Türev Alma Kuralları

1) $f(x)=c$, $f'(x)=0$

2) $f(x)=a x^n$

$f'(x)=a.n x^{n-1}$

3) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'g + g'f$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'.g - g'.f}{g'}$

5) $f(x) = \dfrac{a}{x^n}$

$f'(x) = \dfrac{-an}{x^{n+1}}$

6) $f(x) = (g(x))^n$

$f'(x) = n.(g(x))^{n-1}.g'$

7) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

$f'(x) = \dfrac{g'}{n \sqrt[n]{g^{n-1}}}$

8) $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$f'(x) = \dfrac{g'}{2\sqrt{g(x)}}$

9) $f(x) = a^{g(x)}$, $f'(x) = g'.a^{g(x)}.\ln a$

10) $f(x) = e^{g(x)}$, $f'(x) = g'.e^{g(x)}$

11) $f(x) = \log_a g(x)$, $f'(x) = \dfrac{g'}{g(x)} . \log_a e$

12) $f(x) = \ln g(x)$, $f'(x) = \dfrac{g'}{g(x)}$

Trigonometrik

13) $f(x) = \sin g(x)$, $f'(x) = g'.\cos g(x)$

14) $f(x) = \cos g(x)$, $f'(x) = -g'.\sin g(x)$

15) $f(x) = \tan g(x)$

$f'(x) = g' \sec^2 g(x) = g'(1+\tan^2 g(x))$

16) $f(x) = \cot g(x)$

$f'(x) = -g' \operatorname{cosec}^2 g(x) = -g'(1+\cot^2 g(x))$

17) $f(x) = \sec g(x)$

$f'(x) = g'.\sec g(x).\tan g(x)$

18) $f(x) = \operatorname{cosec} g(x)$

$f'(x) = -g'.\operatorname{cosec} g(x).\cot g(x)$

19) $f(x) = \operatorname{Arcsin} g(x)$

$f'(x) = \dfrac{g'}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

20) $f(x) = \operatorname{Arctan} g(x)$

$f'(x) = \dfrac{g'}{1+(g(x))^2}$

Örn: $f(x) = \cos^3(\text{Arctan}(\ln\sqrt{5x})) = ?$

$$f'(x) = 3\cos^2(\text{Arctan}(\ln\sqrt{5x})) \cdot -\sin(\text{Arctan}(\ln\sqrt{5x})) \cdot \frac{\frac{\frac{5}{2\sqrt{5x}}}{\sqrt{5x}}}{1+(\ln\sqrt{5x})^2}$$

Örn: $f(x) = \sin(\sec(\log_4 5^{\frac{-3}{x^2}})) = ?$

$$f'(x) = \cos(\sec(\log_4 5^{\frac{-3}{x^2}})) \cdot \sec(\log_4 5^{\frac{-3}{x^2}}) \cdot \tan(\log_4 5^{\frac{-3}{x^2}}) \cdot \frac{\frac{6}{x^3} \cdot 5^{\frac{-3}{x^2}} \cdot \ln 5}{5^{\frac{-3}{x^2}}} \cdot \log_4 e$$

Örn: $f(x) = \cancel{e}^{\cancel{\ln}(\cancel{\text{Arctan}}(\cancel{\tan}(\cos x^2)))} = ?$

$= (\cos x^2)$

$f'(x) = -2x \sin x^2$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

$f(x,y) = 0$ → hem x'e, hem y'ye göre türev al

Örn: $x^3y^2 + 5xy^4 - 9x^5 + 8y^3 + 10 = 0$

$$3x^2y^2 + 2x^3y \cdot y' + 5y^4 + 20y^3 \cdot y' - 45x^4 + 24y^2 \cdot y' = 0$$

$$2x^3yy' + 20xy^3y' + 24y^2y' = -3x^2y^2 - 5y^4 + 45x^4$$

$$y' = \frac{-3x^2y^2 - 5y^4 + 45x^4}{2x^3y + 20xy^3 + 24y^2}$$

Örn: $\cos x^2y + \sin 3xy^4 = 0$

$$-2xy\sin 2y - x^2\sin x^2y\cdot y' + 3y^4\cos 3xy^4 + 12xy^3\cos 3xy^4\cdot y' = 0$$

$$-x^2\sin x^2y\cdot y' + 12xy^3\cos 3xy^4\, y' = 2xy\sin x^2y - 3y^4\cos 3xy^4$$

$$y' = \frac{2xy\sin x^2y - 3y^4\cos 3xy^4}{-x^2\sin^2 y + 12xy^3\cos 3xy^4}$$

Ardışık Türevler (yüksek mertebeden türevler)

1. türev $\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

2. " $\quad y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$

⋮

n. " $\quad y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

Örn: $f(x) = x^3 + 7x^2 - 8x + 9$, $f'''(x) = ?$

$f'(x) = 3x^2 + 14x - 8$

$f''(x) = 6x + 14$

$f'''(x) = 6$

Örn: $f(x) = e^{3x}$, $f^{(50)}(x) = ?$

$f'(x) = 3e^{3x}$

$f''(x) = 9e^{3x}$

$f'''(x) = 27e^{3x}$

⋮

$f^{50}(x) = 3^{50}\cdot e^{3x}$

Örn: $f(x) = \cos 4x$, $f^{(n)}(x) = ?$

$-\ f'(x) = -4\sin 4x$

$-\ f''(x) = -16\cos 4x$

$+\ f'''(x) = 64\sin 4x$

$+\ f^{(4)}(x) = 256\cos 4x$

$-$

$-\ \vdots$

$+\ f^{(n)}(x) = 4^n \sin 4x$

Örn: $f(x) = \ln 2x$, $f^{(4)}(x) = ?$

$f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f^4(x) = -\frac{6}{x^4}$

Kısmi Türev

Çok değişkenli fonk. herhangi bir değişkene göre türev alma işlemidir.

$z = f(x, y)$

x 'e göre kısmi türev $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$

" " " 2. kısmi " $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$

y 'ye göre kısmi türev $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$

" " " 2. kısmi " $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Örn: $f(x,y) = 4x^3 - 8xy^2 + 9y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ? \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -16xy + 27y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -16y$$

Örn: $f(x,y) = x^2 \sin 5xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \sin 5xy + 5y \cdot x^2 \cos 5xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3 \cos 5xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -25x^4 \sin 5xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 10x^2 \cos 5xy + 5x^2 \cos 5xy - 25x^3 y \cdot \sin 5$$

Türevde Zincir Kuralı

$$y = u(t)$$
$$t = f(k)$$
$$k = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dk} \cdot \frac{dk}{dx}$$

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Örn: $y = 3t^2 + 8$

$t = 9x^2 + 6x$

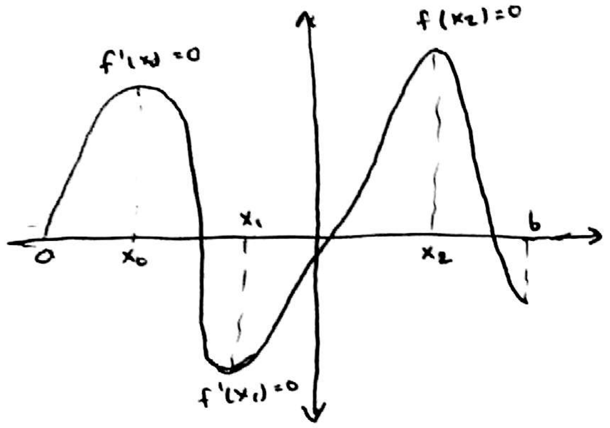
$x = \sqrt{8k^2+3}$

$$\frac{dy}{dk} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dk}$$

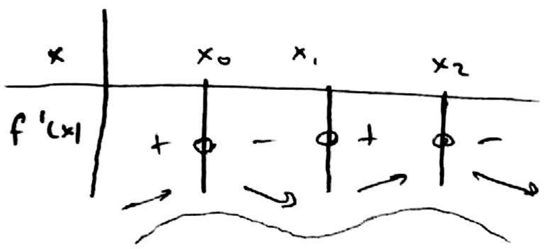
$$= 6t \cdot (18x+6) \cdot \frac{16k}{2\sqrt{8k^2+3}}$$

Yerel Ekstremum Noktaları

Fonk. türevini "0" yapan noktalara kritik noktalar denir. Eğer fonk. en büyük değerini bu noktada alıyorsa bu noktaya yerel max. noktası, en küçük değerini alıyorsa bu noktaya yerel min. noktası denir. Bir noktanın ekstremum noktası olabilmesi için mutlaka yön değiştirmesi gerekir. Birden fazla ekstremum noktası olabilir. Yerel max. ve yerel min. noktalarına ekstremum noktaları denir.



- fonk. en büyük değer aldığı noktaya mutlak max. en küçük değer aldığı nok. mutlak min. denir.
- Mutlak noktalarının olabilmesi için mutlaka sınırlı olmalıdır, fakat türevinin sıfır olmasına gerek yok



x_0, x_2 Y. max.

x_1 Y. min.

x_2 = Mutlak max.

b = Mutlak min.

Örn: $f: [-1, 4] \to R$, $f(x) = -x^2 + 2x$ noktalarını bulun

$f'(x) = -2x + 2$

$-2x + 2 = 0$

$\boxed{x = 1} \to$ K.N

$f(-1) = -3$

$f(4) = -8$

$f(1) = 1$

$x = 1$ Mutlak max.

$x = 4$ " min.

x		1	
$-2x+2$	+	0	-
y	↗	Y. max.	↘

$x = 1 \to$ Y. max.

Örn: $f: [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \cos x$ noktaları bulun

$f'(x) = -\sin x$

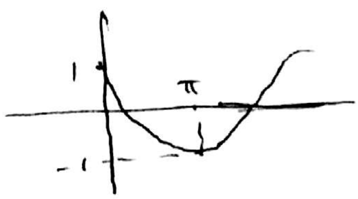
$-\sin x = 0$

$\sin x = 0$

$\overset{uç}{\cancel{x = 0}}$, $\underbrace{x = \pi}_{K.N}$, $\cancel{x = 2\pi}$ uç nokt. old. almadık

x	0		π		2π
$-\sin x$		-	0	+	
y		↘	-1 (Y. min.)	↗	

$x = \pi \to$ Y. min.



$f(0) = \cos 0 = 1$

$f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$

$f(\pi) = \cos \pi = -1$

$x = -1$ mutlak min.

Örn: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonk. yerel ekstremum noktalarını bulun

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$-x^2+1=0$

$\boxed{x=\mp 1}$

		-1		1	
$-x^2+1$	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$x=-1 \to$ y. min.

$x=1 \to$ y. max

Örn: $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-3}$ yerel ekstremum noktaları=?

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-3)-2x(x-1)^2}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(2x^2-6-x^2+x)}{(x^2-3)^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x-6)}{(x^2-3)^2}$$

$2(x-1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\boxed{x_1=1}$ $\boxed{x_2=-3 \quad x_3=2}$

Tabloda
Tek dereceliler
zıt işaretle
başla

		-3		1		2	
$2(x-1)(x^2+x-6)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=3$ ve $x=2 \to$ y. m

$x=1 \to$ y. max.

Örn: $f(x) = x - 10\sqrt{x} + 100$ Y.E=?

$$f'(x) = 1-\frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$$

$\sqrt{x}-5=0$

$\boxed{x=25}$

		25	
$\sqrt{x}-5$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

$x=25$ y.min

Fonksiyonun Tersinin Türevi

Örn: $f(x) = \frac{5x+7}{4}$, $(f^{-1}(2))' = ?$

$f^{-1}(x) = \frac{4x-7}{5}$

$(f^{-1}(x))' = \frac{4}{5}$

$(f^{-1}(2))' = \frac{4}{5}$

Örn: $f(x) = x^2 - 5x + 10$, $(f^{-1}(10))' = ?$

$f: [4, +\infty) \to [-6, +\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+6} + 4$

$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$

$(f^{-1}(10))' = \frac{1}{8}$

Örn: $f: [1, +\infty) \to R$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x + 3$ $\quad (f^{-1}(3))' = ?$

$\boxed{(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}}$ $\quad (f^{-1}(3))' = \frac{1}{f'(2)}$

$x^3 + 4x^2 - 12x + 3 = 3$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 8x - 12$

$x(x^2 + 4x - 12) = 0$ $\quad f'(2) = 16$

$x(x+6)(x-2) = 0$ $\quad (f^{-1}(3))' = \frac{1}{16}$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -6 \quad \boxed{x_3 = 2}$ ✓

Örn: $f: [0, \pi] \to R$

$f(x) = \text{Arctan}\, x$ $\quad (f^{-1}(\frac{\pi}{4}))' = ?$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f^{-1}(x) = \tan x$

$(f^{-1}(x))' = \sec^2 x$

$(f^{-1}(\frac{\pi}{4}))' = \sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$

$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2 = 1+1 = 2$

2. türev Testi

Fonk. 2. türevini "0" yapan noktalara dönüm(büküm) noktası denir. Bu noktanın dönüm noktası olabilmesi için mutlaka yön değiştirmelidir.

$f''(x_0)=0$ ise $x=x_0$ dönüm (büküm) noktaları

$f''(x_0)>0$ ise konvekstir.

$f''(x_0)<0$ ise konkavdır.

		x_0	
$f''(x)$	$+$		$-$

Konveks Konkav

Örn: $f(x)=x^3+6x^2-8x+4$ dönüm noktası=? konveks ve konkav aralığı =?

$f'(x)=3x^2+12x-8$

$f''(x)=6x+12$

$6x+12=0$

$\boxed{x=-2}$

		-2	
$6x+12$	$-$		$+$

$(-\infty,-2)$ konkav

$(-2\ +\infty)$ konveks

Örn: $f(x)=(x-2)^4$ → parabol → Dönüm noktası yok

$f'(x)=4(x-2)^3$

$f''(x)=12(x-2)^2$

$12(x-2)^2=0$

$\boxed{x=2}$ çift katlı

		2	
$12(x-2)^2$	$+$		$+$

Konveks

Yerel ekstremum noktalarının 2. türev testi ile bulunması

$f'(x_0)=0$ iken $f''(x_0)>0$ ise $x=x_0$ y. min.

" " $f''(x_0)<0$ ise $x=x_0$ y. max.

Örn: $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$ y.E. noktalarını 2. Türev ile bulun

$f'(x)=3x^2-12x+9$ $\quad$ $f''(x)=6x-12$

$3x^2-12x+9=0$ $\quad$ $f''(1)=6.1-12=-6<0$ ise $x=1$ y. max.

$x^2-4x+3=0$ $\quad$ $f''(3)=6.3-12=6>0$ ise $x=3$ y. min.

$(x-1)(x-3)=0$

$\boxed{x_1=1 \quad x_2=3}$

Örn: $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$ y.E noktalarını 2. türev ile bulun

$f'(x)=3x^2-\frac{48}{x^2}=\frac{3x^4-48}{x^2}$

$3x^4-48=0$

$x^4=16$

$x=-2$ ve $x=2$

$f''(x)=6x+\frac{96}{x^3}$

$f''(-2)=-12-12=-24<0$ ise $x=-2$ y. max.

$f''(2)=12+12=24>0$ ise $x=2$ y. min.

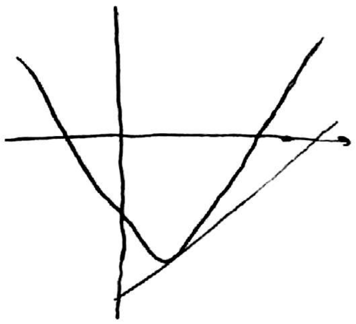
Türevin Geometrik Yorumu

$$m = \tan\beta = \lim_{x \to x_0} \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$ x_0 noktasında teğet olan doğru denklemi

<u>Örn:</u> $f(x) = x^2 - 4x - 5$ fonk. $x_0 = 3$ nok. teğet olan doğrunun denklemi=?



$f'(x) = 2x - 4$

$f'(3) = 2.3 - 4 = 6 - 4 = \boxed{2 = m}$

$y_0 = f(3) = 3^2 - 4.3 - 5$

$= 9 - 12 - 5 = -8$

$y + 8 = 2(x - 3)$

$\boxed{y = 2x - 14}$

<u>Örn:</u> $f(x) = e^{\cos 5x}$, $x_0 = \frac{\pi}{5}$

$f'(x) = -5 \sin 5x \cdot e^{\cos 5x}$

$f'(\frac{\pi}{5}) = -5 \sin 5\frac{\pi}{5} \cdot e^{\cos 5 \cdot \frac{\pi}{5}}$

$= 0 \cdot e^{-1} = \boxed{0 = m}$

$y_0 = f(\frac{\pi}{5}) = e^{\cos 5\frac{\pi}{5}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y - \frac{1}{e} = 0 \cdot (x - \frac{\pi}{5})$

$\boxed{y = \frac{1}{e}}$

Örn: $y = \cos(\ln x)$, $x=1$

$y' = \frac{1}{x} \sin(\ln x)$

$y'(1) = -\frac{1}{1} \sin(\ln 1) = -1 \cdot \sin 0 = 0$

$y_0 = y(1) = \cos(\ln 1) = \cos 0 = 1$

$y - 1 = 0(x-1)$

$\boxed{y=1}$

Örn: $\ln(x+y) = 1$, $x=0$

$f^{-1}(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{y'}{x+y} = 0$

$\frac{y'}{x+y} = -\frac{1}{x+y}$

$\boxed{y'=-1}$

$= \cancel{\frac{1}{0+e}} \boxed{\cancel{\frac{1}{e}} = m}$

$\cancel{y - e = \frac{1}{e}(x-0)}$

$\cancel{y - e = \frac{x}{e}}$

$\boxed{y = \cancel{\frac{x}{e}} + e}$

$\ln(0+y) = 1$

$\ln y = 1$

$\boxed{y = e}$

$x + y = e$

$y = -x + e$

$y' \boxed{= -1 = m}$

$y - e = -1(x-0)$

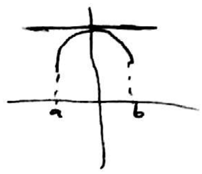
$y - e = -x$

$\boxed{y = -x + e}$

Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri

$f: [a,b] \to R$, $y = f(x)$ fonk. $f(a) = f(b)$ iken $f'(x_0) = 0$ için $x_0 \in (a,b)$ ise Rolle teoremi sağlanır.

Yani x_0 noktasından çizilen teğet doğru x eksenine paraleldir.



Örn: $f: [0,2] \to R$, $f(x) = x^2 - 2x$

$\left.\begin{matrix} f(0)=0 \\ f(2)=0 \end{matrix}\right) = \checkmark$

$f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$x = 1 \in (0,2)$ R.T sağlanır.

$x=1$ den geçen teğet doğru x eksenine paraleldir

Örn: $f: [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \to R$, $f(x) = \sin x$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(\frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $) = \checkmark$

$f'(x) = \cos x$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ T. s

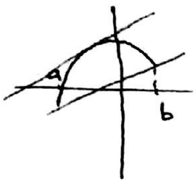
$x = \frac{\pi}{2}$ dan geçen teğet doğru x eksenine paralel

Rolle, O.D. ve geometrik yorumu 2'sini soracak

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonk. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ için

$x_0 \in (a,b)$ ise O.D.T. sağlanır yani x_0 noktasından çizilen

teğet doğru $[a,b]$ den geçen doğruya paraleldir.



örn: $f: [-2,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$ O.D.T = ?

$$6x+6 = \frac{f(1) - f(-2)}{1-(-2)}$$

$x = -\frac{1}{2}$ den geçen teğet doğru $[-2,1]$ --- paralel

$$6x+6 = \frac{4+5}{3}$$

$6x+6 = 3 \to \boxed{x = -\frac{1}{2}} \in (-2,1)$ O.D.T = ✓ sağlar

örn: $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = (x-1)^{2/3}$

a) Rolle T.

b) O.D.T

a) $\left.\begin{matrix} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \end{matrix}\right) \neq$ Rolle sağlamaz - paralel doğru çizilemez

b) $f'(x) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1}$

$$\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1-0}{1}$$

$$\frac{2}{3(x-1)^{1/3}} = 1$$

$(x-1)^{1/3} = \frac{2}{3}$

$x - 1 = \frac{8}{27}$

$x = \frac{35}{27} \in (1,2)$ O.D.T sağlanır.