

dır. a^n sayısına a nın n.kuvveti denir. a sayısına taban, n sayısına da üs adı verilir. Üslü ifadenin verilişinden

$$a^{n+1} = a^n a$$

olduğu açıktır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ olmak üzere üslü ifade ile ilgili

$$a^k a^l = a^{k+l},\ (a^k)^l = a^{kl},\ (ab)^k = a^k b^k,\ \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}\ (a \neq 0),$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}\ (b \neq 0) \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

özellikler yazılır.

n negatif tam sayı olduğu zaman a^n den sözedebilmek için $a \neq 0$ olmalıdır. $a \neq 0$ olmak üzere

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{ve} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

olarak tanımlanır. $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ve k, l negatif tam sayı olmak üzere (1.4.1) şartları aynen geçerlidir. $a \neq 0$ olmak üzere

$$a^0 = 1$$

olarak tanımlanır.

Şimdi de a nın üssünün rasyonel sayı olması halini gözönüne alalım. Bunun için köklü ifade kavramını vereceğiz. n pozitif bir tam sayı ve $a \geq 0$ reel sayı olmak üzere, $x^n = a$ negatif olmayan bir tek c reel sayısı için sağlanır. Bu negatif olmayan c ye a sayısının n.kuvvetten kökü denir ve $\sqrt[n]{a} = c$ ile gösterilir. $a < 0$ ise n pozitif tek tam sayı olmak üzere $x^n = a$ bir tek b reel sayısı için sağlanır ve $\sqrt[n]{a} = b$ olarak yazılır. a nın $\frac{1}{n}$ inci kuvveti

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

olarak tanımlanır. $n = 2$ için $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ yazılır. Özel olarak $\sqrt{a}$, a nın karekökü, $\sqrt[3]{a}$ da a nın küpkökü diye okunur. $\sqrt[n]{a}$ ifadesi ile karşılaştığımızda aşağıdaki iki durumu gözönüne alacağız:

1. n çift tam sayı ise $a \geq 0$ olmalıdır. Çünkü negatif sayıların çift kuvvetten kökleri tanımlı değildir. Örneğin, $\sqrt{-1} = x$ olacak şekilde bir x reel sayısı yoktur. Aksi halde, böyle bir x reel sayısı olsaydı, $x^2 = -1$ olması gerekirdi. Halbuki, sıfırdan farklı reel sayıların karesinin pozitif, sıfırın karesininde sıfır olduğu bilinmektedir. O halde, $x^2 = -1$ olacak şekilde x reel sayısı olmadığından $\sqrt{-1}$ tanımlı değildir.

2. n tek tam sayı olması halinde n.kuvvetten kök alma işlemi her $a \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. Buna göre, n tek tam sayı olmak üzere negatif sayıların da n.kuvvetten kökünü alabiliriz. Örneğin, $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ dir.

$r = \frac{p}{q}$ rasyonel sayı ve $a > 0$ olsun. a nın r.kuvveti

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

olarak tanımlanır. İşlem yaparken $\frac{p}{q}$ kesrini en sade hale getirmek (pay ile paydanın en büyük ortak böleninin 1 olması) gerekir. a negatif bir sayı ise, gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra elde edilen $\frac{p}{q}$ de q nün tek tam sayı olması halinde bu tanım geçerlidir. Aksi halde çelişkili sonuçlara ulaşılır. Örneğin, $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ dir. Ancak $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ olduğunu düşünerek işlem yaparsak

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

gibi yanlış neticeye varılır. Bunun nedeni, 2 ile 6 nın en büyük ortak böleninin 2 olmasıdır. Doğru işlem yapılırsa $(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ bulunur.

$a \neq 0$ ve yukarıda 1. ve 2. maddedeki şartlar sağlanmak üzere $(a^{-1})^{p/q} = a^{-p/q}$ olarak tanımlanır. a ve b istenen şartları sağladığı zaman, köklü ifadeler için (1.4.1) özellikleri aynen geçerlidir.

Öneminden dolayı kareköklü ifadeler ile ilgili şu iki hatırlatmayı yapalım: Genel olarak

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

dir. $a > 0$ ve $b > 0$ olmak üzere

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

yazılır.

Şimdi de üssün irrasyonel sayı olması durumunu inceleyelim. Eğer r bir irrasyonel sayı ise a^r sayısından bahsedebilmek için $a > 0$ olmalıdır (a^r nin değerinin ne olduğu logaritma kullanılarak belirlenebilir). $a > 0$, $b > 0$ ve k, l irrasyonel sayılar olmak üzere (1.4.1) özellikleri aynen geçerlidir. Örneğin,

$$((5)^2)^{\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}}$$

dir. Ancak

$$((-5)^2)^{\sqrt{2}} = (-5)^{2\sqrt{2}}$$

yazılması doğru değildir. Çünkü eşitliğin birinci tarafı bir sayı olmasına rağmen ikinci taraf bir sayı değildir, yani tanımlanmamıştır.

Alıştırmalar

1. 2^{56} sayısının yarısını bulunuz.

2. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ eşitliğinin her zaman doğru olamayacağını a ve b ye sayısal değer vererek gösteriniz.

3. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz.

( ) a, k ve l keyfi sayılar olmak üzere $(a^k)^m = a^{k^m}$ olur.
( ) $a^n = na$ dır.
( ) a herhangi bir reel sayı olmak üzere $a^0 = 1$ olur.
( ) $-3^2 = (-3)^2$ dir.
( ) $(-2)^{\sqrt{2}}$ tanımlı değildir.

( ) $((-2)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$ dür.
( ) $((-2)^{2})^{\sqrt{2}} = (-2)^{2\sqrt{2}}$ dir.

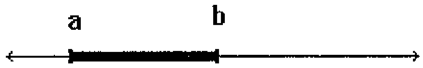
1.5. Aralıklar

Aralıklar, aşağıda görüleceği gibi, özel kümelerdir. Bundan sonra bu kümelerle sık sık karşılaşacağız.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

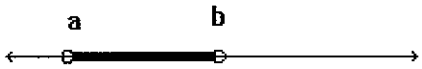
kümesine kapalı aralık denir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bu aralığın sayı doğrusu üzerindeki gösterilişi aşağıdaki şekildedir.



$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

kümesine açık aralık denir ve (a, b) ile gösterilir. Bu aralık sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki şekilde gösterilir.



Benzer olarak $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{ve} \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

kümelerine yarı açık yarı kapalı aralık denir ve sırasıyla $[a, b)$ ve $(a, b]$ ile gösterilir. Bu aralıkların birincisine soldan kapalı sağdan açık, ikincisine de soldan açık sağdan kapalı aralık denir. Bu aralıklar sayı doğrusu üzerinde sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilir.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$(c, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > c\}$
$[c, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq c\}$
$(-\infty, c) = \{x \in \mathbb{R} : x < c\}$
$(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq c\}$

şeklinde aralıklar yazılabilir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini de bir aralık olarak düşünebiliriz. Bu durumda $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, aralık olarak, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ şeklinde yazılır. Bunun geometrik gösterilişi sayı doğrusudur. Bu yüzden sayı doğrusuna reel eksen veya reel sayı ekseni denir. Doğal olarak, her reel sayıya sayı doğrusu üzerinde bir nokta ve tersine sayı doğrusu üzerindeki her noktaya da bir reel sayı karşılık gelir.

Not: $+\infty$ ve $-\infty$ birer sayı değil, sadece birer semboldür. $+\infty$ her pozitif sayıdan daha büyük; $-\infty$ her negatif sayıdan daha küçük olan birer "büyüklük" olarak düşünülür.

Alıştırmalar

1. $T_1 = [-2, 2]$, $T_2 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $T_3 = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ve $T_4 = \mathbb{R}$ olsun. Buna göre aşağıdaki kümeleri yazınız ve geometrik olarak gösteriniz:
i. $T_1 \cup T_2$ **ii.** $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4$ **iii.** $T_2 \backslash T_1$

1.6. Özdeşlikler

Özdeşliği daha iyi kavrayabilmek için

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ve } x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

eşitliklerini gözönüne alalım. Birinci eşitlik $x = \mp 1$ olması halinde sağlanırken, ikinci eşitlik x in bütün değerleri için sağlanmaktadır. Bu ikinci tip ifadelere özdeşlik adı verilir. Bir başka deyişle, aynı değişken içeren iki cebirsel ifade değişkenin her değeri için eşit oluyorsa bu iki ifade özdeştir denir. Burada cebirsel ifade ile değişkenler ve sayılarla ilgili toplama, çarpma, çıkarma, bölme ve kuvvet alma işlemlerini içeren ifadeleri kastediyoruz. Özdeşliği eşitlikten ayırmak için $\equiv$ sembolü kullanılır. Ancak, bir eşitliğin hangi hallerde özdeşlik olduğunu bildiğimizden özdeşlikleri göstermek için de $=$ (eşitlik) işaretini kullanacağız. Bazı önemli özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$\vdots$$

Bu formüllerin genel hali $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

şeklinde verilir. Buna binom (iki terim) açılımı denir. Burada $\binom{n}{r}$, $0 \le r \le n$ olmak üzere

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dir. $n! = 1.2.3.\cdots.(n-1)n$ dir. Buna göre,

1!=1, 2!=1.2=2, 3!=1.2.3=6, 4!=1.2.3.4=3!.4=24

olur. $0! = 1$ kabul edilir.

$(x+y)^n$ nin binom açılımı ile ilgili şu özellikler vardır:

1. Terim sayısı $n+1$ dir.
2. İlk terim x^n dir ve x in kuvvetleri birer birer azalırken, y nin kuvvetleri birer birer artar ve son terim y^n dir.
3. Herhangi bir terimde x ile y nin kuvvetleri toplamı daima n dir.
4. Baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin katsayıları eşittir.
5. k.terimin katsayısı $\binom{n}{k-1}$ dir.

1.6.1. Örnek: *i.* $(a+2x)^8$ ifadesinin binom açılımını bulunuz.

ii. $(1.01)^{10}$ sayısınının virgülden sonraki ilk beş basamağını tam olarak (yani 10^{-5} tamlıkla) yazınız.

Çözüm: *i.* Binom açılımında $n=8$, $x=a$ ve $y=2x$ alınarak

$$(a+2x)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7 2x + \binom{8}{2}a^6(2x)^2 + \cdots + \binom{8}{7}a(2x)^7 + \binom{8}{8}(2x)^8$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}(a+2x)^8 &= a^8 + 16a^7x + 112a^6x^2 + 448a^5x^3 + 1120a^4x^4 \\ &\quad + 1792a^3x^5 + 1792a^2x^6 + 1024ax^7 + 256x^8\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $(1.01)^{10} = (1+10^{-2})^{10}$ dır. Bu dikkate alınarak

$$(1.01)^{10} \approx 1 + 10\cdot 10^{-2} + 45\cdot 10^{-4} + 120\cdot 10^{-6} = 1.10462$$

bulunur. Burada $\approx$ işareti ile yaklaşık değer olduğunu belirtiyoruz.

Karşılaşacağımız diğer özdeşlikler de şunlardır:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ &\vdots \\ x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ tek sayı olmak üzere

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

şeklindedir.

$n > 2$ ve n nin tek olmadığı durumlarda da $x^n + y^n$ ifadesini çarpanlara ayırmak mümkündür. Ancak bunun için yukarıda verilen kural geçerli değildir. Şunu hatırlatmalıyız ki bir ifade ile onun çarpanlara ayrılmışı özdeştir.

1.6.2. Örnek: ***i.*** x^3+8 ve ***ii.*** x^4+16 ifadelerinin özdeşini yazınız.

Çözüm: ***i.*** $x^3+8 = x^3+2^3$ olarak yazılır. Burada $n=3$ tek tam sayı olduğundan yukarıdaki özdeşliği kulanarak

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$$

yazılır.

ii. $x^4+16 = x^4+2^4$ dür. Burada $n=4$ çift tam sayı olduğundan yukarıdaki formülü kullanamayız. Ancak yine de bu ifadeyi

$$\begin{aligned} x^4 + 2^4 &= x^4 + 8x^2 + 2^4 - 8x^2 \\ &= (x^2+2^2)^2 - 8x^2 \\ &= (x^2 + 2^2 - \sqrt{8}\,x)(x^2 + 2^2 + \sqrt{8}\,x) \end{aligned}$$

şeklinde çarpanlara ayırabiliriz.

Alıştırmalar

1. $(1.02)^5$ ve $(1.03)^4$ sayılarının hangisi büyüktür.

2. $(\frac{1}{2}+2x)^6$ ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır? Açılım yapmadan 4.terimi bulunuz. Ayrıca bu açılımdaki katsayıların toplamı hakkında ne söylersiniz?

3. $(1+x)^n$ için binom açılımını kullanarak

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

olduğunu gösteriniz. Bunun aslında $(1+x)^n$ açılımındaki katsayıların toplamı olduğuna dikkat ediniz.

4. Aşağıdaki ifadelerin özdeşini yazınız.
i. x^2-1 **ii.** x^2-3 **iii.** x^5+32 **iv.** x^3+2

5. i. $x-1$ ifadesini bir çarpanı $\sqrt[3]{x}-1$ olan iki ifadenin çarpımı olarak yazınız.
ii. $x-1$ ifadesini bir çarpanı $\sqrt{x}-1$ olan iki ifadenin çarpımı olarak yazınız.

1.7. Denklemler

Denklemlerin daha iyi tanınması için

$$x^2-4=(x-2)(x+2) \text{ ve } x^2-1=0$$

ifadelerini gözönüne alalım. Bu ifadelerin birincisi x in her değeri için sağlandığından bir özdeşliktir. İkinci ifade ise $x=\mp 1$ için doğrudur. x yerine ∓ 1 den farklı bir değer yazılırsa eşitlik doğru olmaz. Böyle eşitliklere, yani bilinmeyen içeren ve bilinmeyenlerin özel değerleri için sağlanan eşitliklere denklem denir. Bilinmeyenlerin denklemi sağlayan değerlerine denklemin kökleri veya çözümleri, köklerin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi, köklerin bulunması için yapılan işleme denklemi çözme adı verilir. Bazı eşitlikler bilinmeyenlerin hiç bir değeri için sağlanmayabilir. Bu eşitliklere de denklem diyeceğiz ve çözüm kümesi olarak boş kümeyi alacağız.

Bir bilinmeyenli denklemlerle ilgileneceğiz. Onun için bu kitapta denklem denilince bir bilinmeyenli denklemden sözedildiği anlaşılacaktır. $n \in \mathbb{N}$ ve a_n, a_{n-1}, ..., $a_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \qquad \textbf{(1.7.1)}$$

şeklindeki ifadeye polinom denklem, x in en büyük kuvveti olan n yede denklemin derecesi denir.

$n = 1$ için (1.7.1), $ax + b = 0$ denklemine dönüşür. Bu denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-\frac{b}{a}\}$ dır. Bazı denklemler birinci dereceden değildir, ancak çözümleri birinci dereceden denklemler yardımıyla bulunur (bununla ilgili örnek aşağıda verilmiştir).

1.7.2. Örnek: Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

i. $3x + 6 = 0$ *ii.* $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ *iii.* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-3x+2}$

Çözüm: *i.*

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

olur. Çözüm kümesi $Ç = \{-2\}$ yazılır.

ii.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1} \Rightarrow 2(x+1) + 3(x-1) = 9 \quad (x \neq -1, x \neq 1)$$

olur. Buradan $x = 2$ bulunur.

iii. Verilen denklem düzenlenerek

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-3x+2} \Rightarrow (x-1) + (x-2) = 1 \quad (x \neq 1,\ x \neq 2)$$

yazılır. Buradan $x = 2$ bulunur. Ancak, $x = 2$ paydayı sıfır yapar. O halde bu bir çözüm olamaz. Dolayısıyla, $Ç = \emptyset$ dir.

Bu son örnekten görüldüğü gibi, birinci dereceden denklem yardımıyla çözülen bir denklemin, çözüm bulunduktan sonra, bulunan kökler için sağlanıp sağlanmadığı mutlaka kontrol edilmelidir.

$n = 2$ için (1.7.1) denklemi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ikinci dereceden denkleme dönüşür. Bu denklemi çözdüğümüzde, $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

bulunur. Buna göre,

1. $\Delta > 0$ ise x_1 ve x_2 farklı iki köktür.
2. $\Delta = 0$ ise $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ olup iki katlı kök vardır. Yani kökler çakışıktır.
3. $\Delta < 0$ ise x_1 ve x_2 birer reel sayı değildir. Dolayısıyla reel kök yoktur.

İkinci dereceden olmadığı halde ikinci dereceden denklemlere dönüştürülerek çözülebilen denklemler vardır. Bu denklemler çözüldükten sonra bulunan köklerin verilen denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmeli ve sağlayan değerler kök olarak alınmalıdır.

1.7.3. Örnek: Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

i. $x^2 + x - 2 = 0$ *ii.* $x^2 + 2x + 1 = 0$ *iii.* $-x^2 + 3x - 5 = 0$
iv.. $\sqrt{x+3} = x - 3$

Çözüm: *i.* $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ olduğundan iki farklı reel kök vardır. $\sqrt{\Delta} = 3$ olduğundan

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ ve } x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

bulunur.

ii. $\Delta = 4 - 4 = 0$ olduğundan çakışık kök vardır. Bunlar

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

olarak bulunur.

iii. $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ olduğundan reel kök yoktur.

iv.

$$\sqrt{x+3} = x - 3 \Rightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemi çözersek $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ bulunur. Bu değerler $\sqrt{x+3} = x - 3$ denkleminde yerine yazılırsa, $x_1 = 6$ için $3 = 3$ olduğu halde, $x_2 = 1$ için $2 = -2$ gibi anlamsız bir durumla karşılaşırız. O halde verilen denklemin çözüm kümesi Ç $= \{6\}$ olur.

Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak için formüller olmasına rağmen karışık olmaları yüzünden yaygın olarak kullanılmazlar. Derecesi 5 ve 5 den büyük olan denklemlerin köklerini ise ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerde olduğu gibi, katsayılardan oluşan terimlerin kökleri yardımıyla bulamayız. Bu yüzden derecesi ikiden büyük olan denklemlerin kökleri ile bazı özel durumlarda ilgileneceğiz. Aşağıdaki teorem, katsayıları tam sayı olan polinom denklemlerin rasyonel kökleri hakkında bilgi verir.

1.7.4. Teorem: $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ birer tam sayı olmak üzere

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

denkleminin $\frac{p}{q}$ şeklinde rasyonel kökü varsa p, a_0 ı ve q, a_n yi tam olarak böler.

İspat: İspatı p ile q nün aralarında asal (p ile q nün en büyük ortak böleni 1) olması durumu için yapmak yeterlidir. $\frac{p}{q}$ verilen denklemin bir kökü olduğundan

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$$

yazılır. Paydaları eşitleyip gerekli düzenleme yapılırsa

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

veya

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

yazılır. Burada parantez içindeki ifade tam sayı olduğundan p, $-a_0 q^n$ yi tam olarak böler. p ile q aralarında asal olduğundan p ile q^n de aralarında asaldır. Dolayısıyla p nin $-a_0 q^n$ yi tam olarak bölmesi a_0 ı tam olarak bölmesi demektir. Diğer yandan

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

ifadesi

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

yazıldığından, yukarıdaki muhakemeye benzer olarak, q nün a_n yi böldüğü görülebilir.

Bu teoreme göre $p(x)$ polinom olmak üzere $p(x) = 0$ denkleminin rasyonel kökleri yukarıdaki şartı sağlayan $\frac{p}{q}$ rasyonel sayıları (eğer $a_n = 1$ ise $p(x) = 0$ denkleminin kökleri a_0 ı bölen p tam sayıları) arasından aranır. Örneğin, $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin rasyonel kökü varsa bunlar 1 in bölenleri olan -1 veya $+1$ dir. $p(1) = 0$ ve $p(-1) \neq 0$ dır. O halde $x = 1$, $p(x) = 0$ denkleminin köküdür. Bu denklemin diğer köklerini bulmak için $p(x)$, $(x-1)$ ile bölünür (kalanın sıfır olduğuna dikkat ediniz) ve elde edilen üçüncü dereceden denklemin kökleri araştırılır.

1.7.5. Örnek: 1.7.4. Teoremi kullanarak $\sqrt{3}$ ün rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{3}$ eşitliğinden $x^2 - 3 = 0$ denklemi yazılır. $\sqrt{3}$, bu denklemin bir köküdür. $x^2 - 3 = 0$ denkleminin rasyonel kökü olursa bu, 1.7.4. Teoreme göre, $1, -1, 3, -3$ olması gerekir. $\sqrt{3}$, bu köklerden birisi değil, ancak $x^2 - 3 = 0$ denkleminin köküdür. O halde $\sqrt{3}$ rasyonel sayı olamaz.

Alıştırmalar

1. a, b, c birer reel sayı olmak üzere $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ denklemini çözünüz.(*Yol Gösterme: Önce denklemi x^2 ile bölüp sonra ortak katsayı parantezine alarak denklemin*

$$a(x + \frac{1}{x})^2 + b(x + \frac{1}{x}) + c - 2a = 0$$

şekline geldiğini görünüz.)

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

i. $-3x + 7 = 0$	**ii.** $x^5 + 4x - 3 = 6 - x + x^5$	**iii.** $4x = 0$
iv. $x^2 - 7x = 0$	**v.** $x^2 + x + 25 = 0$	**vi.** $(x-3)^2 = 5$
vii. $\sqrt[3]{x-1} = 3$	**viii.** $\sqrt{x-3} = x + 3$	**ix.** $\frac{1}{x} + (x - 1 + \frac{1}{x}) = 0$

3. 1.7.4. Teoremi kullanarak $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

4. Aşağıdaki polinomların köklerini bulunuz.

i. $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ **ii.** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
iii. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ **iv.** $x^3 + x - 2 = 0$

1.8. Eşitsizlikler

a ve b $(a \neq 0)$ birer reel sayı olmak üzere,

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0$$

ifadelerine birinci dereceden eşitsizlik denir. Bu tip eşitsizlikler, örneğin $a > 0$ olmak üzere

$$ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

gibi normal yolla çözülebildiği gibi, tablo yaparak da çözülebilir. Buna işaret tablosu denir ve aşağıdaki gibi düzenlenir.

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	a ile ters işaret	o	a ile aynı işaret

1.8.1. Örnek: *i* deki ifadenin işaretini inceleyiniz, *ii* ve *iii* deki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

i. $3x - 6$ *ii.* $3x - 6 \leq 0$ *iii.* $\frac{3x-6}{-x+1} \geq 0$

Çözüm: *i.* $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ olur. $a = 3$ pozitif olduğundan işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x			2		
$3x-6$	$-$	$-$	o	$+$	$+$

ii. *i* deki tabloya göre istenen küme $Ç = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ olur.

iii. Önce $\frac{3x-6}{-x+1}$ ifadesinin işaret tablosunu yapalım:

x			1		2		
$3x-6$	$-$	$-$	$\vert$	$-$	o	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	o	$-$	$\vert$	$-$	$-$
$\frac{3x-6}{-x+1}$	$-$	$-$	$\Vert$	$+$	o	$-$	$-$

Bu tabloya göre çözüm kümesi $Ç = (1, 2]$ olarak yazılır.

$a,\ b,\ c\ (a \neq 0)$ reel sayılar olmak üzere

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0$$

ifadelerine ikinci dereceden eşitsizlik denir. Bu eşitsizliklerin çözümü, $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaretinin incelenmesi ile bulunur. Bunun için aşağıdaki üç durum gözönüne alınacaktır:

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı reel kökü vardır. Bunları $x_1,\ x_2$ ile gösterelim $(x_1 < x_2)$. Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi düzenlenir.

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	a ile aynı işaret	o	a ile ters işaret	o	a ile aynı işaret

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çakışık kökü vardır. Bu durumda $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işareti aşağıdaki tablo ile incelenir.

x		$x_1 = x_2$	
ax^2+bx+c	a ile aynı işaret	o	a ile aynı işaret

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ iken $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökü yoktur. Bu durumda da işaret tablosu aşağıdaki şekilde düzenlenir.

x	
ax^2+bx+c	a ile aynı işaret

1.8.2. Örnek: Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.
i. $3x^2 - 7x + 2 < 0$ *ii.* $x^2 + 2x + 1 > 0$ *iii.* $\frac{x^2+x+2}{x^2+2x-3} \geq 0$

Çözüm: *i.* $3x^2 - 7x + 2 = 0$ denklemini çözdüğümüzde $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2$ bulunur. İki farklı kök olduğundan işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x			$x_1 = \frac{1}{3}$			$x_2 = 2$		
$3x^2-7x+2$	$+$	$+$	o	$-$	$-$	o	$+$	$+$

Bu tabloya göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$$Ç = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < 2\}$$

olarak yazılır.

ii. $x^2+2x+1=0$ denklemini çözdüğümüz zaman $x_1=x_2=-1$ bulunur. Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x			-1		
x^2+2x+1	$+$	$+$	o	$+$	$+$

Bu tabloya göre çözüm kümesi

$$Ç=\{x\in\mathbb{R}:x<-1\}\cup\{x\in\mathbb{R}:x>-1\}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

olarak yazılır.

iii. $x^2+x+2=0$ denkleminin reel kökü yoktur. $x^2+2x-3=0$ denkleminin kökleri ise $x_1=-3$ ve $x_2=1$ dir. Şimdi işaret tablosunu yapalım.

x			$x_1=-3$			$x_2=1$		
x^2+x+2	$+$	$+$		$+$	$+$		$+$	$+$
x^2+2x-3	$+$	$+$	o	$-$	$-$	o	$+$	$+$
$\frac{x^2+x+2}{x^2+2x-3}$	$+$	$+$	$\Vert$	$-$	$-$	$\Vert$	$+$	$+$

Bu tabloya göre çözüm kümesi

$$Ç=\{x\in\mathbb{R}:x<-3\}\cup\{x\in\mathbb{R}:x>1\}$$

olarak yazılır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

i. $4x+3>2x-5$ **ii.** $-5\le\frac{3-4x}{2}<1$ **iii.** $\frac{1}{x^2}<100$

iv. $\frac{5}{7-2x}>0$ **v.** $5+\sqrt{x}<1$ **vi.** $3x^2+5x-2<0$

vii. $2x^2+9x+4\ge 0$ **viii.** $\frac{3}{x-9}>\frac{2}{x+2}$ **ix.** $\frac{3x+2}{7-2x}>0$

2. $p(x)=ax^2+bx+c$ polinomunun kökleri x_1 ve x_2 olsun ($x_1<x_2$ olduğunu kabul edelim). Buna göre, polinomun köklerini bulmadan, verilen bir m sayısının $(x_1,\ x_2)$ aralığında veya bu aralığının dışında olması durumunu inceleyiniz. Ayrıca m, $(x_1,\ x_2)$ aralığının dışında ise x_1 den küçük veya x_2 den büyük olma durumunu araştırınız.

1.9. Mutlak Değer

Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir ve

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma göre, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \geq 0, \quad -|x| \leq x \leq |x|, \quad |x|^2 = x^2$$

yazılır. Yine,

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ veya } x \geq a$$

$$|x| = a \Leftrightarrow x = -a \text{ veya } x = a$$

olduğu tanımdan görülür.

Mutlak değerle ilgili

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

özellikler yazılabilir.

Bir x reel sayısının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu x sayısına karşılık gelen noktanın 0 başlangıç noktasına olan uzaklığını verir. $x, y \in \mathbb{R}$ sayılarına sayı doğrusu üzerinde karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklık, $|x - y|$ dir.

1.9.1. Örnek: *i.* $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2\}$ kümesini bir aralık olarak yazınız.

ii. $|x-1| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

iii. $||x|-5| = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: *i.* Mutlak değerin özelliklerinden

$$|x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her yanına 3 ilave edilerek

$$1 < x < 5$$

bulunur. Dolayısıyla, $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2\} = (1, 5)$ olur.

ii. Mutlak değerin özelliklerinden yararlanarak

$$|x-1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm kümesi $Ç = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$ olur.

iii. $||x|-5| = 7$ olması

$$|x|-5 = 7 \quad \text{veya} \quad |x|-5 = -7$$

demektir. Bu denklemleri ayrı ayrı çözelim. Birinci denklemden

$$\begin{aligned} |x|-5 = 7 &\Rightarrow |x| = 12 \\ &\Rightarrow x = -12 \text{ veya } x = 12 \end{aligned}$$

bulunur. İkinci denklemden ise

$$|x|-5 = -7 \Rightarrow |x| = -2$$

yazılır. Mutlak değerin tanımına göre $|x|$ daima pozitif bir tam sayıdır. O halde, $|x| = -2$ denkleminin çözüm kümesi boştur. Dolayısıyla verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-12, 12\}$ olarak yazılır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki işlemde yapılan hatayı bulunuz.

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2} = -1$$

2. Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözümünü bulunuz.
i. $|5x-1| > 7$ **ii.** $|\frac{3+5x}{2}| < 4$ **iii.** $|34+5x| = |\pi - 4|$

3. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduklarını belirtiniz:

( ) $|x| = -1$ denkleminin iki tane çözümü vardır.
( ) $|x|^3 = x^3$ değildir.
( ) $|a-b| = |b-a|$ dir.
( ) Sayı doğrusu üzerinde -32 ile -3 arasındaki uzaklık -35 birimdir.
( ) a negatif bir sayı ise $\sqrt{a^2} = -a$ olur.

1.10. Fonksiyonlar

Bir kümede elemanların yerlerini değiştirdiğimizde kümenin değişmediğini, yani kümelerde elemanların sırasının önemli olmadığını, daha önce söyledik. Elemanların sırasının önemini belirtmek için yeni bir sembol kullanacağız. a, b den önce geliyorsa bunu (a, b) olarak yazacağız ve buna sıralı ikili diyeceğiz. Buna göre $a \neq b$ olmak üzere $(a, b) \neq (b, a)$ dır. Benzer şekilde $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ye de sıralı n-li adını vereceğiz.

1.10.1. Tanım: A ve B boş olmayan iki küme olsun.

$$\{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ile B kümesinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir.

Tanımdan da görüleceği gibi $A \times B$ nin elemanları sıralı ikililerdir. Sıralı ikililerin özelliklerini de gözönünde bulundurursak, $A \neq B$ olmak üzere $A \times B \neq B \times A$ dır. A ve B kümelerinden enaz biri boş ise kartezyen çarpım da boş kümedir.

1.10.2. Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{-1, 1\}$ olmak üzere A ile B nin kartezyen çarpımı

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1), (3, -1), (3, 1)\}$$

ve B ile A nın kartezyen çarpımı da

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

olur. Buradan, $A \times B \neq B \times A$ olduğu hemen görülür.

1.10.3. Tanım: A ve B boş olmayan iki küme ve $\beta \subset A \times B$ olsun. β ya A dan B ye bir bağıntı denir.

1.10.4. Örnek: *i.* $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{-1, 1\}$ olarak verildiğinde
$\beta_1 = \{(1, -1)\} \subset A \times B$,
$\beta_2 = \{(1, -1), (1, 1), (2, 1), (3, -1)\} \subset A \times B$,
$\beta_3 = A \times B$
ifadelerinin her biri A dan B ye bağıntıdır.

ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ koordinat düzlemini gösterir. Buna göre,
$\gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (birim çember)
$\gamma_2 = \{(x, y) : y = 3x + 1\}$
ifadelerinin her biri $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bağıntıdır. Ayrıca, koordinat düzleminin her altkümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bağıntı olur.

1.10.5. Tanım: A ve B boştan farklı iki küme olsun. $f \subset A \times B$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir:
1. Her $a \in A$ için öyle bir $b \in B$ vardır ki $(a, b) \in f$ dir.
2. $(a, b_1) \in f$ ve $(a, b_2) \in f$ ise $b_1 = b_2$ dir.

f, A dan B ye bir fonksiyon ise A kümesine fonksiyonun tanım kümesi, B kümesine de değer kümesi adı verilir.

1.10.5.Tanımda 1.maddenin söylemek istediği şey, tanım kümesinde boşta eleman kalmayacağıdır. 2.madde de ise, tanım kümesinde eşit iki elemanın görüntülerinin de eşit olacağı, yani tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde birden fazla elemanla eşleşemeyeceği vurgulanmaktadır. Buna, fonksiyonun iyi tanımlı (tek değerli) olması denir.

f, A dan B ye bir fonksiyon ise $f \subset A \times B$ yerine

$$f : A \to B \text{ veya } A \xrightarrow{f} B$$

sembolleri kullanılır.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, f fonksiyonu sıralı ikililerin bir kümesidir. Bazen tanım ve değer kümeleri sonsuz olduğu zaman fonksiyonu sıralı ikililerin bir kümesi olarak gösteremeyiz. Bu sıkıntıdan kurtulmak için *belirli bir kuralla* verilen fonksiyonlarla çalışacağız, gelişigüzel verilen fonksiyonlarla uğraşmayacağız. f, A dan B ye belirli bir kuralla verilen fonksiyon ise bu

$$f : A \to B,\ y = f(x)$$

olarak yazılır. Buna göre $(x, y) \in f$ ise y ye x in f altındaki görüntüsü veya f nin x deki değeri denir ve $y = f(x)$ olarak yazılır. Bu durumda, x e bağımsız değişken, y ye de bağımlı değişken adı verilir. A tanım kümesi olmak üzere A nın elemanlarının f altındaki görüntülerinden oluşan kümeye f fonksiyonunun görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $b \in B$ olmak üzere f fonksiyonu altında b ye dönüşen A nın elemanlarının kümesine b elemanının ters görüntüsü denir ve

$$f^{-1}(b) = \{x \in A : \ f(x) = b\}$$

ile gösterilir. $f : A \to B,\ y = f(x)$ olarak gösterilmesi halinde iyi tanımlılık

$$x_1 = x_2 \text{ ise } f(x_1) = f(x_2)$$

şeklinde verilir.

Tanım ve değer kümesinin elemanları reel sayı olan fonksiyonları belirtmek için sadece fonksiyonun kuralı verilir. Verilen kuralın anlamlı ve belirli olduğu reel sayıların altkümesi fonksiyonun tanım kümesi olarak alınır. Değer kümesi olarak da $\mathbb{R}$ alınır. Örneğin, $y = \frac{1}{x}$ kuralı ile verilen fonksiyonun tanım kümesi, bu kuralın anlamlı olduğu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dır. Buna göre, bu kural ile belirtilen fonksiyon

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

olarak yazılır.

1.10.6. Örnek: Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz ve fonksiyonu yazınız:

i. $f(x) = 3x^2 + 7x - 3$ *ii.* $g(x) = \frac{3x+5}{x^2-x-6}$ *iii.* $h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$

iv. $t(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ *v.* $r(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$ *vi.* $s(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Çözüm: *i.* Bilindiği gibi, iki reel sayının çarpımı, toplamı ve farkı yine bir reel sayıdır. Buna göre, x in yerine yazılacak her reel sayı için, $f(x)$ de bir reel sayı olur. O halde, bu kural bütün reel sayılar için anlamlıdır. Dolayısıyla tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Fonksiyon

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+7x-3$$

olarak yazılır.

Not: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o$ $(a_i\in\mathbb{R},\ i=0,1,\ ...,\ n)$ fonksiyonları için de benzer muhakeme uygulanır ve polinom fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

ii. Matematikte sıfır ile bölmenin tanımsız veya belirsiz olduğunu biliyoruz. O halde, bu kuralın anlamlı olması için paydanın sıfırdan farklı olması gerekir. Paydayı sıfır yapan değerler

$$x^2-x-6=0\Rightarrow x=3\,\text{veya}\,x=\ -2$$

olduğundan verilen fonksiyonun T tanım kümesi

$$\mathrm{T}=\mathbb{R}\backslash\{-2,3\}=(-\infty,\ -2)\cup(-2,3)\cup(3,\ +\infty)$$

olur. Buna göre fonksiyon,

$$g:\mathbb{R}\backslash\{-2,3\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{3x+5}{x^2-x-6}$$

olarak yazılır.

iii. Karekök alınabilmesi için kök içerisinde bulunan ifadenin negatif olmaması gerekir. O halde,

$$\frac{2-x}{x^2-9}\geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin oluşturduğu küme tanım kümesidir. İşaret tablosuna göre, bu eşitsizliği sağlayan x değerleri,

x			$x_1=-3$		2		$x_2=3$		
$2-x$	+	+	|	+	o	−	|	−	−
x^2-9	+	+	o	−	|	−	o	+	+
$\frac{2-x}{x^2-9}$	+	+	‖	−	|	+	‖	−	−

$$\mathrm{T} = \{x \in \mathbb{R} : x < -3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x < 3\} = (-\infty, -3) \cup [2,3)$$

olur. Bu aynı zamanda verilen fonksiyonun tanım kümesidir. Böylece,

$$h : (-\infty, -3) \cup [2,3) \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$$

yazılır.

iv. Bu kuralı anlamlı yapan x değerleri hem $\sqrt{x-2}$ yi hem de $\sqrt{4-x}$ i anlamlı yapması gerekir. Yani, $\sqrt{x-2}$ nin tanım kümesini T_1 ve $\sqrt{4-x}$ in tanım kümesini T_2 ile gösterirsek , verilen t kuralının geçerli olduğu T kümesi

$$\mathrm{T} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{T}_1 \text{ ve } x \in \mathrm{T}_2\} = \mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2$$

olur. $\mathrm{T}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 2\}$ ve $\mathrm{T}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \le 4\}$ olduğundan

$$\mathrm{T} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 4\} = [2,\ 4]$$

dır. Buna göre,

$$t : [2,\ 4] \to \mathbb{R},\ t(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$$

olarak yazılır.

v. Her reel sayının küp kökünün alınabileceğini biliyoruz. Buna göre, küp kök içindeki ifade $x^2 - 9 \neq 0$ için bir reel sayıdır. O halde T tanım kümesi

$$\mathrm{T} = \mathbb{R} \backslash \{-3,\ 3\}$$

olur. Fonksiyon

$$r : \mathbb{R} \backslash \{-3,\ 3\} \to \mathbb{R},\ r(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$$

olarak yazılır.

vi. Paydayı sıfır yapan hiç bir reel sayı olmadığından T tanım kümesi $\mathrm{T} = \mathbb{R}$ dir. Buna göre,

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

yazılır.

Bazen, f fonksiyonu altında tanım kümesinin görüntüsü (fonksiyonun görüntü kümesi) istenebilir. Bunun nasıl bulunacağı aşağıdaki örnekte incelenmiştir.

1.10.7. Örnek: Kuralları verilen aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz:

i. $f(x) = \sqrt{x-2}$ *ii.* $g(x) = x^2 - 4x + 5$ *iii.* $h(x) = x^3 - 1$

iv. $l(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$ *v.* $t(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$

Çözüm: *i.* Bu kural ile verilen fonksiyonun tanım kümesi $\mathrm{T} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ dir. Bu kümenin f altındaki görüntüsünü bulalım.

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0$$

yani, f nin görüntü kümesi $f(\mathrm{T}) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ olur.

ii. Polinom olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.g nin görüntü kümesini bulalım. $y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x + (5 - y) = 0$ denkleminde x i çözdüğümüzde

$$x_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4(5-y)}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{4y-4}}{2} = 2 \mp \sqrt{y-1}$$

bulunur. $x_{1,2}$ nin anlamlı olması için $y - 1 \geq 0$ yani, $y \geq 1$ olmalıdır. O halde görüntü kümesi $g(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ olur.

iii. Bu da bir polinom olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Görüntü kümesi ise

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

ifadesini anlamlı yapan $y \in \mathbb{R}$ lerden oluşur. y nin her değeri için x bir reel sayı olacağından h nın görüntü kümesi $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olarak bulunur.

iv. Verilen ifadenin tanım kümesi $T = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ dir. Şimdi $l(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım: $y = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$ ifadesinde içler dışlar çarpımı yapıp, elde edilen ifadeyi x e göre düzenlersek

$$(y-1)x^2 + (3-3y)x + 2y - 4 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi x e göre çözersek

$$x_{1,2} = \frac{-(3-3y) \mp \sqrt{y^2+6y-7}}{2(y-1)}$$

olur. $x \in \mathbb{R}$ olması için $y^2+6y-7 \geq 0$ ve $y-1 \neq 0$ olmalıdır. Bunları dikkate alarak istenen kümeyi

$$\{y \in \mathbb{R} : y \leq -7\} \cup \{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$$

şeklinde buluruz. Bu, verilen fonksiyonun görüntü kümesidir.

v. Bu fonksiyonun tanım kümesi, $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi olan $T = (-1, 3]$ dür. Şimdi, bu fonksiyonun görüntü kümesini bulalım. Fonksiyonun verilişinden $y = t(x) \geq 0$ olduğunu hemen yazarız. Verilen ifadenin her iki yanının karesini aldıktan sonra x e göre yazarsak

$$x = \frac{3-y^2}{y^2+1}$$

bulunur. y nin her değeri için x bulunmasına rağmen fonksiyonun verilişinden $y \geq 0$ olduğundan istenen görüntü kümesi $t(T) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ olur.

Not: Bundan sonra $y = f(x)$ ifadesine, fonksiyon kuralı olduğunu bildiğimiz halde, fonksiyon diyeceğiz. Çünkü, ihtiyaç duymamız halinde tanım ve değer kümelerini bulabiliriz.

Fonksiyonları geometrik olarak göstermek, fonksiyonları vermenin bir başka yoludur. Bunu yapmak için tanım kümesini x ekseni üzerinde, değer kümesini de y ekseni üzerinde alır ve $(x, f(x))$ sıralı ikililerini bu koordinat düzleminde göstermek gerekir. Bütün $(x, f(x))$ değerlerini işaretlemek çoğu zaman mümkün değildir. Onun için şu andaki bilgilerimizle bazı özel fonksiyonların grafiklerini çizebiliriz. Grafik çizerken verilen fonksiyonun

i. tanım kümesini,

ii. (eğer varsa) eksenleri kestiği noktaları

iii. bazı özel noktalarını (Örneğin, 2.dereceden polinom fonksiyon için bu özel nokta tepe noktasıdır)

bilmemiz gerekir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun belirttiği eğrinin eksenleri kestiği noktaları bulmak için şu işlemler yapılır:

a. x eksenini kestiği noktaları bulmak için, $y = 0$ alınarak elde edilen, $f(x) = 0$ denkleminin kökleri bulunur. Bu kökler fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsisini verir.

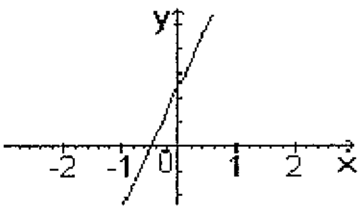
b. y eksenini kestiği noktayı bulmak için ise $f(x)$ in $x = 0$ daki değeri hesaplanır. Yani, $f(0)$ özel değeri fonksiyonun belirttiği eğrinin y eksenini kestiği noktanın ordinatını verir.

Bir (a, b) noktasının $y = f(x)$ eğrisi üzerinde olması için gerek ve yeter şart $f(a) = b$ olmasıdır.

$f(x) = ax + b$ fonsiyonunun grafiği bir doğrudur. Bir doğruyu çizmek için bu doğrunun geçtiği iki noktayı bilmek yeterlidir.

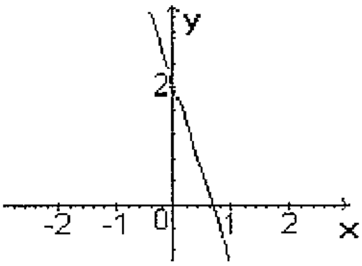
1.10.8. Örnek: *i.* $y = 2x + 1$ ve *ii.* $y = -3x + 2$ doğrularının grafiğini çiziniz.

Çözüm: *i.* x eksenini kestiği noktayı bulalım. $y = 0$ için verilen fonksiyon $2x + 1 = 0$ denklemine dönüşür. Bu denklemi çözdüğümüz zaman $x = -\frac{1}{2}$



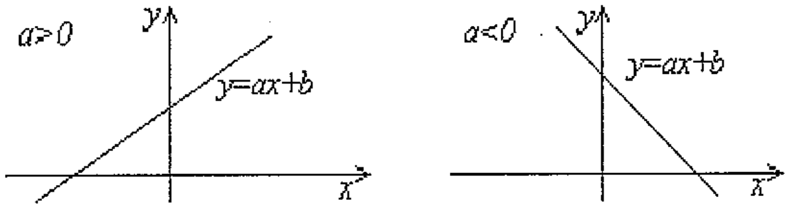
bulunur. O halde, verilen fonksiyon x eksenini $(-\frac{1}{2}, 0)$ noktasında keser. y eksenini kestiği noktayı bulalım. Bunun için verilen fonksiyonda $x = 0$ yazarsak $y = 1$ bulunur. O halde, y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser. Bu iki noktadan geçen doğrunun grafiği yukarıdaki şekilde verilmiştir.

ii. x eksenini kestiği noktayı bulalım. $y = 0$ için verilen fonksiyon



$-3x+2=0$ denklemine dönüşür. Bu denklemi çözdüğümüz zaman $x=\frac{2}{3}$ bulunur. O halde, verilen fonksiyon x eksenini $(\frac{2}{3},0)$ noktasında keser. y eksenini kestiği noktayı bulalım. Bunun için verilen fonksiyonda $x=0$ yazarsak $y=2$ bulunur. Buna göre y eksenini $(0,2)$ noktasında keser. Bu iki noktadan geçen doğrunun grafiği yukarıdaki şekildeki gibidir.

Not: $y=ax+b$ ifadesindeki a sayısına doğrunun eğimi adı verilir. $a>0$ veya $a<0$ olması durumunda doğrunun grafiğinin nasıl olacağı aşağıdaki 1.10.1.Şekilde verilmiştir.



1.10.1. Şekil $y=ax+b$ doğrusunun $a>0$ ve $a<0$ iken grafiği

$y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiği bir paraboldür. Bu fonksiyonun grafiğini çizmek için tepe noktası ile eksenleri kestiği noktaları bilmemiz gerekir. Bu parabolün tepe noktası

$$T=\left(-\frac{b}{2a},\ f(-\frac{b}{2a})\right)=\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

ve y eksenini kestiği nokta ise $(0,\ f(0))=(0,\ c)$ dır. x eksenini kestiği noktaları bulmak için $ax^2+bx+c=0$ denklemini çözmemiz gerekir. Parabolün x-eksenini kesip kesmeyeceği bu denklemin diskriminantına bağlıdır. Öyle ki

i. Eğer $\Delta>0$ ise parabol x eksenini iki farklı noktada keser.

ii. Eğer $\Delta<0$ ise parabol x eksenini kesmez.

iii. Eğer $\Delta=0$ ise parabol x eksenini bir noktada keser ki bu noktada parabol x eksenine teğettir.

$y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasından başlayan her bir parçasına parabolün kolları denir. Eğer $a>0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a<0$ ise parabolün kolları aşağı doğru olur.

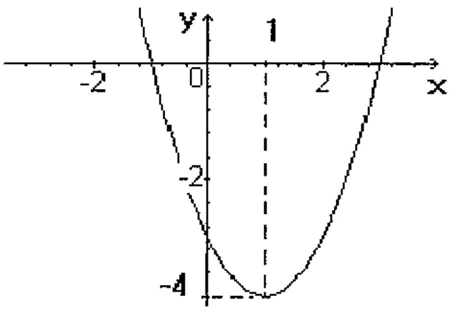
1.10.9. Örnek: Aşağıdaki parabolleri çiziniz:

i. $y=x^2-2x-3$ *ii.* $y=x^2+2x+1$ *iii.* $y=-3x^2+2x-2$

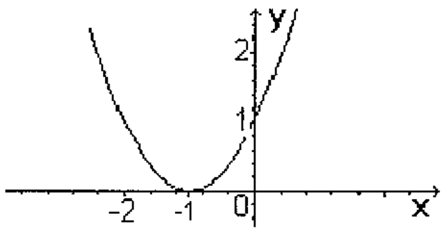
Çözüm: *i.* Verilen fonksiyonda $a = 1 > 0$ olduğundan çizeceğimiz parabolün kolları yukarı doğru olacaktır. x eksenini kestiği noktaları bulalım: $y = 0$ için $x^2 - 2x - 3 = 0$ denklemini çözelim. $x = 3$ ve $x = -1$ bu denklemin kökleri olduğundan x eksenini $(3, 0)$ ve $(-1, 0)$ noktalarında; $x = 0$ için $y = -3$ olduğundan y eksenini $(0, -3)$ noktasında keser. Tepe noktası ise

$$T = \left(-\frac{(-2)}{2}, \frac{4(1)(-3) - (-2)^2}{4(1)} \right) = (1, -4)$$

dır. Buna göre parabolün grafiği aşağıdaki şekildedir.

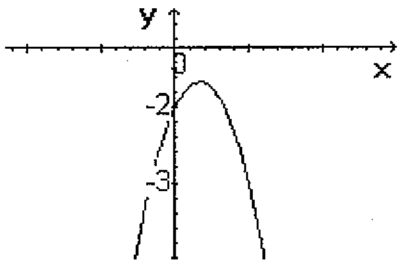


ii. $\Delta = 0$ olduğundan $x = -1$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ denkleminin iki katlı köküdür. Dolayısıyla parabolün grafiği $x = -1$ noktasında x eksenine teğettir.



Yine $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser. Tepe noktası ise $T = (-1, 0)$ dır. Buna göre, parabolün grafiği yukarıda çizilmiştir.

iii. $a = -3 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur. Diğer yandan, $\Delta = -20 < 0$ olduğundan $-3x^2 + 2x - 2 = 0$ denkleminin kökleri yoktur. Bu da, parabol x eksenini kesmez demektir. y eksenini, $(0, -2)$ noktasında keser. Tepe noktası $T = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ dür. O halde, bu fonksiyonun grafiği de aşağıdaki gibidir.



Her fonksiyonun grafiğini böyle kolay çizmemiz mümkün değildir. Türev konusundan sonra fonksiyonların grafikleri ile ilgili daha geniş bilgiler verilecektir.

1.10.10. Tanım: A ve B boş olmayan iki küme olsun.

i. $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. $b \in B$ olmak üzere her $x \in A$ için $f(x) = b$ oluyorsa, f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

ii. $f : A \to A$, $f(x) = x$ fonksiyonuna (A kümesinin) birim fonksiyon denir ve I_A ile gösterilir.

iii. $f : A \to B$ ve $g : A \to B$ fonksiyonları verilsin. Eğer her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, f ve g fonksiyonları A kümesinde eşittir denir.

1.10.11 Örnek: *i.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ sabit fonksiyondur. Dolayısıyla $f(-3) = 2$; $f(0) = 2$; $f(1) = 2$; $f(2) = 2$; $f(10^{100}) = 2$, ... dir.

ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyondur. Bu fonksiyon altında her sayının görüntüsü kendisidir.

iii. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ve $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(x) = x = |x| = g(x)$$

olduğundan, $\mathbb{R}^+$ üzerinde $f(x) = g(x)$ dir.

1.10.12. Tanım: f ve g, A kümesinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

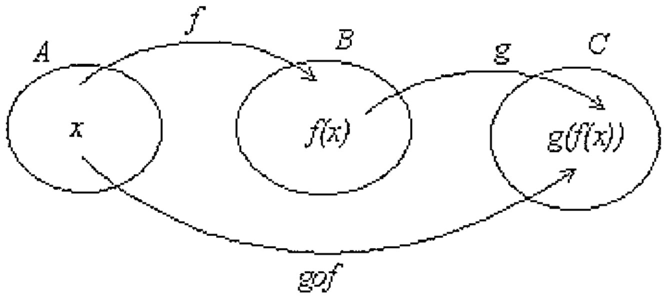
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x) \neq 0)$

olarak tanımlanır.

1.10.13. Tanım: A, B ve C boştan farklı kümeler olmak üzere $f : A \to B$, $y = f(x)$; $g : B \to C, y = g(x)$ fonksiyonları verilsin. $h : A \to C$, $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$ fonksiyonuna g ile f fonksiyonunun bileşkesi denir.



1.10.2. Şekil: gof nin şema ile gösterilmesi

1.10.14. Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$ olarak veriliyor.Buna göre aşağıda verilenleri bulunuz.

i. $(f + g)(x)$ *ii.* $(fg)(x)$ *iii.* $(fog)(x)$ *iv.* $(gof)(x)$

Çözüm:*i.* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 1) + (x^2 - 1) = x^2 + x$

ii. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (x + 1)(x^2 - 1) = x^3 + x^2 - x - 1$

iii. $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + 1 = x^2$

iv. $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi, genel olarak $(gof)(x) \neq (fog)(x)$ dir.

1.10.15. Tanım: $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer, *her* x_1,$x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna bire-bir fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak bire-bir fonksiyon şu şekilde de tanımlanır:

1.10.15′. Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer, *her* $x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonuna bire-bir fonksiyon denir.

Dolayısıyla, bir fonksiyonun bire-bir olduğunu göstermek için, bu tanımlardan herhangi birini kullanabiliriz. Ancak, 1.10.15'. Tanım ile fonksiyonun iyi tanımlı olmasını birbirine karıştırmamak gerekir.

1.10.16. Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f(A) = B$ oluyorsa f fonksiyonuna örten (veya üzerine) fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak örten fonksiyon şu şekilde de tanımlanır:

1.10.16'. Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde enaz bir $a \in A$ varsa f fonksiyonuna örten fonksiyon denir.

Bu tanımlardan anlaşılacağı gibi, bir fonksiyonun görüntü kümesi değer kümesine eşit ise bu fonksiyon örtendir.

1.10.17. Tanım: Bir fonksiyon hem bire-bir hem de örten ise bu fonksiyona bire-bir örten fonksiyon denir.

1.10.18. Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonların bire-bir ve örten olup olmadıklarını araştırınız:

i. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ *ii.* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = x^2$

iii. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^2$ *iv.* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$

Çözüm: *i.* Önce bire-bir olup olmadığını araştıralım. 1.10.15. Tanımda *her* birbirinden farklı iki elemanın görüntülerinin de farklı olacağı belirtilmektedir. Burada, $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ olarak alınırsa $x_1 \neq x_2$ olduğu halde

$$f(x_1) = f(-1) = (-1)^2 = 1 = f(1) = f(x_2)$$

bulunur. O halde, f bire-bir değildir.

İkinci yol: İkinci tanım kullanılarakta bire-bir olmadığı söylenebilir.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

eşitliğinden

$$x_1 = x_2 \text{ veya } x_1 = -x_2$$

bulunur. $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliği $x_1 = -x_2$ olmasını da gerektirdiğinden, f fonksiyonu bire-bir olamaz.

Şimdi de, fonksiyonun örten olup olmadığını araştıralım. Değer kümesinden -1 sayısını alalım. "Tanım kümesinde bu elemana giden bir eleman var mı?" sorusuna cevap arayalım. Bu soru matematiksel bir ifade ile, "$x^2 = -1$ olacak şekilde bir reel sayı bulunabilir mi?" şeklinde yazılabilir. $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 = -1$ olması mümkün değildir. Yani, değer kümesindeki her elemana tanım kümesinde dönüşecek bir eleman bulamıyoruz. O halde, bu fonksiyon örten olamaz.

ii. Bire-bir olmadığı *i* deki gibi görülür. Diğer yandan, değer kümesi negatif olmayan reel sayılardan oluştuğundan bu kümeden alınacak her keyfi $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için $x^2 = a$ denklemi $x = -\sqrt{a} \in \mathbb{R}$ ve $x = \sqrt{a} \in \mathbb{R}$ şeklinde iki çözüme sahip olur ($a = 0$ için $x = 0$ dır). Bunların ikiside tanım kümesine aittir ve $f(-\sqrt{a}) = a$ ve $f(\sqrt{a}) = a$ dır. O halde, verilen fonksiyon örtendir.

iii. Örten olduğu *ii* dekine benzer muhakeme ile gösterilebilir. Yani, değer kümesindeki her $a \in \mathbb{R}^+$ için $x^2 = a$ denklemi sağlanacak şekilde tanım kümesinde bir $\sqrt{a} \in \mathbb{R}^+$ vardır.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = -x_2$ veya $x_1 = x_2$ bulunur. Bu ifadelerden yalnızca $x_1 = x_2$ tanım kümesine ait bir çözüm olur. Çünkü, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ iken $-x_1, -x_2 \notin \mathbb{R}^+$ dir. O halde, bu fonksiyon bire-birdir.

iv.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

olduğundan f bire-birdir.

Değer kümesindeki her $a \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = a \Rightarrow 2x - 1 = a \Rightarrow x = \frac{a+1}{2}$$

bulunur. Bulunan bu değer, a nın her değeri için bir reel sayı, yani tanım kümesindedir. O halde, verilen fonksiyon örtendir.

1.10.19. Tanım: $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları verilmiş olsun. $gof = I_A$, $fog = I_B$ ise f ve g fonksiyonlarına birbirlerinin ters fonksiyonları denir.

f fonksiyonunun ters fonksiyonu f^{-1} ile gösterilir. Eğer g, f fonksiyonunun tersi ise $f^{-1} = g$ yazılır. Buna göre $f : A \to B$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $g : B \to A$ ise $f^{-1}of = I_A$, $fof^{-1} = I_B$ olur.

Bir fonksiyonun ters fonksiyonundan sözedebilmek için o fonksiyonun bire-bir örten olması gerekir. Ters fonksiyonun kuralı ve verilen fonksiyonun kuralı biliniyorsa ters fonksiyonu şu şekilde de tanımlayabiliriz: $f : A \to B$, $y = f(x)$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. $f^{-1} : B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun ters fonksiyonu denir.

Ters fonksiyonu alışılmış değişkenleri kullanarak, $f^{-1} : B \to A$, $y = f^{-1}(x)$ olarak yazarız. $f : A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonundaki x ve y ile onun ters fonksiyonu olan $f^{-1} : B \to A$, $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonundaki x ve y nin aynı olmadığına dikkat edeceğiz. $y = f^{-1}(x)$ gösterimi sadece, fonksiyonları $y = f(x)$ ile gösterme alışkanlığından gelmektedir.

Fonksiyonları sıralı ikililer olarak düşünürsek, $(x, y) \in f$ ise $(y, x) \in f^{-1}$ olur. (x, y) ile (y, x) noktaları $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Bu kuralı ilerde fonksiyonların grafiğini çizerken hatırlayacağız. Ayrıca, b nin ters görüntüsünü göstermek için kullandığımız $f^{-1}(b)$ sembolündeki f^{-1} genelde f nin ters fonksiyonu değildir.

1.10.20. Örnek: *i.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ ise $f^{-1}(2)$ yi bulunuz.

ii. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 2$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

iii. $h : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, $h(x) = x^2$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: *i.* Bizden istenen, f altındaki görüntüleri 2 olan tanım kümesindeki elemanlardır. Fonksiyon sabit olduğundan, tanım kümesindeki her eleman 2 ye gitmektedir. O halde, $f^{-1}(2) = \mathbb{R}$ dir. Burada, f bire-bir örten olmadığından f^{-1}, f nin ters fonksiyonu değildir.

ii. Fonksiyon bire-bir örtendir. $y = g(x)$ fonksiyonun kuralı ise $x = g^{-1}(y)$ de ters fonksiyonun kuralıdır. O halde, verilen ifadede $x = g^{-1}(y)$ alınırsa

$$y = 3g^{-1}(y) + 2 \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

yani,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

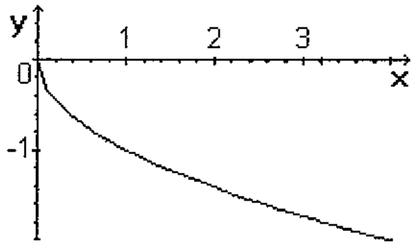
istenen ters fonksiyon olur.

Buradan da görüldüğü gibi ters fonksiyonun kuralını bulmak için, verilen fonksiyonun kuralında, x yerine y ve y yerine x konduktan sonra y yi bulmak yeterlidir.

iii. Fonksiyon bire-bir örtendir. Ters fonksiyon, $h^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ olur. Bu ters fonksiyonun kuralını bulalım: Verilen fonksiyonun kuralı $y = x^2$ olduğundan, x yerine y; y yerine x yazarsak

$$x = y^2 \Rightarrow y = \mp\sqrt{x}$$

bulunur. h^{-1} in görüntü kümesi $\mathbb{R}^-$ olduğundan $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ olur.



Alıştırmalar

1. $f(x) = x^2 + 2$ ve $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonları veriliyor. a ve h birer reel sayı olmak üzere aşağıda verilenleri bulunuz.

i. $f(a)$ **ii.** $f(-a)$ **iii.** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$

2. f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ **ii.** $f(x)=\frac{3x-1}{x+7}$ **iii.** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
iv. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+4}$ **v.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ **vi.** $f(x)=\frac{x+1}{x^3-4x}$
vii. $f(x)=x^2-4x+4$ **viii.** $f(x)=|\frac{2x}{x^2-3}|$ **ix.** $f(x)=\sqrt{-|x|}$
x. $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x}$

3. g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
i. $g(x)=x+1$ **ii.** $g(x)=\sqrt{3-x}$ **iii.** $g(x)=x^2-4x+4$
iv. $g(x)=|x^3|$ **v.** $g(x)=x^3-1$ **vi.** $g(x)=x+|x|$

4. h fonksiyonunun bire-bir olup olmadığını belirtiniz.
i. $h(x)=2x+3$ **ii.** $h(x)=\frac{1}{x+3}$ **iii.** $h(x)=|x|$
iv. $h(x)=\sqrt{x}$ **v.** $h(x)=\sqrt{-|x|}$ **vi.** $h(x)=5$

5. $f(x)=\frac{|2+x|-|x|-2}{x}$ fonksiyonu veriliyor. $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$ noktalarının hangileri $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi üzerindedir.

6. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer kümelerinin öyle altkümelerini bulunuz ki fonksiyonlar burada bire-bir ve örten olsun.
i. $f(x)=x^2-2x$ **ii.** $f(x)=x^3$ **iii.** $f(x)=x^2+2x-1$

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ olmak üzere $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(fg)(x)$ ve $(f+g)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

8. f fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.
i. $f(x)=4x-3$ **ii.** $f(x)=\frac{1}{2x+5}$, $x>-\frac{5}{2}$ **iii.** $f(x)=9\text{-}x^2$, $x\geq 0$
iv. $f(x)=5x^3-2$ **v.** $f(x)=\sqrt{3x-5}$, $x\geq\frac{5}{3}$ **vi.** $f(x)=\sqrt[3]{x}+8$

9. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.
i. $f(x)=3x-2$ **iii.** $g(x)=2-3x$ **iii.** $h(x)=2x^2-3x+1$
iv. $k(x)=2x^2-3x+5$

10. $f:A\to B$ ve $g:B\to C$ fonksiyonları verilsin. Eğer f ve g fonksiyonları bire-bir örten ise gof fonksiyonunundа bire-bir örten olduğunu gösteriniz.

11. T tanım kümesindeki her x için $-x\in T$ olsun. Eğer her $x\in T$ için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift, $f(-x)=-f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir. Buna göre tek ve çift fonksiyonlara, ayrıca ne tek ne de çift olan fonksiyonlara örnek veriniz.

1.11. Parçalı Fonksiyonlar

A_1, A_2, ..., A_n ikişer ikişer ayrık kümeler olsun. $f_i : A_i \to \mathbb{R}, y_i = f_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ birer fonksiyon olmak üzere,

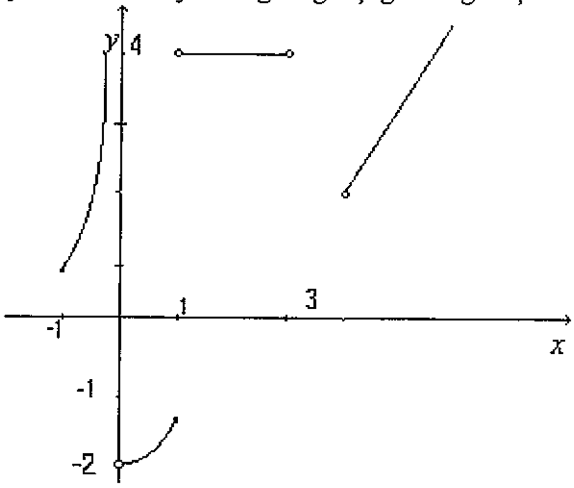
$$f : A_1 \cup \cdots \cup A_n \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in A_2 \text{ ise} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in A_n \text{ ise} \end{cases}$$

bir fonksiyondur. Bu fonksiyona parçalı fonksiyon denir.

1.11.1. Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & -1 \le x < 0 \text{ ise} \\ x^2 - 2, & 0 < x \le 1 \text{ ise} \\ 4, & 1 < x < 3 \text{ ise} \\ x - 2, & x > 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilir:



Buna göre,

$$f(-1) = 1; f(-\frac{1}{2}) = 2; f(1) = -1; f(0), \text{tanımsız}; f(9) = 7$$

yazılır.

Parçalı fonksiyon cinsinden ifade edilebilen fonksiyonlar da vardır. Bunların en başta gelenleri mutlak değer fonksiyonu, tam değer fonksiyonu ve işaret fonksiyonudur. Bunları basit örneklerle izah edeceğiz.

1.11.2. Örnek: Aşağıdaki fonksiyonları parçalı fonksiyon olarak yazınız:

i. $f(x)=|x-2|$ *ii.* $g(x)=\frac{|x|}{x}$ *iii.* $h(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$

Çözüm: *i.* Mutlak değerin tanımını kullanarak

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x-2\geq 0 \text{ ise} \\ -(x-2), & x-2<0 \text{ ise}\end{cases}=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \text{ ise} \\ 2-x, & x<2 \text{ ise}\end{cases}$$

yazılır.

ii. Mutlak değerin tanımından

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x}, & x>0 \text{ ise} \\ -\frac{x}{x}, & x<0 \text{ ise}\end{cases}=\begin{cases} 1, & x>0 \text{ ise} \\ -1, & x<0 \text{ ise}\end{cases}$$

yazılır.

iii. Yine mutlak değerin tanımını kullanarak

$$\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases} \frac{x-1}{x-1}, & x-1>0 \text{ ise} \\ \frac{x-1}{-(x-1)}, & x-1<0 \text{ ise}\end{cases}=\begin{cases} 1, & x>1 \text{ ise} \\ -1, & x<1 \text{ ise}\end{cases}$$

yazılır.

1.11.3. Tanım: n bir tam sayı olmak üzere $n\leq x<n+1$ şeklindeki x reel sayılarını n ye götüren fonksiyona x in tam değer fonksiyonu denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

1.11.4. Örnek: Bu tanıma göre,
$[[2.1]]=2,\quad [[3.999]]=3,\quad [[3.00001]]=3,\quad [[\pi]]=3$

$[[-2.1]]=-3,\quad [[-3.999]]=-4, [[-3.00001]]=-4,\quad [[-\pi]]=-4$

yazılır. Ayrıca, her $n\in\mathbb{Z}$ için $[[n]]=n$ dir. Yani, $[[3]]=3$, $[[-3]]=-3$, ... v.s. dir.

Bu örnekten sonra, $[[x]]$ ile x arasında

$$x = [[x]] + r, \ r \in [0,1)$$

şeklinde bir ilişkinin olduğu söylenir. Bazı işlemleri yaparken, bu eşitliği kullanacağız. Ayrıca, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$[[x+n]] = [[x]] + n$$

dir.

Aslında günlük hayatta yaşımızı söylerken bu tam değer fonksiyonunu kullanırız. Örneğin, 20.4 yaşında olan birisine yaşını sorduğumuzda alacağımız cevap 20, yani $[[20.4]] = 20$ dir. Bir üst yaşa geçinceye kadar daima bulunduğumuz yaşın tam kısmını söyleriz.

1.11.5. Örnek: *i.* $[[2x+1]] = 2$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [[x]]$ in grafiğini $[-2, 2]$ aralığında çiziniz.

iii. $f(x) = [[2x+1]]$ fonksiyonunu $[0, 2)$ aralığında parçalı fonksiyon olarak yazınız.

Çözüm: *i.* Tam değerin tanımından

$$[[2x+1]] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x + 1 < 3$$

yazılır. Bu eşitsizlik çözülürse

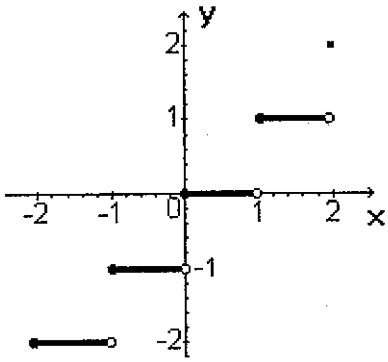
$$\frac{1}{2} \leq x < 1$$

bulunur.

ii. Önce bu fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekildedir.



iii.

$$f(x) = [[2x+1]] = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 3, & 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 4, & \frac{3}{2} \le x < 2 \end{cases}$$

1.11.5. Tanım: $y = g(x)$ fonksiyonununun işaret fonksiyonu $f(x) = \mathrm{sgn}(g(x))$ ile gösterilir ve

$$f(x) = \mathrm{sgn}(g(x)) = \begin{cases} 1, & g(x) > 0 \\ 0, & g(x) = 0 \\ -1, & g(x) < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

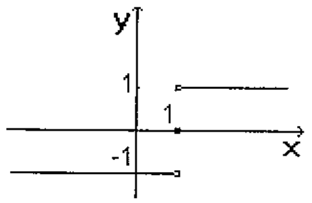
1.11.6. Örnek: *i.* $f(x) = \mathrm{sgn}(x-1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ii. $f(x) = \mathrm{sgn}(x^2 - 4)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

Çözüm: *i.* Önce $f(x) = \mathrm{sgn}(x-1)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazalım:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Şimdi bu fonksiyonun grafiğini çizelim.



ii.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x<-2 \text{ veya } x>2 \\ 0, & x=2 \text{ veya } x=-2 \\ -1, & -2<x<2 \end{cases}$$

olarak yazılır.

Alıştırmalar

1. $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
i. $f(x)=\frac{7x+5}{\operatorname{sgn}(\frac{x+1}{x+2})-1}$ **ii.** $f(x)=2x^2-3|x|+1$ **iii.** $f(x)=\frac{1}{[[x]]}$

2. $f(x)=\frac{[[\frac{3}{2}+x]]-[[\frac{3}{2}]]}{x}$ fonksiyonu veriliyor. $f(1)$, $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{4})$ değerlerini bulunuz.

3. $f(x)$ fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -2<x<1 \\ 4, & 1\le x<3 \\ x^2-5, & 3<x<7 \end{cases}$$

Bu fonksiyonun tanım kümesini ve $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ değerlerini bulunuz. Ayrıca bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

4. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
i. $f(x)=|x-1|$ **ii.** $f(x)=2x^2-3|x|+1$ **iii.** $f(x)=\frac{|2+x|-|x|-2}{x}$

5. Aşağıdaki bağıntıların grafiğini çiziniz.
i. $[[x+y]]=2$ **ii.** $[[x]]+[[y]]=1$ **iii.** $|x|+|y|=1$

6. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.
i. $[[x+[[x]]]]=2$ **ii.** $1-x^{1+\operatorname{sgn}|x|}=0$ **iii.** $[[\frac{1}{x}]]=2$

7. f ve g fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ 4, & 1\leq x<3 \\ x^2-5, & 3<x \end{cases} \text{ ve } g(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x<-2 \\ |x|, & -2\leq x<2 \\ |x^2-5x+6|, & x\geq 2 \end{cases}$$

Buna göre $(fog)(-3)$, $(fog)(-2)$, $(fog)(0)$, $(fog)(1)$, $(fog)(2)$, $(fog)(7)$ değerlerini ve $(fog)(x)$, $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

1.12. Üstel ve Logaritma Fonksiyonu

1.12.1. Tanım: a pozitif bir reel sayı ve $a\neq 1$ olmak üzere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a ya da üstel fonksiyonun tabanı denir.

Üstel fonksiyonda a yerine $e\,(\approx 2.71828)$ sayısı alınırsa $f(x)=e^x$ yazılır. Bazı kaynaklar e^x yerine $\exp(x)$ sembolünü kullanır. Yani, $\exp(x)=e^x$ dir.

Örneğin, $f_1(x)=3^x$, $f_2(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_3(x)=e^x$ fonksiyonlarının her biri üstel fonksiyondur. Fakat, -3 ve $-\frac{1}{2}$ negatif reel sayılar olduğundan $g_1(x)=(-3)^x$, $g_2(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları üstel fonksiyon değildir.

Eğer üstel fonksiyonun tanım kümesi olan $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi alınırsa a ne olursa olsun $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ bir fonksiyondur.

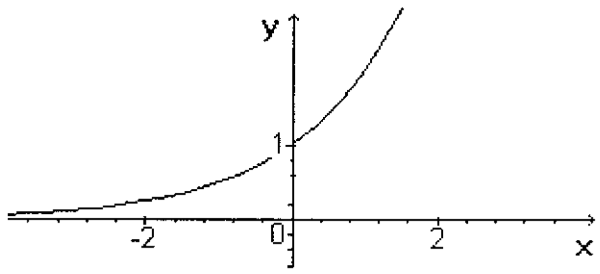
1.12.2. Örnek: $f(x)=2^x$ ve $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları veriliyor.

i. $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ ve $g(-3)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$ değerlerini bulunuz.

ii. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

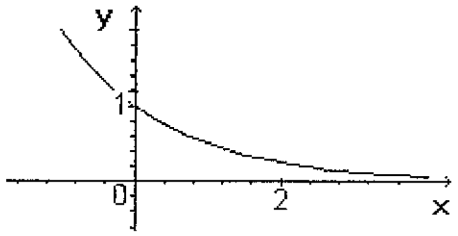
Çözüm: *i.* $f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ve $g(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$ dir. Diğerleri okuyucuya bırakılmıştır.

ii. $f(x)=2^x$ fonksiyonunun grafiği 1.12.1. Şekildeki gibidir.



1.12.1. Şekil: $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiği

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği de 1.12.2. Şekildeki gibi olur.



1.12.2. Şekil: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği

Not: $f(x) = a^x$ fonksiyonun grafiği $a > 1$ ise 1.12.1. Şekildekine; $0 < a < 1$ ise 1.12.2. Şekildekine benzerdir.

Üstel fonksiyonla ilgili şu özellikler yazılabilir:
1. Üstel fonksiyon hiç bir zaman sıfır olmaz. Yani, $a^x = 0$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur.
2. $x_1 \neq x_2$ iken $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ dir. Yani, üstel fonksiyon bire-birdir.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan bu fonksiyonun ters fonksiyonundan sözedebiliriz. Bu ters fonksiyon, oldukça önemli olan, logaritma fonksiyonudur.

1.12.3. Tanım: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir ve $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ olarak yazılır.

Üstel ve logaritma fonksiyonu dikkate alınarak

$$x = a^b \Leftrightarrow b = \log_a x$$

yazılır (b nin bu değeri birinci ifadede yerine yazılırsa $a^{\log_a x} = x$ elde edilir. Bu önemli formülü ileride kullanacağız). Daha açık olarak söylenirse $x = a^b$ ifadesinde b ye x in a tabanına göre logaritması denir. Bu dikkate alınarak

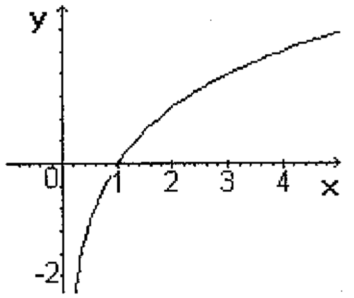
$4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$
$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$
$10^4 = 10.000 \Rightarrow \log_{10} 10.000 = 4$
$10^{-1} = 0.1 \Rightarrow \log_{10} 0.1 = -1$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$

yazılır.

Logaritma fonksiyonu, üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olduğundan grafiğini kolayca çizebiliriz. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

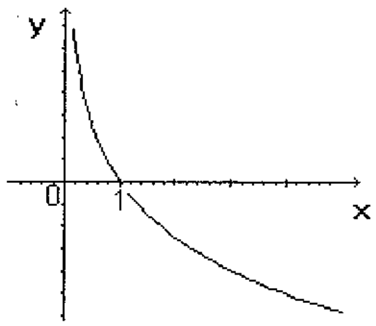
1.12.4. Örnek: $f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu $h(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunun tersidir. $h(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çizip $y = x$ doğrusuna göre simetriğini alırsak $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir. $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:



1.12.3. Şekil: $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun tersidir. Yukarıdakine benzer muhakeme ile $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiği 1.12.4. Şekildeki gibi çizilir:



1.12.4. Şekil: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiği

Not: $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği $a > 1$ ise 1.12.3.Şekile, $0 < a < 1$ ise 1.12.4. Şekile benzerdir.

Logaritma ile ilgili aşağıdaki özellikler yazılabilir:
1. Pozitif olmayan reel sayıların logaritmaları tanımlı değildir.
2. Her tabana göre 1 in logaritması sıfır, yani $\log_a 1 = 0$ dır.
3. Her sayının kendi tabanından logaritması 1, yani $\log_a a = 1$ dir.
4 $\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v$ dir.
5. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$ dir.
6. $\log_a u^k = k\log_a u$ dur.
7. *(Taban değiştirme formülü)* $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ dir. Yani, herhangi iki b ve c sayısının a tabanına göre logaritması bilinirse c sayısının b tabanına göre logaritması da bilinir.

Logaritma tabanı olarak genelde 10 ve e (≈ 2.71828) sayıları kullanılır.10 tabanına göre logaritmaya adi logaritma denir ve ($\log_{10}$ yerine) log ile; e tabanına göre logaritmaya da doğal logaritma (veya Neiper logaritması) denir ve ($\log_e$ yerine) ln ile gösterilir. Taban değiştirme formülünü kullanarak

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0.43429 \ln x \quad \text{ve} \quad \ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx 2.30258 \log x$$

yazılır.

1.12.5. Örnek: ***i.*** Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz:

a. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ***b.*** $h(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ***c.*** $g(x) = \sqrt{e^x - 1}$

ii. Aşağıdaki eşitliklerden x i bulunuz.

a. $10^x = 325$ *b.* $23 = \ln \frac{17}{x}$ *c.* $x^{0.44} = 20$

Çözüm: *i. a.* Üstel fonksiyon her reel sayı için tanımlıdır. Bura nin üssü olan $\frac{1}{x}$ ifadesi $x \neq 0$ için tanımlı olduğundan verilen fonksiyo tanım kümesi $T = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dır.

b. Logaritma fonksiyonu pozitif reel sayılar için tanımlı olduğundan

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

olmalıdır. Bu eşitsizlik çözüldüğünde, tanım kümesi $T = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ olarak bulunur.

c. $e^x - 1 \geq 0$ için karekök işlemi tanımlıdır. Buradan

$$e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

bulunur. Böylece, $T = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ dır.

ii. a. Her iki tarafın logaritması alınırsa

$$10^x = 325 \Rightarrow x\log 10 = \log 325 \Rightarrow x = \log 325$$

bulunur.

b.

$$\begin{aligned} 23 = \ln \frac{17}{x} &\Rightarrow \ln 17 - 23 = \ln x \\ &\Rightarrow e^{\ln x} = e^{\ln 17 - 23} \\ &\Rightarrow x = e^{\ln 17 - 23} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

c.

$$x^{0.44} = 20 \Rightarrow 0.44\ln x = \ln 20 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 20}{0.44} \Rightarrow x = \exp(\frac{\ln 20}{0.44})$$

olur.

Üslü sayılarla işlem yaparken logaritmadan yararlanırız. $a > 0$ olmak üzere

$$a^b = e^{b \ln a}$$

şeklinde tanımlanır. Üs irrasyonel olduğunda bu formül çok kullanışlıdır.

Alıştırmalar

1. $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

i. $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$ **ii.** $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ **iii.** $f(x) = \ln x + e^x$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{\log x - 1}$ **v.** $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}$ **vi.** $f(x) = 2^{\ln x}$

2. $f(x)$ fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

i. $f(x) = e^x$ **ii.** $f(x) = \ln x$ **iii.** $f(x) = \log x$

3. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu söyleyiniz.

( ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (-2)^x$ üstel fonksiyondur.

( ) $\dfrac{\ln x}{\ln y} = \ln x - \ln y$ dir.

( ) $\ln(x+y) = \ln(xy)$ dir.

( ) $a^{\log_a u} = u$ dur.

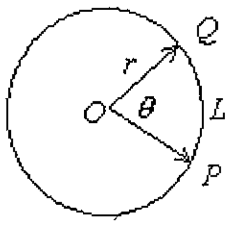
1.13. Trigonometrik Fonksiyonlar

Açı Kavramının Genelleştirilmesi: Açıyı, aynı noktadan başlayan iki farklı ışının oluşturduğu küme olarak düşünürüz. Bu kümeleri ayırt edebilmek için iki ışın arasındaki açıklığın belirtilmesi gerekir. Bunun için çeşitli ölçüler vardır. Bu ölçülerden en çok kullanılanı derece ve radyandır. Eğer bir açının ölçüsü θ ise bunu "θ açısı" diyerek belirteceğiz. Açı kavramı yukarıdaki gibi düşünülürse, bir açının ölçüsü (yön dikkate alınmadan) 0^o ile 180^o arasında olur. Bu ise, bazı durumlar için uygun değildir. Aşağıda verilen açıklamayı inceleyelim: Başlangıç noktası O olan OM yarıdoğrusunu gözönüne alalım. O sabit kalmak şartıyla, OM yarıdoğrusunu döndürelim. Yarıdoğrunun başlangıçtaki pozisyonu ile bitiş pozisyonu arasında teşkil edilen açının ölçüsü ile dönme miktarının ölçüsü aynı şeydir. Bu döndürme işlemi kesin bir manaya sahip değildir. Çünkü dönmenin hangi yöne doğru olduğunun belirtilmesi gerekir. Bu yönü belirtmede saatin yönü ve saatin ters yönü kullanılır. Saatin dönme yönünün tersi pozitif yön ve saat yönündeki dönme negatif yön olarak kabul edilir. Şimdi OM doğrusunu döndürmek daha bir anlam kazanmış olur. Dönme miktarını bir açının ölçüsü ile belirleyebilmek için 180^0 den daha büyük ve 0^o den daha küçük açıların olduğunu kabul ederek, açı kavramını genişletmeliyiz. Bu kavramı genişletmek, matematik yönünden oldukça önemlidir. Böylece, OM yarıdoğrusunu saatin ters yönünde bir tam dönmenin $\frac{3}{4}$ ü kadar döndürmek demek, bu doğruyu 270^o döndürmek demektir. Yine OM yarıdoğrusunu saatin dönme yönünde tam döndürmenin $\frac{1}{4}$ ü kadar döndürmek demek, bu yarıdoğruyu -90^o döndürmek demektir. Eğer, bir yarıdoğru θ_1 açısı kadar bir dönme yaptıktan sonra, θ_2 açısı kadar bir dönme daha yaparsa, toplam dönme açısı $\theta_1 + \theta_2$ olur.

Açıların Radyan Cinsinden Ölçüsü: Açıların derece olarak ölçülmesi analizin amaçlarına uygun değildir. Bu uygun olmamaya en basit gerekçe, derece cinsinden olan değerleri sayı doğrusu üzerine yerleştiremememizdir. Onun için analizin amacına uygun gelecek bir ölçü birimi bulmamız gerekir. Bu da radyandır. Bir merkez açının radyan ölçüsü, gördüğü yayın uzunluğunun, çemberin yarıçapına oranı ile bulunur. Yani, şekilde L, PQ yayının uzunluğunu göstermek üzere

$$\theta = \frac{L}{r}$$

yazılır. Dolayısıyla, bir açının radyan ölçüsü birimsiz bir sayı, yani bir reel sayı



1.13.1. Şekil

olarak gözönüne alınır. Böyle düşünüldüğü zaman, açıların radyan cinsinden ölçüleri ile reel sayılar arasında bire-bir bir eşleme yapılır. Derece ve radyan arasında

$$\frac{D}{180^o} = \frac{R}{\pi}$$

bağıntısı vardır . Bu kullanılarak, derece cinsinden verilen açıları radyan cinsinden veya radyan cinsinden verilen açıları derece cinsinden yazabiliriz. Örneğin,

$$0^o,\ 30^o,\ 45^o, 60^o,\ 90^o,\ 180^o \text{ ve } 360^o$$

nin radyan karşılıkları sırasıyla

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi$$

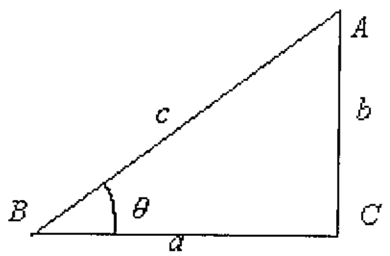
dır. Yine bu formül kullanılarak $\frac{180^o}{\pi} = 57^o17'46''$ açısının radyan cinsinden karşılığ 1 dir. Bir başka deyişle 1 in derece karşılığı

$$\frac{180^o}{\pi} = 57^o17'46''$$

dır.

Dar Açıların Trigonometrik Oranları: Şekildeki dik üçgeni gözönüne alalım. Burada, $a = |BC|$, $b = |AC|$ ve $c = |AB|$ dir. θ dar açısının trigonometrik oranları

$$\sin\theta = \frac{b}{c},\quad \cos\theta = \frac{a}{c},\quad \tan\theta = \frac{b}{a},\quad \cot\theta = \frac{a}{b}$$



1.13.2. Şekil

dır. Bunlar sırasıyla θ açısısının sinüsü, kosinüsü, tanjantı ve kotanjantı olarak adlandırılır. Dikkat edilmelidir ki, sin θ, cos θ, tan θ ve cot θ (uzunlukların oranı olarak yazıldıklarından) birimsiz birer sayıdır. Bunların dışında, sekant ve kosekant denen ve

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

ile tanımlanan trigonometrik oranlar da vardır. sin θ, cos θ, tan θ ve cot θ arasında

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

bağıntıları vardır. Bunların dışında, şekildeki dik üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \text{ veya } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

elde edilir. Şuna dikkat etmek gerekir ki,

$$(\cos\theta)^n = \cos^n\theta,\ (\sin\theta)^n = \sin^n\theta,\ (\tan\theta)^n = \tan^n\theta \text{ ve } (\cot\theta)^n = \cot^n\theta$$

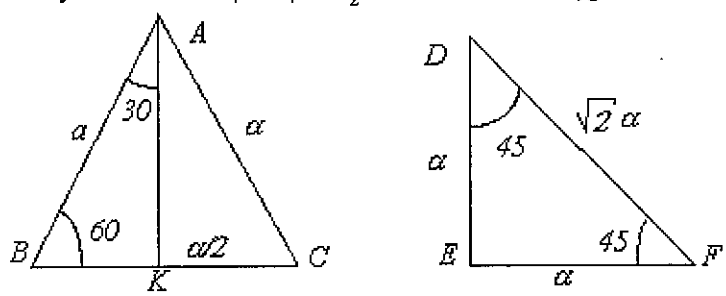
olarak tanımlanır. Şekildeki üçgende, BAC açısının ölçüsü $\frac{\pi}{2} - \theta$ dır. Bu dar açının trigonometrik oranlarını yazdığımızda,

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta,\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta,\ \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta,\ \cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$$

bulunur.

1.13.1. Örnek: 30^o, 45^0 ve 60^o lik açıların sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjantını bulunuz.

Çözüm: Öyle üç tane dik üçgen bulacağız ki, bunların birer açıları 30^o, 45^0 ve 60^o olsun. Önce bir ABC eşkenar üçgeni çizelim. Bu eşkenar üçgende AK kenarortay olmak üzere $|AK| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ dır. ABK dik üçgeninde



1.13.3. Şekil

$$\sin 30^o = \frac{1}{2},\quad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 30^o = \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \cot30^o = \sqrt{3}$$

ve

$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^o = \frac{1}{2},\ \tan 60^o = \sqrt{3},\ \cot 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

yazılır.

DEF üçgeni gözönüne alınarak,

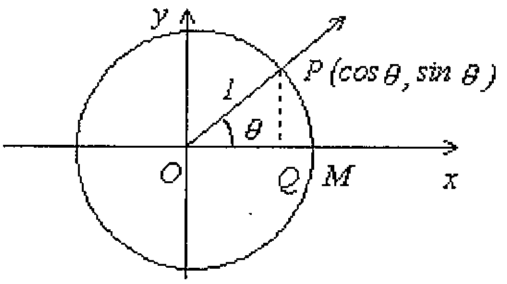
$$\sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^o = 1, \ \cot 45^o = 1$$

yazılır.

Herhangi Bir Açının Trigonometrik Oranları: Yarıçap uzunluğu 1 birim ve merkezi orijinde olan çemberin denklemi

$$x^2 + y^2 = 1$$

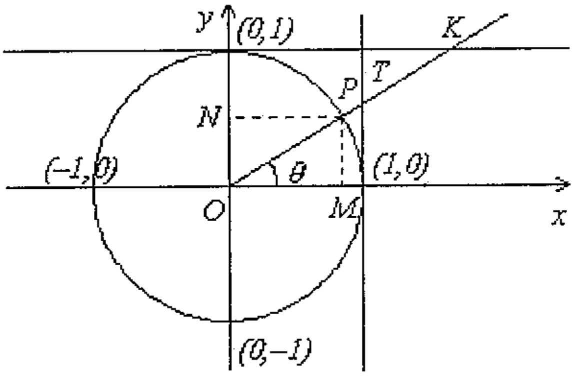
dir. Bu çembere, birim çember denir. Bu çember yardımı ile dar açıların dışındaki açıların da trigonometrik oranlarını bulabileceğiz. x ekseninin pozitif kısmı olan $0x$ yarıdoğrusunu başlangıç pozisyonu olarak alalım. Bu doğruyu pozitif yönde θ dar açısı kadar döndürelim. Son durumda yarı doğru birim çemberi P noktasında keser. Bu noktayı (x, y) ile gösterelim. P noktasından x eksenine PQ dikmesi indirelim. POQ bir dik üçgendir. Bu dik üçgenden yararlanarak trigonometrik oranları yazalım:



1.13.4. Şekil

$$\sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{|PQ|}{1} = |PQ| = y, \quad \cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|OQ|}{1} = |OQ| = x$$

olur. Buna göre $P(x, y)$ noktasını, $x = \cos\theta$ ve $y = \sin\theta$ olduğundan, $P(\cos \theta, \sin\theta)$ şeklinde de yazabiliriz. Yani, O dan başlayan ve birim çemberi kesen bir yarıdoğrunun x ekseninin pozitif kısmı ile yaptığı açının kosinüsü bu noktanın apsisi, sinüsü de bu noktanın ordinatı olmaktadır. Açının negatif olması durumunda da aynı kural geçerlidir. x ve y nin işaretine göre sinüs ve kosinüsün işaretleri belirlenir. Sinüs ve kosinüs bilindiği zaman diğer trigonometrik oranlar da yazılabilir. Şimdi, bu trigonometrik oranların geometrik gösterilişini verelim.



1.13.5. Şekil

Bu şekilde, P noktasının apsisi $\cos\theta$, ordinatı $\sin\theta$; T noktasının ordinatı $\tan\theta$ ve K noktasının apsisi $\cot\theta$ olur. Bu durumu gözönüne alarak, trigonometrik oranların hangi aralıklarda değerler alabileceğini söyleyebiliriz. Birim çember üzerinde (x, y) noktasının bileşenleri olan x ve y, $[-1, 1]$ aralığında değiştiğinden

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ ve } -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

yazılır. Tanjant ve kotanjant ise $(-\infty, +\infty)$ aralığında değer alır. x ve y nin işaretine bakarak sinüs ve kosinüsün işaretleri kolaylıkla belirlenir. Birinci bölgede x ve y pozitif olduğundan sinüs ve kosinüs de pozitif; ikinci bölgede x negatif y pozitif olduğundan sinüs pozitif, kosinüs negatif; üçüncü bölgede x ve y negatif olduğundan sinüs ve kosinüs negatif; dördüncü bölgede x pozitif ve y negatif olduğundan sinüs negatif, kosinüs pozitif olur.

İki Açının Toplam ve farkının Trigonometrik Oranları: θ_1 ve θ_2 herhangi iki açı olmak üzere, $\theta_1 + \theta_2$ ve $\theta_1 - \theta_2$ açılarının trigonometrik oranları

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$$
$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

şeklindedir.

Bu formüllerden istifade ederek, bir açının katlarının trigonometrik oranlarını da yazabiliriz: Eğer $\theta_1 = \theta_2$ ise

$$\sin 2\theta_1 = 2\sin\theta_1\cos\theta_1$$
$$\cos 2\theta_1 = \cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 = 2\cos^2\theta_1 - 1 = 1 - 2\sin^2\theta_1$$
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tan\theta_1}{1 - \tan^2\theta_1}$$

olur.

Eğer çember üzerinde θ açısının belirttiği nokta 360^o (veya 2π) daha döndürülürse, $\theta + 360^o$ (veya radyan cinsinden $\theta + 2\pi$) açısı ile θ açısı; daha genel olarak söylenirse, k bir tamsayı olmak üzere, θ ile $\theta + k.360^o$ (veya radyan cinsinden $\theta + k.2\pi$) açısı çember üzerinde aynı noktayı gösterir. O halde, θ ile $\theta + k.360^o$ açılarının trigonometrik oranları eşit olur. Örneğin,

$$\sin(\theta + k.2\pi) = \sin\theta \text{ ve } \cos(\theta + k.2\pi) = \cos\theta$$

dır. Bunu $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ ve $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ nin açılımlarını yaparak kolayca görebiliriz.

Keyfi bir açının trigonometrik oranları yazılırken, yine birinci bölgedeki dar açıların trigonometrik oranlarından istifade edilir. Örneğin, θ birinci bölgede bir dar açı olmak üzere, $\pi - \theta$ ikinci bölgede, $\pi + \theta$ üçüncü bölgede ve $2\pi - \theta$ dördüncü bölgede bir açıdır. Açıların toplamının trigonometrik oranları ile ilgili formüller kullanılarak bu açıların trigonometrik oranları

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta; \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta; \quad \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta; \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta; \quad \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

olarak yazılır.

Bir yarım açının trigonometrik oranları: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ifadelerinden

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

yazılabileceği açıktır. Burada, $\theta = \frac{x}{2}$ alınırsa

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

veya

$$\cos\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

elde edilir. İşaret $\frac{x}{2}$ nin ait olduğu bölgeye göre seçilir. Bunlardan yararlanarak

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

olarak bulunur. $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ifadesinin pay ve paydası $2\sin\frac{x}{2}$ ile çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

eşitliği elde edilir.

1.13.2. Örnek: $\tan\frac{\pi}{8}$ ve $\sin\frac{\pi}{8}$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki formüllerden yararlanacağız.

$$\tan\frac{\pi}{8} = \tan\left(\frac{(\frac{\pi}{4})}{2}\right) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$$

olur.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

ifadesinden

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

bulunur. Burada $\frac{\pi}{8}$ birinci bölgede olduğundan işaret pozitif alınmıştır.

Bir yarım açının tanjantı cinsinden trigonometrik oranların ifadesi: Burada $\sin x$, $\cos x$ ve $\tan x$ in $\tan\frac{x}{2}$ cinsinden ifade edilebileceğini göstereceğiz.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

ve burada $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

yazılır. Ayrıca

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

olur.

Sinüs ve Kosinüsün çarpımlarını toplam ve toplamlarını çarpım olarak ifade etme: Önce çarpım halindeki ifadelerin toplam şeklindeki formüllerini verelim.

$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$
$$\cos x\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$
$$\sin x\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

Şimdi de toplam halindeki ifadelerin çarpım şeklindeki formüllerini verelim.

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Bu formüllerin çıkarılışı oldukça kolaydır.

1.13.3. Örnek: ***i.*** $\sin x\sin 2x\sin 3x$ çarpımını bir toplam olarak yazınız.

ii. $\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x)$ ifadesini çarpım halinde yazınız.

Çözüm: *i.* Bir kere

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos(-x) - \cos 3x}{2} = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x \sin 3x &= \frac{1}{2}(\sin 3x\cos x - \sin 3x \cos 3x)\\ &= \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x)\end{aligned}$$

elde edilir.

ii.

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2}\sin x &= \frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x)\\ \sin\frac{x}{2}\sin 2x &= \frac{1}{2}(\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x)\\ \sin\frac{x}{2}\sin 3x &= \frac{1}{2}(\cos\frac{5}{2}x - \cos\frac{7}{2}x)\\ \sin\frac{x}{2}\sin 4x &= \frac{1}{2}(\cos\frac{7}{2}x - \cos\frac{9}{2}x)\\ \sin\frac{x}{2}\sin 5x &= \frac{1}{2}(\cos\frac{9}{2}x - \cos\frac{11}{2}x)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x) &= \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{11}{2}x)\\ &= \frac{1}{2}2\sin 3x \sin\frac{5}{2}x\\ &= \sin 3x \sin\frac{5}{2}x\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu örnekten yararlanarak,

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin 3x\sin\frac{5}{2}x$$

yazılır.

Periyodik Fonksiyonlar: Trigonometrik fonksiyonlara başlamadan önce periyodik fonksiyonlar hakkında kısa bilgi verelim.

1.13.4. Tanım: $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin. Her $x\in A$ için $f(x+T)=f(x)$ olacak şekilde $T\neq 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon ve T ye fonksiyonun periyodu denir. En küçük pozitif T sayısına da fonksiyonun esas periyodu adı verilir.

Bundan sonra, periyot denince esas periyodu anlayacağız. $y=f(x)$ fonksiyonu periyodik ve periyodu T olsun. $[0,T]$ aralığında (veya periyot uzunluğundaki bir aralıkta) fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra sağa ve sola T kadar öteleme yaparak T periyotlu $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

1.13.5. Örnek: *i.* $f(x)=[[x]]-x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösteriniz.

ii. $f(x)=x^2$ fonksiyonunun periyodik olmadığını gösteriniz.

iii. $-\pi<x<\pi$ için $g(x)=x$ fonksiyonu ile çakışan ve periyodu 2π olan $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: *i.* $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $[[x+n]]=[[x]]+n$ olduğunu biliyoruz. Bu dikkate alınarak,

$$f(x+n)=[[x+n]]-(x+n)=[[x]]-x=f(x)$$

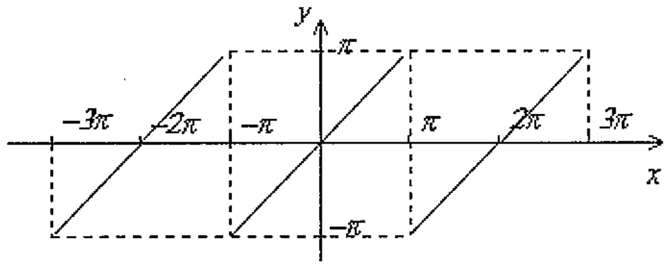
yazılır. $n\in\mathbb{Z}$ ve en küçük pozitif tam sayı 1 olduğundan verilen fonksiyonun periyodu $T=1$ dir.

ii. $T\neq 0$ olmak üzere,

$$f(x+T)=(x+T)^2=x^2+2xT+T^2\neq x^2=f(x)$$

olduğundan, $f(x)=x^2$ periyodik değildir.

iii. Fonksiyonun verilişinden, periyodunun 2π olduğu anlaşılmaktadır. Fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekildedir:



Trigonometrik Fonksiyonlar: Bilindiği gibi, açıların radyan cinsinden ölçüsü bir reel sayıdır. Bu manada düşünüldüğünde, her reel sayının sinüs ve kosinüs cinsinden trigonometrik oranı yazılabilir. O halde

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x;\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$$

fonksiyonlarına sırasıyla sinüs ve kosinüs fonksiyonu denir. Daha önceki bilgilerimizden, sinüs ve kosinüsün $[-1,\ 1]$ aralığında değer aldığını biliyoruz. Bu gözönüne alınarak

$$f:\mathbb{R}\to[-1,\ 1],\ f(x)=\sin x;\ f:\mathbb{R}\to[-1,\ 1],\ f(x)=\cos x$$

yazılır. Bu durumda, sinüs ve kosinüs fonksiyonları örtendir. Ayrıca, yine önceki bilgilerimizden $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

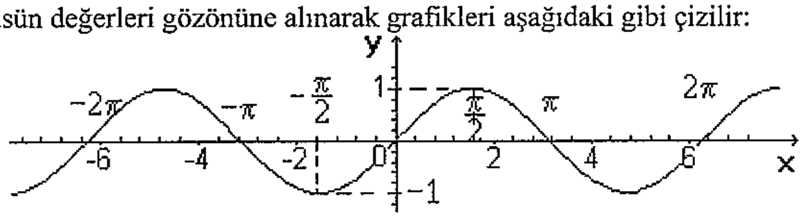
$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \text{ ve } \cos(x+2k\pi)=\cos x$$

yazılır. $k\in\mathbb{Z}$ için $2k\pi$ nin en küçük pozitif sayı olması $k=1$ olması ile mümkündür. O halde, sinüs ve kosinüs fonksiyonu periyodiktir ve periyodu $T=2\pi$ dir.

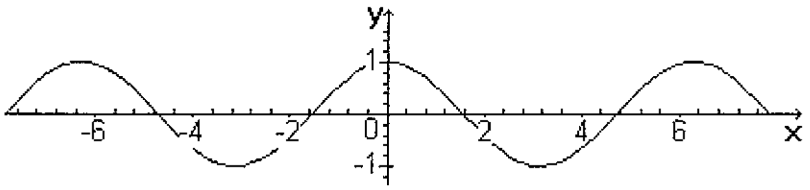
Diğer yandan,

$$\sin(-x)=-\sin x \text{ ve } \cos(-x)=\cos x$$

olduğundan, sinüs tek fonksiyon; kosinüs de çift fonksiyondur. Sinüs ve kosinüsün değerleri gözönüne alınarak grafikleri aşağıdaki gibi çizilir:



1.13.6. Şekil: $y=\sin x$ fonksiyonunun $(-\frac{5\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ aralığındaki grafiği



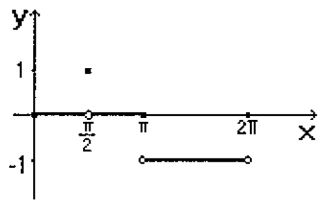
1.13.7. Şekil: $y = \cos x$ fonksiyonunun $(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ aralığındaki grafiği

1.13.6. Örnek: $f(x) = [[\sin x]]$ fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ aralığında çiziniz.

Çözüm: Önce bunu parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0, & x = \pi \\ -1, & \pi < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ -1, & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ 0, & x = 2\pi \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekilde çizilir:



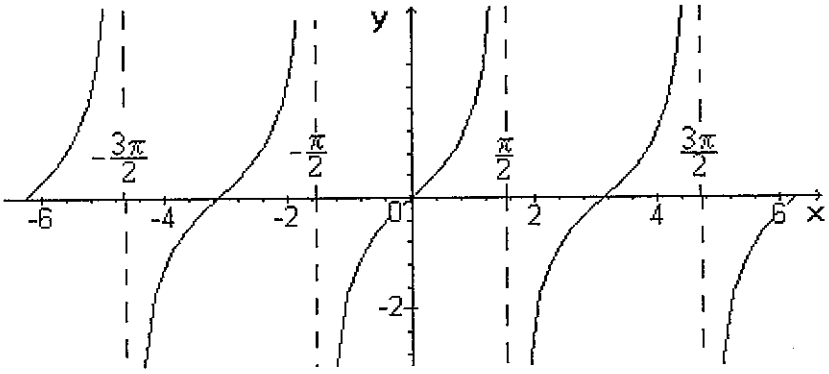
Diğer yandan tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını gözönüne alalım. tan $x = \frac{\sin x}{\cos x}$ olduğundan kosinüsün sıfır olduğu $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ noktalarında tanjant fonksiyonu tanımlı değildir. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ olduğundan sinüsün sıfır olduğu $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ noktalarında kotanjant fonksiyonu tanımlı değildir. Buna göre $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x \text{ ve } f : \mathbb{R} \backslash \{k\pi\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$$

yazılır. Tanjant ve kotanjant, periyotları π olan fonksiyonlardır. Bu dikkate alınarak çoğu zaman

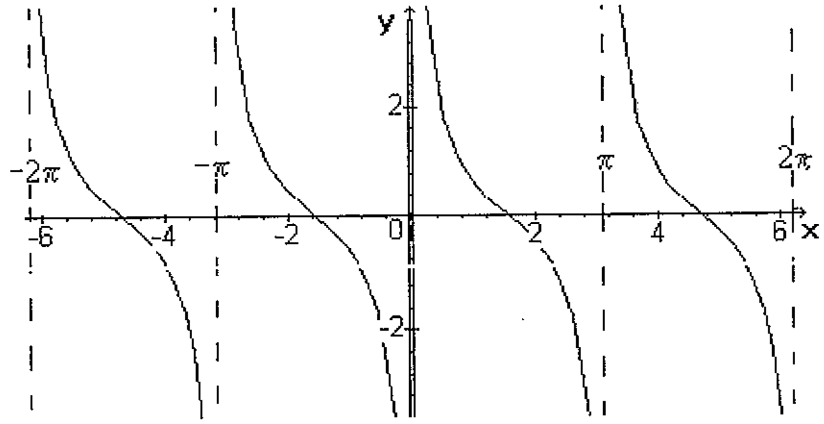
$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x \text{ ve } f : (0,\pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$$

ile çalışılır. Tanjant fonksiyonunun $[-2\pi,\ 2\pi]$ aralığındaki grafiği



1.13.8. Şekil: $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun $[-2\pi,\ 2\pi]$ aralığındaki grafiği

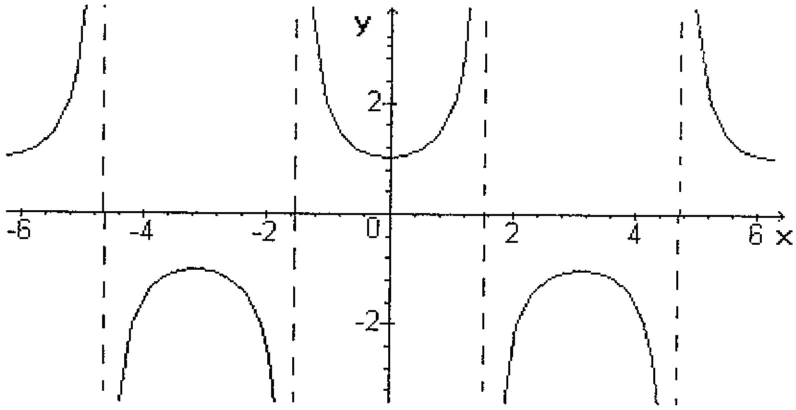
ve kotanjant fonksiyonunun $[-2\pi,\ 2\pi]$ aralığındaki grafiği



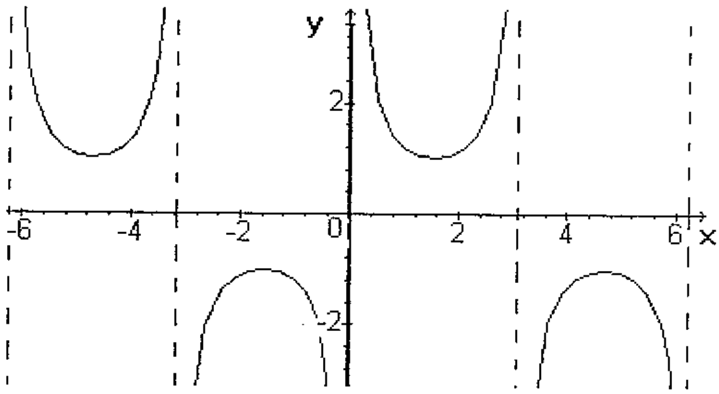
1.13.9. Şekil: $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun $[-2\pi,\ 2\pi]$ aralığındaki grafiği

şeklindedir.

Diğer trigonometrik fonksiyonlardan sekant fonksiyonunun grafiği 1.13.10.Şekilde ve kosekant fonksiyonunun grafiği de 1.13.11.Şekilde verilmiştir.



1.13.10. Şekil: $f(x) = \sec x$ fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi]$ aralığındaki grafiği



1.13.11. Şekil: $f(x) = \csc x$ fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi]$ aralığındaki grafiği

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

i. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ **ii.** $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x = \frac{1}{16}\sin 4x$

iii. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$ **iv.** $\cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x = \frac{1}{4}\sin 4x$

2. Aşağıda verilenleri dikkate alarak $\sin x$, $\cos x$ ve $\tan x$ i bulunuz.

i. $\sin\frac{x}{2} = -0.6,\ -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < 0$ **ii.** $\cos\frac{x}{2} = -\frac{12}{13},\ \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$

3. $f(x) = [[\cos x]]$ fonksiyonunun grafiğini $[-2\pi, 2\pi]$ aralığında çiziniz.

4. $f(x) = |\cos x|$ ve $g(x) = |\sin x|$ fonksiyonlarının periyodunu bulunuz ve bu fonksiyonların grafiğini çiziniz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların periyodunu bulunuz.
i. $f(x) = \cos 2x$ **ii.** $f(x) = \cos 3x + \sin x$ **iii.** $f(x) = \sin^2 x$

6. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.
i. $f(x) = \sin\sqrt{x}$ **ii.** $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ **iii.** $f(x) = (1 + \tan x)^{\sin x}$

7. 5 m uzunluğundaki bir merdiven, yerle 75^o açı yapacak şekilde, bir binanın duvarına dayandırılıyor. Merdivenin binaya değen uçuyla yer arasındaki mesafeyi bulunuz.

8. Nehrin kenarında bir adam ve bu adamın tam karşısında (nehirin diğer kenarında) bir ağaç bulunuyor. Adam bulunduğu yerden nehir boyunca 100 m yürüyor ve ilk bulunduğu yerle kendisi ve ağaç arasındaki açının 50^o derece olduğunu ölçüyor. Buna göre nehrin genişliğini bulunuz.

1.14. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Hatırlanacağı gibi bir fonksiyonun ters fonksiyonundan sözedebilmek için o fonksiyonun bire-bir örten olması gerekir. Eğer fonksiyon bire-bir örten değilse bire-bir örten olduğu aralıklarda ters fonksiyonu tanımlanır. Trigonometrik fonksiyonlar periyodik olduğundan birebir değildir. Dolayısıyla bazı alt aralıklar seçerek bu fonksiyonları birebir örten yapacağız.

Sinüs fonksiyonunu gözönüne alırsak, bu fonksiyon $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında bire-birdir. Dolayısıyla

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$$

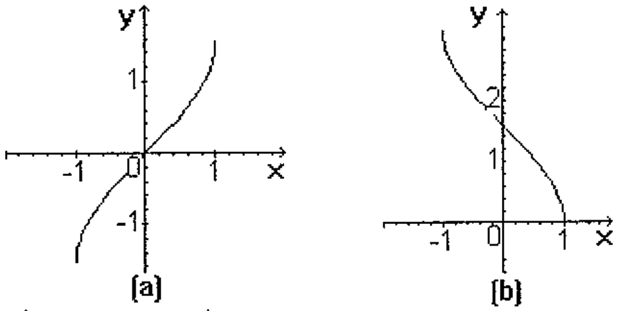
bire-bir örten fonksiyondur. O halde, bu fonksiyonun ters fonksiyonundan sözedebiliriz. sin x fonsiyonunun ters fonsiyonu arcsin x ile gösterilir. Buna göre,

$$g : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ g(x) = \arcsin x$$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersidir. arcsin fonksiyonunun grafiği 1.14.1. Şekil (a) da verilmiştir. Dolayısıyla

$$y = \arcsin x,\quad -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x = \sin y,\quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

yazılır.



1.14.1. Şekil: (a) $y = \arcsin x$ in grafiği **(b)** $y = \arccos x$ in grafiği

Not: Burada belirtmek gerekir ki, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi sadece $g : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = \arcsin x$ değildir. Bu sadece $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki ters fonksiyondur. Değer kümesi $[-1, 1]$ olmak üzere, sinüs fonksiyonunun bire-bir örten olduğu başka aralıklarda vardır. Örneğin, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ aralıklarında sinüs fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Ancak, alışkanlık olarak ters fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığını alarak tanımlarız. Yoksa yukarıdaki aralıklarda da arcsin fonksiyonu tanımlanır, ancak bu durumda arcsin fonksiyonunun hangi aralıkta sinüs fonksiyonunun tersi olduğu mutlaka belirtilmelidir. Eğer aralık belirtilmezse arcsin fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki sinüs fonksiyonunun tersi olarak anlaşılacaktır. Hatta bazı kaynaklar sinüs fonksiyonunun $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki tersini Arcsin ile diğer aralıklardaki tersini ise arcsin ile gösterirler.

Benzer muhakeme kullanılarak kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu tanımlanabilir. $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. O halde, bu aralıktaki kosinüs fonksiyonunun tersi

$$g : [-1, 1] \to [0, \pi],\ g(x) = \arccos x$$

olur. Buradan

$$y = \arccos x,\ -1 \le x \le 1 \Leftrightarrow x = \cos y,\ 0 \le y \le \pi$$

yazılır. Bu fonksiyonun grafiği 1.14.1. Şekil (b) de gösterilmiştir.

1.14.1. Örnek: *i.* arcsin $\frac{1}{2}$ ve arcsin $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ değerlerini bulunuz.

ii. arccos $\frac{1}{2}$ ve arccos $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ değerlerini bulunuz.

iii. $\sin(\arcsin x) = x$ olduğunu gösteriniz.

iv. $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{2})$ yi bulunuz. $\arcsin(\sin\, x) = x$ olması için x in hangi şartları sağlaması gerektiğini gösteriniz.

v. $\cos(\arcsin x)$ ifadesini x cinsinden bir cebirsel ifade şeklinde yazınız.

vi. $f(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

vii. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *i.* Bilindiği gibi $y = \arcsin \frac{1}{2}$ ise $\sin y = \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla $y = \frac{\pi}{6}$ olur. Yani

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

dır.

Aslında $\arcsin \frac{1}{2}$ nin değerini bulurken şu soruya cevap ararız: Acaba $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki hangi açının sinüsü $\frac{1}{2}$ dir? Doğal olarak bunun cevabı $\frac{\pi}{6}$ dır. (Burada şu soru akla gelebilir: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ değil midir? Buna cevap olarak şunu söyleyebiliriz: Bilindiği gibi arcsin, sinüs fonksiyonunun belirli bir aralıktaki ters fonksiyonudur. Onun için arcsin, sinüs fonksiyonunun hangi aralıktaki tersi ise $[-1, 1]$ aralığındaki her bir değeri o aralıktaki bir değere götürmek zorundadır. Aralık belirtilmediğinden arcsin, sinüs fonksiyonunun $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki tersi olduğundan $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ yazılır.)

Benzer muhakeme ile

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

olur.

ii. $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ve $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ dır.

iii. Bir kere $\arcsin x$ in tanımlı olması için $x \in [-1, 1]$ olmalıdır. Dolayısıyla $[-1, 1]$ aralığındaki herhangi bir x için $\arcsin x = y$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ve buradan $x = \sin y$ yazılır. Bu son eşitlikte $y = \arcsin x$ olduğunu dikkate alırsak

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1, 1]$$

elde edilir.

iv. Aralık belirtilmediğinden arcsin, sinüs fonksiyonunun $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki tersidir. Buna göre, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ve $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\arcsin(\sin\frac{3\pi}{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

yazılır.Böylece, keyfi $x \in \mathbb{R}$ için

$$\arcsin(\sin x) \neq x$$

olur. Ancak, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için

$$\arcsin(\sin x) = x$$

dir.

v. $u = \arcsin x$ denirse $\cos(\arcsin x) = \cos u$ olur.

$$\sin^2(\arcsin x) = (\sin(\arcsin x))^2 = x^2,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

yazılır. $u = \arcsin x$ olduğunu dikkate alırsak

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

veya

$$\cos^2 u = 1 - x^2$$

dır. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\cos u \geq 0$ olduğundan,

$$\cos u = \sqrt{1 - x^2}$$

veya

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

bulunur. Benzer muhakeme kullanılarak

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

olduğu da gösterilebilir.

vi. $f(-x) = \arcsin(-x) = -\arcsin x = -f(x)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\arcsin(-x) = u &\Rightarrow \sin u = -x \\
&\Rightarrow \sin(-u) = x \\
&\Rightarrow -u = \arcsin x \\
&\Rightarrow \arcsin(-x) = -\arcsin x \\
&\Rightarrow f(-x) = -f(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $f(x) = \arcsin x$ tek fonksiyondur.

vii. $u = \arcsin x$ ve $v = \arccos x$ diyelim. Bu durumda

$$u + v = \arcsin x + \arccos x$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının sinüsünü alırsak

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin(\arcsin x + \arccos x) \\
&= \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) \\
&= x^2 + (\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) = 1 &\Rightarrow u + v = \arcsin 1 \\
&\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanjant fonksiyonu gözönüne alınırsa

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$$

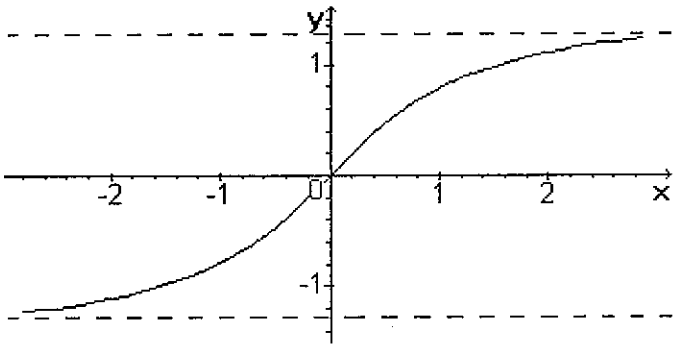
bire-bir örten fonksiyondur. O halde, bu fonksiyonun ters fonksiyonundan sözedebiliriz. $\tan x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $\arctan x$ ile gösterilir. Buna göre,

$$g : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ g(x) = \arctan x$$

f fonksiyonunun tersidir. Dolayısıyla

$$y = \arctan x, \quad -\infty < x < +\infty \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

yazılır. arctan fonksiyonunun grafiği 1.14.2. Şekilde verilmiştir.



1.14.2. Şekil: $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun grafiği

1.14.2. Örnek: ***i.*** arctan 1 i bulunuz.

ii. $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğunu gösteriniz.

iii. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: ***i.*** Burada $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki hangi açının tanjantının 1 olacağını araştıracağız. Bunun da $\frac{\pi}{4}$ olduğunu biliyoruz. O halde $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ dür.

ii.

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

olduğunu dikkate alarak

$$\begin{aligned} \sin(\arctan x) &= \tan(\arctan x)\cos(\arctan x) \\ &= x\cos(\arctan x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

yazılır. Burada ilk ve son teriminin arcsinüsleri alınırsa

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

elde edilir.

iii.

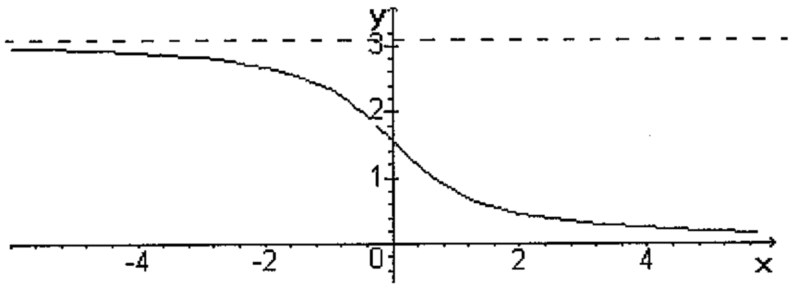
$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}\right) &= \frac{\tan\left(\arctan \frac{1}{2}\right) + \tan\left(\arctan \frac{1}{3}\right)}{1 - \tan\left(\arctan \frac{1}{2}\right)\tan\left(\arctan \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} \\ &= 1\end{aligned}$$

eşittliğinin ilk ve son teriminin arktanjantı alınırsa

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir.

Diğer trigonometrik fonksiyonların terslerini bulmak için de yukarıdakine benzer muhakeme kullanılır. Şimdi bunların terslerini kısaca verelim: Kotanjant fonksiyonunun tersi $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$, $g(x) = \operatorname{arccot} x$ olarak tanımlanır.

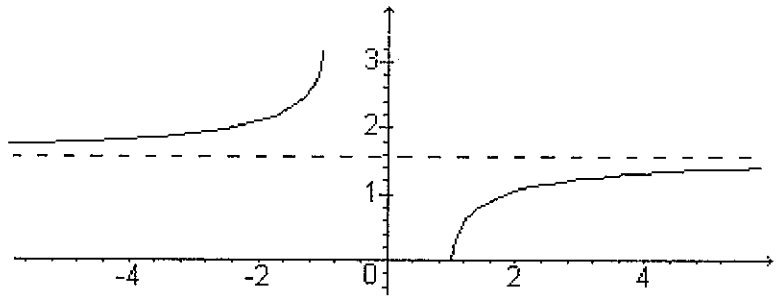


1.14.3. Şekil: $y = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun grafiği

Sekant fonksiyonunun tersi

$$g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi],\ g(x) = \operatorname{arcsec} x$$

olarak tanımlanır.

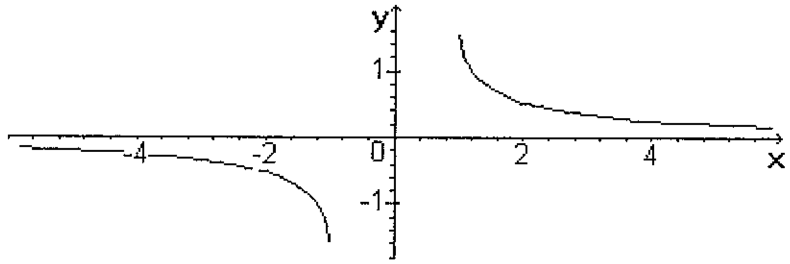


1.14.4. Şekil: arcsec x in grafiği

Kosekant fonksiyonunun tersi

$$g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}], \; g(x) = \operatorname{arccsc} x$$

olarak tanımlanır.



1.14.5. Şekil: arccsc x fonksiyonunun grafiği

1.14.3. Örnek: $\arcsin \frac{1}{x} = \operatorname{arccsc} x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\arcsin \frac{1}{x} = u$ denirse

$$\frac{1}{x} = \sin u \Rightarrow x = \csc u$$

yazılır. Buradan $u = \operatorname{arccsc} x$ ve dolayısıyla

$$\arcsin \frac{1}{x} = \operatorname{arccsc} x$$

elde edilir.

Buradan şu sonucu söyleyebiliriz: Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar ters trigonometrik fonksiyonlar arasında yoktur. Örneğin, $\frac{1}{\sin x} = \csc x$ olurken yukarıdaki örnekten görüleceği gibi, $\arcsin \frac{1}{x} = \operatorname{arccsc} x$ dir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki denklemlerden x i bulunuz.
i. $\arcsin(x+3) = \frac{\pi}{3}$ **ii.** $\arccos \frac{x+1}{2} = \frac{\pi}{2}$ **iii.** $\arctan(x^2-1) = 0$

2. Aşağıda verilenlerin değerlerini bulunuz.
i. $\arctan 1$ **ii.** $\arcsin(-\frac{1}{2})$ **iii.** $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})$
iv. $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ **v.** $\arccos(-1)$ **vi.** $\arcsin(\cos\frac{\pi}{3})$
vii. $\arctan(\sin\frac{\pi}{2})$ **viii.** $\cos(\arcsin\frac{1}{2})$ **ix.** $\sin(\arctan\sqrt{3})$

3. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.
i. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ **ii.** $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$
iii. $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ **iv.** $\tan(2\arctan x) = \frac{2x}{1-x^2}$

1.15. Trigonometrik Denklemler

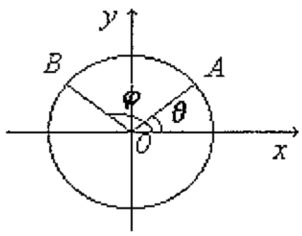
$\sin x = a$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklem $|a| \leq 1$ için anlamlıdır. Aşağıdaki şekile dikkat edilirse sinüsü a olan iki tane açı vardır. Bunlar θ ve φ dir. Burada $\varphi = \pi - \theta$ olduğuna dikkat ediniz. O halde, $\sin\theta = a$ ise $\sin x = a$ denkleminin çözümü $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = \pi - \theta + 2k\pi = (2k+1)\pi - \theta$$

olur. Ters trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak, $\sin x = a$ denkleminin çözümleri

$$x = \arcsin a + 2k\pi \quad \text{ve} \quad x = \pi - \arcsin a + 2k\pi = (2k+1)\pi - \arcsin a$$

olarak da yazılabilir.



1.15.1. Şekil

Benzer muhakeme ile $\cos\theta = a$ ise $\cos x = a$ denkleminin çözümü $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = -\theta + 2k\pi = 2k\pi - \theta$$

veya ters trigonometrik fonksiyonları kullanarak

$$x = \arccos a + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = -\arccos a + 2k\pi = 2k\pi - \arccos a$$

olur.

$\tan\theta = a$ ise $\tan x = a$ denkleminin çözümü $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = \theta + k\pi$$

veya

$$x = \arctan a + k\pi$$

olur.

1.15.1. Örnek: Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

i. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ii.* $\cos x = \frac{4}{5}$ *iii.* $\tan x = 1$

iv. $\sin x = \sin 3x$ *v.* $\cos[[x]] = [[\cos x]]$

Çözüm: *i.* Bildiğimiz gibi $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Buna göre

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ve} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir.

ii. Kosinüsü $\frac{4}{5}$ olan açının hangisi olduğunu hesap makinası veya trigonometrik cetvel kullanmadan söyleyemeyiz. Bu gibi durumlarda ters trigonometrik fonksiyonlardan istifade ederiz. Bilinmektedir ki $\arccos\frac{4}{5}$ açısının kosinüsü $\frac{4}{5}$ dir. Buna göre verilen denklemin çözümleri

$$x = \arccos\frac{4}{5} + 2k\pi \quad \text{ve} \quad x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

olarak bulunur.

iii. Bilindiği gibi $\frac{\pi}{4}$ ün tanjantı 1 dir. O halde verilen denklemin çözümü $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$ olur.

iv. Verilen denklemde x ve $3x$ in sinüsleri eşit olduğundan bunlar arasında

$$3x = x + 2k\pi \ \text{veya} \ 3x = \pi - x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

bağıntısı vardır. Birinci bağıntıdan $x = k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$ ve ikinci bağıntıdan da $x = (\frac{2k+1}{4})\pi$ bulunur.

v. $\cos x$ in alabileceği tam değerler -1, 0 ve 1 dir. Yani,

$$[[\cos x]] = -1 \quad \text{veya} \quad [[\cos x]] = 0 \quad \text{veya} \quad [[\cos x]] = 1$$

olur. Buna göre $\cos[[x]] = [[\cos x]]$ denkleminden

$$\cos[[x]] = -1, \quad \cos[[x]] = 0, \quad \cos[[x]] = 1$$

denklemleri yazılır. Birinci denklemin sağlanabilmesi için $[[x]] = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ olması gerekir. Ancak, $[[x]]$ bir tam sayı olduğundan $[[x]] = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ olarak yazılamaz. O halde birinci denklemin çözümü yoktur.

İkinci denklemin sağlanabilmesi için $[[x]] = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ olması gerekir. $[[x]]$ tam değeri gösterdiğinden bunu yazamayız. Dolayısıyla bu denklemin de çözümü yoktur.

Üçüncü denklemin sağlanabilmesi için $[[x]] = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ olması gerekir. $2k\pi$ sadece $k = 0$ için tam sayı olduğundan $[[x]] = 0$ yazılır.

$$[[x]] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

olur. Ancak x in bu değerlerinden sadece $x = 0$ verilen $\cos[[x]] = [[\cos x]]$ denklemini sağlar. O halde çözüm kümesi olarak $Ç = \{0\}$ yazılır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki denklemlerin çözümünü bulunuz.
i. $\sin x = 1$ **ii.** $\sin x = -1$ **iii.** $\cos x = -1$
iv. $\sin x = 0$ **v.** $\cos x = 0$ **vi.** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
vii. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **viii.** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ix.** $\sin(3x - \pi) = 0$
x. $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$ *(Yol gösterme:* $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$ *olduğunu gözönüne alınız.)*

2. Aşağıdaki denklemleri sağlayan $[0, 2\pi]$ aralığındaki sayıları bulunuz.
i. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ **ii.** $2\cos^2 x - (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$
iii. $2\sin^2 x$-$(2 + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$ **iv.** $2\cos^2 x + (4 + \sqrt{2})\cos x$-$2\sqrt{2} = 0$
(Yol gösterme: i ve iii de $t = \sin x$*; ii ve iv de* $t = \cos x$ *yazılarak verilen denklemler ikinci dereceden denklemlere dönüşür. Bu denklemler yardımıyla çözüm bulunur.)*

3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
i. $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ **ii.** $3 + 3\sin x = \cos^2 x$
iii. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$
(Yol gösterme: 2.Problemdeki denklemlere dönüştürülerek çözüm yapılır.)

4. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
i. $\sin[\sin(\sin x)] = 0$ **ii.** $\sin[[x]] = [[\sin x]]$ **iii.** $\cos(\cos x) = 1$

1.16. Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu iki fonksiyon yardımı ile yeni fonksiyonlar tanımlanabilir. Bunlar sinüs hiperbolik, kosinüs hiperbolik, tanjant hiperbolik, kotanjant hiperbolik, secant hiperbolik ve kosekant hiperbolik fonksiyonlar olarak adlandırılır ve sırasıyla

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

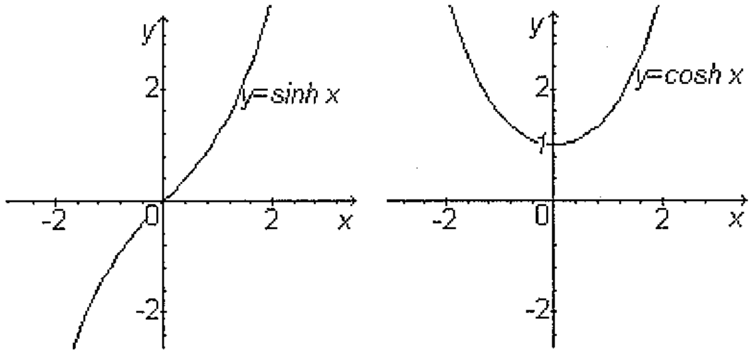
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

ile tanımlanır. Buna göre

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \ \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \ \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \ \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

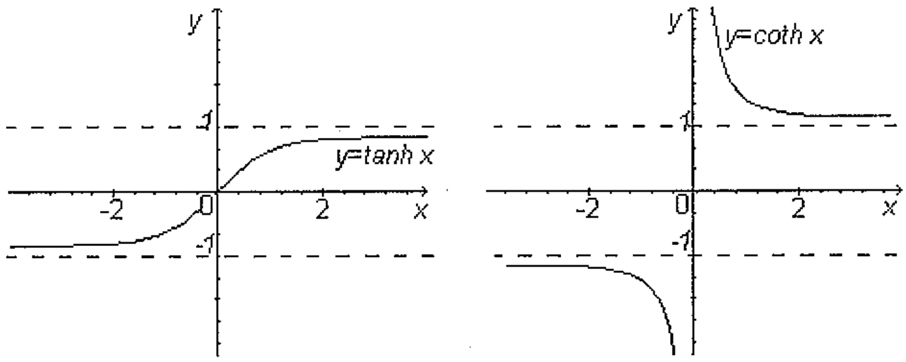
olur.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$ ve $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x) = \cosh x$ fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



1.16.1. Şekil: $y = \sinh x$ ve $y = \cosh x$ fonksiyonlarının grafikleri

$f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \tanh x$ ve $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) = \coth x$ fonksiyonlarının grafikleri 1.16.2. Şekilde verilmiştir.

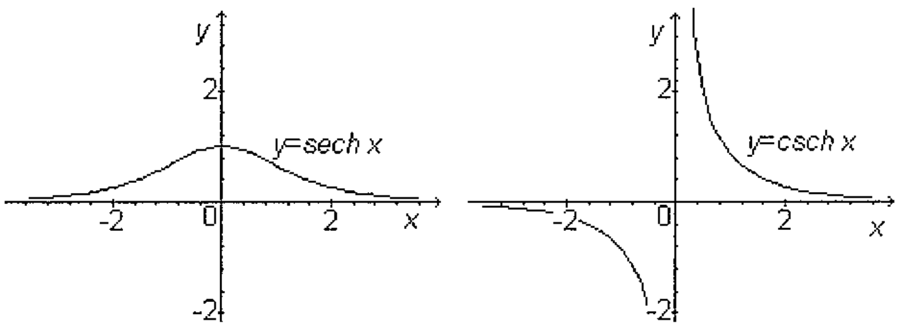


1.16.2. Şekil: $y = \tanh x$ ve $y = \coth x$ fonksiyonlarının grafikleri

$f : \mathbb{R} \to (0, 1]$, $f(x) = \operatorname{sech} x$ ve $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \operatorname{csch} x$ fonksiyonlarının grafikleri 1.16.3.Şekilde gösterilmiştir.

Hiperbolik fonksiyonlarla ilgili şu özellikler yazılabilir:
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sinh x + \cosh x = e^x$

$$\begin{aligned}
\sinh x - \cosh x &= -e^{-x}\\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y\\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y
\end{aligned}$$



1.16.3. Şekil: $y = \operatorname{sech} x$ ve $y = \operatorname{csch} x$ fonksiyonlarının grafikleri

Eğer $x = \cosh u$, $y = \sinh v$ denirse, yukarıda yazdığımız özelliklerin birincisine göre

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 u - \sinh^2 v = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

olur. $x^2 - y^2 = 1$ analitik geometriden bildiğimiz bir hiperbol denklemidir. Bu yüzden bu fonksiyonlara hiperbolik fonksiyon adı verilmiştir.

Hiperbolik fonksiyonların bire-bir örten olduğu yerlerde ters fonksiyonlarından sözedebiliriz. Bu fonksiyonların tersleri arcsinh x, arccosh x, arctanh x, arccoth x, arcsech x ve arccsch x ile gösterilir. Önce arcsinh x in ters fonksiyonunun kuralını bulalım. Ters fonksiyon bahsinden hatırlanacağı gibi

$$y = \operatorname{arcsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y$$

şeklindedir. $x = \sinh y$ ise

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

yazılabileceğinden $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemi e^y ye göre çözersek

$$e^y = \frac{2x \mp \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \mp \sqrt{x^2 + 1}$$

olur. y yi bulmak için her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$y = \ln\left(x \mp \sqrt{x^2+1}\right),$$

bulunur. $x \in \mathbb{R}$ için $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ dir. Logaritma fonksiyonu pozitif sayılarda tanımlı olduğundan,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ veya } \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

yazılır. Ters hiperbolik fonksiyonların kuralları aşağıda verilmiştir:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \in [1, +\infty)$$

$$\operatorname{arctanh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x}, \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arccoth} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1}, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\operatorname{arcsech} x = \ln\tfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad x \in (0, 1]$$

$$\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Hiperbolik fonksiyonları tanımlarken üstel fonksiyonları, ters hiperbolik fonksiyonları tanımlarken de logaritma fonksiyonunu kullandık. Onun için bazen hiperbolik fonksiyonlar yerine üstel ve logaritmik yazılışlarını kullanırız.

1.16.1. Örnek: $\sinh x = 2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bilindiği gibi $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ dir. Buna göre $\sinh x = 2$ denklemini $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$ olarak yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Buradan

$$e^x = 2 - \sqrt{5} \text{ veya } e^x = 2 + \sqrt{5}$$

bulunur. e^x bir üstel fonksiyon olup daima pozitiftir. O halde

$$e^x = 2 + \sqrt{5}$$

ve buradan da

$$x = \ln(2+\sqrt{5})$$

olur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.
i. $\cosh(-x) = \cosh x$ **ii.** $\sinh(-x) = -\sinh x$
iii. $\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$ **iv.** $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
i. $\sinh x = 3$ **ii.** $3\cosh x + 2\sinh x = 3$ **iii.** $\tanh x = \frac{1}{3}$

3.

$$(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) = \cosh(x+y) + \sinh(x+y)$$

olduğunu gösteriniz.

Günümüzde kullandığımız sayılar, ekonomik ve teknolojik değişmelere paralel olarak hızla büyümektedir. Sayıların büyümesi ile beraber okunması problemi karşımıza çıkar. Bunların bir kısmının okunuşu aşağıda verilmiştir.

10^3	bin	10^{18}	kentilyon
10^6	milyon	10^{21}	sekstilyon
10^9	milyar	10^{24}	septilyon
10^{12}	trilyon	10^{27}	oktilyon
10^{15}	katrilyon	10^{30}	nonilyon