

Theorie der Programmierung Wintersemester 2006/07

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die small step Semantik für die folgenden Ausdrücke. Versuchen Sie auch intuitiv zu verstehen, welche Funktionen hier berechnet werden und warum die Funktionen korrekt implementiert sind.

- a. **let rec** *gcd* *x y* = **if** *x* = 0 **then** *y* **else** *gcd* (*y* mod *x*) *x*
in *gcd* 10 15
- b. **let rec** *exp* *x y* = **if** *y* = 0 **then** 1 **else** *x* * *exp* *x* (*y* − 1)
in *exp* 5 3
- c. **let rec** *fast_exp* *x y* =
 if *y* = 0
 then 1
 else (**if** *y* mod 2 = 0 **then** 1 **else** *x*) * *fast_exp* (*x* * *x*) (*y*/2)
in *fast_exp* 10 6
- d. **let rec** *sum* *a b f* = **if** *a* > *b* **then** 0 **else** *f* *a* + *sum* (*a* + 1) *b f*
in *sum* 1 10 ($\lambda x. x * x$)
- e. **let** *compose* *f g* = $\lambda x. f (g x)$
in let rec *iter* *n f* =
 if *n* = 0 **then** $\lambda x. x$ **else** *compose* *f* (*iter* (*n* − 1) *f*)
in *iter* 3 ($\lambda x. x * x$) 10

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die in Aufgabe 1 a. deklarierte Funktion *gcd* tatsächlich den ggT berechnet (für Argumente $m, n \in \mathbb{N}$). Gehen Sie analog zur Vorlesung vor, d.h.

- Definieren Sie den Ausdruck *GCD* analog zu *FACT*.
- Stellen Sie eine geeignete Behauptung über *GCD* auf.
- Beweisen Sie diese Behauptung durch Induktion (worüber?).

Aufgabe 3

Für die in Aufgabe 1 d. deklarierte Funktion *sum* gilt: *sum a b f* berechnet (für Argumente $a, b \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$) die Summe $\sum_{i=a}^b f(i)$.

Deklarieren Sie ähnliche Funktionen *prod*, *exists* und *forall*, für die gilt:

- a. *prod a b f* berechnet das Produkt $\prod_{i=a}^b f(i)$
- b. *exists a b p* überprüft (für Argumente $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Bool}$), ob $p(i)$ für mindestens ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq i \leq b$ gilt
- c. *forall a b p* überprüft, ob $p(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $a \leq i \leq b$ gilt

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die small step Semantik für die folgenden Ausdrücke. In welchen Fällen findet eine gebundene Umbenennung statt?

- a. $(\lambda f. \lambda x. f(x+1))(\lambda x. x * x) 3$
- b. $(\lambda f. \lambda x. f(x+1))(\lambda y. x * x) 3$
- c. $(\lambda f. \lambda x. f(x+1))(\lambda y. f y) 3$
- d. $(\lambda f. \lambda x. f(x+1))(\lambda y. f x) 3$
- e. $(\lambda f. \lambda x. x + 1)(\lambda y. f x) 3$