

Christoph Bandelow

Einführung in die Cubologie

Mit 22 Cartoons von Alexander Mága



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bandelow, Christoph:

Einführung in die Cubologie / Christoph Bandelow.
Mit 22 Cartoons von Alexander Mága. — Braunschweig;
Wiesbaden: Vieweg, 1981.
ISBN 3-528-08499-5

1981

Alle Rechte vorbehalten
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1981

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien. Dieser Vermerk umfaßt nicht die in den §§ 53 und 54 URG ausdrücklich erwähnten Ausnahmen.

Umschlaggestaltung: Alexander Mága
Farbfotos: Foto-Atelier Oberheitmann, Witten-Herbede
Satz: Vieweg, Braunschweig
Druck: E. Hunold, Braunschweig
Buchbinderische Verarbeitung: W. Langelüddecke, Braunschweig
Printed in Germany

ISBN 3-528-08499-5

Vorwort

Am 30.1.1975 meldete der Budapester Professor für Architektur und Design Ernő Rubik jun. das ungarische Patent Nr. 170062 für ein „térbeli logikai játék“ (räumliches Logik-Spiel) an. Das darin beschriebene Objekt wurde zwischen 1978 und März 1981 unter den Namen bűvös kocka (Ungarn), magic cube (England/USA), Cube hongrois (Frankreich), Rubik's Cube, magischer Würfel, Zauberwürfel u.ä. mehr als 10 Millionen mal verkauft, davon mehr als eine Million mal in der Bundesrepublik. Und nicht nur verkauft! Ein hochgradig ansteckendes „Dreh-Fieber“ verbreitet sich in Familien, Büros und Wartesälen. In vielen Schulklassen hört es sich an, als ob ein Heer von Mäusen hinter den Bänken geheime Akkord-Arbeit leiste.

Was ist so faszinierend an diesem Würfel, der im devisenbringenden Export der ungarischen Salami und dem berühmten Tokajer Süßwein Konkurrenz macht? Er ist einerseits ein verblüffendes technisches Gerät. Wie funktioniert das? Andererseits ist er, und dies gerade wegen der enormen Diskrepanz zwischen dem unschuldig-unscheinbaren Äußerem und der versteckten Schwierigkeit der Lösung, eine ernste Herausforderung an alle Puzzle- und Rätselfreunde, besonders aber an die berufsmäßig mit logischen Deduktionen befaßten Mathematiker.

Keine Angst! Zum genußvollen Spiel mit dem Würfel oder dem Studium dieses Büchleins sind *keine mathematischen Vorkenntnisse* erforderlich. Zwar versuchen wir im 2. Kapitel die „Mathematik hinter dem Würfel“ mit kompromißloser Strenge zu entwickeln — nur *richtige* Mathematik ist *verständliche* Mathematik —, doch wir erklären alles von Anfang an, und man kann diesen Teil außerdem ohne allzu großen Schaden für das Verständnis des folgenden auch überfliegen. Vielleicht entdeckt aber doch der eine oder andere der Mathematik bisher eher hilflos oder gar feindselig gegenüberstehende Leser, daß dieses Fach, hier dargeboten mit einem ungewöhnlich ästhetischen Anschauungsobjekt, wider Erwarten nicht ganz reizlos ist.

Der mathematisch-didaktische Gewinn ist mindestens dreifach: Zum ersten ist die exemplarisch durchgeführte *Modellbildung*, d.h. die Beschreibung eines kleinen Stückchens praktischer Wirklichkeit durch eine Theorie, lehrreich, selbst für Studenten der Mathematik, die diese für die Anwendung ihrer Disziplin unentbehrliche Übung oft vernachlässigen. Zum zweiten können

viele wichtige Grundbegriffe und Sätze der *Gruppentheorie* (auch einige der Geometrie), die sonst recht abstrakt und wenig einprägsam dastehen, mit dem Würfel auf natürliche und schöne Weise veranschaulicht werden. Zum dritten gilt, was schon Rubik selbst als Hauptmotiv für seine Erfindung angab: Das Spiel mit dem Würfel fördert das *räumliche Vorstellungsvermögen*. Für viele im systematischen Denken weniger geübte Menschen bedeutet schließlich bereits die völlige Beherrschung einer fertig dargebotenen Lösungsstrategie mit ihrer Hierarchie von Fall-Unterscheidungen ein intellektuelles Training.

Fertig dargebotene Lösungsstrategie? Ist das nicht doch Spielverderben? Ganz kann diese Frage sicher nicht verneint werden. Denn das völlig selbständige Entwickeln einer eigenen Lösung macht enorm viel Spaß und gibt große Befriedigung. Und nur wer dies durchgestanden hat, wird i.a. die Schwierigkeit des Solitärspiels richtig einschätzen. Man glaubt jedoch – und die Erfahrungen des Autors bestätigen dies – daß selbst gewiefte Tüftler zwei Wochen stetiger Denkarbeit investieren müssen, bis sie eine – meist zunächst extrem umständliche – Lösung gefunden haben. Und soviel Zeit kann oder will nicht jeder hierfür aufwenden. So beginnt denn dieses Büchlein nach einer kurzen Beschreibung der Technik des Würfels und einer Notation mit einer *allgemein-verständlichen und vollständigen Beschreibung einer einfachen Lösungsstrategie*. Diese nimmt jedoch nur wenige Seiten in Anspruch, denn unser Hauptziel ist ein ganz anderes: *den Würfel verstehen lernen*. Kapitel 3 setzt jeden Leser in die Lage, eine eigene Strategie nach seinem persönlichen Geschmack selbst zu entwickeln. Und was vielleicht noch befriedigender ist: Er kann sich schließlich von jeglicher starren Strategie befreien und nach Beherrschung gewisser Grundmanöver (z.B. einiger 3-Zyklen und Doppel-Transpositionen) jeden gemischten Würfel individuell behandeln. Sollte er seine schöpferischen Fähigkeiten weiter unter Beweis stellen wollen, so kann er sich an einer großen Such-Aktion (s. Anzeige am Ende des Buches) beteiligen.

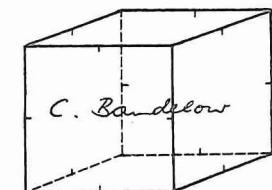
Vielleicht ist Rubik's Cube unter allen populären Rätseln, Puzzle- und Schiebespielen dasjenige, welches seine Löser am stärksten zwingt, eine richtige kleine Theorie aufzubauen, Teil einer Miniatur-Wissenschaft, die wir ein wenig hochtrabend „Cubologie“ nennen. Die Cubologie steht heute erst am Anfang ihrer Entwicklung. Viele schöne Struktur-Eigenschaften, Verallgemeinerungen, hübsche Analogien, wirkungsvolle neue Manöver oder elegante Strategien harren noch ihres Entdeckers und des Berichtes in einer späteren Auflage. Die Numerierung der Abschnitte und Abbildungen wurde so gewählt, daß Verbesserungen und Einschübe jederzeit möglich sind.

Etwas beinahe Selbstverständliches soll der Vollständigkeit halber erwähnt werden: Das Studium dieses Büchleins ist ohne Würfel in der Hand kaum möglich. Und ein guter Würfel sollte es sein, möglichst keines jener billigen Imitate, die sich oft nur schwer drehen lassen und bei denen, besonders im Falle runder Farbpunkte anstelle flächenfüllender Farbplättchen, der ästhetische Reiz vieler sonst sehr hübscher Positionen eingeschränkt ist.

Als ich in den Sommerferien 1980 kurz nach Erwerb meines ersten Würfels mit den Arbeiten zu diesem Büchlein begann, glaubte ich noch, eine von Anfang bis Ende originelle Allein-Entwicklung zu leisten. Inzwischen sind jedoch eine ganze Reihe von Artikeln zur Cubologie erschienen (s. Literatur-Verzeichnis), die ich begierig aufgenommen und mit verarbeitet habe. Den nachhaltigsten Einfluß hat hierbei die Broschüre von David Singmaster ausgeübt.

Zu besonderem Dank bin ich den Herren Dr. Rolf Gall und Dipl.-Math. Norbert Krüger für das Lesen des Manuskriptes sowie Herrn cand. math. Helmut Corbeck für die Reinzeichnung fast aller Abbildungen verpflichtet. Dem Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, besonders seiner Lektorin Frau Dipl.-Math. Ulrike Schmickler-Hirzebruch, danke ich für die äußerst angenehme und geduldige Zusammenarbeit. Meine Söhne Tim und Nils haben mich mit großem Eifer bei der systematischen Suche nach guten Manövern unterstützt, Tim half mir zusätzlich bei der Reinschrift des Manuskriptes einschließlich des Flußdiagramms in Kapitel 6. Meiner Frau Dörte schließlich danke ich für ihr schönes „Cubologen-Weihnachtsgeschenk“, zu dem sie sich trotz eines total „verwürfelten“ Sommerurlaubs entschloß: einen zur Führung meiner schnell wachsenden Manöverkartei vortrefflich geeigneten Würfel-Stempel.

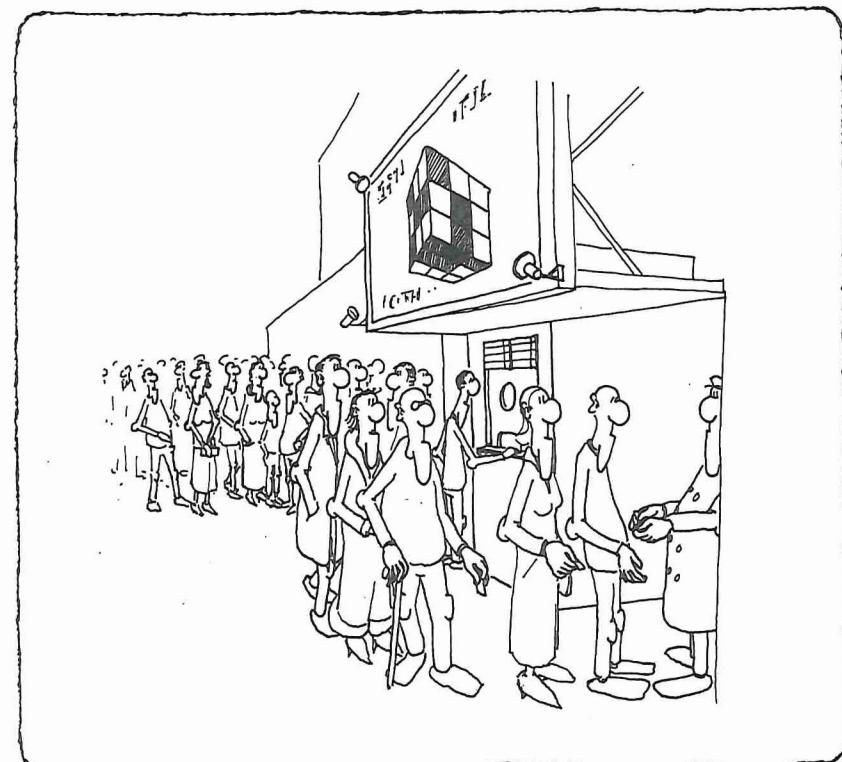
Dr. Christoph Bandelow
Haarholzer Straße 13
D-4630 Bochum 1



Inhaltsverzeichnis

1 Das Solitärspiel	.	1
1.1 Cube und Cubies	.	2
1.2 Manöver	.	5
1.3 Eine einfache Strategie	.	9
1.4 Renerinivinive!	.	17
1.5 Operationen	.	21
2 Das mathematische Modell	.	28
2.1 Mengen und Abbildungen	.	28
2.2 Gruppen	.	33
2.3 Das kleine und das große Modell	.	42
2.4 Charakterisierung der möglichen Positionen und Operationen	.	47
2.5 Die Struktur der Rubikschen Gruppe	.	52
2.6 Spezielle Untergruppen	.	55
3 Konstruktion von Manövern	.	61
3.1 Variation	.	61
3.2 Kombination	.	66
3.3 Konjugation	.	69
3.4 Isolation	.	72
4 Hübsche Muster	.	75
5 Varianten und Verallgemeinerungen	.	91
5.1 Der Superwürfel	.	91
5.2 Sam Loyds Schiebepuzzle	.	95
5.3 Andere magische Polyeder	.	98
6 Computer-Cubologie	.	103
Manöver-Lexikon	.	116
Such-Anzeige	.	131
Literatur- und Adressen-Verzeichnis	.	132
Stichwort-Verzeichnis	.	134

Das Solitärspiel



In diesem Kapitel studieren wir unter Vermeidung jeglicher Mathematik den Aufbau des Würfels (Abschnitt 1.1), definieren die Grundbegriffe Manöver (1.2) und Operation (1.5) und beschreiben eine einfache Lösungsstrategie für das Solitärspiel (1.3). Eine für Kinder und Computer besonders gut geeignete Notation wird in 1.4 eingeführt.

1.1 Cube und Cubies

Rubik's Cube ist ein Kunststoffwürfel von etwa 5,6 cm Kantenlänge. Er scheint aus $3 \times 3 \times 3 = 27$ gleich großen Teilwürfeln, den *Cubies*, zu bestehen. Die $6 \times 9 = 54$ an der Oberfläche des großen Würfels sichtbaren Cubie-Seitenflächen sind mit Farbplättchen beklebt. Beim Kauf des Würfels befindet sich dieser in seinem *Ausgangszustand*: Jede der 6 Seiten des großen Würfels ist einfarbig, d.h. die 9 Cubie-Farbplättchen auf dieser Seite haben die gleiche Farbe. Die Farben auf den 6 Seiten des großen Würfels sind jedoch verschieden, bei den in Ungarn hergestellten Würfeln auf schwarzer Kunststoffbasis meist Gelb, Weiß, Blau, Grün, Dunkelrot und Orange; bei den unter anderem in den USA weit verbreiteten Würfeln auf weißer Kunststoffbasis ist im allgemeinen eine Seite schwarz.

Jedes Cubie liegt in 3 verschiedenen *Scheiben*, wobei jede Scheibe aus 9 Cubies zu bestehen scheint. Eine geniale und überraschend einfache Konstruktion ermöglicht es, jede der 9 Scheiben in ihrer Ebene um ihren Mittelpunkt gegenüber dem restlichen Würfelkörper beliebig zu drehen (Bild 1). Die im Ausgangszustand einfarbigen Seiten verwandeln sich dabei blitzschnell – 4 bis 5 Drehungen genügen meist – in ein bunt-kariertes Chaos. Diese „Flicken-teppiche“ in den Ausgangszustand zurückzuführen, ist das Ziel des Solitärspiels.

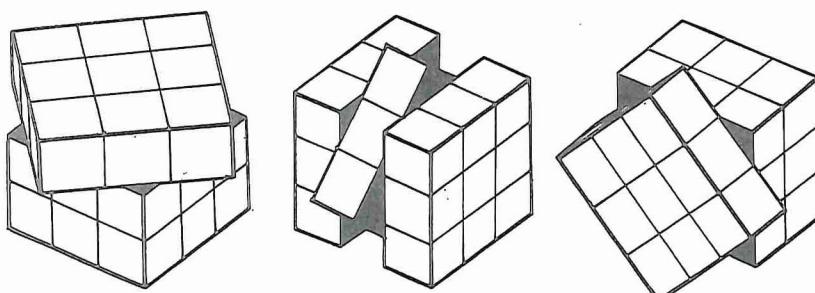


Bild 1 Drehbarkeit der Scheiben

Wie ist ein solches Objekt technisch möglich? Muß nicht z.B. ein an einer Ecke befindliches Cubie einfach abfallen, da es wegen der Drehmöglichkeiten der drei ihn enthaltenden Scheiben an keiner Seite befestigt sein kann? Wie man sehr schnell bemerkt, gibt es drei verschiedene Typen sichtbarer Cubies: 8 *Eckencubies* mit 3 Farbplättchen, 12 *Kantencubies* mit 2 Farbplättchen und 6 *Flächencubies* mit nur einem einzigen Farbplättchen. Jedes Cubie behält seinen Typus bei allen Scheibendrehungen bei. Die Antwort auf die Frage der technischen Realisierung gibt nun Foto 1: Das im Innern des Würfels verborgene 27. Cubie ist in Wirklichkeit ein starres System aus 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen, an deren Enden die Flächencubies, die nur etwa eine halbe Teilwürfelkantenlänge breit sind, federnd und drehbar befestigt sind. Da sich ihre gegenseitige Lage nie ändert (z.B. bleiben gegenüberliegende Flächencubies stets gegenüberliegend), bestimmen sie die Farben der Würfelseiten und die Position aller anderen Cubies im Ausgangszustand. Würfelähnlicher sind die Kanten- und Eckencubies. Letztere besitzen einen zum Würfelzentrum zeigenden runden Fuß, an dem sie von ihren drei Nachbarkantencubies permanent festgehalten werden. Die Kantencubies ihrerseits haben zwischen zwei für die Füße der Nachbareckencubies bestimmten Aussparungen einen länglichen, schmalen Fuß, der von zwei Flächencubies in die Zange genommen wird. So kann trotz des bunten Treibens niemand aus der lustigen großen Cubie-Familie ausbrechen! Wird eine Randscheibe gedreht, so wechselt für 4 Kantencubies einer der beiden zuständigen Flächencubies ab, während der andere seinen Schützling beim neuen Bruder vorstellt; die 4 bewegten Eckencubies werden von je 2 Aufsicht führenden Kantencubies zum neuen dritten Betreuer geleitet.

Wer das intime Familienleben der Cubies genauer studieren möchte, kann seinen Würfel mit einiger Vorsicht ohne Beschädigung auseinandernehmen. Dreht man z.B. die obere Scheibe um 45° , so läßt sich ein Kanten-cubie dieser Scheibe relativ leicht herausnehmen, während die Flächencubies der darunterliegenden Mittelscheibe gerade die Zeremonie der Wachablösung vornehmen (Bild 2).

Warnung 1 (technisch-mathematisch): Wir werden in Abschnitt 2.4 beweisen, daß nur jede 12. aller zusammenbaubaren Positionen durch Scheibendrehungen in den Ausgangszustand überführt werden kann. Beim Wiederaufbau sollte daher am besten die Ausgangsstellung montiert werden.

Warnung 2 (moralisch): Cubologen, die ihren Würfel aus anderen Gründen als technischer Neugier oder Einfettung (s. Abschnitt 1.3) auseinandernehmen, verwirken ihre Berufsehre.

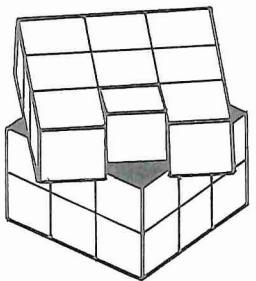


Bild 2
Zerlegung des Würfels

Um die Bewegung der einzelnen Cubies bequem beschreiben zu können, führen wir für die 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken des Würfels einfache Abkürzungen ein. Wir setzen von nun an stets voraus, daß der Würfel so vor uns auf dem Tisch oder in der Hand liegt, daß eindeutig gesagt werden kann, welche seine vordere, seine hintere, seine rechte, seine linke, seine obere und seine untere Seite ist. Mit den kleinen lateinischen Anfangsbuchstaben der hier benutzten Adjektive können wir dann die 6 Flächen des Würfels bezeichnen: v = vordere Fläche, h = hintere Fläche usw. (Bild 3). Jede Kante bezeichnen wir mit den Buchstaben der sich dort treffenden 2 Flächen in beliebiger Reihenfolge, jede Ecke mit den Buchstaben der sich dort treffenden 3 Flächen, wobei wir nach beliebiger Wahl der ersten Fläche im Uhrzeigersinn (von außen auf die Ecke gesehen) vorgehen. Es ist also z.B. ro (oder or) die Kante rechts oben, ohr (oder hro oder roh) die Ecke oben hinten rechts und vu (oder uv oder lvu) die Ecke vorn unten links (Bild 4).

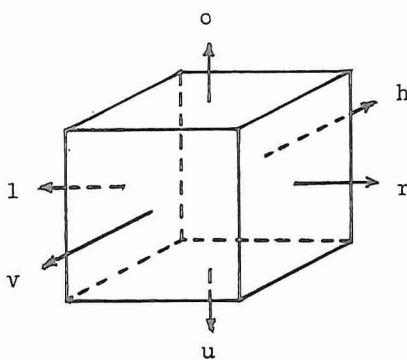


Bild 3
Bezeichnung der Flächen

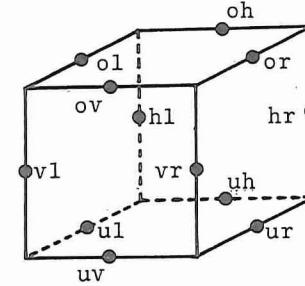
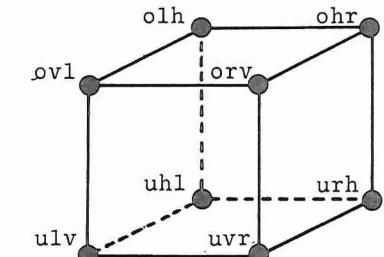


Bild 4 Bezeichnung der Kanten und Ecken



In jeder Fläche bzw. auf jeder Kante bzw. an jeder Ecke befindet sich nun genau ein Flächen- bzw. Kanten- bzw. Eckencubie. Wir können daher unsere Abkürzungen auch zur Bezeichnung des Aufenthaltsorts, des *Cubizils*, eines Cubies verwenden, und z.B. vom Kantencubie im Cubizil ro (kurz: Kantencubie ro) oder vom Eckencubie im Cubizil ohr (kurz: Eckencubie ohr) sprechen (vgl. auch *cubare* (lat.) = liegen, schlafen).

1.2 Manöver

Unter einer *möglichen R-Position* verstehen wir ein aus dem Ausgangszustand von Rubik's Cube durch Drehungen der neun Scheiben erzeugbares Farbmuster, wobei zwei Farbmuster, die durch eine Bewegung des Würfels als starrer Körper ineinander übergeführt werden können, als gleich angesehen werden. Um beschreiben zu können, wie eine beliebige mögliche R-Position in den Ausgangszustand „zurückgedreht“ werden kann, brauchen wir eine einfache und doch hinreichend allgemeine Notation für die mit dem Würfel möglichen Manipulationen.

Die elementaren Manipulationen sind die *Züge*. Wir unterscheiden *Randscheibenzüge*, *Mittelscheibenzüge* und *Bewegungszüge*.

Ein Randscheibenzug ist die Drehung einer der 6 Randscheiben um 90° oder 180° . Allein schon wegen der unterschiedlichen Färbung der im Handel befindlichen Würfel, aber auch aus einer Reihe anderer Gründe, ist es nicht sinnvoll, die Züge durch Farben zu charakterisieren. (Selbst nach Vorgabe der 6 Farben kann ein Würfel auf $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ voneinander wesentlich verschiedene Weisen gefärbt werden: Nach Wahl einer beliebigen Farbe für eine der Seiten gibt es 5 Möglichkeiten für die gegenüberliegende Seite, sodann nach Wahl einer beliebigen der 4 verbliebenen Farben für eine der 4 noch

nicht gefärbten Seiten jeweils 3 Möglichkeiten für die gegenüberliegende Seite und schließlich 2 Möglichkeiten für die restlichen 2 Seiten.) Stattdessen nehmen wir wie im vorigen Abschnitt an, daß der Würfel so vor uns liegt, daß seine vordere, hintere, rechte, linke, obere und untere Seite eindeutig bestimmt ist, und bezeichnen die 90° -Drehung der betreffenden Scheibe im Uhrzeigersinn (bei Sicht auf die Scheibe von außen) mit dem entsprechenden großen lateinischen Buchstaben

$V, H, R, L, O, U.$

Bei 90° -Drehungen gegen den Uhrzeigersinn bringen wir einen Strich am Buchstabsymbol an:

V', H', R', L', O', U'

(Bild 1), bei 180° -Drehungen den Exponenten 2:

$V^2, H^2, R^2, L^2, O^2, U^2.$

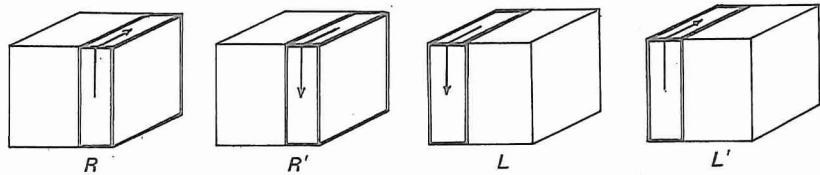


Bild 1 Vier der achtzehn Randscheibenzüge

Der Kürze wegen sollen im folgenden Drehungen im Uhrzeigersinn stets als *Rechtsdrehungen* und Drehungen gegen den Uhrzeigersinn stets als *Links-drehungen* bezeichnet werden, wie es bei Schrauben allgemein üblich ist.

Obwohl die Randscheibenzüge prinzipiell völlig ausreichen würden und sich obendrein bei einer Beschränkung auf diese das mathematische Modell etwas vereinfacht, ist es bequem und entspricht vor allem der Konstruktion des Würfels, wenn auch Mittelscheibenzüge zugelassen werden. Ein Mittelscheibenzug ist die Drehung einer der 3 Mittelscheiben um 90° oder 180° . Wir schreiben vor das als Index gesetzte Symbol eines Randscheibenzuges den Buchstaben M , wenn statt der betreffenden Randscheibe die benachbarte Mittelscheibe gedreht werden soll: M_V, M'_V, M_V^2 usw. Damit hat jeder der 9 Mittelscheibenzüge gleich 2 Namen: $M_R = M'_L, M'_R = M_L, M_R^2 = M_L^2$ usw. (Bild 2), doch hat diese Redundanz keine Nachteile. Rand- und Mittelscheibenzüge nennen wir *Scheibenzüge*.

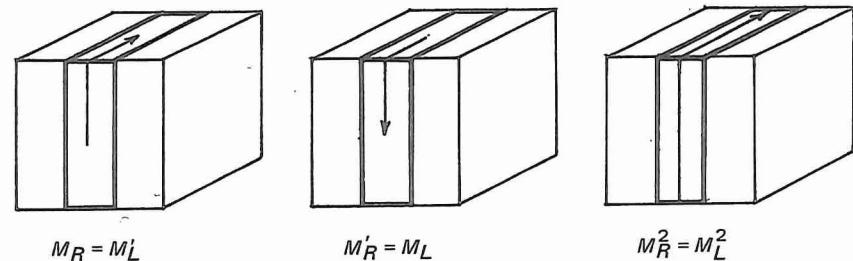


Bild 2 Drei der neun Mittelscheibenzüge

Unter einem Bewegungszug schließlich verstehen wir (vorläufig, später werden wir dies etwas verallgemeinern) die Drehung des ganzen Würfels als starren Körper um eine der 3 Achsen, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Würfelseiten verbinden, um 90° oder 180° . Wir schreiben vor das als Index gesetzte Symbol eines Randscheibenzuges den Buchstaben B , wenn statt der Randscheibe der ganze Würfel zu drehen ist: B_V, B'_V, B_V^2 usw. Auch diese Züge haben damit 2 Namen: $B_R = B'_L, B'_R = B_L, B_R^2 = B_L^2$ usw. (Bild 3).

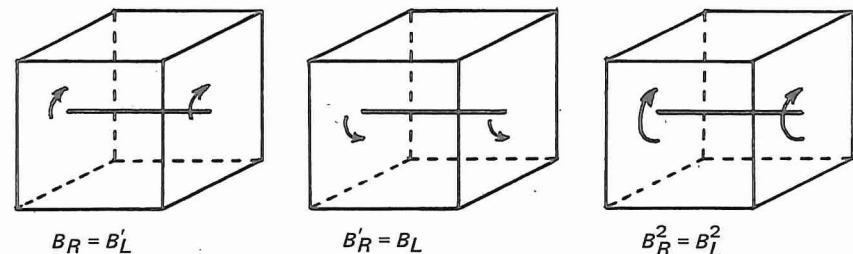


Bild 3 Bewegungszüge

Natürlich ist i.a. nicht ein einziger Zug, sondern eine ganze Folge von Zügen durchzuführen. Wir schreiben diese dann *in der Reihenfolge, in der sie ausgeführt werden sollen, von links nach rechts nebeneinander*. Zum Beispiel bedeutet

$$R^2 M'_U R^2 M_U,$$

daß zunächst der Zug R^2 , dann der Zug M'_U , dann wieder R^2 und schließlich M_U auszuführen ist.

Achtung: Die Reihenfolge der Züge ist wichtig! Zum Beispiel führt *OR* das Kantencubie *or* nach *ov*, aber *RO* dasselbe Kantencubie *or* nach *hr*.

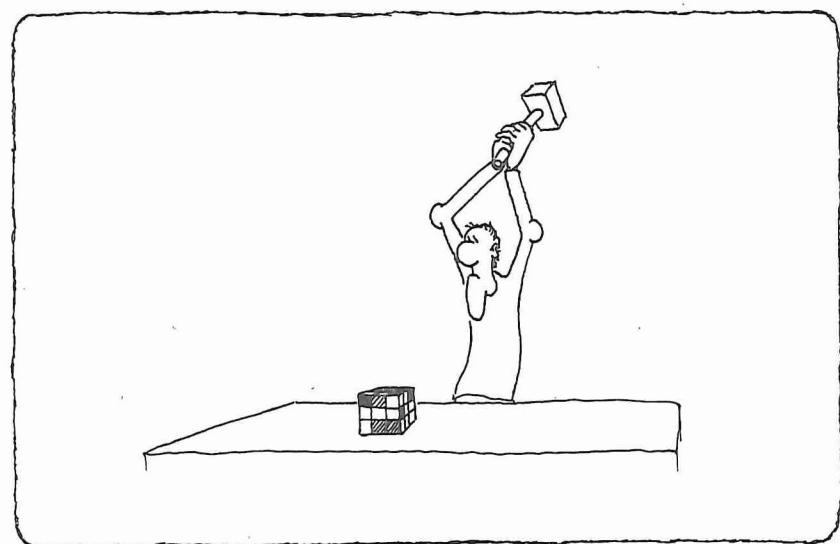
Mehrere unmittelbar hintereinander auszuführende Züge mit derselben Scheibe können offenbar stets zu einem Zug zusammengefaßt oder gar ganz „herausgekürzt“ werden, da z.B. R^2R dasselbe wie R' und $VRR'U$ dasselbe wie VU bewirkt. Entsprechendes gilt für mehrere unmittelbar hintereinander auszuführende Bewegungszüge mit derselben Drehachse. Es bedeutet daher keine praktische Einschränkung, wenn wir den zentralen Begriff dieses Abschnittes folgendermaßen definieren: *Ein Manöver ist eine endliche Folge von Zügen, in der weder zwei Scheibenzüge mit derselben Scheibe noch zwei Bewegungszüge mit derselben Drehachse unmittelbar aufeinanderfolgen.*

Man könnte hier einwenden, daß das Verbot der Aufeinanderfolge gewisser Züge eigentlich überflüssig ist, insbesondere, da sich auch manche andere Zugfolge zusammenfassen läßt; z.B. bewirkt $RM_R L'$ dasselbe wie B_R . Diese Einschränkung wird sich jedoch im nächsten Kapitel auszahlen, wenn wir die Menge aller Manöver auf möglichst einfache Weise zu einer Gruppe machen. Dann werden auch naheliegende und schon jetzt benutzte Abkürzungen wie $(R^2O^2)^3$ für $R^2O^2R^2O^2R^2O^2$, die an das Multiplizieren algebraischer Ausdrücke erinnern, ihre tiefere Begründung erfahren.

Am Ende eines Manövers geben wir im folgenden meist seine *Länge*, d.h. die Anzahl seiner Scheibenzüge, in Klammern an. Bewegungszüge, die im Unterschied zu den Scheibenzügen die R-Position (vgl. Definition am Anfang des Abschnittes) nicht verändern, zählen wir hierbei nicht mit. Beispiel: $((M_R O)^4 B_R B'_O)^3$ (24). Dieses Manöver ist übrigens unser Lieblingsmanöver. Warum? Zur Antwort gehört Satz 2 in Abschnitt 2.5.

Eine wichtige andere Frage soll nach diesem kleinen Ausblick schon jetzt beantwortet werden. Wie kann ein Manöver, das gerade ausgeführt wurde, wieder rückgängig gemacht werden? Für einen einzelnen Zug gibt es gewiß keine Probleme: das *inverse Manöver* (Umkehrmanöver) zu R ist R' , zu R' ist R , und R^2 ist zu sich selbst invers usw. Doch wie nehmen wir RO wieder zurück? Richtig! Das zu RO inverse Manöver ist nicht etwa $R'O'$, sondern $O'R'$. Man erhält das inverse Manöver m' eines Manövers m , indem man m von hinten nach vorn liest und dabei die einzelnen Züge umkehrt. Nach einem weiteren einfachen Beispiel, $(R^2M'_UR^2M_U)' = M'_UR^2M_U R^2$, gleich ein etwas anspruchsvollereres für fortgeschrittenere Cubologen: Das inverse Manöver zu $((M_R O)^4 B_R B'_O)^3$ (24) ist $(B_O B'_R (O'M'_R)^4)^3$ (24).

Auch im täglichen Leben können wir unsere einzelnen Taten – wenn überhaupt! – oft nur zurücknehmen, indem wir mit der letzten beginnen: Wenn wir uns morgens zunächst eine Unterhose und darüber die Blue jeans anziehen, werden wir abends beim Ausziehen mit den Blue jeans beginnen. Und ein etwas makaberes Beispiel: Wie kommen wir zur Ausgangssituation zurück, wenn wir in einem Auto sitzen und 1. ein Fenster herunterkurbeln und dann 2. unseren Kopf herausstrecken, um ein Hinterrad zu begutachten? –



1.3 Eine einfache Strategie

Unter einer *Strategie* verstehen wir eine Anleitung, die präzise beschreibt, wie der Würfel aus einer beliebigen möglichen R-Position in den Ausgangszustand zurückgedreht werden kann. Die im ungünstigsten Fall erforderliche Anzahl von Scheibenzügen nennen wir die *Länge* der Strategie. Je kürzer eine Strategie ist, umso komplizierter wird sie i.a. sein, d.h. sie wird viele Fallunterscheidungen, spezielle Manöver und unter Umständen sogar trickreiche Voraus-Berechnungen erfordern. Ein günstiger Kompromiß zwischen Kürze und Einfachheit ist das folgende, in 6 Phasen gegliederte Verfahren.

In der 1. Phase (≤ 33 Züge), der „Eröffnung“, bringen wir eine Scheibe in Ordnung, am besten die obere Scheibe. Es hat sich bewährt, mit einer leicht erkennbaren Farbe, z.B. Weiß, zu beginnen. Wir drehen also den Würfel zunächst so, daß das weiße Flächencubie nach oben kommt. Nun justieren wir die 4 „weißen Eckencubies“ (Eckencubies mit einem weißen Plättchen) um das weiße Flächencubie herum, wobei wir uns *nicht* an den Flächencubies der waagerechten Mittelscheibe orientieren, sondern lediglich darauf achten, daß die *relative Lage aller „weißen Cubies“ zueinander* richtig ist. Ein erstes weißes Eckencubie können wir stets mit einem einzigen Zug so nach oben bringen, daß sein weißes Farbplättchen nach oben zeigt. Justieren wir dann zunächst eines der beiden Nachbar-Eckencubies, dann die anderen beiden

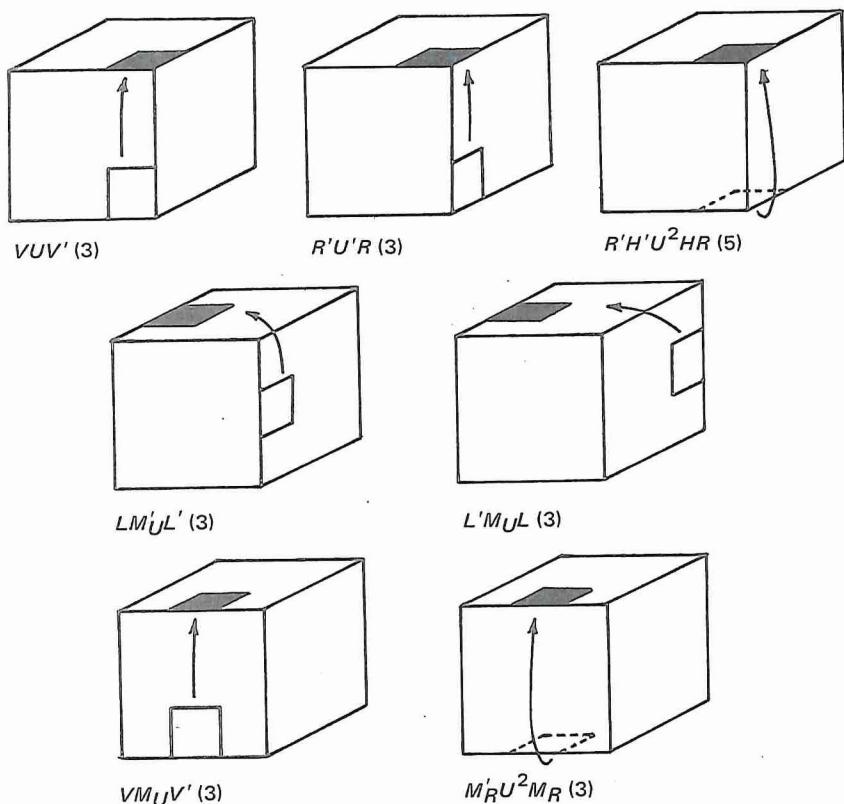


Bild 1 Manöver zum Aufbau der 1. Scheibe

weißen Eckencubies und schließlich die 4 „weißen Kantencubies“, so sind selbst bei Verzicht auf jedes Vorausdenken insgesamt höchstens 1 (1. Eckencubie) + 3 (2. Eckencubie) + 9 (3. und 4. Eckencubie) + 20 (die vier Kantencubies) = 33 Züge für die erste Scheibe erforderlich. Manöver, die ein Cubie aus einem Cubizil außerhalb der oberen Scheibe in ein vorgegebenes Cubizil der oberen Scheibe bringen, ohne dort irgendetwas anderes zu verändern, sind in Bild 1 zusammengestellt. Durch eine Drehung des gesamten Würfels um seine senkrechte Achse und einen Zug mit der oberen Scheibe kann jeder Fall auf einen der abgebildeten zurückgeführt werden. Befinden sich alle „weißen Cubies“ bereits in der oberen Scheibe, jedoch noch nicht jedes in seinem richtigen Cubizil in korrekter Lage, so werfen wir einen der Störenfriede mit einem der skizzierten Manöver zunächst aus der oberen Scheibe heraus, um dann wie beschrieben fortzufahren.

Nach dem Bewegungszug B_R^2 liegt die fertige Scheibe unten, und wir bringen in der 2. Phase (≤ 7 Züge), mit der das „Mittelpiel“ beginnt, die 4 Eckencubies der jetzt oben liegenden Scheibe in die richtige zyklische Anordnung, ohne uns darum zu kümmern, welche Seite der Eckencubies nach oben zeigt. Für 4 Objekte 1, 2, 3 und 4 gibt es 6 zyklische Anordnungen:

1	2	1	2	1	3	1	3	1 ↔ 4	1 ↔ 4
4	3	3 ↔ 4	4	2	2	4	3	2	2 ↔ 3

Bild 2 Die sechs zyklischen Anordnungen von vier Objekten

Ist die zuerst angegebene die richtige, so ist bei der 2., 3., 4. und 5. lediglich die Vertauschung von 2 benachbarten Objekten erforderlich. Im 6. Fall ergibt sich die richtige zyklische Anordnung, wenn gleichzeitig die beiden vorderen und die beiden hinteren Objekte vertauscht werden (Pfeile in Bild 2).

Wie können wir diese Vertauschungen unserer Eckencubies erreichen, ohne die untere Scheibe zu zerstören? Mit der im „Manöver-Lexikon“ am Ende des Buches angegebenen Numerierung aller unserer Manöver lautet die Antwort

$$m_{915} = ROR'O'V'O'V \quad (7), \\ m_{333} = HLOL'O'H' \quad (6).$$

Die in dieser Phase für uns wesentlichen Wirkungen der beiden Manöver zeigen die Bilder 3 und 4.

Während im 6. Fall m_{333} und im 3. Fall m_{915} ohne Vorbereitung zum Ziel führen, ist in den Fällen 2, 4 und 5 der Würfel zunächst so um seine senkrechte Achse zu drehen, daß die beiden zu vertauschenden Ecken rechts liegen, und erst dann m_{915} anzuwenden.

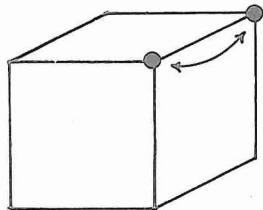


Bild 3

Die wesentliche
Wirkung von
 $m_{915} = ROR'O'V'O'V$ (7)

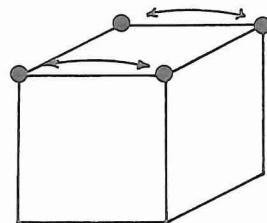


Bild 4

Die wesentliche
Wirkung von
 $m_{333} = HLOL'O'H'$ (6)

Wir empfehlen dem Leser, sich eine möglichst einfache Regel zu überlegen, mit der man, ohne die Eckencubies der oberen Scheibe mit denjenigen der unteren Scheibe vergleichen zu müssen, erkennen kann, welcher der 6 Fälle vorliegt. (Hinweis: Alle 4 oberen Eckencubies haben die Farbe des oberen Flächencubies und 2 „Beifarben“. Einer der Fälle 2 bis 5 liegt genau dann vor, wenn 2 diagonal gegenüberliegende Eckencubies eine Beifarbe gemeinsam haben. Ist dies für ein Paar diagonal gegenüberliegender Eckencubies der Fall, so auch für das andere.) Die bereits fertige untere Scheibe sollte nach Möglichkeit keines Blickes gewürdigt werden, bevor die beiden anderen waagerechten Scheiben fertig sind.

In der 3. Phase (≤ 14 Züge) sorgen wir für die richtige Orientierung der 4 oberen Eckencubies, d.h. wir drehen die richtige Farbe nach oben. Natürlich wollen wir dabei weder die untere Scheibe noch die einmal erreichte zyklische Anordnung der oberen Eckencubies wieder verderben. Je nachdem, ob ein Eckencubie um 120° nach rechts oder um 120° nach links zu drehen ist (fiktive Drehung um die Würfel-Raumdiagonale, die durch das Eckencubie verläuft), sprechen wir von einer $+120^\circ$ -Drehung oder von einer -120° -

Drehung. Nach Satz 1 in Abschnitt 2.4 muß die Summe der Winkel aller erforderlichen Drehungen ein ganzzahliges Vielfaches von 360° sein, d.h. hier, sie muß 360° , -360° oder 0° betragen. Damit sind neben dem Fall, in dem nichts mehr zu tun ist, nur folgende 4 Fälle möglich:

- (a) 3 Eckencubies sind nach rechts zu drehen,
- (b) 3 Eckencubies sind nach links zu drehen,
- (c) ein Eckencubie ist nach rechts, ein anderes nach links zu drehen,
- (d) zwei Eckencubies sind nach rechts, die beiden anderen nach links zu drehen.

Im Fall (a) bringen wir das bereits richtig orientierte Eckencubie mit einer Drehung des Würfels um seine senkrechte Achse nach rechts vorn, wenden

$$m_{30}^* = R'O^2ROR'OR \quad (7)$$

an und sind fertig (Bild 5). Im Fall (b) machen wir alles, was wir im Fall (a) tun würden, links-rechts-gespiegelt: Wir stellen das bereits richtig orientierte Eckencubie nach links vorn und führen (möglichst mit der linken Hand)

$$m_{30}^{**} = LO^2L'O'LO'L' \quad (7)$$

aus (Bild 6). Die meisten Menschen haben genügend Links-Rechts-Symmetriegefühl, um jedes Manöver, daß sie auswendig beherrschen, auch links-rechts-gespiegelt durchführen zu können. (Eine Alternative ist die Anwendung des zu m_{30}^* inversen Manövers $(m_{30}^*)' = R'O'ROR'O^2R$ (7). Das bereits richtig orientierte Eckencubie ist hierfür zunächst nach links hinten zu stellen.)

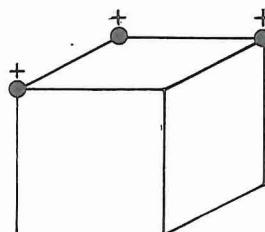


Bild 5

Die wesentliche Wirkung von
 $m_{30}^* = R'O^2ROR'OR$ (7)
(abgesehen von O^2)

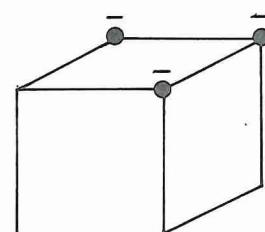


Bild 6

Die wesentliche Wirkung von
 $m_{30}^{**} = LO^2L'O'LO'L'$ (7)
(abgesehen von O^2)

Im Fall (c) drehen wir den Würfel um seine senkrechte Achse, bis das nach links zu drehende Eckencubie rechts vorn ist, wenden m_{30}^* an und finden uns im Fall (b).

Ähnlich gehen wir im Fall (d) vor: Wir bringen eines der beiden nach rechts zu drehenden Eckencubies nach rechts vorn, und eine Anwendung von m_{30}^* führt diesmal auf Fall (a).

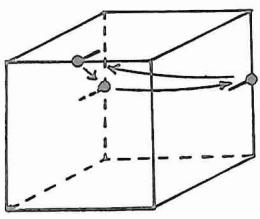
Ist für die 3. Phase nur ein einziges 7-zügiges Manöver zu lernen, genügt für die 4. Phase (≤ 44 Züge), die die obere Scheibe komplettiert, ein 5-zügiges. Es gestattet, ein beliebiges O-Kantencubie (Kantencubie, das nach oben gehört) aus der O-U-Mittelscheibe (zwischen der oberen und unteren Scheibe gelegene Mittelscheibe) blitzschnell nach Hause zu schicken, und zwar gleich mit der richtigen Orientierung. Wir drehen hierzu den Würfel so um seine senkrechte Achse, daß unser Kantencubie in der O-U-Mittelscheibe hinten und seine O-Seite rechts oder links, aber nicht hinten liegt. Dies ist immer möglich: entweder hinten rechts oder hinten links. Nun drehen wir erforderlichenfalls die obere Scheibe so, daß das Heimat-Cubizil unseres Cubies nach vorn kommt. Im Fall „hinten rechts“ führt dann

$$m_{520} = HM_R H^2 M'_R H \quad (5)$$

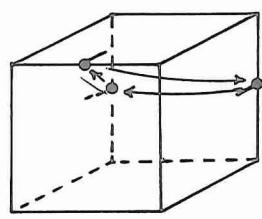
(Bild 7a), im Fall „hinten links“ das links-rechts-gespiegelte und hier zufällig mit dem inversen von m_{520} identische Manöver

$$m'_{520} = H'M_R H^2 M'_R H' \quad (5)$$

zum Ziel (Bild 7b). Sind alle vier O-Kantencubies bereits oben, aber noch nicht korrekt, so schicken wir eines der falsch stehenden Cubies mit m_{520} oder m'_{520} zunächst in die O-U-Mittelscheibe zurück, um es anschließend wie beschrieben zu behandeln.



(a) $HM_R H^2 M'_R H \quad (5)$



(b) $H'M_R H^2 M'_R H' \quad (5)$

Bild 7 Die Manöver der 4. Phase der einfachen Strategie

Nach Fertigstellung der oberen und unteren Scheibe haben wir das „Endspiel“ erreicht, ein reines Bauern-, Verzeihung, Kantencubie-Endspiel. Wir stellen nun in der 5. Phase (≤ 6 Züge) zunächst die 3 waagerechten Scheiben richtig übereinander (≤ 2 Züge). Dann bringen wir mit einem der drei in Bild 8 dargestellten 4-zügigen Manöver die 4 Kantencubies der O-U-Mittelscheibe, die jetzt allein noch falsch sein können, in ihr Heimatcubizil. Eventuell ist eine vorbereitende Drehung des Würfels als starrer Körper erforderlich. Daß dann jedoch eines der 3 Manöver stets zum Ziel führt, ist erneut eine Folge von Satz 1 in Abschnitt 2.4.

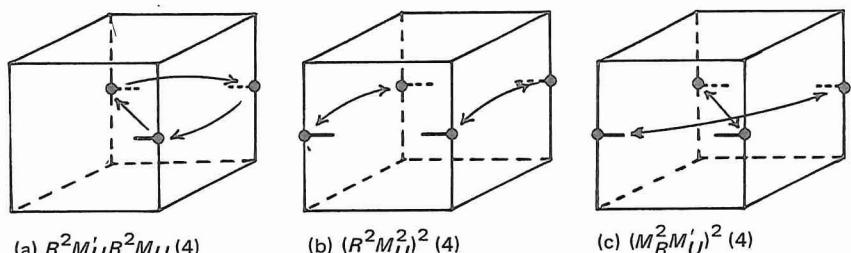


Bild 8 Die Manöver der 5. Phase der einfachen Strategie

Nicht ganz zufällig müssen wir uns gleich ein drittes Mal auf diesen Satz berufen. Er sagt nämlich auch aus, daß nun, nachdem endlich alle Cubies in ihrem Cubizil sind, stets eine gerade Anzahl von Kantencubies „kopfstehen“. Hier heißt dies, daß in der letzten, der 6. Phase (≤ 12 Züge), entweder null (dann sind wir fertig) oder zwei oder alle vier Kantencubies der O-U-Mittelscheibe umzudrehen sind, und das ist stets mit einem der 3 in Bild 9 zusammengestellten Manöver möglich. (Statt m_{405} kann auch das etwas leichter zu lernende Manöver $m_{405a} = M_U RM_U RM_U R^2 \cdot M'_U RM'_U RM'_U R^2$ (12) benutzt werden. Ein extrem einfaches Manöver zur Umorientierung zweier Kanten-cubies ist $(M_R O)^4 (M_R O')^4$ (16).)

Hurra! Nach maximal 116 Scheibenzügen ist unser Würfel wieder im ersehnten Ausgangszustand. Verlegt man das 2-zügige „richtige Übereinanderstellen“ der 3 waagerechten Scheiben, das dem Anfänger die Übersicht etwas erleichtert, vom Beginn der 5. Phase ganz an das Ende, so kann bei allen Manövern der 5. und 6. Phase der letzte Zug eingespart werden, was die Strate-

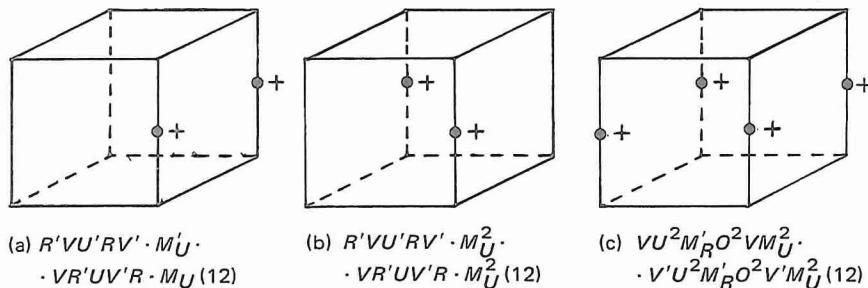
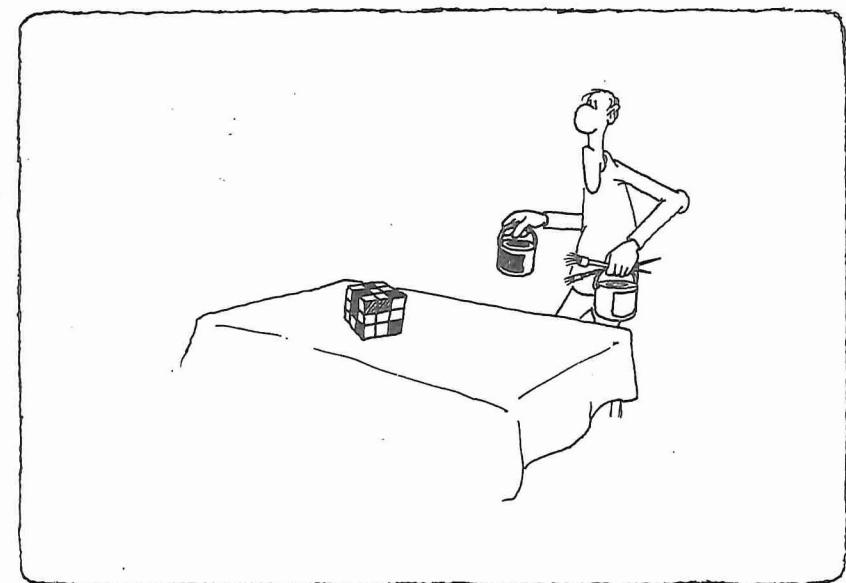


Bild 9 Die Manöver der 6. Phase der einfachen Strategie

gie auf 114 Scheibenzüge verkürzt. Zuhilfenahme weiterer Spezialmanöver (s. Manöver-Lexikon) drückt diese Zahl relativ leicht unter 80, allein in der 4. Phase können 20 Scheibenzüge eingespart werden. Doch auch mit der verbesserten einfachen Strategie lassen sich „brauchbare Zeiten“ erreichen. Der Autor benötigt mit ihr zur Zeit im Mittel 50 Sekunden, und er verdankt diese für seine relativ alten Finger respektable Zeit vor allem dem permanenten Ansporn durch seinen Kollegen Rolf Gall, der stets etwas schneller ist als er und inzwischen einen Durchschnitt von 42 Sekunden erreicht hat. (Es versteht sich von selbst, daß wir unsere Würfel gegenseitig außerordentlich gehässig „mischen“!) Die Rekordhalter haben jedoch Durchschnittszeiten von ca. 30 Sekunden. Für eine solche Leistung sind 4 Dinge erforderlich: 1. Ein gut gefetteter „Renn-Würfel“. Vaselin, Silikonöl oder -spray und Kugellagerfett, wie es in Fahrrad-Geschäften verkauft wird, haben sich bewährt. 2. Eine ökonomische Strategie. Hier hält zur Zeit Morwan B. Thistlethwaite (London) den Rekord. Er benötigt mit einem größeren Arsenal von Manövern, von denen er einige mit Hilfe eines Computer-Programms (s. Kapitel 6) gefunden hat, maximal 52 Randscheibenzüge. 3. Die Fähigkeit, blitzschnell zu erkennen, welches Manöver als nächstes weiterhilft. Da nur jede 12. aller denkbaren R-Positionen möglich ist, genügt dem erfahrenen Cubologen meist ein flüchtiger Blick auf einen kleinen Ausschnitt des Würfels. 4. Die traumwandlerisch sichere Beherrschung aller erforderlichen Manöver. Sie müssen, im Kleinhirn gespeichert, automatisch ablaufen, vergleichbar etwa einer von einem begnadeten Pianisten gespielten Klaviersonate.



1.4 RENERINIVINIVE!

Vielleicht reichen die mehr oder weniger umfangreichen Sprachkenntnisse des Lesers nicht aus, die Überschrift dieses Abschnittes zu verstehen. Sie erinnert ein wenig an die „Hühnersprache“, die wir als Kinder so gern benutzt haben. „Du bist dumm“ heißt in der Hühnersprache DUHULEFU BISTHISTLEFIST DUMMHUMMLEFUMM. Die Antwort lautet meist: DUHULEFU AUCHHAUCHLEFAUCH. Doch das ist uns zu kompliziert. Bei RENERINIVINIVE handelt es sich um ein wichtiges Wort aus dem *Rubikischen*, einer universellen und angenehm musikalisch klingenden Kunstsprache, in der jeder Cubologe seine wesentlichen Bedürfnisse mit nur 8 Konsonanten und 3 Vokalen formulieren kann. Obwohl wir später meist wieder die bisher verwendete formalistischere Notation für Manöver bevorzugen, kommen wir in diesem Abschnitt den Philologen unter den Lesern mit der Einführung des Rubikischen und einer Übersetzung der wichtigsten „Texte“ unserer „einfachen Strategie“ entgegen.

Bild 1 enthält bereits alle Sprachelemente:

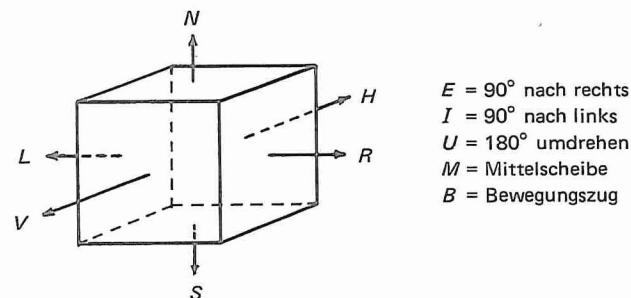
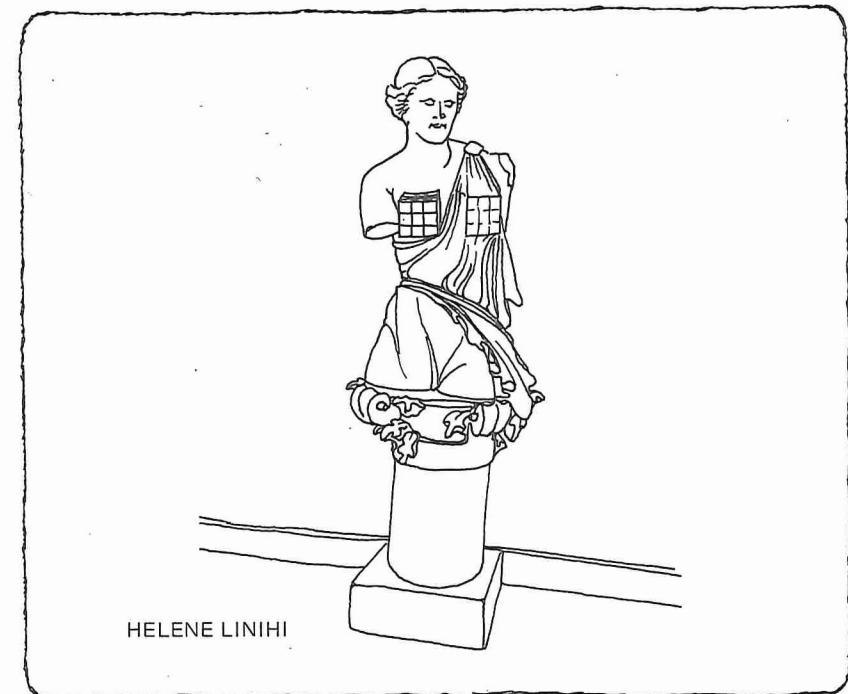


Bild 1 Das Vokabular der Rubiker

Lediglich für zwei Seiten des Würfels verwenden die Rubiker eine mit unserer bisherigen Notation inkompatible Bezeichnung: Da ihre hohe Musikalität an dieser Stelle nach Konsonanten verlangt, heißen die obere Scheibe N wie Norden und die untere Scheibe S wie Süden. Nach jedem der 6 die Seiten bezeichnenden Konsonanten R (Rechts), L (Links), V (Vorn), H (Hintern), N (Norden = oben) und S (Süden = unten) folgt stets einer der drei Vokale E, I oder U. Dabei bedeutet E, daß die betreffende Scheibe um 90° nach rechts zu drehen ist. I heißt 90° -Linksdrehung, U heißt 180° -Drehung (ganz Umdrehen). Folgt hierauf noch der Buchstabe M bzw. B, so ist statt der Randscheibe die benachbarte Mittelscheibe bzw. der ganze Würfel (Bewegungszug) zu drehen. Beispiele: VE dreht die vordere Scheibe um 90° rechts herum. RUM dreht die L-R-Mittelscheibe um 180° ; Linkshänder mögen hierfür das rubikische Synonym LUM bevorzugen.

Mit RENERINIVINIVE
zwei Ecken ich vertauschen seh.
(Bild 1.3.3)

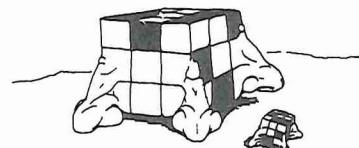
Gleich zwei Paar Ecken tauscht nur sie,
die reizvolle Göttin der Cubologie:
die schöne HELENE LINIHI!
(Bild 1.3.4)



Dies ist ein rechter 3-Ecken-Dreh:
RINURENERINERE.
(Bild 1.3.5)

Links rum geht's mit Symmetrie:
LENULINILENILI.
(Bild 1.3.6)

Daß Dreiecksläufe kein Problem,
das merkte schon das Nasobem
und rief erfreut: „RUSIM! RUSEM!“
(Bild 1.3.8a)



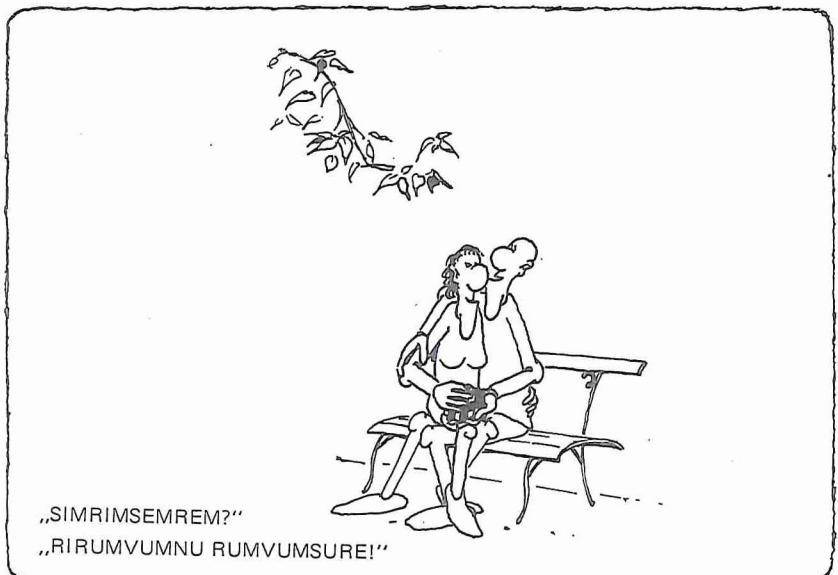
Auch RUSUM-RUSUM ist nicht dumm,
tauscht links und rechts zwei Kanten um.
(Bild 1.3.8b)

Machen alle Kanten Unsinn,
so hilft nur noch RUMSIM-RUMSIM.
(Bild 1.3.8c)

Die übrigen „Strategie-Texte“ geben wir als kleine Herausforderung an den Leser ohne Merkvers wieder:

HEREMHURIMHE	(Bild 1.3.7a)
HIREMHURIMHI	(Bild 1.3.7b)
VESURIMNUVESUMVISURIMNUVISUM	(Bild 1.3.9a)
RIVESIREVISIMVERISEVIRESEM	(Bild 1.3.9b)
RIVESIREVISUMVERISEVIRESUM	(Bild 1.3.9c)

Während die letzten drei Texte am besten im Walzer-Takt erlernt werden, eignen sich die beiden davor als Refrain forschter Jugendlieder: Wir lagen vor Madagaskar, HEREM-HURIM-HE! In den Kesseln da faulte das Wasser, HIREM-HURIM-HI!)



1.5 Operationen

Inzwischen können wir unseren Würfel jederzeit in den Ausgangszustand zurückführen. Wir sind damit in der Lage, die Wirkung einzelner Manöver ohne große Mühe genauer zu studieren. Diese Wirkung besteht in der Änderung der Lage gewisser Cubies. Ein Eckencubie zieht stets wieder in ein Eckencubizil ein, ein Kantencubie in ein Kantencubizil und ein Flächencubie in ein Flächencubizil. Wir haben es daher mit einem Wohnungstausch von Eckencubies untereinander, von Kantencubies untereinander und von Flächencubies untereinander zu tun (wobei sich gelegentlich einige Cubies auch einfach nur innerhalb ihres alten Cubizils neu einrichten, vgl. z.B. Bild 1.3.9). Eine solche durch ein Manöver bewirkbare Änderung der Lage der Cubies nennen wir eine *mögliche Operation*, wobei wir das Adjektiv „möglich“ gelegentlich auch weglassen, solange keine Verwechslung mit später eingeführten Begriffen zu befürchten ist.

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, dem schon in Abschnitt 1.3 betrachteten 4-zügigen Manöver $m_{500} = R^2 M'_U R^2 M_U$. Es bewirkt (s. Bild 1.3.8a) einen *Kanten-3-Zyklus*, d.h. den Wohnungsringtausch von 3 Kantencubies. Das Kantencubie aus vr zieht nach hl , dasjenige aus hl nach hr und das aus hr in das zuerst erwähnte und inzwischen frei gewordene Cubizil vr . Wir schreiben hierfür

$$R^2 M'_U R^2 M_U \text{ (4)} \rightarrow (vr, hl, hr),$$

und lesen „ $R^2 M'_U R^2 M_U \text{ (4)}$ bewirkt (vr, hl, hr) “. Statt (vr, hl, hr) kann auch (hl, hr, vr) , (hr, vr, hl) , (rv, lh, rh) , (lh, rh, rv) oder (rh, rv, lh) geschrieben werden, aber nicht z.B. (vr, lh, hr) . Unsere Notation für Operationen soll nämlich nicht nur zum Ausdruck bringen, welches Cubie in welches Cubizil einzieht, sondern auch, wie es sich dort einrichtet. $(vr, hl, ...)$ soll bedeuten, daß sich das Kantencubie aus vr so in hl niederläßt, daß seine bisherige v -Seite in h und seine bisherige r -Seite in l liegt. Allgemeiner treffen wir zur Notation eines beliebigen n -Zyklus, d.h. eines Wohnungsringtausches von n Cubies, folgende Vereinbarungen: (1) Nach der öffnenden runden Klammer ist einer der Namen eines beliebigen am Ringtausch beteiligten Cubizils zu schreiben. (Erinnern wir uns an Abschnitt 1.1: Jedes Eckencubizil hat drei, jedes Kantencubizil zwei, jedes Flächencubizil einen Namen.) (2) Es folgen, durch Komma trennt, die Namen aller anderen am Ringtausch beteiligten Cubizile in der durch den Ringtausch festgelegten Reihenfolge, wobei der 1. Buchstabe jeweils diejenige Seite des Würfels bezeichnet, die die „erste Seite“ des neu einziehenden Cubies aufnimmt, d.h. die Cubieseite,

die schon im alten Cubizil in der dort zuerst genannten Seite lag. Automatisch gilt dann entsprechendes im Falle von Kanten-Zyklen auch für die zweiten Buchstaben der Cubizil-Namen und im Falle von Ecken-Zyklen für die zweiten und dritten Buchstaben, wobei hier die Uhrzeigersinn-Konvention aus Abschnitt 1.1 wesentlich ist. Uff! Wir brauchen Beispiele!

Bild 1 zeigt 4 verschiedene mögliche Operationen: den oben bereits diskutierten 3-Zyklus und 3 weitere, bei denen *dieselben* Kantencubies ihre Cubizile in *derselben* zyklischen Anordnung tauschen. Unterhalb jeder Operation (deren graphische Darstellung sich gewiß selbst erklärt) findet man jeweils ein Manöver, das die Operation bewirkt. Die vollständige Notation dieser Kanten-3-Zyklen findet man im Manöver-Lexikon unter m_{500} bis m_{503} .

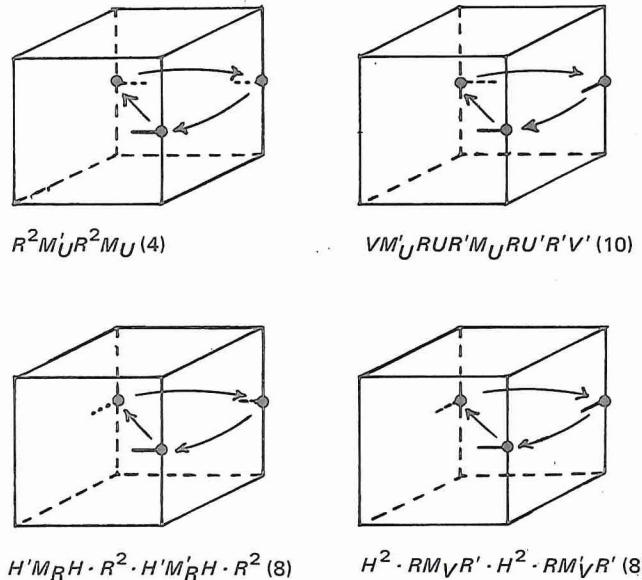


Bild 1 Vier isoliert mögliche 3-Zyklen mit denselben Kantencubies in derselben zyklischen Anordnung

Aus Satz 3 in Abschnitt 2.4 folgt, daß für 3 beliebig vorgegebene Kantencubies mit einer vorgegebenen zyklischen Anordnung stets genau $2^2 = 4$ verschiedene 3-Zyklen „isoliert“, d.h. ohne sonstige Veränderungen am Würfel, möglich sind. Für 3 Eckencubies mit vorgegebener zyklischen Anordnung gibt es sogar stets genau $3^2 = 9$ isolierte 3-Zyklen. Ein Beispiel hierzu bietet Bild 2. Die vollständige Notation dieser Ecken-3-Zyklen findet man im Manöver-Lexikon unter m_{100} bis m_{108} .

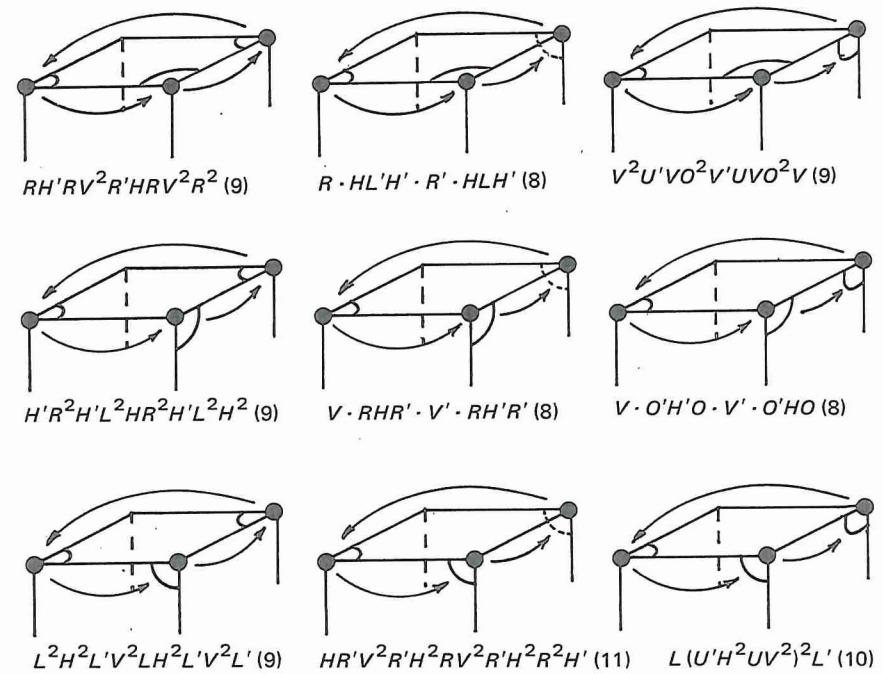


Bild 2 Neun isoliert mögliche 3-Zyklen mit denselben Eckencubies in derselben zyklischen Anordnung

Im allgemeinen bewirkt ein Manöver jedoch nicht einen einzigen, sondern mehrere Zyklen, die dann einfach nebeneinander geschrieben werden. Einfache Beispiele:

$$O \rightarrow (ov, ol, oh, or) (ovl, olh, ohr, orv), \\ M_R \rightarrow (v, o, h, u) (vo, oh, hu, uv).$$

Weniger triviale Beispiele mit Operationen, die aus je 2 „streng orientierungs-treuen“ (d.h. hier: oben bleibt oben) 2-Zyklen bestehen, bietet Bild 3.

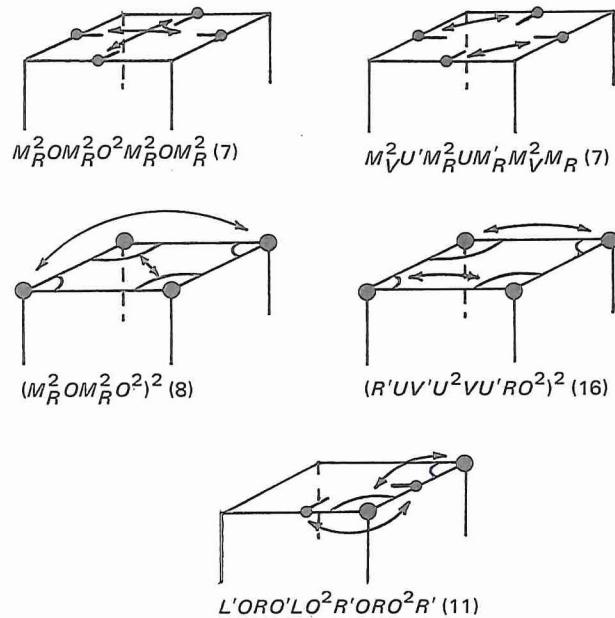


Bild 3 Fünf nützliche Paare von 2-Zyklen („Doppel-Transpositionen“)

In einem wesentlichen Punkt ist unsere Notation für Operationen bisher unvollständig. Was passiert mit dem Cubie, das in der Zyklusklammer an letzter Stelle steht? Natürlich zieht es in das an erster Stelle der Klammer stehende Cubizil um. Aber wie? Hat es nicht als Kanten- bzw. Eckencubie wie alle seine Geschwister das Recht, sich im neuen Cubizil auf 2 bzw. 3 Weisen einzurichten? Wir sehen dies sehr schnell an unserem „göttlichen“ Manöver $HLOL' O'H' (6)$, dessen Wirkung mit Bild 1.3.4 nur sehr grob beschrieben wurde. Es schickt das Eckencubie aus *ovl* nach *orv* – oben bleibt oben –, doch das Eckencubie aus *orv* setzt sich nach links verdreht in sein neues Cubizil *ovl*. Wir schreiben hierfür $(-ovl, orv)$ und ergänzen allgemein unsere Notationsvereinbarungen durch folgenden dritten Teil: (3) *Man denke sich*

das Cubie aus dem in der Zyklusklammer an letzter Stelle stehenden Cubizil im ersten Cubizil zunächst so plaziert, als wäre Teil (2) der Konvention – wie es bei einer Zyklenbeschreibung naheliegt – auch für die Beziehung zwischen dem letzten und dem ersten Zykluselement gültig. Ist es dann, um der gegebenen Operation zu entsprechen, noch zu verdrehen, so schreiben wir im Falle eines nach rechts zu drehenden Eckencubies das Vorzeichen +, im Falle eines nach links zu drehenden Eckencubies das Vorzeichen - und im Falle eines umzudrehenden Kantencubies das Vorzeichen + vor das betroffene erste Cubizil, d.h. unmittelbar nach der öffnenden Klammer. Uff, uff! Wir brauchen noch einige Beispiele. Zwei sind in Bild 4 dargestellt und enthalten auch den Spezialfall eines Zyklus der Länge 1 mit Vorzeichen, bei dem ein Cubie in sein altes Cubizil verdreht zurückkehrt.

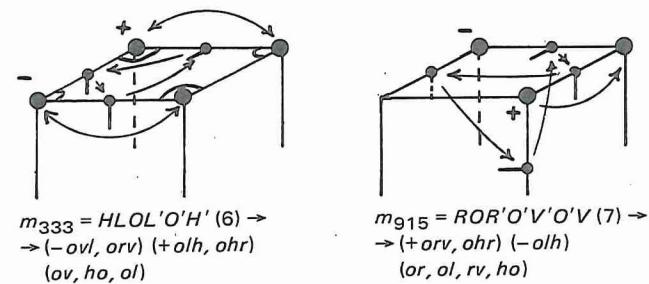


Bild 4 Die genaue Wirkung der beiden Manöver aus der 2. Phase der einfachen Strategie

Man unterscheide sorgfältig die Begriffe „Manöver“ und „mögliche Operation“. Bereits in Abschnitt 1.3 hatten wir zwei recht verschiedene Manöver, die dieselbe Operation bewirkten, kennengelernt:

$$m_{405} = R' V U' R V' \cdot M_U' \cdot V R' U V' R \cdot M_U (12) \rightarrow (+vr) (+hr),$$

$$m_{405a} = M_U R M_U R M_U R^2 \cdot M_U' R M_U' R M_U' R^2 (12) \rightarrow (+vr) (+hr).$$

Man kann sich jedoch leicht überlegen, daß jede mögliche Operation sogar von unendlich vielen verschiedenen Manövern bewirkt wird.

Wir wollen nun die schon in Abschnitt 1.2 angekündigte leichte Erweiterung des Begriffs „Manöver“ vornehmen. Sie betrifft Bewegungszüge, also Züge, die die R-Position nicht verändern, sondern den Würfel als starren

Körper insgesamt drehen. Wie man leicht sieht, kann der Würfel nicht nur durch Drehungen um die 3 „Flächenachsen“, d.h. Achsen, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen verbinden, in sich übergeführt werden, sondern auch durch zwei weitere Arten von Drehungen um Symmetrieeachsen: 180°-Drehungen um „Kantenachsen“, d.h. Achsen, die die Mittelpunkte diametral gegenüberliegender Kanten verbinden, und 120°-Drehungen um „Eckenachsen“ (= Raumdiagonalen), d.h. Achsen, die zwei diametral gegenüberliegende Ecken verbinden (Bild 5). Es gibt 3 Flächenachsen mit je

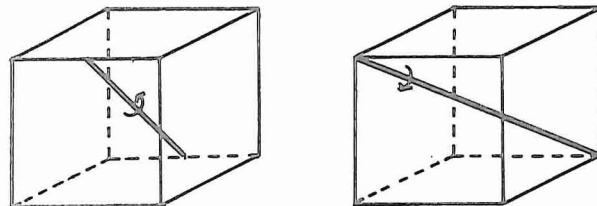


Bild 5 Kantenachsen- und Eckenachsendrehungen

3 Drehungen, 6 Kantenachsen mit je einer Drehung und 4 Eckenachsen mit je 2 Drehungen, insgesamt also 23 verschiedene Achsendrehungen. Obwohl die Wirkung jeder Drehung um eine Kantenachse oder Eckenachse auch durch zwei hintereinander auszuführende Drehungen um Flächenachsen erreicht werden kann, ist es ungerechtfertigt und manchmal unbequem, die 9 Flächenachsendrehungen gegenüber den 14 anderen zu bevorzugen. *Ab sofort sollen daher auch die 6 Kantenachsen- und die 8 Eckenachsendrehungen zu den Bewegungszügen gehören und in Manövern erlaubt sein.* Analog zu unserer Schreibweise bei Flächenachsendrehungen notieren wir Kantenachsen- bzw. Eckenachsendrehungen durch ein B und zwei bzw. drei als Index gesetzte große lateinische Buchstaben, die der Bezeichnung einer der beiden auf der Drehachse liegenden Kanten bzw. Ecken entsprechen, wobei im Falle einer Eckenachsendrehung die Reihenfolge der 3 Buchstaben zugleich die Drehrichtung festlegt. Beispiele:

$$BOV = BV_O = BUH = BHU$$

sind die vier Namen der 180°-Drehung um die Kantenachse, die die Mittelpunkte der Kanten *ov* und *uh* verbindet.

$$BOVL = BVLO = BLOV = BUHR = BHRU = BRUH$$

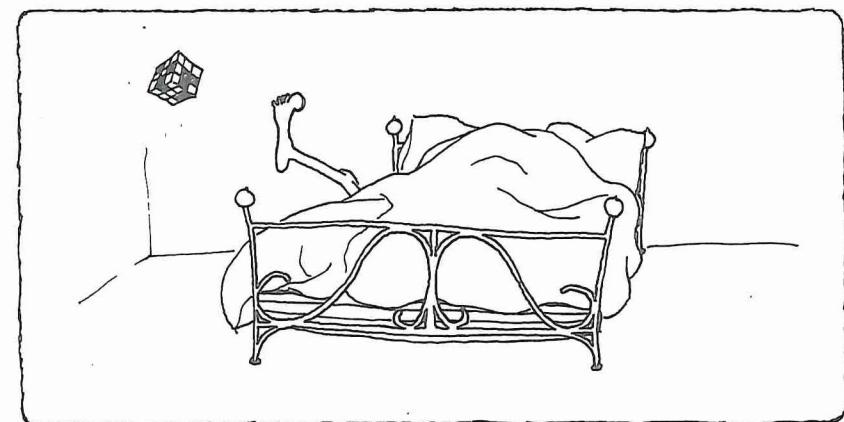
sind die sechs Namen derjenigen 120°-Drehung um die Eckenachse *ovl–urh*, die die Seite *o* nach *v*, die Seite *v* nach *l* und die Seite *l* nach *o* bringt. Die hierzu inverse Drehung heißt *B_{LVO}* oder *B_{OLV}* usw.

Als erste Anwendung ersetzen wir unser Lieblingsmanöver (s. Abschnitt 1.2) durch ein geringfügig eleganteres – unser neues Lieblingsmanöver – und schreiben zugleich die zugehörige Operation auf:

$$\begin{aligned} m_{490} &= ((M_R O)^4 B_{OLV})^3 \quad (24) \\ &\rightarrow (+ov) (+ol) (+oh) (+or) (+uv) (+ul) (+uh) (+ur) (+vl) \\ &\quad (+lh) (+hr) (+rv). \end{aligned}$$

Eine kleine Übung und zugleich eine Vorbereitung späterer Überlegungen ist die exakte Beschreibung der Wirkung eines Bewegungszuges in unserer Operationsschreibweise. Wir wählen für jeden der verschiedenen Bewegungszugtypen einen Zug aus:

$$\begin{aligned} BO &\rightarrow (v, l, h, r) (ov, ol; oh, or) (uv, ul, uh, ur) (vl, lh, hr, rv) \\ &\quad (ovl, olh, ohr, orv) (ulv, uhl, urh, uvr), \\ B_O^2 &\rightarrow (v, h) (l, r) (ov, oh) (ol, or) (uv, uh) (ul, ur) (vl, hr) (vr, hl) \\ &\quad (ovl, ohr) (olh, orv) (ulv, urh) (uhl, uvr), \\ BOV &\rightarrow (o, v) (u, h) (l, r) (+ov) (+uh) (oh, vu) (ol, vr) (or, vl) \\ &\quad (ul, hr) (ur, hl) (ovl, vor) (uhl, hur) (olh, vru) (ohr, vul), \\ BOVL &\rightarrow (o, v, l) (u, h, r) (ov, vl, lo) (uh, hr, ru) (or, vu, lh) (ul, ho, rv) \\ &\quad (+ovi) (-urh) (orv, vul, lho) (uvr, hlu, roh). \end{aligned}$$



2

Das mathematische Modell

Dieses Kapitel und der erste Abschnitt des folgenden enthalten ein wenig Mathematik. Wem ein sorgfältiges Studium dieser Abschnitte zu ungewohnt, zu mühselig oder wegen unangenehmer Erinnerungen an den Mathe-matik-Unterricht der Schule zu belastend erscheint, kann die nachfolgenden Kapitel auch verstehen, wenn er diesen Teil lediglich überfliegt und bei jeder Formel kurz „zack“ vor sich hin murmelt oder denkt.

Von der intensiven Beziehung zwischen Würfel und Mathematik, die man dem kleinen Objekt beim naiven Umgang zunächst kaum zutraut, kann jedoch sowohl der Mathematiker als auch der mit der Stoppuhr arbeitende „Würfelsportler“ profitieren. Einerseits läßt sich eine Fülle von Definitionen und Sätzen, vor allem der Gruppentheorie, mit dem Würfel auf natürliche und reizvolle Weise veranschaulichen, wo früher oft nur triviale oder allzu komplizierte und abstrakte Beispiele zur Verfügung standen. Andererseits kann nur mit Hilfe der Theorie ein wirklich befriedigendes „Verstehen des Würfels“ erreicht und z.B. die Antwort auf folgende Fragen gegeben werden: Welche (nicht nur wie viele) Positionen können durch Scheibendrehungen aus dem Ausgangszustand erreicht werden? Welche Einschränkung bedeutet es, wenn nur ein Teil aller Züge erlaubt ist? Bei welchen Operationen spielt die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle?

In den ersten beiden Abschnitten werden die benötigten Grundbegriffe zusammengestellt.

2.1 Mengen und Abbildungen

Wir setzen voraus, daß der Leser mit dem naiven Begriff der *Menge* ein wenig vertraut ist. Nach Georg Cantor (1845–1918), dem Begründer der Mengenlehre, „ist eine Menge A eine Zusammenfassung bestimmter, wohl-

unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von A genannt werden, zu einem Ganzen“. Für „ a ist ein Element von A “ wird kurz $a \in A$ oder $A \ni a$ geschrieben. Eine Menge wird durch Aufzählung oder angedeutete Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern oder durch Angabe einer Eigenschaft, die alle Elemente der Menge, aber keine anderen Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens besitzen, definiert. Beispiele:

$\{0, 1, 2\}$ ist die Menge der drei Zahlen 0, 1 und 2.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der beim natürlichen Zählen auftretenden „natürlichen Zahlen“.

$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der „ganzen Zahlen“.

$P :=$ Menge aller möglichen R-Positionen für Rubiks Zauberwürfel
= $\{p \mid p \text{ ist eine mögliche R-Position für Rubiks Zauberwürfel}\}$.

Die letzte Menge spielt eine Hauptrolle in diesem Kapitel. Ein Doppelpunkt an einer Seite des Gleichheitszeichens bedeutet, daß das auf dieser Seite stehende Symbol neu ist und durch den auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens stehenden Ausdruck definiert wird.

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B , symbolisch $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Es gibt eine Menge, die Teilmenge jeder Menge ist: die mit \emptyset bezeichnete *leere Menge*, die kein Element enthält.

Sind A und B beliebige Mengen, so bezeichnet $A \cup B$ ihre *Vereinigung*, d.h. die Menge der Elemente, die in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind. Mit $A \cap B$ wird ihr *Durchschnitt*, d.h. die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen, bezeichnet. Etwas allgemeiner stehen

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ oder $\bigcup_{i=1}^n A_i$ bzw. $A_1 \cap \dots \cap A_n$ oder $\bigcap_{i=1}^n A_i$ für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt von n Mengen ($n \in \mathbb{N}$). A und B heißen *disjunkt*, wenn sie kein gemeinsames Element haben, wenn also $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Eine *Abbildung* (Funktion) f der Menge A in die Menge B ist eine „Vorschrift“, die jedem Element $a \in A$, dem Argument, genau ein Element $b \in B$, das Bildelement, zuordnet, symbolisch

$f: A \rightarrow B$ und $a \rightarrow af = b$.

Man beachte, daß wir in diesem Buch das Abbildungssymbol grundsätzlich rechts vom Argument schreiben.

Beispiele für Abbildungen sind die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl ihr Quadrat zuordnet (z.B. $3 \rightarrow 9$), die Vorschrift, die jedem Menschen seinen Vater zuordnet (z.B. Ernő Rubik jun. \rightarrow Ernő Rubik sen.), und die Vorschrift, die jedem Manöver die Operation, die es bewirkt, zuordnet (z.B. $R^2 M'_U R^2 M_U (4) \rightarrow (vr, hl, hr)$).

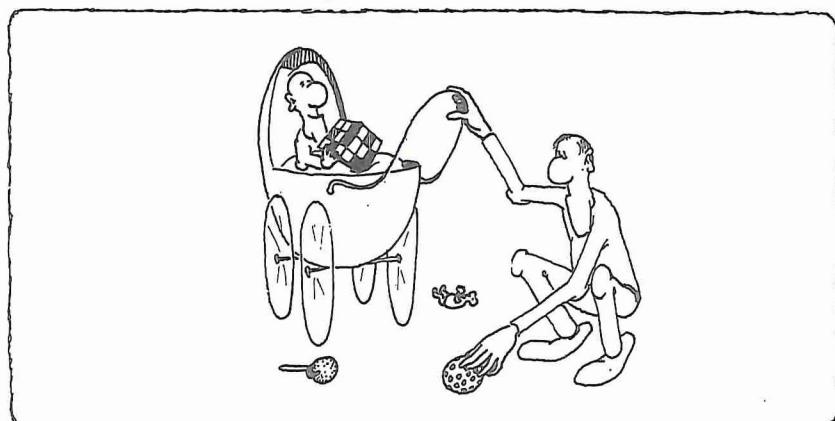
Die Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn die Bildelemente verschiedener Argumente stets verschieden sind. Tritt jedes Element von B als Bildelement auf, so heißt f *surjektiv*. Eine sowohl injektive als auch surjektive Abbildung heißt *bijektiv* (oder eine *Bijektion*). Ist $f: A \rightarrow B$ bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $af = b$, d.h. zu f gehört in natürlicher Weise auch eine „Vorschrift“, die jedem $b \in B$ ein $a \in A$ zuordnet. Diese Abbildung heißt die zu f *inverse Abbildung* und wird hier mit f' bezeichnet (in der Mathematik ist f^{-1} gebräuchlicher).

Sind $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Abbildungen, so bezeichnen wir die Abbildung von A nach C , die jedem $a \in A$ das Element $(af)g$ zuordnet, mit $f \circ g$:

$$f \circ g: A \rightarrow C, \quad a(f \circ g) = (af)g.$$

$f \circ g$ heißt die *Komposition* der beiden Abbildungen f und g . Man beachte, daß wir in diesem Buch hintereinander auszuführende Abbildungen grundätzlich in der Reihenfolge ihrer Ausführung von links nach rechts schreiben. Ist auch noch eine dritte Abbildung $h: C \rightarrow D$ gegeben, so gilt stets

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$



denn für jedes $a \in A$ ist $a((f \circ g) \circ h) = (a(f \circ g))h = ((af)g)h = (af)(g \circ h) = a(f \circ (g \circ h))$.

Sind A_1 und A_2 zwei Mengen, so bezeichnet $A_1 \times A_2$ die Menge der geordneten Paare (a_1, a_2) mit $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$:

$$A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ und } a_2 \in A_2\}.$$

Per definitionem gilt dabei $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ genau dann, wenn sowohl $a_1 = b_1$ als auch $a_2 = b_2$ gilt. $A_1 \times A_2$ heißt das *kartesische Produkt* der beiden Mengen A_1 und A_2 (in dieser Reihenfolge). Ist allgemein $|A|$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A , so gilt für endliche Mengen A_1 und A_2

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Völlig analog wird das kartesische Produkt von n Mengen A_1, \dots, A_n ($n \in \mathbb{N}$) definiert:

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Die Elemente dieser Menge, die „ n -tupel“ $a = (a_1, \dots, a_n)$, können als Abbildungen a der n -elementigen Menge $\{1, \dots, n\}$ in die Menge $A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit $ia \in A_i$ für $i = 1, \dots, n$ aufgefaßt werden, wobei a_i für ia , also für das Bildelement des Arguments i unter der Abbildung a , geschrieben wird. Die oben für zwei endliche Mengen A_1 und A_2 erwähnte Formel für die Anzahl der Elemente überträgt sich auf das kartesische Produkt von n endlichen Mengen ($n \in \mathbb{N}$):

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Im Falle $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ schreibt man statt $A_1 \times \dots \times A_n$ kurz A^n , und aus der letzten Formel wird einfach

$$|A^n| = |A|^n.$$

Wir kommen nun zum letzten Begriff dieses Abschnittes. In vielen Mengen ist auf natürliche Weise eine „Relation“, eine Art Verwandtschaft zwischen einzelnen Elementen, definiert: Eine ganze Zahl a kann sich von einer ganzen Zahl b um ein ganzzahliges Vielfaches von 3 unterscheiden oder nicht, eine R-Position a kann in eine R-Position b mit höchstens einem Zug überführt werden oder nicht, ein Manöver a kann dieselbe Operation bewirken wie das Manöver b oder auch nicht. Steht das Element a in der gerade betrachteten Relation zum Element b , so schreiben wir $a \sim b$.

Definition. Eine Relation \sim in der Menge A heißt *Äquivalenzrelation*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (R) $a \sim a$ für jedes $a \in A$ („Reflexivität“),
- (S) aus $a \sim b$ folgt stets $b \sim a$ („Symmetrie“),
- (T) aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt stets $a \sim c$ („Transitivität“).

Von den oben erwähnten drei Relationen ist nur die zweite keine Äquivalenzrelation, da sie die Eigenschaft (T) nicht besitzt. Wir betrachten die erste Relation etwas genauer.

Beispiel. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ wird in der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen (oder einer beliebigen Teilmenge von \mathbb{Z} , z.B. \mathbb{N}) durch

$a \sim b$ genau dann, wenn $a - b$ ein ganzzahliges Vielfaches von r ist,

eine Äquivalenzrelation definiert: Wegen $a - a = 0 = 0 \cdot r$ gilt (R). Aus $a - b = k \cdot r$ folgt $b - a = (-k) \cdot r$, also gilt (S). Aus $a - b = k_1 \cdot r$ und $b - c = k_2 \cdot r$ folgt $a - c = (a - b) + (b - c) = (k_1 + k_2) \cdot r$, also gilt (T). – Ist $a - b$ ein ganzzahliges Vielfaches von r , so wird oft

$a = b \text{ modulo } r$

oder $a \equiv b \pmod{r}$ („ a ist kongruent zu b modulo r “) o.ä. geschrieben. Das Rechnen mit Kongruenzen ist uns vom Umgang mit der Uhrzeit längst vertraut: 5 Stunden nach 22 Uhr ist es 3 Uhr, denn es gilt $22 + 5 = 3$ modulo 24.

Ist \sim eine Äquivalenzrelation in der Menge A und $a \in A$, so heißt $K_a := \{b \in A \mid b \sim a\}$ die *Äquivalenzklasse* von a . Angenommen, zwei Äquivalenzklassen haben ein Element gemeinsam: $c \in K_a \cap K_b$. Ist dann d ein beliebiges Element aus K_a , also $d \sim a$, so folgt wegen $a \sim c$ und $c \sim b$ sofort $d \sim b$, also $d \in K_b$, insgesamt also $K_a \subseteq K_b$, und da ebenso $K_b \subseteq K_a$ gezeigt werden kann, schließlich $K_a = K_b$. Zwei Äquivalenzklassen, die ein Element gemeinsam haben, sind somit stets identisch, anders formuliert, zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind stets disjunkt. Ist umgekehrt A auf irgend eine Weise in disjunkte nicht-leere Teilmengen zerlegt, so wird durch

$a \sim b$ genau dann, wenn a und b in derselben Teilmenge liegen,

eine Äquivalenzrelation definiert. Definition einer Äquivalenzrelation in A und Zerlegung von A in disjunkte nicht-leere Teilmengen sind somit ein und dieselbe Sache. Ist $f: A \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung, so definiert

$a \sim b$ genau dann, wenn $af = bf$,

eine Äquivalenzrelation in A . Jede Äquivalenzrelation ist von dieser Art, da bei vorgegebener Äquivalenzrelation für f die Abbildung gewählt werden kann, die jedem a seine Äquivalenzklasse K_a zuordnet.

2.2 Gruppen

Mathematiker rechnen nicht nur mit Zahlen. Auf natürliche Weise kommen sie dazu, auch ganze Zahlenkolonnen (Vektoren), Zahlenschemata (Matrizen), Mengen, Abbildungen und viele andere Dinge miteinander zu „verknüpfen“, d.h. einem geordneten Paar dieser Dinge ein drittes Ding zuzuordnen. Müßten sie nun für jede einzelne ihrer verschiedenen Verknüpfungen alle wesentlichen „Rechenregeln“ lernen, so wären sie noch mehr überfordert, als sie es ohnehin schon sind. Zum Glück gelten jedoch sehr oft dieselben Regeln, so daß die Situation trotz der großen Vielfalt der verknüpften Dinge einigermaßen überschaubar bleibt. Es ist hilfreich, sich bei jeder konkreten Verknüpfung einige wenige „Grundregeln“ zu überlegen, aus denen alle übrigen Regeln folgen. Man braucht dann nämlich bei zwei verschiedenen Verknüpfungen mit möglicherweise ganz verschiedenen Dingen nur noch diese Grundregeln zu vergleichen, um zu sehen, ob alle abgeleiteten Regeln



der beiden Systeme übereinstimmen. Ein besonders häufiger und daher wichtiger Fall ist der einer Verknüpfung, die die drei Grundregeln (A), (E), (I) der folgenden Definition erfüllt. Die Verknüpfung ist dort der Einfachheit halber mit einem Multiplikationspunkt \cdot bezeichnet, den wir später meist ganz weglassen. Sie muß jedoch keineswegs unbedingt etwas mit der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen zu tun haben.

Definition 1. Eine Menge A heißt eine *Gruppe*, wenn je zwei Elementen a und b von A ein Element $a \cdot b$ zugeordnet ist, und dabei folgende drei Regeln gelten:

- (A) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in A$ („Assoziativität“).
- (E) Es gibt ein Element $e \in A$ mit $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle $a \in A$ („Existenz eines neutralen Elementes oder Eins-Elementes“).
- (I) Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $a' \in A$ mit $a \cdot a' = a' \cdot a = e$ („Existenz der inversen Elemente“).

Von einer Gruppe *nicht* verlangt wird hingegen

- (K) $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in A$ („Kommutativität“).

Gilt (K) in einer Gruppe, so spricht man von einer *kommutativen* oder *abelschen* Gruppe (nach N. H. Abel, 1802–1829).

Eine unmittelbare Folgerung der Assoziativität ist das sogenannte *verallgemeinerte Assoziativgesetz*: Jede syntaktisch sinnvolle Klammer-Setzung in einer Folge von miteinander zu verknüpfenden Elementen ergibt dasselbe Element, z.B. $a_1((a_2a_3)a_4)a_5) = ((a_1a_2)(a_3a_4))a_5$, so daß wir die Klammern ganz weglassen und einfach $a_1a_2 \dots a_n$ schreiben können. Ferner ist das neutrale Element eindeutig bestimmt: Sind e_1 und e_2 zwei neutrale Elemente, so gilt $e_1 = e_1e_2 = e_2$. Schließlich hat eine Gleichung der Gestalt $ax = b$ ($a, b \in G$ vorgegeben, $x \in G$ gesucht) stets genau eine Lösung: Durch Multiplikation von links mit a' folgt $a'(ax) = a'b$, also $x = a'b$, d.h. nur $x = a'b$ kommt als Lösung in Frage, und $x = a'b$ ist wegen $a(a'b) = (aa')b = eb = b$ eine Lösung. Analog sieht man, daß die Gleichung $xa = b$ stets genau eine Lösung hat, nämlich $x = ba'$. Der Spezialfall $b = e$ zeigt, daß das inverse Element eines Elementes a stets eindeutig bestimmt ist, und dies ist eine nachträgliche Rechtfertigung der Bezeichnung a' .

Gibt es bei einer bestimmten Gruppe einen stärkeren Bezug oder mehr Analogien zur gewöhnlichen Addition als zur Multiplikation, so wird, besonders bei abelschen Gruppen, das Zeichen $+$ als Verknüpfungssymbol bevorzugt. In diesen Fällen wird das neutrale Element mit 0 und das inverse Ele-

ment eines Elementes a mit $-a$ bezeichnet. Aus den Gleichungen in (A), (E) und (I) wird dann $(a + b) + c = a + (b + c)$, $0 + a = a + 0 = a$ und $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Beispiel 1. Die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen ist mit der gewöhnlichen Addition $+$ als Verknüpfung eine abelsche Gruppe: Die gerade notierten Gleichungen sowie $a + b = b + a$ sind hier jedermann geläufig. Mit der gewöhnlichen Multiplikation \cdot ist \mathbb{Z} keine Gruppe, da (I) nicht erfüllt ist. Dagegen ist die Menge $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ aller geraden Zahlen mit der gewöhnlichen Addition wieder eine Gruppe. Verglichen mit \mathbb{Z} liefert sie ein Beispiel zu

Definition 2. Eine nicht-leere Teilmenge B einer Gruppe A heißt eine *Untergruppe* von A , wenn B mit der in A erklärten Verknüpfung wieder eine Gruppe ist.

Triviale Untergruppen jeder Gruppe A sind A selbst und die einelementige Menge, die nur das neutrale Element enthält. Allgemein ist eine nicht-leere Teilmenge B einer Gruppe A offenbar genau dann eine Untergruppe, wenn sie mit je zwei Elementen a und b auch ab und mit jedem Element a auch a' enthält. Die letzte Bedingung ist im Falle *endlicher Gruppen* (d.h. Gruppen mit endlich vielen Elementen) sogar entbehrlich: Eine nicht-leere endliche Teilmenge B einer beliebigen Gruppe A ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie mit je zwei Elementen a und b auch ab enthält. Denn ist a irgendein Element von B , so sind alle Elemente der Gestalt ab mit $b \in B$ voneinander verschieden (die Gleichung $ax = c$ hat ja stets genau eine Lösung), es muß also jedes Element von B , insbesondere auch e , unter den Elementen ab vorkommen, und somit gilt $a' \in B$.

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Gruppe A heißt die *Ordnung* $|A|$ von A . Daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ gibt, zeigt

Beispiel 2. Sei $C_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und für $a, b \in C_n$

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b < n \\ a + b - n, & \text{falls } a + b \geq n, \end{cases}$$

kurz

$$a \oplus b \in C_n \text{ mit } a \oplus b = a + b \text{ modulo } n.$$

C_n ist mit der Verknüpfung \oplus eine abelsche Gruppe, die sogenannte *zyklische Gruppe der Ordnung n*. Wenn klar ist, daß die Verknüpfung in C_n gemeint ist, lassen wir den Kreis um das + auch einfach weg. In C_3 gelten dann z.B. die Gleichungen $1 + 2 = 0$ und $2 + 2 = 1$.

Bei jeder Operation können Ecken-, Kanten- oder Flächencubies ihre Plätze untereinander tauschen. Jeder Operation ist somit auf natürliche Weise eine bijektive Abbildung der 8-elementigen Menge aller Eckencubies auf sich, eine bijektive Abbildung der 12-elementigen Menge aller Kantencubies auf sich und eine bijektive Abbildung der 6-elementigen Menge aller Flächencubies auf sich zugeordnet. Besonders wichtig für unsere Theorie ist daher

Beispiel 3. Sei S_A die Menge aller bijektiven Abbildungen einer Menge A auf sich. S_A ist mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe: Die Assoziativität

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (f, g, h \in S_A)$$

haben wir schon im letzten Abschnitt nachgeprüft. Das neutrale Element ist die mit I (oder auch genauer mit I_{S_A}) bezeichnete *identische Abbildung*, definiert durch $aI = a$ für alle $a \in A$. Die schon früher mit f' bezeichnete inverse Abbildung von f ist auch in der Gruppe S_A zu f invers. S_A heißt die *symmetrische Gruppe* über A . Ihre Elemente werden auch als *Permutationen* von A bezeichnet. Wir wollen den Fall $A = \{1, 2, \dots, n\}$, in dem man statt S_A meist S_n schreibt, genauer untersuchen.

Satz 1. $|S_n| = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n =: n!$ (gelesen: „n Fakultät“).

Beweis. Um eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ zu bestimmen, haben wir jedem Element der Menge $\{1, \dots, n\}$ ein Element der Menge $\{1, \dots, n\}$ als Bildelement zuzuordnen, wobei jedes Element nur einmal als Bildelement auftreten darf. Nehmen wir die Bestimmung der Reihe nach vor, d.h. wählen wir zunächst das Bildelement von 1, dann das Bildelement von 2 usw., so haben wir für 1 noch alle n Möglichkeiten, für das Bildelement von 2 sodann noch $n - 1$ Möglichkeiten usw., insgesamt also $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ Möglichkeiten. \square

Ähnlich wie wir dies schon in Abschnitt 1.5 mit Ecken-, Kanten- und Flächencubies gemacht haben, kann eine beliebige Permutation als Produkt disjunkter *Zyklen* dargestellt werden. Man schreibt

$$f = (i_1, i_2, \dots, i_r)$$

und nennt f einen *r-Zyklus*, wenn i_1, \dots, i_r r verschiedene Elemente von $\{1, \dots, n\}$ sind, und $i_1f = i_2, i_2f = i_3, \dots, i_rf = i_1$ sowie $if = i$ für alle sonstigen $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. So gilt z.B. für die $3! = 6$ Elemente der S_3

$$S_3 = \{I, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

2-Zyklen, also Permutationen, die lediglich zwei Elemente vertauschen und alle anderen festlassen, heißen auch *Transpositionen*. Produkte von zwei disjunkten Transpositionen auch *Doppel-Transpositionen*. (Zwei Zyklen (i_1, \dots, i_r) und (j_1, \dots, j_s) heißen disjunkt, wenn die Mengen $\{i_1, \dots, i_r\}$ und $\{j_1, \dots, j_s\}$ disjunkt sind.) Im folgenden wird für $f \circ g$ einfach fg geschrieben.

Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch, da z.B. $(1, 2)(2, 3) = (1, 3, 2)$, aber $(2, 3)(1, 2) = (1, 2, 3)$. (Gemäß unserer Vereinbarung sind die Transpositionen von links nach rechts auszuführen.) S_n ist jedoch sogar in einer extremen Weise nicht abelsch. Wir benötigen hierzu

Definition 3. Ist A eine Gruppe, so heißt

$$Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ für alle } b \in A\}$$

das *Zentrum* von A .

$Z(A)$ ist stets eine Untergruppe von A . (Aus $a, b \in Z(A)$ folgt $ab \in Z(A)$, da für $c \in A$ stets $abc = cab$. Aus $a \in Z(A)$ folgt $a' \in Z(A)$, da für $b \in A$ stets $a'b = (b'a)' = (ab)' = ba'$.) Für die S_n gilt nun

Satz 2. Für $n \geq 3$ enthält $Z(S_n)$ lediglich das neutrale Element I .

Beweis. Ist $f \in S_n$ und $f \neq I$, so gibt es ein $a \in \{1, \dots, n\}$ mit $af =: b \neq a$. Wegen $n \geq 3$ gibt es ein von a und b verschiedenes $c \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt $af(a, c) = b(a, c) = b$ und $a(a, c)f = cf \neq af = b$, also $f(a, c) \neq (a, c)f$. \square

Ein Paar (i, j) von Elementen der Menge $\{1, \dots, n\}$ heißt eine *Inversion* oder *Fehlstellung* der Permutation f , falls $i < j$, aber $if > jf$.

Eine Permutation heißt *gerade* bzw. *ungerade*, wenn die Anzahl z ihrer Inversionen gerade bzw. ungerade ist. $(-1)^z$ heißt das *Vorzeichen der Permutation* f und wird auch mit $\text{sgn } f$ („Signum von f “) bezeichnet. Gerade und ungerade Permutationen verhalten sich in der Gruppe S_n ähnlich wie gerade und ungerade ganze Zahlen bei der Addition: Das Produkt (Komposition) von zwei geraden oder zwei ungeraden Permutationen ist gerade, das Produkt einer geraden und einer ungeraden Permutation ist ungerade. Dies folgt aus

Satz 3. $\operatorname{sgn}(fg) = \operatorname{sgn} f \cdot \operatorname{sgn} g$.

Beweis. Es ist

$$\operatorname{sgn} f = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{jf - if}{j - i},$$

denn im Zähler dieses Produktes, das sich über alle Paare (i, j) von Elementen aus $\{1, \dots, n\}$ mit $i < j$ erstreckt, treten, bis auf das Vorzeichen, genau dieselben Faktoren wie im Nenner auf, und es gibt ebenso viele negative Faktoren wie Inversionen. (Für $k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $1 \leq k < l \leq n$ sind kf' und lf' verschieden, d.h. es gibt $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $1 \leq i < j \leq n$, so daß entweder $if = k$ und $if' = l$ oder $if = l$ und $if' = k$ ist.) Es folgt

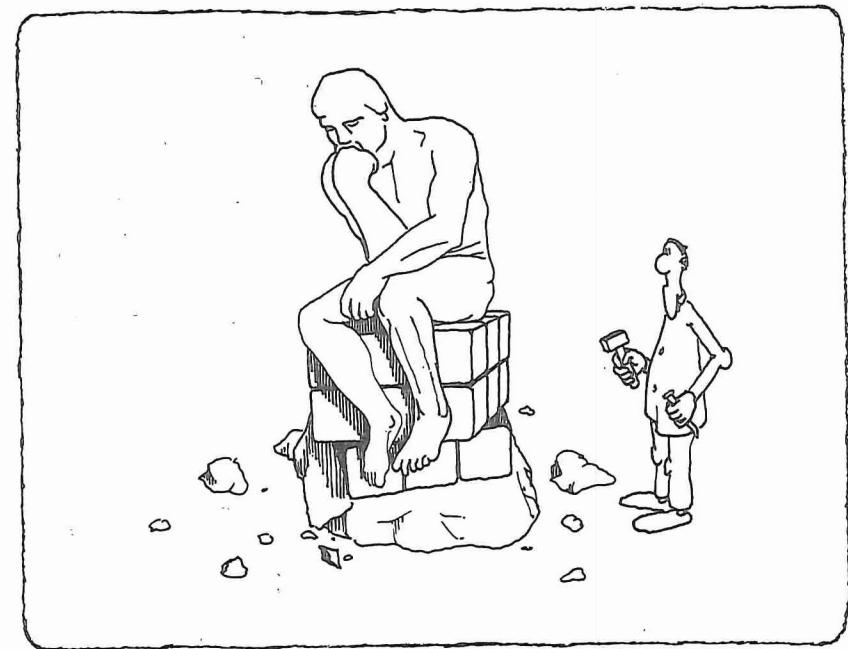
$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(fg) &= \prod_{i < j} \frac{jfg - ifg}{j - i} = \prod_{i < j} \left(\frac{jf - if}{j - i} \cdot \frac{jfg - ifg}{jf - if} \right) \\ &= \prod_{i < j} \frac{jf - if}{j - i} \cdot \prod_{i < j} \frac{jfg - ifg}{jf - if} = \operatorname{sgn} f \cdot \operatorname{sgn} g.\end{aligned}\quad \square$$

Nach Satz 3 ist die Menge aller geraden Permutationen von S_n eine Untergruppe der S_n , die sogenannte *alternierende Gruppe* A_n . Für $n \geq 2$ gibt es ebenso viele gerade wie ungerade Permutationen ($f \rightarrow f(1, 2)$ ist eine Bijektion zwischen geraden und ungeraden Permutationen), d.h. die Ordnung der A_n ist $n!/2$.

Satz 4. Für $n \geq 2$ ist jedes Element der S_n das Produkt von (im allgemeinen nicht disjunkten) Transpositionen.

Beweis. Da jede Permutation das Produkt von Zyklen ist, genügt es, die Behauptung für Zyklen zu zeigen. In der Tat ist $(i_1, \dots, i_{r-1}, i_r) = (i_1, \dots, i_{r-1}) (i_1, i_r) = \dots = (i_1, i_2) (i_1, i_3) \dots (i_1, i_r)$, d.h. jeder r -Zyklus läßt sich als Produkt von $r-1$ Transpositionen schreiben. \square

Offenbar ist der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen einer Gruppe A stets wieder eine Untergruppe von A . Zu jeder Teilmenge C von A gibt es daher stets eine kleinste Untergruppe B von A , die alle Elemente von C enthält, nämlich den Durchschnitt aller C umfassenden Untergruppen von A (zu denen A selbst gehört). B heißt die *von C erzeugte Untergruppe*, man sagt auch kurz: C erzeugt B . So erzeugt nach Satz 4 z.B. die Menge aller



Transpositionen die gesamte symmetrische Gruppe S_n . Wegen $(i, j) = (1, i) (1, j) (1, i)$ erzeugt sogar die Menge aller Transpositionen der speziellen Gestalt $(1, i)$ die ganze S_n .

Satz 5. Für $n \geq 3$ ist jedes Element der alternierenden Gruppe A_n das Produkt von 3-Zyklen.

Beweis. Nach der letzten Bemerkung und Satz 3 ist jedes Element der A_n das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen der Gestalt $(1, i)$. Es genügt daher, die Behauptung für das Produkt von zwei Transpositionen dieser Gestalt zu zeigen. Für $i \neq j$ gilt $(1, i) (1, j) = (1, i, j)$. Die Identität ist die dritte Potenz jedes 3-Zyklus, z.B. $I = (1, 2, 3)^3$. \square

Nach dem letzten Beweis wird A_n bereits von den 3-Zyklen der Gestalt $(1, i, j)$ erzeugt. Wegen $(1, i, j) = (1, 2, j) (1, 2, i) (1, 2, j)^2$ genügen jedoch sogar die 3-Zyklen der Gestalt $(1, 2, i)$.

Beispiel 4. Sei \overline{M} die Menge aller Manöver, also die Menge aller endlichen Folgen von Zügen, in der weder zwei Scheibenzüge mit derselben Scheibe noch zwei Bewegungszüge mit derselben Drehachse unmittelbar aufeinanderfolgen (vgl. Abschnitt 1.2 und 1.5). Auch das „leere Manöver“, das keinen einzigen Zug enthält, und mit $I_{\overline{M}}$ bezeichnet werde, soll zu \overline{M} gehören. „Multipliziert“ man nun zwei Manöver, indem man sie einfach nebeneinander schreibt und dabei gleichzeitig alle unmittelbar aufeinandertreffenden Scheibenzüge mit derselben Scheibe bzw. Bewegungszüge mit derselben Drehachse zusammenfaßt bzw. kürzt, so wird \overline{M} zu einer Gruppe, die wir als die *große Manövergruppe* bezeichnen. $I_{\overline{M}}$ ist das neutrale Element von \overline{M} , und das schon bisher als inverse Manöver eines $m \in \overline{M}$ bezeichnete Manöver m' ist auch im neuen gruppentheoretischen Sinn in \overline{M} zu m invers: $m \cdot m' = m' \cdot m = I_{\overline{M}}$. Für das Zusammenfassen und Kürzen, dessen exakte formale Definition leicht möglich aber recht lästig ist, begnügen wir uns mit einigen Beispielen:

$$R \cdot R = R^2, R \cdot R^2 = R', LVR^2 \cdot R^2V'H = LH, \\ M_R^2 \cdot M_V^2 = I_{\overline{M}}, RB_{ORV} \cdot B_{OVRL} = RL.$$

Die Multiplikation von Manövern ist ein reines Buchstabenspiel, bei der die jeweils bewirkten Operationen zunächst außer acht bleiben. So bewirken z.B. $M_R^2 M_V^2$ und $M_V^2 M_R^2$ dasselbe, die beiden Manöver sind jedoch verschiedene Elemente der großen Manövergruppe: $M_R^2 M_V^2 \neq M_V^2 M_R^2$.

Eine wichtige Untergruppe von \overline{M} ist die mit M bezeichnete *kleine Manövergruppe*, die aus allen *R-Manövern* besteht, d.h. aus allen $m \in \overline{M}$, in denen weder Mittelscheiben- noch Bewegungszüge, also ausschließlich Rand-scheibenzüge vorkommen.

Als letztes Beispiel wollen wir eine Gruppe betrachten, deren volle Bedeutung für die Cubologie erst in Abschnitt 3.1 und Kapitel 4 sichtbar wird.

Beispiel 5. Sei D die *Drehgruppe* des (gewöhnlichen) Würfels, d.h. die Gruppe aller *eigentlichen Deckbewegungen* des Würfels: Unter einer *Bewegung* des dreidimensionalen Raumes versteht man eine Abbildung f des Raumes auf sich, die den gegenseitigen Abstand aller Punkte erhält: Beliebige Punkte a und b sollen denselben Abstand voneinander haben wie ihre Bildpunkte af und bf . Die Menge der Bewegungen ist mit der Komposition als Verknüpfung eine Untergruppe der Gruppe aller Permutationen des Raumes. Für jede geometrische Figur bildet die Menge der *Deckbewegungen* dieser Figur, d.h. die Menge der Bewegungen, die die Figur als Ganzes in sich überführen, eine Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen. Sie spiegelt die

Symmetrieeigenschaften der Figur wider: Für eine unsymmetrische Figur ist sie „trivial“ (d.h. sie besteht lediglich aus der Identität), für eine Figur mit vielen Symmetrien ist sie entsprechend reichhaltiger. Eine Deckbewegung heißt *eigentlich*, wenn sie, etwas informell gesagt, einer physikalisch möglichen Bewegung der Figur entspricht, d.h. z.B. keine Punktspiegelung erfordert.

Dank der in den Abschnitten 1.2 und 1.5 eingeführten Bewegungszüge haben wir bereits einen gewissen Überblick über D . Jedem der 23 Bewegungszüge $B_R, B_R^2, B_{OV}, B_{OLV}, \dots$ ist offenbar ein Element $b_R, b_R^2, b_{OV}, b_{OLV}, \dots$ von D zugeordnet, d.h. es gilt $|D| = 24$, da die Identität hinzukommt. Be merkenswerterweise hat D genau dieselbe Struktur wie die symmetrische Gruppe S_4 . Es gilt nämlich

Satz 6. Es gibt eine bijektive Abbildung $\pi: D \rightarrow S_4$ mit $(d_1 d_2) \pi = d_1 \pi \cdot d_2 \pi$ für alle $d_1, d_2 \in D$.

Die letzte Aussage kann auch so formuliert werden: Gilt $d_1 d_2 = d_3$ in der Gruppe D , so gilt $d_1 \pi \cdot d_2 \pi = d_3 \pi$ in der Gruppe S_4 . Da π bijektiv ist, folgt auch umgekehrt aus $fg = h$ in S_4 stets $f\pi' \cdot g\pi' = h\pi'$ in D . Die Gruppen D und S_4 unterscheiden sich somit lediglich in den Namen ihrer Elemente, nicht jedoch in deren durch die Gruppen-Verknüpfungen gegebenen gegenseitigen Beziehungen.

Beweis zu Satz 6. Bei einer Deckbewegung des Würfels gehen die 4 Eckenachsen (Raumdiagonalen) wieder in Eckenachsen über. Jeder Deckbewegung ist somit eine Permutation der Eckenachsen, nach deren Numerierung von 1 bis 4 also ein Element der S_4 , zugeordnet. Bei Beschränkung auf die eigentlichen Deckbewegungen ist die Abbildung bijektiv und hat die geforderten Eigenschaften. \square

Satz 6 motiviert

Definition 4. Eine Abbildung π einer Gruppe A in eine Gruppe B heißt ein *Homomorphismus*, wenn für beliebige $a_1, a_2 \in A$ die Gleichung $(a_1 a_2) \pi = a_1 \pi \cdot a_2 \pi$ gilt. Ist π zusätzlich bijektiv, so heißt π ein *Isomorphismus* und die Gruppen A und B zueinander *isomorph*, symbolisch $A \cong B$. Ein Homomorphismus bzw. Isomorphismus einer Gruppe in sich selbst heißt *Endomorphismus* bzw. *Automorphismus*.

Aus Satz 6 wird damit kurz $D \cong S_4$. – Für jede Gruppe A und jedes $a \in A$ ist die Abbildung

$$\pi_a: A \rightarrow A, b \pi_a := aba' \quad (b \in A)$$

ein Automorphismus: Sie ist ein Endomorphismus wegen $(b_1 b_2) \pi_a = ab_1 b_2 a' = ab_1 a' \cdot ab_2 a' = b_1 \pi_a \cdot b_2 \pi_a$, und sie ist bijektiv, da zu jedem $b_2 \in A$ genau ein $b_1 \in A$ mit $b_2 = b_1 \pi_a = ab_1 a'$ existiert, nämlich $b_1 = a'b_2 a$. Die Automorphismen dieser Art werden als *innere Automorphismen* der Gruppe A bezeichnet. Wir werden mit ihnen in Abschnitt 3.3 („Konjugation“) ein wenig spielen. Allgemein beschreibt jeder Automorphismus eine Art strukturelle Symmetrie der Gruppe und bildet insbesondere jede Untergruppe auf eine isomorphe Untergruppe ab. Von besonderem Interesse sind Untergruppen, die hierbei stets wieder auf sich selbst abgebildet werden:

Definition 5. Eine Untergruppe B einer Gruppe A heißt *Normalteiler* oder *invariante Untergruppe* von A , wenn sie gegenüber allen inneren Automorphismen invariant ist, wenn also für $a \in A$ und $b \in B$ stets $aba' \in B$ gilt.

Sind A_1, \dots, A_n beliebige Gruppen, so ist auf dem kartesischen Produkt $B := A_1 \times \dots \times A_n$ in natürlicher Weise eine Gruppenstruktur definiert, nämlich durch komponentenweise Verknüpfung: $(a_1, \dots, a_n) \cdot (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 \bar{a}_1, \dots, a_n \bar{a}_n)$. Mit dieser Verknüpfung heißt B das *direkte Produkt* der Gruppen A_1, \dots, A_n . Im Falle $A_1 = \dots = A_n = A$ schreiben wir wieder kurz $B = A^n$. Sind alle A_i abelsch, so ist dies offenbar auch B .

Der Einfachheit halber sei nun $n = 2$, d.h. $B = A_1 \times A_2$ das direkte Produkt von zwei Gruppen A_1 und A_2 . Wir bezeichnen das neutrale Element von A_1, A_2 bzw. B mit e_1, e_2 bzw. e und setzen $A_1^* := \{(a_1, e_2) \mid a_1 \in A_1\}$, $A_2^* := \{(e_1, a_2) \mid a_2 \in A_2\}$. Wie man sofort sieht, ist dann A_i^* eine zu A_i isomorphe Untergruppe von B ($i = 1, 2$). Genauer gilt:

- (1) A_i^* ist Normalteiler von B ($i = 1, 2$),
- (2) $B = A_1^* A_2^* := \{a_1 a_2 \mid a_1 \in A_1^*, a_2 \in A_2^*\}$ („Komplexprodukt“),
- (3) $A_1^* \cap A_2^* = \{e\}$.

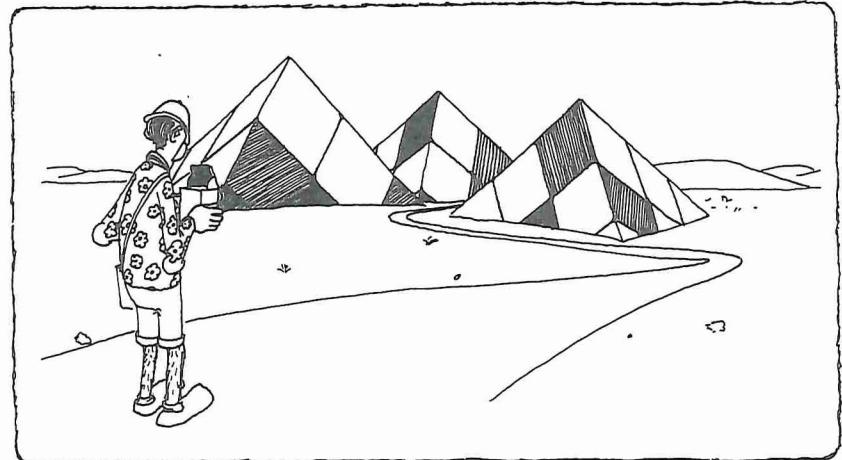
Gelten nun (1), (2) und (3) für beliebige Untergruppen A_1^* und A_2^* einer Gruppe B , so nennt man (indem man A_i^* mit A_i identifiziert) ebenfalls B das (innere) direkte Produkt von A_1^* und A_2^* und schreibt $B = A_1^* \times A_2^*$. Ist hierbei A_1^* eine Untergruppe, jedoch nicht unbedingt ein Normalteiler, so heißt B das *semidirekte Produkt* von A_1^* mit A_2^* .

2.3 Das kleine und das große Modell

Die im 1. Kapitel informell eingeführten drei Grundbegriffe „mögliche R-Position“ (aus dem Ausgangszustand durch Scheibendrehungen erzeugbares „Farbmuster“, das sich bei Bewegungszügen nicht ändert), „Mänöver“

(Folge von Zügen einschließlich Mittelscheiben- und Bewegungszügen) und „Operation“ („Änderung der Lage“ der Cubies; Bewegungszüge bewirken eine nicht-triviale Operation) entsprechen den natürlichen Möglichkeiten und praktischen Bedürfnissen des Spieles. Nebeneinandergestellt haben sie jedoch einen kleinen Nachteil: Sie passen für eine vernünftige mathematische Theorie, in der den Operationen wohldefinierte Abbildungen der Positionenmenge in sich entsprechen sollen, nicht zusammen.

Für eine solche Theorie ist es bequem, zunächst ausschließlich Rand scheibenzüge zuzulassen („kleines Modell“). Die sechs Flächencubies bleiben dann als festes Bezugssystem stets auf ihrem Platz, und eine R-Position kann in übersichtlicher Weise durch die Lage der Ecken- und Kantencubies beschrieben werden. Wir denken uns hierzu die Ecken- bzw. Kantencubies im Ausgangszustand des Würfels von 1 bis 8 bzw. 1 bis 12 numeriert und diese Zahlen sowohl auf die beweglichen Cubies selbst als auch auf eine fiktive, durchsichtige, niemals bewegte, den Würfel umgebende Hülle geschrieben. Die Zahlen auf der Hülle dienen zur Numerierung der Cubizile und stimmen im Ausgangszustand mit den Zahlen auf den unter ihnen liegenden Cubies überein. In einem beliebigen Zustand wird der *Platz* (nicht die Orientierung) der Ecken- bzw. Kantencubies dann durch ein Element ρ der symmetrischen Gruppe S_8 bzw. ein Element σ der symmetrischen Gruppe S_{12} beschrieben: Das Eckencubie Nr. i befindet sich im Eckencubizil $i\rho$ ($i = 1, \dots, 8$), das



Kantencubie Nr. j im Kantencubizil $j\sigma$ ($j = 1, \dots, 12$). Um auch die *Orientierung* der Ecken- und Kantencubies beschreiben zu können, markieren wir an jeder der 8 Ecken bzw. jeder der 12 Kanten des Würfels eine der drei bzw. zwei dort zusammentreffenden Würfelseiten mit einem Bogen bzw. Strich, und zwar am einfachsten wie in Bild 1 oben (da wir es dann beim Beweis zu Satz 2.4.1 bequem haben). Die Markierungsstriche seien nicht auf den Cubies, sondern auf unserer fiktiven Würfelhülle angebracht, d.h. sie zeichnen jeweils eine der drei bzw. zwei äußeren Cubizilseiten aus. Außerdem numerieren wir die drei farbigen Seiten eines jeden Eckencubies im Uhrzeigersinn mit 0, 1 und 2 und die beiden farbigen Seiten eines jeden Kantencubies mit 0 und 1, wobei im Ausgangszustand des Würfels die Nullen jeweils unter den Markierungsbögen bzw. -strichen liegen mögen, s. Bild 1 unten. Für eine beliebige R-Position kann die Orientierung der Ecken- bzw. Kantencubies nun durch ein 8-tupel $x = (x_1, \dots, x_8) \in X := \{0, 1, 2\}^8$ und ein 12-tupel $y = (y_1, \dots, y_{12}) \in Y := \{0, 1\}^{12}$ charakterisiert werden, wobei x_i bzw. y_j angibt, welche Seite des i -ten Eckencubies bzw. j -ten Kantencubies im Cubizil $i\rho$ bzw. $j\sigma$ unter dem Markierungsbogen bzw. -strich liegt. Wir nennen das Eckencubie Nr. i *richtig orientiert, nach links verdreht* bzw. *nach rechts verdreht*, wenn

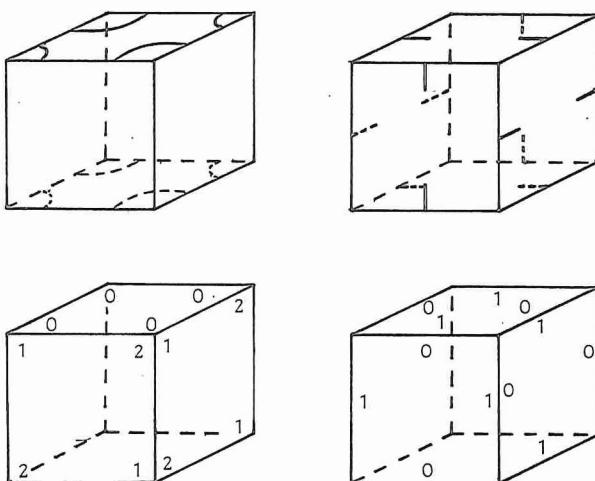


Bild 1 Markierung der Cubizilseiten (oben) und Numerierung der Cubieseiten (unten)

$x_i = 0, 1$ bzw. 2 ist, und das Kantencubie Nr. j *richtig* bzw. *falsch orientiert*, wenn $y_j = 0$ bzw. 1 ist. (Bisher waren solche Aussagen nur sinnvoll, wenn sich das Cubie in seinem Heimatkubizil befand.) Für unser kleines mathematisches Modell können wir nun den früher notwendigerweise etwas informellen Begriff „Farbmuster“ so präzisieren:

Definition 1. Eine R-Position ist ein Quadrupel (4-tupel) (ρ, σ, x, y) mit $\rho \in S_8$, $\sigma \in S_{12}$, $x = (x_1, \dots, x_8) \in \{0, 1, 2\}^8$ und $y = (y_1, \dots, y_{12}) \in \{0, 1\}^{12}$. P^* sei die Menge aller R-Positionen.

R-Operationen, und zwar mögliche und unmögliche, können in naheliegender Weise als Abbildungen von P^* in P^* erklärt werden. Wir verzichten hierbei auf weitere formale Definitionen und begnügen uns mit folgenden Bemerkungen und Beispielen: Eine *mögliche R-Operation* ist eine Abbildung von P^* in P^* , die durch ein R-Manöver bewirkt wird. Eine *R-Operation* ist eine Abbildung von P^* in P^* , die durch Demontage und anschließenden Neuaufbau der Ecken- und Kantencubies nach einem festen (für alle $p \in P^*$ gleichen) Plan bewirkt wird: Die R-Operation (+orv) (ov, oh) ordnet z.B. jeder R-Position eine neue R-Position zu, indem sie das obere rechte vordere Eckencubie nach rechts dreht und die Kantencubies aus ov und oh in einer bestimmten Weise vertauscht. Eine R-Operation, die keine mögliche R-Operation ist, heißt *unmögliche R-Operation*. Die Menge G der möglichen R-Operationen und die größere Menge G^* aller R-Operationen sind Untergruppen der symmetrischen Gruppe über P^* . Wir nennen G die *Rubiksche Gruppe*. Die Abbildung

$$\pi: M \rightarrow G,$$

die jedem R-Manöver die von ihm bewirkte mögliche R-Operation zuordnet, ist ein Homomorphismus von der kleinen Manövergruppe (s. Beispiel 2.2.4) auf die Rubiksche Gruppe: $(m_a m_b) \pi = m_a \pi \cdot m_b \pi$, in Worten, das Produkt von zwei R-Manövern bewirkt die Komposition der von den beiden R-Manövern bewirkten möglichen R-Operationen. Zwei R-Manöver m_a und m_b heißen *äquivalent*, symbolisch $m_a \sim m_b$, wenn sie dieselbe R-Operation bewirken: $m_a \pi = m_b \pi$. Vermöge der Abbildung

$$P^* \times M \rightarrow P^*, (p, m) \rightarrow pm := p(m\pi)$$

„operiert“ die kleine Manövergruppe auf der Menge der R-Positionen, d.h. es gilt

- (a) $pm_I_M = p$ für alle $p \in P^*$ und
- (b) $p(m_a m_b) = (pm_a) m_b$ für alle $p \in P^*$ und $m_a, m_b \in M$.

Wie man sofort bestätigt, wird durch

$p_a \sim p_b$ genau dann, wenn ein $m \in M$ mit $p_a = p_b m$ existiert, eine Äquivalenzrelation in P^* definiert: Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Orbits* oder *Bahnen*.

Definition 2. Eine R-Position $\rho \in P^*$ heißt *möglich*, wenn sie in demselben Orbit wie der „Ausgangszustand“ $I_P = (1, 1, 0, 0)$ liegt, wenn also ein $m \in M$ mit $\rho = I_P m$ existiert. (Hier steht 1 für I_{S_8} und $I_{S_{12}}$, 0 für das 8- bzw. 12-tupel $(0, \dots, 0)$.) P sei die Menge aller möglichen R-Positionen.

Wir kommen nun zum „großen Modell“, das auch Mittelscheiben- und Bewegungszüge mit einbezieht. Um auch die dann möglichen Manipulationen am Würfel als wohldefinierte Abbildungen auffassen zu können und dieselbe mathematische Struktur wie beim „kleinen Modell“ zu erhalten, müssen wir in den Begriff der Position die „Lage des Würfels auf dem Tisch“ mit einbeziehen. Diese „Lage“ kann durch Wahl einer der 6 Seiten als obere Seite und einer der 4 dazu senkrechten Seiten als vordere Seite festgelegt werden. Die $6 \cdot 4 = 24$ Lagen entsprechen den Elementen der als Beispiel 2.2.5 studierten Drehgruppe D des Würfels, die nach Satz 2.2.6 zur S_4 isomorph ist. Um eine möglichst weitgehende Analogie zu unserer Vorgehensweise bei Ecken- und Kantencubies zu erhalten, beschreiben wir die Lage des Würfels jedoch durch eine Permutation der 6 Flächencubies, also durch ein Element $\tau \in S_6$. Natürlich treten dann nur 24 der $6! = 720$ Permutationen bei möglichen Positionen auf. Die übrigen entsprechen „unmöglichen Positionen“, die nur nach Zerlegung und Neuaufbau des Würfels erhalten werden können, wobei jetzt auch das Abschrauben der Flächencubies erlaubt ist. Wir kommen so fast zwangsläufig zu

Definition 3. Eine Position ist ein Quintupel (5-tupel) $(\rho, \sigma, \tau, x, y)$ mit $\rho \in S_8$, $\sigma \in S_{12}$, $\tau \in S_6$, $x \in \{0, 1, 2\}^8$ und $y \in \{0, 1\}^{12}$. \bar{P}^* sei die Menge aller Positionen.

Alle weiteren Begriffe des „großen Modells“ werden völlig analog zu denjenigen des „kleinen Modells“ erklärt: die Menge \bar{P} aller möglichen Positionen, die große Manövergruppe \bar{M} (s. Beispiel 2.2.4), die Gruppe \bar{G}^* aller Operationen, die Gruppe \bar{G} aller möglichen Operationen, der Homomorphismus $\bar{\pi}: \bar{M} \rightarrow \bar{G}$ und die Äquivalenz beliebiger Manöver: $m_a \sim m_b$ genau dann, wenn $m_a \bar{\pi} = m_b \bar{\pi}$.

2.4 Charakterisierung der möglichen Positionen und Operationen

Mit dem folgenden Satz kann einer beliebigen Position mühelos angesehen werden, ob sie durch Scheibendrehungen in den Ausgangszustand überführt werden kann oder nicht.

Satz 1. Eine R-Position (ρ, σ, x, y) ist genau dann möglich, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \sigma$,
- (b) $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0 \text{ modulo } 3$,
- (c) $y_1 + y_2 + \dots + y_{12} = 0 \text{ modulo } 2$.

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst, daß die drei Bedingungen *notwendig* sind, d.h. für jede mögliche Position gelten. Dies ist recht einfach. Einerseits sind (a), (b) und (c) für den Ausgangszustand I_P mit $\rho = I_{S_8}$, $\sigma = I_{S_{12}}$, also $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \sigma = 1$, und mit $x_1 = x_2 = \dots = x_8 = y_1 = y_2 = \dots = y_{12} = 0$ erfüllt. Andererseits bleiben (a), (b) und (c) bei jedem der sechs 90° -Züge O , U , R , L , V und H erhalten: (a) bleibt gültig, da jeder dieser Züge gleichzeitig einen Ecken-4-Zyklus und einen Kanten-4-Zyklus, also eine ungerade Permutation der Eckencubies und eine ungerade Permutation der Kantencubies, bewirkt. (b) bleibt gültig, da sich die Komponenten von x bei O oder U überhaupt nicht ändern, während sich bei R , L , V und H jeweils zwei Komponenten um 1 modulo 3 erhöhen und zwei Komponenten um 1 modulo 3 erniedrigen (Bild 2.3.1 links). (c) bleibt gültig, da sich bei jedem der sechs Züge genau vier Komponenten von y um 1 ändern (Bild 2.3.1 rechts).

(2) Um zu beweisen, daß die drei Bedingungen auch *hinreichend* sind, müssen wir zeigen, daß jede R-Position $\rho = (\rho, \sigma, x, y)$, die die drei Bedingungen erfüllt, durch ein geeignetes Manöver m in den Ausgangszustand überführt werden kann, kurz, daß es zu jedem solchen ρ ein $m \in M$ mit $pm = I_P$ gibt. Im Grunde haben wir dies bereits bei der Beschreibung der „einfachen Strategie“ geleistet. Wir wollen jedoch hier einen davon unabhängigen, ein wenig abstrakteren Beweis angeben.

(α) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \sigma = 1$ angenommen werden. Gilt nämlich $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \sigma = -1$, so gilt für $p_a := (\rho_a, \sigma_a, x_a, y_a) := \rho O$ die Gleichung $\operatorname{sgn} p_a = \operatorname{sgn} \sigma_a = 1$, und aus $m_a \in M$ mit $p_a m_a = I_P$ folgt $p(O m_a) = (pO) m_a = I_P$.

(β) Betrachten wir nun ein beliebiges Manöver für einen Ecken-3-Zyklus, etwa $m_{100} = RH'RV^2R'HRV^2R^2$ (9), das den in Bild 1.5.2 oben links abgebildeten 3-Zyklus (X_1, X_2, X_3) für die Ecken $X_1 = ovl$, $X_2 = orv$, $X_3 = ohr$ bewirkt und die übrigen Ecken, die wir für einen Moment mit X_4, \dots, X_8 be-

zeichnen, testlässt. Zu jedem $i \in \{4, \dots, 8\}$ gibt es ein höchstens zweizügiges Manöver $k_i \in M$, das das Eckencubie aus X_i mit irgendeiner Orientierung nach X_3 bringt, ohne die Cubies in X_1 und X_2 zu verändern. Das Manöver $k_i m_{100} k_i'$ bewirkt nun genau den 3-Zyklus (X_1, X_2, X_i) . (Das hier verwendete Prinzip der „Konjugation“ wird in Abschnitt 3.3 genauer diskutiert.) Da die sechs 3-Zyklen $(X_1, X_2, X_3), (X_1, X_2, X_4), \dots, (X_1, X_2, X_8)$ die Gruppe aller geraden Permutationen von $\{X_1, \dots, X_8\}$ erzeugen (vgl. Bemerkung nach Satz 2.2.5), gibt es ein Manöver $m_E \in M$, das alle acht Eckencubies in ihr Heimatcubizil bringt.

(γ) Völlig analog können wir, ausgehend von einem beliebigen Manöver für irgendeinen Kanten-3-Zyklus, ein Manöver m_K finden, das alle zwölf Kantencubies auf ihren Platz bringt.

(δ) In der Position $pm_E m_K (= pm_K m_E)$ sind nun bereits alle Ecken- und Kantencubies im richtigen Cubizil. Nach Beweisteil (1) gelten auch für diese Position die Gleichungen (b) und (c), d.h. es ist eine gerade Anzahl von Kantencubies umzuorientieren, und die Anzahl der nach rechts zu drehenden Eckencubies ist gleich der Anzahl der nach links zu drehenden Eckencubies modulo 3. Wir erreichen daher die richtige Orientierung aller Ecken- und Kantencubies z.B. „Schritt für Schritt“ auf Wegen um den Würfel, die jeweils zwei benachbarte Ecken- bzw. Kantencubies verbinden und jedes Ecken- bzw. Kantencubie genau einmal erreichen, gemäß Bild 1 mittels

$$LVR'V'L'O^2RORO'R^2O^2R \text{ (13)} \rightarrow (+ov) (+or)$$

bzw.

$$R(O^2RV'U^2VR')^2R' \text{ (13)} \rightarrow (+orv) (-ovl)$$

(sowie trivialen „Variationen“ dieser Manöver, s. Abschnitt 3.1). \square

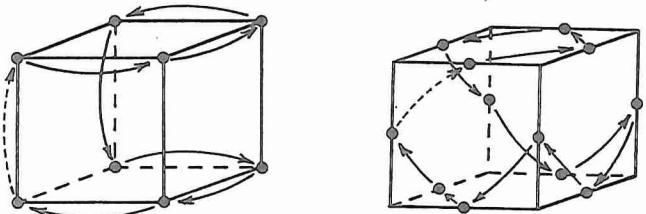


Bild 1 Wege um den Würfel, die jeweils benachbarte Ecken- bzw. Kantencubies verbinden und dabei jedes Ecken- bzw. Kantencubie genau einmal erreichen

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist

Satz 2. Die Anzahl der möglichen R-Positionen ist

$$\begin{aligned} |P| &= |G| = \frac{1}{12} |P^*| = \frac{1}{12} \cdot 8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \\ &= 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11. \end{aligned}$$

Beweis. Für die 8 Eckencubies gibt es $8!$, für die 12 Kantencubies $12!$ Anordnungen. Da jedes Eckencubie an jeder Ecke 3 und jedes Kantencubie auf jeder Kante 2 Orientierungen haben kann, gilt

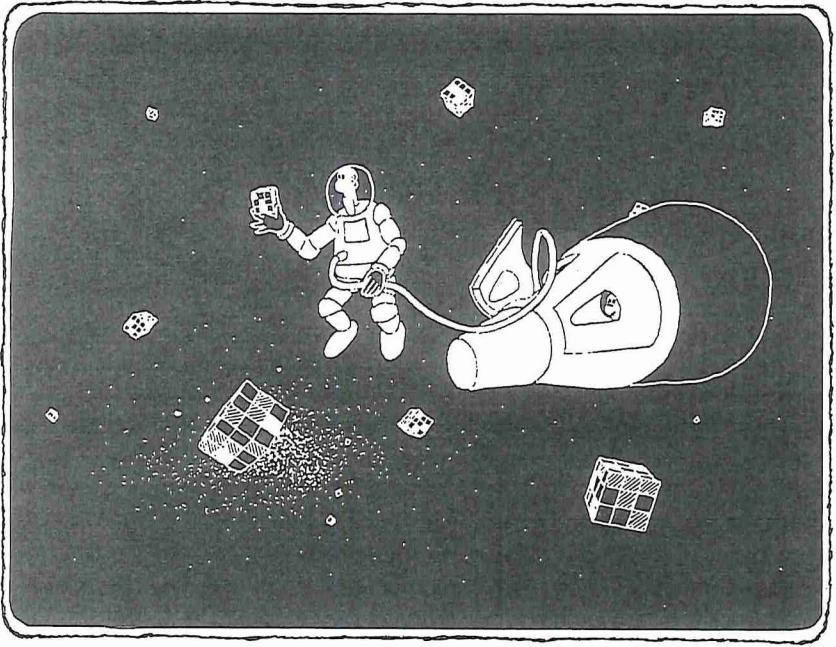
$$|P^*| = 8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}.$$

Für mögliche Positionen wird diese Anzahl durch Gleichung (a) auf die Hälfte (es gibt ebenso viele gerade wie ungerade Permutationen), durch Gleichung (b) auf ein Drittel (die Orientierung von 7 Eckencubies kann beliebig gewählt werden und bestimmt dann die Orientierung des 8. Eckencubies) und durch Gleichung (c) erneut auf die Hälfte (die Orientierung von 11 Kantencubies kann beliebig gewählt werden und bestimmt dann die Orientierung des 12. Kantencubies), insgesamt also auf ein Zwölftel, reduziert. \square

Bescheidenerweise (?) werben Hersteller und Handel bis heute auf unzähligen Plakaten, Werbezetteln und Anzeigen mit dem Slogan „der Zauberwürfel mit 43 Billionen Gesichtern“. Doch es sind mehr als 43 Trillionen (bzw. mehr als 43 amerikanische quintillions), also immerhin mehr als eine Million mal so viel!

Legt man 43,252 Trillionen Würfel — jeder in einer anderen R-Position — von je 5,6 cm Breite nebeneinander, so ergibt dies eine Strecke von etwa $2,422 \cdot 10^{15}$ (2,422 Billiarden) km, das sind etwa 256 Lichtjahre. (Zum Vergleich: Die Hauptsterne α, β, γ und δ des Großen Bären sind 96 bzw. 76 bzw. 80 bzw. 76 Lichtjahre von unserem Sonnensystem entfernt, die Entfernung des Polarsternes, Hauptstern α des Kleinen Bären, wird mit 470 Lichtjahren angegeben.) Dicht gepackt würden die Würfel die gesamte Erdoberfläche (Land und Wasser, $51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$) etwa 15 m hoch bedecken.

Trotz dieser vielleicht eindrucksvollen Vergleiche ist die Größe der Zahl $|P|$ nicht die Hauptursache für die Schwierigkeit unseres Spieles. So wird es sicher als einfach empfunden, 21 Karten einer Kundenkartei alphabetisch zu ordnen. Doch für 21 Karten gibt es $21! = 51, \dots \cdot 10^{18}$ (mehr als 51 Trillionen) Reihenfolgen, und bei Verschiedenheit aller Namen ist auch hiervon nur eine die gewünschte alphabetische Anordnung. Die nicht zu leugnenden Schwierigkeiten mit Rubik's Cube beruhen vielmehr auf der komplizierten



Verbundenheit von jeweils 8 bis 9 Cubies, die es erforderlich macht, die Lösung auf raffinierten Umwegen anzusteuern. Man beachte, daß unmittelbar vor dem letzten Zug notwendigerweise 8 Cubies falsch stehen, unmittelbar vor dem vorletzten Zug 12 bis 16 Cubies (12 nur im Falle von zwei 180°-Mittelscheibenzyklen), im allgemeinen also mehr als die Hälfte aller 26 sichtbaren Teilwürfel!

Zwischen den R-Operationen $g \in G^*$ und den R-Positionen $p \in P^*$ besteht die natürliche Bijektion $G^* \ni g \leftrightarrow p = I_P g \in P^*$, wobei g genau dann möglich ist, wenn $p = I_P g$ möglich ist. Satz 1, der die möglichen Positionen charakterisiert, kann daher unmittelbar in einen Satz zur Charakterisierung der möglichen Operationen „übersetzt“ werden. Hierzu eine kurze Vorbemerkung: Die r -te Potenz eines Ecken- r -Zyklus mit Vorzeichen + bzw. - bewirkt offenbar eine Rechts- bzw. Linksdrehung aller r am Zyklus beteiligten Eckencubies. Die r -te Potenz eines Kanten- r -Zyklus mit Vorzeichen + orientiert alle r am Zyklus beteiligten Kantencubies um. Das Vorzeichen eines Zyklus ist somit unabhängig von dessen Darstellung, und wir können von

orientierungstreuen Ecken- bzw. Kantencyklen, von rechtsdrehenden und von linksdrehenden Eckenzyklen sowie von umorientierenden Kantencyklen sprechen. Die angekündigte „Übersetzung“ von Satz 1 ergibt damit

Satz 3. Eine R-Operation ist genau dann möglich, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Die Gesamtanzahl der Zyklen gerader Länge (Ecken- und Kantencyklen) ist gerade.
- (b) Die Anzahl der rechtsdrehenden Eckenzyklen ist gleich der Anzahl der linksdrehenden Eckenzyklen modulo 3.
- (c) Die Anzahl der umorientierenden Kantencyklen ist gerade.

Beweis. Gleichung (a) von Satz 1 besagt, daß die in der 20-elementigen Menge aller Ecken- und Kantencubies bewirkte Permutation gerade ist. Dies ist zur Bedingung (a) von Satz 3 äquivalent, da ein einzelner Zyklus genau dann eine gerade Permutation ist, wenn seine Länge ungerade ist.

Zur Äquivalenz der Bedingungen (b) genügt die Feststellung, daß ein rechts- bzw. linksdrehender bzw. orientierungstreuer Eckenzyklus die Summe der Orientierungsordinaten x_i (Summation über alle am Zyklus beteiligten Cubies) um -1 bzw. $+1$ bzw. 0 modulo 3 ändert. Analoges gilt für die Bedingungen (c): Ein Kantenzyklus ist genau dann umorientierend, wenn sich die Summe der Orientierungsordinaten y_j der am Zyklus beteiligten Cubies um eine ungerade Zahl ändert. \square

Lediglich ein Korollar von Satz 3 ist

Satz 4. Jede Position, die aus einer möglichen Position durch Vertauschen zweier Eckencubies (beliebige Orientierung), durch Vertauschen zweier Kantencubies (beliebige Orientierung), durch Verdrehen eines einzelnen Eckencubies oder durch Umorientieren eines einzelnen Kantencubies entsteht, ist unmöglich.

Auf eine bemerkenswerte Analogie zwischen dem Verhalten der Eckencubies, die sich immer nur paarweise in verschiedene Richtung oder zu dritt in dieselbe Richtung drehen lassen, und den hypothetischen Quarks der Elementarteilchenphysik, hat S. W. Golomb (University of Southern California) hingewiesen. Die Quarks und ihre Antiteilchen, die Antiquarks, scheinen nicht isoliert existieren zu können, sondern nur als Quark-Antiquark-Paar in Gestalt eines Mesons oder als Quark-Tripel in Gestalt eines Baryons. Ob auch hierfür eines Tages eine gruppentheoretische Erklärung gegeben werden kann? Oder – übermütige Spekulation – ob eines Tages neue Elementarteilchen auf Grund der Eigenschaften unserer Kantencubies gesucht und gefunden werden? –

2.5 Die Struktur der Rubikschen Gruppe

Zwischen der Rubikschen Gruppe G und der Menge P aller möglichen R-Positionen besteht die natürliche Bijektion $G \ni g \rightarrow I_P g \in P$. Wir können daher jedes Gruppenelement g mit der Position $I_P g = (\rho, \sigma, x, y) \in P$ identifizieren. Das Eckencubie Nr. i befindet sich dabei im Cubizil $i\rho$, und unter dem Markierungsbogen dieses Cubizils steht die Orientierungscoordinate $x_i = ix$ ($i = 1, \dots, 8$). Wird hierauf ein zweites Gruppenelement $g^* = (\rho^*, \sigma^*, x^*, y^*) \in G$ angewandt, so gelangt das Eckencubie Nr. i in das Cubizil $i\rho\rho^*$, und unter dem Markierungsbogen dieses Cubizils steht nun die Zahl $ix + i\rho x^*$ modulo 3. Analog gelangt das Kantencubie Nr. j in das Kantencubizil $j\sigma\sigma^*$ mit der Zahl $iy + j\sigma y^*$ modulo 2 unter dem Markierungsstrich dieses Cubizils. Indem wir die Mengen $X = \{0, 1, 2\}^8$ und $Y = \{0, 1\}^{12}$ als direktes Produkt von 8 zyklischen Gruppen C_3 bzw. 12 zyklischen Gruppen C_2 auffassen, also die Addition in X bzw. Y komponentenweise modulo 3 bzw. 2 definieren, erhalten wir für das Produkt zweier Elemente der Rubikschen Gruppe G die fundamentale Gleichung

$$(\rho, \sigma, x, y) (\rho^*, \sigma^*, x^*, y^*) = (\rho\rho^*, \sigma\sigma^*, x + \rho x^*, y + \sigma y^*).$$

Hiermit können nun viele Struktur-Eigenschaften von G ganz formal abgeleitet werden. Sei dazu

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{g = (\rho, \sigma, x, y) \in G \mid x = 0, y = 0\}, \\ G_2 &:= \{g = (\rho, \sigma, x, y) \in G \mid \rho = 1, \sigma = 1\}, \end{aligned}$$

wobei wir der Kürze und Übersichtlichkeit wegen wieder einfach 0 für das 8- bzw. 12-tupel $(0, \dots, 0)$ und 1 für I_{S_8} bzw. $I_{S_{12}}$ schreiben. G_1 ist also die Menge der möglichen R-Operationen, die die Orientierung (bezüglich der gewählten Markierung) aller Cubies erhalten, G_2 die Menge der möglichen R-Operationen, die alle Cubies an ihrem Platz lassen.

- Satz 1.** (a) G_1 ist eine Untergruppe, G_2 ein Normalteiler von G .
 (b) $G_1 \cong \{(\rho, \sigma) \in S_8 \times S_{12} \mid \text{sgn } \rho = \text{sgn } \sigma\}$, $G_2 \cong C_3^7 \times C_2^{11}$.
 (c) G ist das semidirekte Produkt von G_1 mit G_2 .

Beweis. (a) Die Untergruppen-Eigenschaft von G_1 und G_2 ist trivial, die Invarianz von G_2 schnell nachgerechnet: Für $g = (\rho, \sigma, x, y) \in G$ ist $g' = (\rho', \sigma', \rho'(-x), \sigma'(-y))$, und für beliebiges $g^* = (1, 1, x^*, y^*) \in G_2$ gilt $gg^*g' = (1, 1, \rho x^*, \sigma y^*) \in G_2$.

(b) Trivial. $(G_2 \ni (1, 1, (x_1, \dots, x_8), (y_1, \dots, y_{12})) \rightarrow ((x_1, \dots, x_7), (y_1, \dots, y_{11})) \in C_3^7 \times C_2^{11}$ ist ein Isomorphismus.)

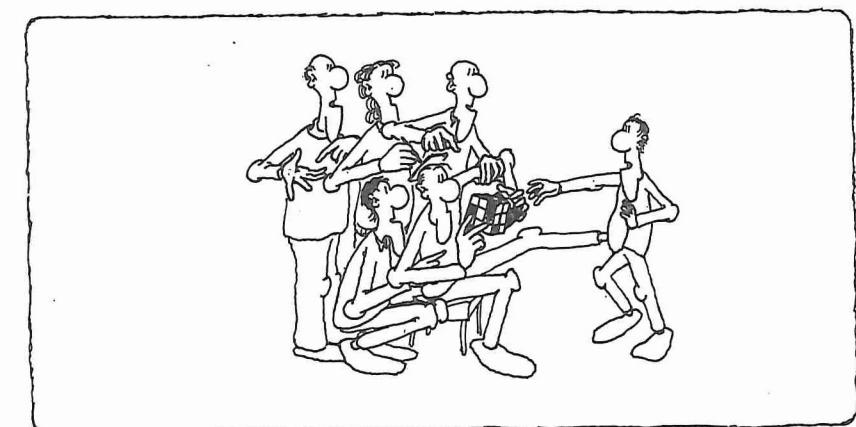
(c) Wegen (a) bleibt nur noch $G_1 \cap G_2 = \{I_G\}$ und $G_1 G_2 = G$ festzustellen. Die letzte Gleichung gilt wegen $(\rho, \sigma, 0, 0) \cdot (1, 1, \rho'x, \sigma'y) = (\rho, \sigma, 0, 0)$. \square

Der hohe Grad der Nicht-Kommutativität von G findet seinen Ausdruck in

Satz 2. Das Zentrum $Z(G)$ der Rubikschen Gruppe besteht lediglich aus I_G und dem von unserem Lieblingsmanöver m_{490} bewirkten alle zwölf Kantencubies umorientierenden Superflip.

Beweis. Sei $g = (\rho, \sigma, x, y) \in Z(G)$. Da das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n für $n \geq 3$ trivial ist (Satz 2.2.2) und jedes $\rho^* \in S_8$ als erste Koordinate eines Elementes von G vorkommt, folgt aus unserer fundamentalen Produktgleichung sofort $\rho = 1$ und analog $\sigma = 1$, d.h. $g \in G_2$. Aus $gg^* = g^*g$ für alle $g^* \in G$ wird damit $x + x^* = x^* + \rho^*x$, also $x = \rho^*x$ für alle $\rho^* \in S_8$, und $y + y^* = y^* + \sigma^*y$, also $y = \sigma^*y$ für alle $\sigma^* \in S_{12}$, d.h. x und y sind konstant. Satz 2.4.1 schließt $x = 1$ und $x = 2$ aus. Es bleiben nur die zwei Elemente $I_G = (1, 1, 0, 0)$ und $(1, 1, 0, 1)$ (Superflip), die offenbar zu $Z(G)$ gehören. \square

Die Vertauschbarkeit des Superflips mit anderen Operationen lässt sich z.B. so demonstrieren: Man wendet auf einen Würfel im Ausgangszustand zunächst mit m_{490} den Superflip an, führt dann einen oder zwei beliebige



Züge hinter dem Rücken aus (oder läßt diese ausführen), wendet den Superflip erneut an (am besten ebenfalls hinter dem Rücken) und kann danach die vor 24 Scheibenzügen gemachten Zwischenzüge zurücknehmen.

Neben dem Zentrum ist die sogenannte *Kommutatorgruppe* $K(A)$ einer Gruppe A ein Maß für die Kommutativität von A . Sie besteht aus allen endlichen Produkten von *Kommutatoren*, d.h. von Elementen der Form $[a, b] := aba'b'$. Man sieht leicht, daß $K(A)$ stets eine Untergruppe, ja sogar ein Normalteiler ist, der bei einer abelschen Gruppe lediglich das neutrale Element enthält. In unserem Falle ist jedoch $K(G)$ die „halbe“ Gruppe:

Satz 3. $K(G) = \{(\rho, \sigma, x, y) \in G \mid \text{sgn } \rho = \text{sgn } \sigma = 1\}$.

Beweis. Ist $g = [g_1, g_2] = g_1 g_2 g'_1 g'_2 = (\rho, \sigma, x, y)$ ein Kommutator mit $g_1 = (\rho_1, \dots)$ und $g_2 = (\rho_2, \dots)$, so gilt $\rho = \rho_1 \rho_2 \rho'_1 \rho'_2$, also $\text{sgn } \rho = 1$ (Satz 2.2.3). Die Bedingung $\text{sgn } \rho = \text{sgn } \sigma = 1$ gilt also für alle Kommutatoren, also auch für alle Produkte von Kommutatoren (erneut Satz 2.2.3), d.h. für alle $g \in K(G)$. Daß auch umgekehrt jedes $g = (\rho, \sigma, x, y) \in G$ mit $\text{sgn } \rho = \text{sgn } \sigma = 1$ das Produkt von Kommutatoren ist, zeigt Beweisteil (2), (β) – (δ), von Satz 2.4.1: Für die dort benötigten Elementar-Operationen (Ecken-3-Zyklus, Kanten-3-Zyklus, Drehung zweier Eckencubies, Umorientierung zweier Kantencubies) gibt es Manöver, die die Gestalt eines Kommutators der kleinen Manövergruppe M haben, z.B. m_{101}, m_{551}, m_{5a} und

$$VOU'L^2O^2U^2R \cdot O \cdot R'U^2O^2L^2UO'V' \cdot O' \rightarrow (+ov) (+or).$$

Konjugierte (s. Abschnitt 3.3) von Kommutatoren sind wieder Kommutatoren wegen

$$m \cdot m_a m_b m'_a m'_b \cdot m' = (mm_a m') (mm_b m') (mm_a m')' (mm_b m')'.$$

Als Bildelement unter dem Homomorphismus π schließlich ist die von einem Produkt von Kommutatoren in M bewirkte Operation ein Produkt von Kommutatoren in G . \square

Wegen

$$m_{990} = RL'V^2H^2RL' \cdot O \cdot LR'H^2V^2LR' \quad (13) \sim U \quad (\text{D.J. Benson u.a.})$$

wird G bereits von den 5 durch R, L, V, H und O bewirkten Operationen erzeugt. Auf zwei der sechs Züge R, L, V, H, O und U kann indes nicht gleichzeitig verzichtet werden: Stehen die zugehörigen Scheiben aufeinander senkrecht, so ist ein Kantencubie unbeweglich. Liegen sie einander gegenüber, etwa O und U , so können keine Kantencubies umorientiert werden. Dies ist

sogar dann bereits unmöglich, wenn mit zwei gegenüberliegenden Scheiben, etwa O und U , nur noch 180° -Züge erlaubt sind, während die vier anderen Randscheiben beliebig gedreht werden können: Man sieht leicht, daß z.B. das obere Farbplättchen des Kantencubies ov nie auf die vordere oder hintere Würfelseite gelangen kann. Anders formuliert (und dies zeigt den praktischen Wert des im nächsten Abschnitt exemplarisch durchgeföhrten Untergruppen-Studiums): Jedes R-Manöver, das Kantencubies umorientiert, enthält mindestens drei 90° -Randscheibenzüge, und zwar für jedes der drei Paare gegenüberliegender Randscheiben einen 90° -Zug mit einer der beiden Scheiben.

Die symmetrische Gruppe S_n wird bereits von 2 Elementen, etwa den beiden Zyklen $(1, 2)$ und $(2, \dots, n)$ erzeugt. (Für $2 \leq i \leq n$ gilt $(1, i) = (2, \dots, n)^{n+1-i} (1, 2) (2, \dots, n)^{i-2}$, und die Transpositionen der Gestalt $(1, i)$ erzeugen S_n , wie wir uns im Anschluß an Satz 2.2.4 überlegt haben.) Ein analoges 2-elementiges Erzeugendensystem für G einschließlich kurzer Manöver wurde von F. Barnes angegeben:

$$m_{991} = OHLOL'O'H' \quad (7) \rightarrow (-ov, ohr) (+oh, or) (+ol),$$

$$m_{992} = R^2VLU'R' \quad (5) \rightarrow (orv, hur, lvu, luh, lho, lov, vru) \cdot \\ (ov, ru, rv, ro, vu, uh, hr, lu, lh, lo, lv).$$

Es gibt eine Reihe weiterer Ergebnisse über die Struktur von G und G^* , die jedoch den Rahmen dieses Buches, dessen mathematisch orientierter Teil einen für Nicht-Mathematiker erträglichen Prozent-Anteil nicht überschreiten soll, sprengen würden (Normalstruktur, Darstellungen als „Kranzprodukte“ (z.B. $G^* = (S_8 \wr C_3) \times (S_{12} \wr C_2)$), Erzeugung von G durch Elemente möglichst niedriger Ordnung u.a.).

2.6 Spezielle Untergruppen

Die Untergruppenstruktur der Rubikschen Gruppe G ist äußerst reichhaltig.

Am einfachsten ist es, alle zyklischen Untergruppen von G zu finden. Eine Gruppe heißt *zyklisch*, wenn sie von einem einzigen Element erzeugt wird. Da jede endliche zyklische Gruppe der Ordnung n zu C_n (Beispiel 2.2.2) und jede unendliche zyklische Gruppe zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen (Beispiel 2.2.1) isomorph ist, kennen wir bereits die Struktur aller zyklischen Gruppen. Unter der *Ordnung* eines Elementes a einer Gruppe A versteht man die Ordnung der von a erzeugten zyklischen Untergruppe. Bei einer endlichen Gruppe ist dies die kleinste natürliche Zahl n mit $a^n = e$

(neutrales Element). Im Falle der Rubikschen Gruppe kann die Ordnung aller Elemente unmittelbar aus der Zyklen-Darstellung abgelesen werden: Sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der mit 3 (drehende Eckenzyklen) bzw. 2 (umorientierende Kantenzyklen) bzw. 1 (orientierungstreue Zyklen) multiplizierten Zyklenlängen. Es treten genau 73 verschiedene Ordnungen auf, und die maximale Ordnung ist $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Eine R-Operation dieser Ordnung bewirkt z.B. das von J.-B. Butler angegebene Manöver

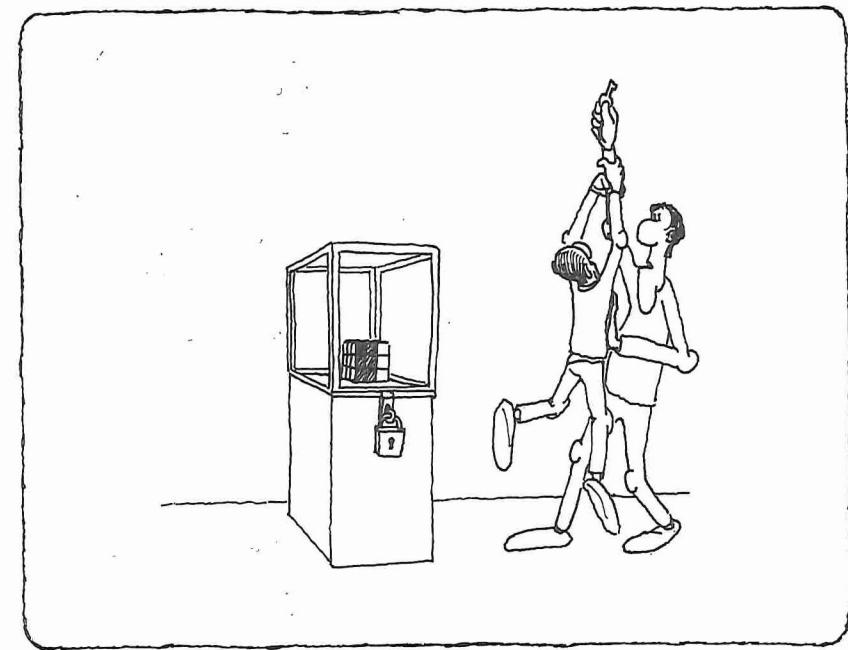
$$RO^2U'HU' (5) \rightarrow (-ovl, lho, rvo) (+ohr, vul, uvr, rhu, luh) \cdot \\ (+ov, lh, ur, vr, ol, or, ho) (+ul, rh) (uv, uh).$$

Auch in der Gruppe \bar{G} ist übrigens 1260 die maximale Ordnung, und hier genügt bereits ein Manöver mit einem einzigen Scheibenzug:

$$RB_O (1) \rightarrow (+ovl, olh, ohr, ruv) (+orv) (+ulv, uhl, urh) \\ (+ov, ol, oh, or, rv) (+uv, ul, uh, ur, lv, hl, rh) (v, l, h, r).$$

Allgemeiner interessieren Untergruppen, die durch die Forderung, gewisse Cubies nicht oder nur eingeschränkt zu bewegen, oder durch eine Beschränkung auf bestimmte Züge oder Manöver definiert sind. Die Struktur der Untergruppe aller möglichen R-Operationen, die eine bestimmte Teilmenge E der Menge aller Eckencubies und eine bestimmte Teilmenge K der Menge aller Kantencubies elementweise festlassen, hängt nach den Sätzen des Abschnittes 2.4 nur von der Anzahl, nicht jedoch von der Lage der festbleibenden Ecken- bzw. Kantencubies ab. Mit $e := 8 - |E|$ und $k := 12 - |K|$ besitzt eine solche Untergruppe die Ordnung $(e! k! 3^e 2^k)/12$. Als Beispiel einer durch Beschränkung auf bestimmte Züge definierten Untergruppe studieren wir die von den Operationen der sechs Quadratzüge $R^2, L^2, V^2, H^2, O^2, U^2$ erzeugte „Quadratgruppe“ $\langle\langle R^2, L^2, V^2, H^2, O^2, U^2 \rangle\rangle$. (Das innere Klammerpaar soll den Übergang von den Manövern zu den Operationen, also den Homomorphismus π , das äußere Klammerpaar den Übergang zur erzeugten Untergruppe andeuten.) Wie schon oft identifizieren wir jede R-Operation g mit der R-Position $I_P g$, die man erhält, wenn man g auf den Ausgangszustand I_P anwendet. Wir nennen ein Cubie rot bzw. blau etc., wenn eines seiner Farbplättchen rot bzw. blau etc. ist. Im Ausgangszustand einander gegenüberliegende Farben nennen wir *Gegenfarben*. Mit diesen Sprachregelungen gilt

Satz 1. Die Quadratgruppe $Q := \langle\langle R^2, L^2, V^2, H^2, O^2, U^2 \rangle\rangle$ hat die Ordnung $2^{13} \cdot 3^4 = 663\,552$. Eine R-Position liegt genau dann in Q , wenn



(a) auf jeder der sechs Würfelseiten nur die Farbe des Flächencubies und ihre Gegenfarbe vorkommt und (b) die Mittelpunkte der (als kleine Würfel betrachteten) vier Eckencubies jeder festen Farbe in einer Ebene liegen.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ist trivial: Sie gelten für den Ausgangszustand und bleiben bei jedem der sechs Quadratzüge erhalten. Um zu sehen, daß die Bedingungen auch hinreichen, müssen wir genauer prüfen, welche Positionen erreichbar sind. Zunächst kann jedes Cubie auf jedem Platz offenbar nur eine Orientierung besitzen. Weiter zerfällt die Menge der 8 Eckencubies in zwei disjunkte „Tetraeder“ $\{orv, olh, urh, ulv\}$ und $\{ovl, ohr, uvr, uhl\}$ und die Menge der 12 Kantencubies in drei disjunkte „Ringe“ $\{ov, oh, uh, uv\}, \{ol, or, ur, ul\}, \{vl, vr, hr, hl\}$, d.h. die Elemente dieser fünf 4-elementigen Mengen können jeweils nur unter sich permutieren.

Hier nach sind noch $4!^2$ Plazierungen der Eckencubies und $4!^3$ Plazierungen der Kantencubies denkbar. Da jedoch jeder Quadratzug gleichzeitig eine Ecken-Doppel-Transposition und eine Kanten-Doppel-Transposition bewirkt, muß sowohl die Permutation der Eckencubies als auch die Permutation der Kantencubies gerade sein. (Nach Satz 2.5.3 befinden wir uns also in einer Untergruppe der Kommutatorgruppe.) Dies reduziert die Anzahl der Plazierungen für die Kantencubies auf $(4!)^3/2$. Für die Eckencubies bedeutet die letzte Einschränkung zusammen mit Bedingung (b), daß nach Festlegung der Plätze für die vier Cubies des einen Tetraeders für diejenigen des anderen nur noch 4 Möglichkeiten bestehen, also $4! \cdot 4$ Möglichkeiten für die 8 Eckencubies insgesamt. Daß schließlich alle hier mitgezählten Anordnungen der Ecken- und Kantencubies unabhängig voneinander möglich sind, so daß die Anzahl der durch Quadratzüge erreichbaren Positionen tatsächlich $4! \cdot 4 \cdot (4!)^3/2 = 2 \cdot (4!)^4 = 2^{13} \cdot 3^4$ ist, zeigen die folgenden Manöver:

$$\begin{aligned} q_1 &= V^2 O^2 R^2 (3) \rightarrow (ovl, ohr) \cdot (orv, ulv, olh, urh) (ov, uv, oh) \\ &\quad (ol, ur, or) (vl, hr, vr), \\ q_2 &= q_1 O^2 = V^2 O^2 R^2 O^2 (4) \rightarrow (orv, ulv) (olh, urh) \cdot (ov, uv) \\ &\quad (ol, ur) (vl, hr, vr), \\ q_3 &= m_{620} = (R^2 O^2)^3 (6) \rightarrow (rv, rh) (ov, oh), \\ q_4 &= (U^2 H^2 U^2 R^2)^2 (8) \sim m_{500} \rightarrow (vr, hl, hr). \end{aligned}$$

Mit q_1 (bzw. trivialen Variationen von q_1 , s. Abschnitt 3.1) kann einer der beiden Tetraeder beliebig angeordnet werden. Die 4 dann möglichen Anordnungen des anderen lassen sich mit q_2 erreichen. Nach höchstens einer Anwendung von q_3 ist auf jedem der drei Ringe nur noch eine gerade Permutation erforderlich, und diese leistet schließlich q_4 . \square

Daß die Bedingung (b) in Satz 1 wesentlich ist, zeigt vielleicht am einfachsten das Manöver

$$m_{120} = R' U^2 R O^2 R U^2 R' O^2 R U^2 R^2 U^2 R (13).$$

Es führt den Ausgangszustand in eine R-Position über, die die Bedingung (a) erfüllt, aber nicht zu O gehört.

Wegen

$$R^2 V^2 H^2 L^2 \cdot O^2 \cdot L^2 H^2 V^2 R^2 (9) \sim U^2$$

ist einer der sechs Quadratzüge bei der Erzeugung von Q entbehrlich, und es gilt z.B.

$$\langle\langle R^2, L^2, V^2, H^2, O^2, U^2 \rangle\rangle = \langle\langle R^2, L^2, V^2, H^2, O^2 \rangle\rangle.$$

Für eine Reihe weiterer Untergruppen dieser Art geben wir lediglich die Ordnung an:

$$\begin{aligned} |\langle\langle R^2 \rangle\rangle| &= 2 (\langle\langle R^2 \rangle\rangle \cong C_2). \\ |\langle\langle R \rangle\rangle| &= 4 (\langle\langle R \rangle\rangle \cong C_4). \\ |\langle\langle R^2, L^2 \rangle\rangle| &= 4 (\langle\langle R^2, L^2 \rangle\rangle \cong C_2^2, „Kleinsche Vierergruppe“). \\ |\langle\langle R^2, L \rangle\rangle| &= 8 (\langle\langle R^2, L \rangle\rangle \cong C_2 \times C_4). \\ |\langle\langle R, L \rangle\rangle| &= 16 (\langle\langle R, L \rangle\rangle \cong C_4^2). \\ |\langle\langle R^2, O^2 \rangle\rangle| &= 12 (\langle\langle R^2, O^2 \rangle\rangle \cong C_2 \times S_3). \\ |\langle\langle R^2, O \rangle\rangle| &= 604\,800. \\ |\langle\langle R, O \rangle\rangle| &= 73\,483\,200. \\ |\langle\langle R^2, O^2, L^2 \rangle\rangle| &= 96. \\ |\langle\langle R, O, L \rangle\rangle| &= 159\,993\,501\,696\,000. \\ |\langle\langle R^2, O^2, V^2 \rangle\rangle| &= 2592. \\ |\langle\langle R, O, V \rangle\rangle| &= 170\,659\,735\,142\,400. \\ |\langle\langle R^2, O^2, L^2, U^2 \rangle\rangle| &= 192. \\ |\langle\langle R^2, O^2, L^2, V^2 \rangle\rangle| &= 165\,888. \end{aligned}$$

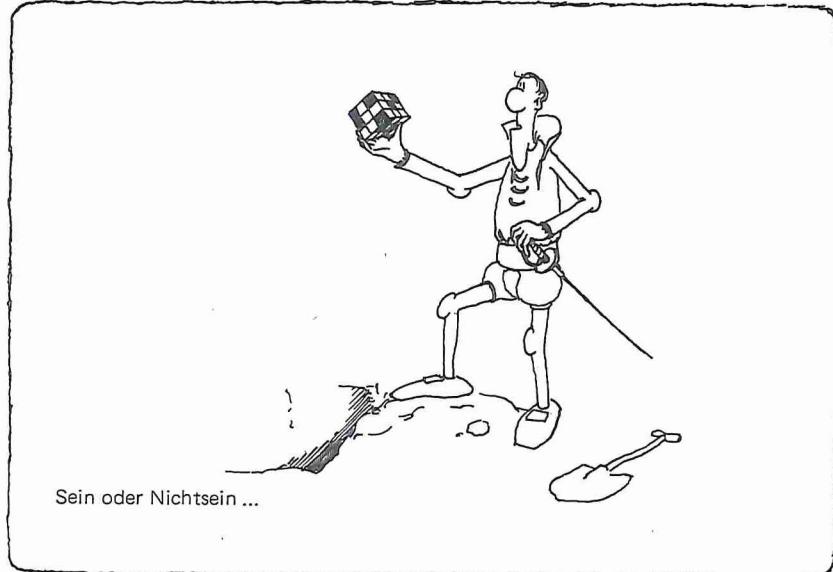
Sehr reizvoll ist es, eine konkret vorgegebene Gruppe A , „auf dem Würfel zu realisieren“, d.h. eine zu A isomorphe Untergruppe von G und möglichst auch kurze Manöver für ihre Elemente zu finden. Dies ist für alle Gruppen mit einer Ordnung < 13 möglich, die kleinste auf dem Würfel nicht realisierbare abelsche Gruppe ist die zyklische Gruppe C_{13} , die kleinste auf dem Würfel nicht realisierbare nicht-abelsche Gruppe ist die sogenannte *Diedergruppe* der Ordnung 26 (Drehgruppe eines regelmäßigen 13-Ecks im dreidimensionalen Raum, vgl. Beispiel 2.2.5). Wir beschränken uns auch hier auf ein Beispiel: Die 8 möglichen Operationen

$$\begin{aligned} 1 &:= I_G, \\ -1 &:= (+ov) (+ol) (+oh) (+or) \quad (\text{vgl. } m_{435}), \\ i &:= (+or, ov) (+ol, oh) \quad (\text{vgl. } m_{706}), \\ j &:= (+ol, ov) (+oh, or) \quad (\text{vgl. } m_{707}), \\ k &:= (+ov, oh) (+ol, or) \quad (\text{vgl. } m_{710}), \\ -i &:= i', \quad -j := j', \quad -k := k' \end{aligned}$$

bilden eine Untergruppe von G , in der die Rechenregeln

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= (-1) ji = k, \quad jk = (-1) kj = i, \quad ki = (-1) ik = j \end{aligned}$$

gelten. Sie heißt *Quaternionengruppe* und spielt in der Gruppentheorie eine etwas exotische Rolle. Zum Beispiel ist sie die kleinste nicht-abelsche Gruppe, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind.



3

Konstruktion von Manövern

Was ist ein „schönes Manöver“? — Da jedes Manöver eine vorgegebene Operation zu bewirken hat, ist es an dieser zu messen und in erster Linie Effektivität zu fordern: Das Manöver soll seine Operation in möglichst wenig Scheibenzügen erreichen. Mittelscheibenzüge, die meist zweiphasig ausgeführt werden, sind weniger „schön“ als Randscheibenzüge, 180° -Züge weniger „schön“ als 90° -Züge. Da das Manöver schließlich im Kopf behalten und mit den Händen ausgeführt werden muß, soll es eine einprägsame Struktur und einen ergometrisch günstigen Aufbau haben, und dies bedeutet meist, daß möglichst wenig verschiedene Scheiben, die für einen Rechtshänder — ohne Beschränkung der Allgemeinheit — leicht zugänglich sind, bewegt werden.

Vier nützliche Methoden zur Konstruktion „schöner Manöver“ werden in diesem Kapitel vorgestellt.

3.1 Variation

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel. Wer das Manöver

$$m_{101} = R \cdot HL'H' \cdot R' \cdot HLH' (8) \rightarrow (ovl, orv, hro)$$

(Bild 1.5.2 oben Mitte) kennt, wird weder dem inversen Manöver

$$m'_{101} = HL'H' \cdot R \cdot HLH' \cdot R' (8) \rightarrow (ovl, hro, orv)$$

noch einem Manöver wie

$$H \cdot LV'L' \cdot H' \cdot LVL' (8) \rightarrow (orv, ohr, lho),$$

besondere Erfindungshöhe zubilligen. Das letzte Manöver entsteht aus m_{101} , indem überall R durch H , H durch L und L durch V ersetzt wird, so daß es offenbar zu $B_0 m_{101} B'_0$ äquivalent ist. Etwas weniger trivial ist die „Spiege-

lung“ von m_{101} an der durch die Würfelkanten vr und hl verlaufenden Ebene:
Hier wird R zu V' , H zu L' usw., und wir erhalten

$$V' \cdot L'HL \cdot V \cdot L'H'L \quad (8) \rightarrow (ovl, hro, rvo).$$

Anschließende Inversion ergibt

$$L'HL \cdot V' \cdot L'H'L \cdot V \quad (8) \rightarrow (ovl, rvo, hro),$$

und dies ist ein neues Manöver für die in Bild 1.5.2 Mitte dargestellte Operation, die sich von der durch m_{101} bewirkten, von der wir ausgingen, nur in einem einzigen Zyklus-Element unterscheidet.

Um die hier angedeuteten Möglichkeiten systematisch zu erfassen, benötigen wir den Begriff der *Symmetriegruppe* S des Würfels. Sie entsteht durch Erweiterung der schon in Abschnitt 2.2 studierten Drehgruppe D um die sogenannten uneigentlichen Deckbewegungen des Würfels, d.h. um die abstandserhaltenden Abbildungen des dreidimensionalen Raumes, die den Würfel als Ganzes in sich überführen, jedoch mit keiner der schon durch D erfaßten Achsendrehungen oder der identischen Abbildung I_S übereinstimmen. Ohne allzusehr ins Detail zu gehen, bemerken wir: S enthält 48 Elemente, nämlich die 24 Elemente von D und 24 Elemente der Gestalt ds_M , wobei d ein Element von D ist und s_M die Spiegelung am Mittelpunkt des Würfels bezeichnet. S ist das direkte Produkt der beiden Normalteiler D und $\{I_S, s_M\}$.

Die verschiedenen Typen der zu S gehörenden Bewegungen werden mit Bild 1 an Hand ihrer Wirkung auf die 8 Ecken des Würfels veranschaulicht: Die Punktspiegelung s_M bildet jede Ecke auf die diagonal gegenüberliegende ab (Bild 1 oben rechts). Ist d eine 180° -Flächenachsendrehung oder eine Kantenachsendrehung, so ist ds_M jeweils die Spiegelung an der Mittelsenkrechteebene zu dem innerhalb des Würfels liegenden Abschnitt der Drehachse (Bild 1, dritte und vierte Reihe). Ist d eine Flächenachsendrehung um 90° , so ist ds_M eine Drehspiegelung der Ordnung 4 (Bild 1, zweite Reihe). Ist schließlich d eine Eckenachsendrehung, so ist ds_M eine Drehspiegelung der Ordnung 6 (Bild 1, letzte Reihe).

Auf Grund der vollkommenen Symmetrie-Eigenschaften des Rubik-schen Würfels ist nun jedem $s \in S$ in natürlicher Weise eine Bijektion in der Menge der Züge zugeordnet. Die Züge der verschiedenen Typen (90° -Randscheibenzyüge, 180° -Randscheibenzyüge, 90° -Mittelscheibenzyüge, 180° -Mittelscheibenzyüge, 90° -Flächenachsendrehungen, 180° -Flächenachsendrehungen,

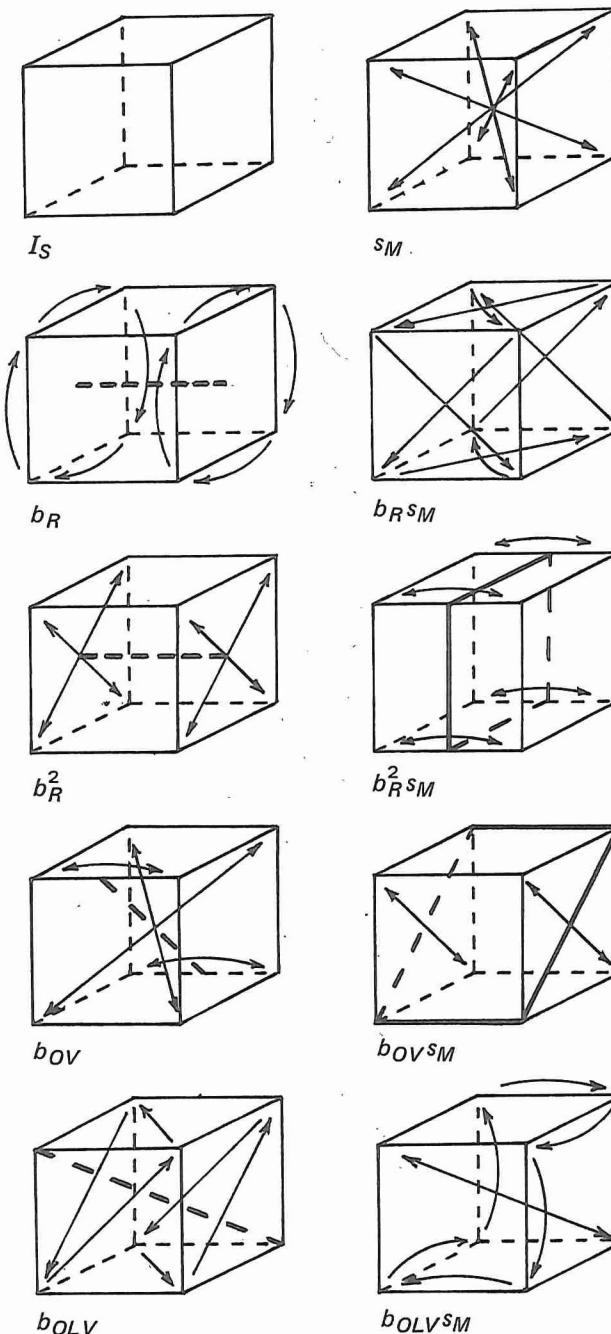


Bild 1
Die verschiedenen
Elementtypen in der
Symmetriegruppe S
des Würfels

Kantenachsendrehungen, Eckenachsendrehungen) werden hierbei jeweils für sich permutiert. Statt einer formalen Definition einige Beispiele, wobei wir für das Bild eines Zuges z unter s kurz zs schreiben:

$$\begin{aligned} Rb_O &= V, \quad Rb_{OV} = L, \quad Rs_M = L', \\ M_R b_O &= M_V, \quad M_R b_{OV} = M'_R, \quad M_R s_M = M_R, \\ B_O b_O &= B_O, \quad B_O L b_{OV} = B_{VR}, \quad B_O R s_M = B_{ORV}. \end{aligned}$$

Im wörtlichen Sinne „Zug um Zug“ angewandt, etwa

$$\begin{aligned} (HM_R H^2 M'_R H) s_M &= (Hs_M) (M_R s_M) (H^2 s_M) (M'_R s_M) (Hs_M) \\ &= V' M_R V^2 M'_R V', \end{aligned}$$

werden nun die Bijektionen in der Menge der Züge zu Bijektionen in der ganzen Manövergruppe \bar{M} (bzw. M bei Beschränkung auf Randscheibenzüge). Für beliebige $m, m_a, m_b \in \bar{M}$ und $s, s_a, s_b \in S$ gilt hierbei

$$\begin{aligned} m(s_a s_b) &= (m s_a) s_b, \quad m I_S = m, \\ (m_a m_b)s &= (m_a s) (m_b s). \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen besagen, daß S auf der Menge \bar{M} operiert. Nach der letzten Gleichung ist für jedes $s \in S$ die auf \bar{M} definierte Abbildung ein Endomorphismus und als Bijektion somit ein Automorphismus. Alle drei Gleichungen werden mit der Formulierung „die Gruppe S operiert auf der Gruppe \bar{M} “ zusammengefaßt.

Man sagt allgemein, eine Gruppe B operiere auf einer Gruppe A , wenn eine Abbildung $A \times B \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$, definiert ist, die für beliebige $a, a_1, a_2 \in A$ und $b, b_1, b_2 \in B$ die Gleichungen $a(b_1 b_2) = (ab_1)b_2$, $aI_B = a$, $(a_1 a_2)b = (a_1 b)(a_2 b)$ erfüllt. Es gilt dann stets $I_A b = I_A$ (denn $I_A b = (I_A I_A)b = (I_A b)(I_A b)$) und $(ab)' = a'b$ (denn $(a'b)(ab) = (a'a)b = I_A b = I_A$).

Im gleichen Sinne, jedoch zunächst unabhängig von der Manövergruppe \bar{M} , operiert S offensichtlich auch auf der Gruppe \bar{G} der möglichen Operationen, etwa

$$(ov, lh, rh) s_M = (uh, rv, lv).$$

Den Zusammenhang mit \bar{M} liefert die für beliebige $m \in \bar{M}$ und $s \in S$ gültige Gleichung

$$(m \bar{\pi})s = (ms) \bar{\pi}.$$

In Worten: Man erhält dieselbe Operation, wenn man zunächst ein Manöver m ausführt und anschließend die bewirkte Operation dreht oder spiegelt etc.,

wie wenn man zunächst das Manöver m , d.h. jeden einzelnen seiner Züge, dreht oder spiegelt etc., und das hierdurch entstehende Manöver ausführt. Noch einmal anders formuliert: Aus $m \rightarrow g$ folgt stets $ms \rightarrow gs$. So erhalten wir aus

$$m_{520} = HM_R H^2 M'_R H (5) \rightarrow (ov, lh, rh)$$

und den letzten beiden Beispielen sofort

$$V' M_R V^2 M'_R V' (5) \rightarrow (uh, rv, lv).$$

Damit sind wir endlich vorbereitet, die wesentlichen Begriffe dieses Abschnittes einzuführen:

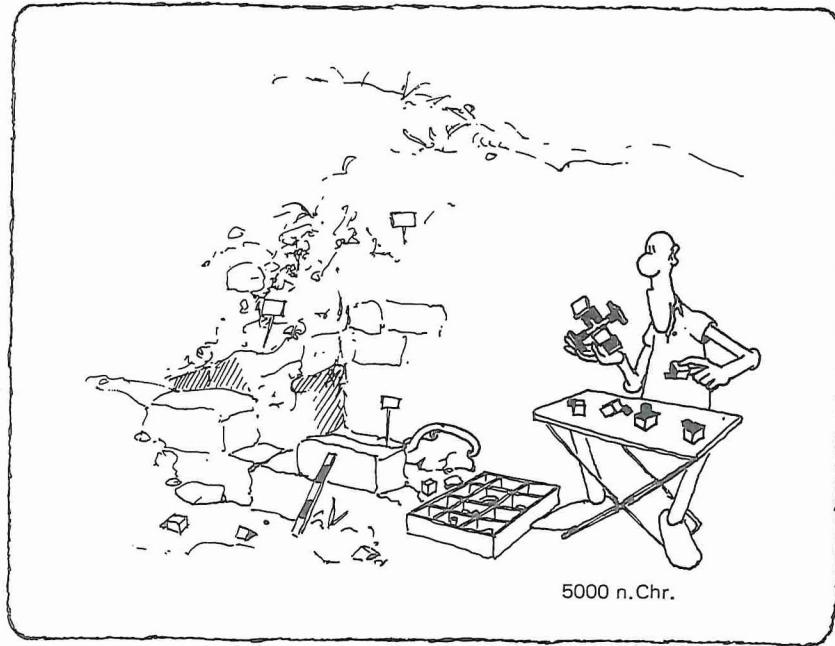
Definition. (a) Ein Manöver m_a heißt *Variation* von einem Manöver m_b , wenn ein $s \in S$ mit $m_a = m_b s$ oder $m'_a = m_b s$ existiert. (b) Eine Operation g_a heißt *Variation* von einer Operation g_b , wenn ein $s \in S$ mit $g_a = g_b s$ oder $g'_a = g_b s$ existiert.

Satz. Die Relation „ist Variation von“ ist eine Äquivalenzrelation in \bar{M} bzw. \bar{G} (ebenso in M, G, G^* und \bar{G}^*).

Beweis. Es genügt, die Behauptung für \bar{M} zu zeigen. Da wir ausschließlich die oben abgeleiteten abstrakten Eigenschaften des Operierens einer Gruppe auf einer Gruppe verwenden, gilt sie entsprechend allgemein. Die Relation ist reflexiv wegen $m_a = m_a I_S$. Sie ist symmetrisch, da aus $m_a = m_b s$ die Gleichung $m_b = m_b I_S = m_b(ss') = (m_b s)s' = m_a s'$ und aus $m'_a = m_b s$ zunächst $m_a = m'_b s$ und hieraus $m'_b = m_a s'$ folgt. Zum Beweis der Transitivität nehmen wir zunächst $m_a = m_b s_a$ und $m_b = m_c s_b$ an und erhalten $m_a = (m_c s_b)s_a = m_c(s_b s_a)$. Im Falle $m_a = m_b s_a$ und $m'_b = m_c s_b$ gilt $m'_a = m'_b s_a = m_c(s_b s_a)$. Ebenso erledigen sich die beiden übrigen Fälle. \square

Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennen wir *Variationsklassen* (von Manövern bzw. Operationen). Sie haben maximal 96 verschiedene Elemente, da die Symmetriegruppe S genau 48 Elemente besitzt.

Es ist leicht, ein Manöver zu finden, dessen 96 Variationen alle verschiedenen sind und 96 verschiedene Operationen bewirken, die dann natürlich ebenfalls Variationen voneinander sind. Ein wunderschönes Beispiel für ein Manöver, dessen 96 Variationen alle verschieden sind, aber stets dieselbe Operation bewirken, ist — wie könnte es anders sein? — unser Lieblingsmanöver $m_{490} = ((M_R O)^4 B_{OLV})^3$ (24).



3.2 Kombination

An der Zyklendarstellung der von einem Manöver m bewirkten Operation g kann die von einer beliebigen Potenz m^n (n ganze Zahl) bewirkte Operation g^n unmittelbar abgelesen werden. Wahl geeigneter n und Kombination (d.h. hier: Hintereinanderausführung, also Komposition) verschiedener Manöver führt oft zur Aufhebung einzelner unerwünschter Zyklen. Studieren wir z.B. systematisch alle 2-zügigen Manöver mit aufeinander senkrecht stehenden Scheiben, von denen es bis auf Variation nur 11 gibt, nämlich etwa RO , RO' , RO^2 , R^2O^2 , $M_R O$, $M_R O^2$, RM_U^2 , $R^2M_U^2$, $M_R M_U$, $M_R M_U^2$, $M_R^2 M_U^2$, so erhalten wir aus $R^2O^2 \rightarrow (ovl, ohr, uvr)$ (orv, urh, olh) (ol, or, ur) (ov, oh) (rv, rh) das ebenso einfache wie nützliche Manöver

$$m_{620} = (R^2O^2)^3 (6) \rightarrow (ov, oh) (rv, rh),$$

aus $M_R O \rightarrow (ovl, olh, ohr, orv)$ $(+ov, ro)$ $(+ol, oh, hu, uv)$ (o, h, u, v) den wichtigen Baustein

$$m_{431} = (M_R O)^4 (8) \rightarrow (+ol) (+oh) (+hu) (+uv)$$

unseres Lieblingsmanövers mit den Ableitungen $(M_R O)^4 (M_R O')^4 (16) \rightarrow (+or) (+ol)$ und $(M_R O)^4 (M'_R O)^4 (16) \rightarrow (+ov) (+ol) (+oh) (+or)$ und aus $R^2 M_U^2 \rightarrow (orv, urh)$ (ohr, uvr) (or, ur) (rv, lv, rh, lh) (l, r) (v, h) das Manöver

$$m_{600} = (R^2 M_U^2)^2 (4) \rightarrow (vr, hr) (vl, hl).$$

(Eine kleine Abschweifung vom Thema: m_{600} und m_{620} erzeugen aus dem Ausgangszustand Positionen mit genau 4 einfarbigen Seiten. Wie man leicht nachprüft, gibt es 33 R-Positionen dieser Art, und mit m_{600} (6 R-Positionen), m_{620} (12), $m_{600} B_V m_{600}$ (3) und m_{625} (12) erhält man alle Typen; die Zahl in Klammern ist hier jeweils die Anzahl der Elemente in der Variationsklasse der Operation. Natürlich gibt es keine R-Position mit genau 5 einfarbigen Seiten. Daß jedoch nicht ganz generell fünf Seiten die sechste eindeutig bestimmen, zeigen die beiden Positionen, die die Manöver

$$U^2 M_R M_V U^2 M'_V M'_R (6) \quad \text{und} \quad U^2 (R^2 H^2)^3 U^2 (8)$$

aus dem Ausgangszustand erzeugen.)

Zur naheliegenden Frage, wie sich die Zyklenstruktur der Komposition zweier Operationen aus der Zyklenstruktur der einzelnen Operationen bestimmt, begnügen wir uns mit einem einfachen Beispiel: Die Komposition eines r -Zyklus und eines s -Zyklus ($r, s \in \mathbb{N}$), die genau ein Element gemeinsam haben, ist ein $(r+s-1)$ -Zyklus (Bild 1). So können wir etwa einen

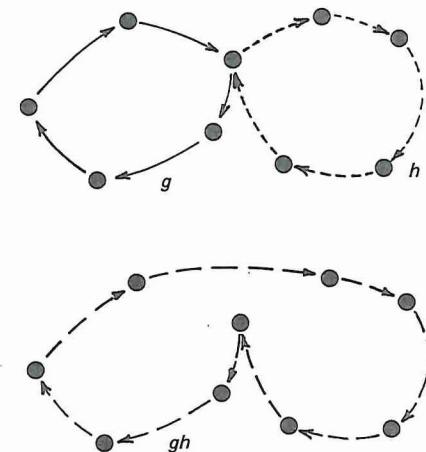


Bild 1
Komposition zweier Zyklen mit
einem gemeinsamen Element

Kanten-11-Zyklus durch Hintereinanderausführung zweier geeigneter Kanten-5-Zyklen und eines passenden Kanten-3-Zyklus konstruieren: Wir starten mit

$$m_{750} = U' M'_R U M_R (4) \rightarrow (ul, uh, vu, ov, ru) \text{ (Bild 2a),}$$

führen anschließend eine Variation hiervon aus,

$$RM_V R' M'_V (4) \rightarrow (ru, or, lo, vr, rh) \text{ (Bild 2b),}$$

und schließen mit einer Variation unseres 4-zügigen 3-Zyklus ab,

$$L^2 M_U L^2 M'_U (4) \rightarrow (rh, lh, lv).$$

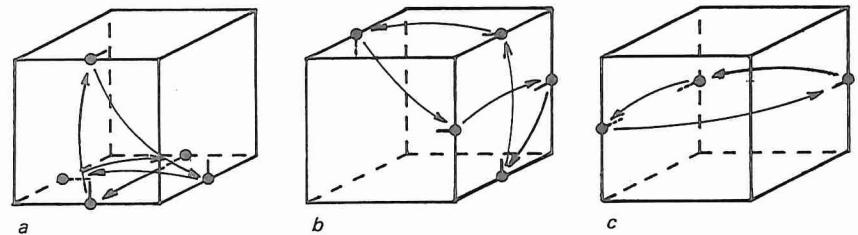


Bild 2 Faktoren zum Aufbau eines Kanten-11-Zyklus

Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} U' M'_R U M_R \cdot RM_V R' M'_V \cdot L^2 M_U L^2 M'_U (12) \rightarrow \\ \rightarrow (ul, uh, vu, ov, or, lo, vr, lh, lv, rh, ru). \end{aligned}$$

Durch Umstellung und Zusammenfassung kann das Manöver auf 10 Züge verkürzt werden. —

Warum enthält nicht auch das Manöver-Lexikon so einen herrlichen Kanten-11-Zyklus? Die Antwort ist einfach: Es gibt zu viele. Hat schon das „Wohnungsamt“ 12 Möglichkeiten, 11 der 12 Kantencubies für den beabsichtigten Riesenringtausch auszuwählen, so kann anschließend das „Ordnungsamt“ die umzugswilligen Cubies auf $10!$ Weisen zyklisch anordnen und das „Verkehrsamt“ auf 2^{10} Weisen orientieren, kurz, es gibt $12 \cdot 10! \cdot 2^{10} = 44\,590\,694\,400$ verschiedene mögliche Kanten-11-Zyklen. Und da keine Variationsklasse mehr als 96 Elemente enthält, sind hiervon immer noch mehr als 464 Millionen wesentlich voneinander verschiedenen.

Nach dem gleichen Schema kann die Anzahl der Operationen mit einer beliebigen vorgegebenen Zyklenstruktur berechnet werden. Die Zyklenstruktur einer Operation ist hierbei – informell gesprochen – die Liste der Anzahlen aller ihrer Zyklen der verschiedenen Längen und Typen. Bezeichnen wir die Anzahl der orientationstreuen bzw. rechtsdrehenden bzw. linksdrehenden Eckenzyklen der Länge i mit e_i bzw. e_i^+ bzw. e_i^- ($i = 1, \dots, 8$) und die Anzahl der orientationstreuen bzw. umorientierenden Kantenzyklen der Länge j mit k_j bzw. k_j^+ ($j = 1, \dots, 12$), so können wir die Zyklenstruktur einer R-Operation formell als das 48-tupel $(e_1, \dots, e_8, e_1^+, \dots, e_8^+, e_1^-, \dots, e_8^-, k_1, \dots, k_{12}, k_1^+, \dots, k_{12}^+)$ definieren. Für Enthusiasten – andere bitte unbedingt kurz wegsehen! – nun die Verallgemeinerung des oben für orientationstreue Kanten-11-Zyklen exemplarisch abgeleiteten Ergebnisses ohne Beweis:

Satz. Die Anzahl der R-Operationen mit der Zyklenstruktur $(e_1, \dots, e_8, e_1^+, \dots, e_8^+, e_1^-, \dots, e_8^-, k_1, \dots, k_{12}, k_1^+, \dots, k_{12}^+)$ ist

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^{1\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + \dots + 7\bar{e}_8} \cdot 2^{1\bar{k}_2 + \dots + 11\bar{k}_{12}}}{\bar{e}_1! \cdot 1^{\bar{e}_1} \cdot \bar{e}_2! \cdot 2^{\bar{e}_2} \cdot \dots \cdot \bar{e}_8! \cdot 8^{\bar{e}_8} \cdot \bar{k}_1! \cdot 1^{\bar{k}_1} \cdot \bar{k}_2! \cdot 2^{\bar{k}_2} \cdot \dots \cdot \bar{k}_{12}! \cdot 12^{\bar{k}_{12}}} ,$$

wobei $\bar{e}_i = e_i + e_i^+ + e_i^-$ und $\bar{k}_j = k_j + k_j^+$.

Der Satz gilt für mögliche wie für unmögliche R-Operationen, besser: für „mögliche wie für unmögliche Zyklensstrukturen“ mit $\sum i \bar{e}_i = 8$ und $\sum j \bar{k}_j = 12$. Welche Zyklensstrukturen möglich und welche unmöglich sind, kann mit Satz 2.4.3 entschieden werden. Im Falle der Kanten-11-Zyklen ist $e_1 = 8$, $k_1 = 1$ und $k_{11} = 1$, während alle anderen 45 Komponenten der Zyklenstruktur verschwinden.

3.3 Konjugation

Dieses Verfahren haben wir schon im Beweis zu Satz 2.4.1 angewandt. Ausgehend von einem Manöver m für einen speziellen Ecken-3-Zyklus (X_1, X_2, X_3) haben wir dort ein Manöver m^* für einen anderen Ecken-3-Zyklus, etwa (X_1, X_2, X_4) , konstruiert, indem wir zunächst das Cubie aus dem Cubizil X_4 mit einem kleinen Hilfsmanöver m_h nach X_3 brachten, dann m ausführten, und schließlich m_h wieder rückgängig machten: $m^* = m_h m m'_h$ bewirkt (X_1, X_2, X_4) . Dabei darf m_h lediglich X_1 und X_2 nicht verändern, auf alle anderen Cubies braucht es keine Rücksicht zu nehmen.

Das Manöver m wird hier gewissermaßen „überlistet“: Es merkt nicht, daß ihm durch m_h , das Eckencubie aus X_4 als Kuckucksei in sein Nest gelegt wird, schlimmer noch, daß es gegen ein anderes Ei ausgetauscht wird, und die „dankbaren“ Kuckuckseltern nach erfolgreicher Aufzucht ein anderes Junges zum Ausgleich abholen. Umsichtig verwischen sie im Rückwärtsgang m'_h alle Spuren ihrer Untat.

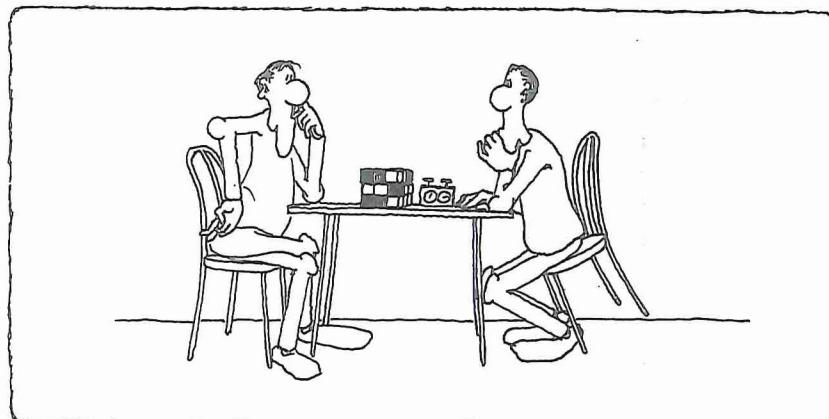
Sind a und b Elemente einer beliebigen Gruppe A , so nennt man b konjugiert zu a , wenn es ein h in A mit $b = hah'$ gibt. In diesem Sinne ist m^* in der Manövergruppe M konjugiert zu m . Es bewirkt eine Operation (X_1, X_2, X_4) , die in der Gruppe der Operationen zu der von m bewirkten Operation (X_1, X_2, X_3) konjugiert ist (Homomorphismus $\bar{\pi}$).

Das Prinzip der Konjugation gehört zu den schönsten und stärksten Techniken zur Konstruktion von Manövern. Da es leicht ist, drei beliebig vorgegebene Ecken- bzw. Kantencubies in drei vorgegebene Ecken- bzw. Kanten-Cubizile mit vorgegebener Lage zu manövrieren – der Rest des Würfels darf beliebig „zerstört“ werden – gestattet es z.B., aus einem Ecken- bzw. Kanten-3-Zyklus jeden beliebigen Ecken- bzw. Kanten-3-Zyklus zu konstruieren. Beispiele für Konjugation, die bereits in der „einfachen Strategie“ vorkommen, sind die Ableitung von

$$m_{333} = HLOL'O'H'(6) \text{ aus } LOL'O'$$

und von

$$m_{520} = HM_RH^2M'_RH(5) \text{ aus } M_RH^2M'_RH^2.$$



Aber auch bei den in Bild 1.3.1 zusammengestellten elementaren Manövern zum Aufbau der ersten Scheibe wird fleißig konjugiert.

Im allgemeinen ist ein konjugiertes Manöver auf Grund des „Präfixes“ m_h und des „Suffixes“ m'_h , um in der Sprache der Grammatik zu bleiben, länger als sein Stamm-Manöver. Eine wichtige Ausnahme hiervon ist der *Shift*. Er entsteht, wenn ein Teil des Manövers von einem Ende an das andere verschoben wird, anders formuliert, wenn ein Manöver in zwei Faktoren zerlegt wird und diese vertauscht werden. In der Tat ist für beliebige Manöver m_a und m_b das Produkt $m_b m_a$ zu $m_a m_b$ konjugiert, da

$$m_b m_a = m'_a \cdot m_a m_b \cdot (m'_a)'.$$

Ernsthaftes Cubologen sollten daher jedes neue Manöver zuallererst einmal „durchschiften“. Es muß hierzu nur ein einziges Mal ausgeführt werden, wenn zuvor die an der interessierenden Operation beteiligten Cubies geeignet markiert werden (Tesafilem, Buntpapier o.ä.). Das zuletzt betrachtete Beispiel m_{520} zeigt, daß es hierbei sinnvoll sein kann, alle 180° -Züge in zwei 90° -Züge zu zerlegen, und zwar auf beide Weisen (etwa $R^2 = R \cdot R$ und $R^2 = R' \cdot R'$).

Zurück zur Theorie! Wie man leicht sieht, ist die in einer beliebigen Gruppe erklärte Relation „ b ist konjugiert zu a “ eine Äquivalenzrelation, so daß wir z.B. von „zueinander konjugierten Elementen“ sprechen können. (Reflexivität: $a = I_A a I_A$, Symmetrie: Aus $b = hah'$ folgt $a = h'b(h')$, Transitivität: Aus $b = h_1ah'_1$ und $c = h_2bh'_2$ folgt $c = (h_2h_1)a(h_2h_1)'$.) Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Konjugiertenklassen* der Gruppe.

Wie wir gesehen haben, gehören z.B. alle Ecken-3-Zyklen zu derselben Konjugiertenklasse der Rubikschen Gruppe G . Umgekehrt haben zueinander konjugierte Elemente der Gruppe G stets dieselbe Zyklenstruktur, da Präfix und Suffix nur einen vorübergehenden Rollentausch der Cubies bewirken. (Für einen formalen Beweis beachte man, daß für jedes $h \in G$ die Abbildung $g \rightarrow hgh'$ ein Isomorphismus von G nach G , ein sogenannter „innerer Automorphismus“, ist.) Die Menge aller Ecken-3-Zyklen ist damit eine Konjugiertenklasse der Rubikschen Gruppe G (und ebenso der Gruppe \bar{G}).

Ist allgemein die Menge der Operationen mit einer vorgegebenen Zyklenstruktur stets eine Konjugiertenklasse? Die Antwort hierauf ist negativ! Ist g das Produkt eines Ecken-7-Zyklus mit einem Kanten-11-Zyklus, etwa $g = (X_1, \dots, X_7)(Y_1, \dots, Y_{11})$, so besitzen g und $g^* = (X_1, \dots, X_7)(Y_1, \dots, Y_9, Y_{11}, Y_{10})$ dieselbe Zyklenstruktur, sind jedoch nicht konjugiert zueinander.

3.4 Isolation

Es ist nicht schwierig, ein Manöver m zu finden, das in einer bestimmten Scheibe c nur ein einziges Cubizil c_o verändert. So bewirkt das kurze Manöver RUR' gleich in drei Scheiben „isolierte Veränderungen“: in der oberen Scheibe, in der $O-U$ -Mittelscheibe und in der $V-H$ -Mittelscheibe. Ist nun C ein beliebiger Zug mit c , so heben sich im Manöver $mCm'C'$ fast alle Wirkungen gegenseitig auf. Lediglich das Cubie aus c_o , sein Nachfolger im Cubizil c_o (bezüglich des von m bewirkten Wohnungstrautausches) und sein Vorgänger im neuen Cubizil kommen dank des „Zwischenzuges“ C evtl. nicht wieder nach Hause zurück. Das sind maximal drei Cubies; und wir erhalten entweder einen 3-Zyklus oder die Drehung zweier Eckencubies oder die Umorientierung zweier Kantencubies.

Beispiel 1. $RUR' \cdot O \cdot RU'R' \cdot O' (8) \rightarrow (ohr, olh, rhu)$.

Dieses Manöver für einen Ecken-3-Zyklus ist eine Variation von m_{104} .

Beispiel 2. $RUR' \cdot M'_U \cdot RU'R' \cdot M_U (8) \rightarrow (uv, hr, lh)$.

Dieses Manöver für einen Kanten-3-Zyklus ist eine Variation von m_{521} .

Besonders übersichtlich wird die Lage, wenn die isolierte Veränderung im Cubizil c_o in einer Drehung des Cubies auf der Stelle besteht. Der Kürze und Einheitlichkeit wegen wollen wir uns hier dem englischen Sprachgebrauch anlehnern und von einem *Isotwist* (isolierte Drehung eines Eckencubies) bzw. einem *Isoflip* (isolierte Umorientierung eines Kantencubies) sprechen.

Beispiel 3. (D. Goto). $m_o = R'URVUV' (6) \rightarrow (+orv) \cdot \dots$

bewirkt einen Isotwist für die obere Scheibe und ergibt

$$\begin{aligned} m_{5a} &= m_o O' m'_o O \\ &= R'URVUV' \cdot O' \cdot VU'V'R'U'R \cdot O (14) \rightarrow (+orv) (-ovl) \end{aligned}$$

sowie $m_o O m'_o O' (14) \rightarrow (+orv) (-ohr)$ und $m_o O^2 m'_o O^2 (14) \rightarrow (+orv) (-olh)$.

Beispiel 4. (D. Seal) $m_{400} = RM_U R^2 M_U^2 R (5) \rightarrow (+or) \cdot \dots$

bewirkt einen Isoflip für die obere Scheibe und ergibt

$$\begin{aligned} m_{415} &= m_{400} O' m'_{400} O \\ &= RM_U R^2 M_U^2 R \cdot O' \cdot R' M_U^2 R^2 M'_U R' \cdot O (12) \rightarrow (+ov) (+or) \end{aligned}$$

sowie $m_{400} O^2 m'_{400} O^2 (12) \rightarrow (+ov) (+oh)$.

Beispiel 5. (F. Barnes) $m_{401} = R'VU'RV' (5) \rightarrow (+vr) \cdot \dots$ bewirkt einen Isoflip für die $O-U$ -Mittelscheibe und ergibt

$$\begin{aligned} m_{410} &= m_{401} M_U^2 m'_{401} M_U^2 \\ &= R'VU'RV' \cdot M_U^2 \cdot VR'UV'R \cdot M_U^2 (12) \rightarrow (+vr) (+hl). \end{aligned}$$

Mit $m_{405} = m_{401} M'_U m'_{401} M_U (12) \rightarrow (+vr) (+hr)$ erhalten wir eine Variation der in Beispiel 4 zuletzt betrachteten Operation.

Ein wenig unschön ist noch, daß die drei letzten Iso-Manöver m_o , m_{400} und m_{401} „vorwärts“ und „rückwärts“ gelernt werden müssen. Diesen Nachteil vermeiden die Isotwists der Ordnung 3 und Isoflips der Ordnung 2 mit etwas längeren Manövern. Sie werden immer vorwärts angewandt, wobei ausgenutzt wird, daß stets eine durch 3 teilbare Anzahl von Rechtsdrehungen (z.B. eine Rechtsdrehung und eine Linksdrehung) und eine gerade Anzahl von Umorientierungen erforderlich ist.

Beispiel 6. $m_1 = (RV'R'V)^2 (8) \rightarrow (+orv) \cdot (+uvr) (-ulv) (-urh) (vr, ur, vu)$ bewirkt einen Isotwist für die obere Scheibe der Ordnung 3. Anwendungsmöglichkeiten sind z.B. $m_1 O' m_1^2 O (26) \rightarrow (+orv) (-ovl)$ und $m_1 O m_1 O^2 m_1 O (27) \rightarrow (+olv) (+orv) (+ohr)$.

Beispiel 7. $m_{402} = (M_U R)^4 (8) \rightarrow (+or) \cdot (+vl) (+lh) (+hr)$

ist ein extrem einfaches Manöver für einen Isoflip der Ordnung 2 für die obere Scheibe und für die $V-H$ -Mittelscheibe. Es ist besonders vielseitig verwendbar, etwa mit

$$m_{402} O' m_{402} O (18) \rightarrow (+ov) (+or) \text{ und } (m_{402} M_V^2)^2 (18) \rightarrow (+or) (+ul).$$

Die nach dem Isolationsprinzip konstruierten Manöver haben die Gestalt eines Kommutators der Manövergruppe, bewirken also (Homomorphismus) auch einen Kommutator in der Gruppe der Operationen. Das häufige Auftreten von Kommutatoren in „guten“ Manövern liegt jedoch auch daran, daß das zu Beginn dieses Abschnitts für die speziellen Kommutatoren $mCm'C'$ Gesagte allgemeiner gilt. Sind m_a und m_b beliebige Manöver und C_a bzw. C_b die Menge der Cubizile, in denen m_a bzw. m_b etwas ändert, so heben sich in $m_a m_b m'_a m'_b$ alle Wirkungen der vier Einzelmanöver gegenseitig auf bis auf die Bewegungen der Cubies, die die „Drehscheibe“ $C_a \cap C_b$ in einem kritischen Moment betreten. Ist etwa $m_a = R$ und $m_b = 0$, so gilt $C_a \cap C_b = \{orv, or, ohr\}$, und die durch $ROR'O'$ bewirkten Veränderungen sind auf die sieben Cubies beschränkt, die auf den drei Würfelkanten oh , or und vr liegen.



Beispiel 8. (J. Conway) $VUV^2U^2V^2U'V'(7) \rightarrow (ovl, vor) \cdot \dots$

bewirkt einen „Isoswap“ (isierte Vertauschung zweier Cubies) für die obere Scheibe. Ähnliches leistet

Beispiel 9. $m_{300} = R'UV'U^2VU'R(7) \rightarrow (ovl, orv) \cdot \dots$,

doch ist dieser Isoswap bezüglich der oberen Würfelseite sogar „streng orientierungstreu“. Daß beide Operationen die Ordnung 2 haben, sehen wir ohne explizite Durchführung, da bereits die Manöver in der Manövergruppe die Ordnung 2 haben (zu sich selbst invers sind) und offensichtlich nicht die Identität bewirken. Mit m_{300} erhält man z.B.

$$m_{210} = (m_{300}O^2)^2 = (R'UV'U^2VU'R^2O^2)^2(16) \rightarrow \\ \rightarrow (ovl, orv) (oh, ohr).$$

Es ist reizvoll und lehrreich zu sehen, wie viele alte Bekannte nach diesem Muster gestrickt sind. So nutzen etwa $m_{500} = R^2M'_UR^2M_U(4) \rightarrow (vr, hl, hr)$ und $m_{600} = (R^2M_U^2)^2(4) \rightarrow (vr, hr)$ (vl, hl) den durch R^2 auf der $O\text{-}U$ -Mittelscheibe bewirkten Isoswap (vr, hr) und $m_{898} = M_R^2M'_UM_R^2M_U(4) \rightarrow (v, h) (l, r)$ den durch M_R^2 auf derselben Mittelscheibe bewirkten Isoswap (v, h).

4

Hübsche Muster

„Ich kann das Knarren des Würfels nicht mehr ertragen!“ — Diesen oder einen ähnlichen Stoßseufzer wird ein Leser zu hören bekommen haben, der bis hierhin eifrig studiert hat und mit einem Nicht-Cubologen sein Cubizil, Verzeihung, sein Domizil, teilt. Vielleicht kann der arme Mitbewohner, den weder raffinierte Mechanik noch knifflige Logik erfreut, mit visueller Ästhetik, dem optisch-künstlerischen Reiz eines hübschen Musters, getröstet werden.

Wenigstens drei Muster sind relativ einfach und werden daher von vielen Tüftlern schnell gefunden: die „Vier Punkte“, aus dem Ausgangszustand herbeizuführen durch

$$h_1 = m_{898} = M_R^2M'_UM_R^2M_U(4),$$

die „Sechs Punkte“, ebenfalls in nur vier Zügen zu erreichen durch

$$h_2 = m_{899} = M'_UM'_RM_U M_R(4) \quad (\text{Foto 3 links}),$$

und der „Schachbrettwürfel der Ordnung 2“, der durch 180° -Drehung der drei Mittelscheiben in beliebiger Reihenfolge entsteht, etwa

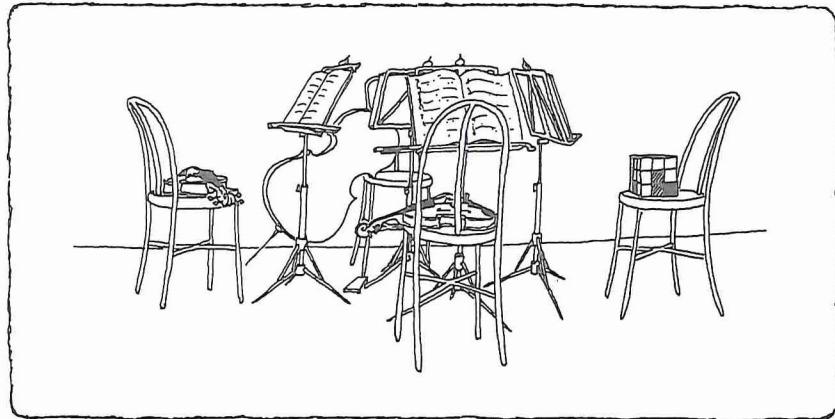
$$h_3 = m_{790} = M_R^2M_V^2M_U^2(3) \quad (\text{Foto 3 rechts}).$$

Es gibt jedoch genau 17 R-Positionen, bei denen jede der sechs Würfelseiten schachbrettartig zweifarbig ist. Neben der schon erwähnten sind es die 8 „Schachbrettwürfel der Ordnung 3“ vom Typ

$$h_4 = (R'M_R^2M_V^2O^2M_R^2M_V^2U^2RB_{OVR})^2M'_RM'_UM_RM_U(20) \\ (\text{Foto 4 links})$$

und die 8 „Schachbrettwürfel der Ordnung 6“ vom Typ

$$h_5 = h_4h_3 \quad (\text{Foto 4 rechts}).$$



Wir haben mit diesem Beispiel begonnen, weil es vielleicht am besten zeigt, daß die Klassifizierung von Positionen nach dem Typ der sechs Würfelseiten in jedem Sinne oberflächlich ist. Sie ist dennoch berechtigt, denn es ist ja schließlich die Oberfläche des Würfels, die die Schönheit einer Position ausmacht. Zu einem tieferen Verständnis der Struktur führt jedoch eine andere Betrachtungsweise: Viele der als schön empfundenen Positionen entstehen aus dem Ausgangszustand, indem auf ein Teilsystem des Würfels, das auf Grund von Symmetrie-Eigenschaften markant ist, ein Element der in Abschnitt 3.1 eingeführten Symmetriegruppe S angewandt wird, während der übrige Würfelkörper festbleibt. Gelegentlich wirken verschiedene Elemente der Gruppe S auf verschiedene Teilsysteme. Im Beispiel der Schachbrettwürfel ist das markante Teilsystem die Menge der 12 Kantencubies. Sie wird im ersten Fall (Schachbrettwürfel der Ordnung 2) am Würfel-Mittelpunkt gespiegelt (Punktspiegelung s_M). Im zweiten Fall (Schachbrettwürfel der Ordnung 3) wird sie um 120° um eine Hauptdiagonale gedreht, beim angegebenen Manöver h_4 ist es die Eckenachsendrehung b_{ORV} . 4 Eckenachsen mit je 2 Dreh-Möglichkeiten ergeben die 8 R-Positionen dieser Art. Im dritten Fall (Schachbrettwürfel der Ordnung 6) wird das Kantencubiesystem einer Drehsymmetrie vom Typ b_{ORVSM} unterworfen. Auch hieron gibt es 8 R-Positionen, da sich die Drehsymmetrien dieser Art offensichtlich umkehrbar eindeutig den Eckenachsendrehungen zuordnen.

Ein Blick auf die am Ende von Abschnitt 1.5 angegebene Operationsdarstellung der verschiedenen Bewegungszugtypen zeigt, daß das Kantencubiesystem keine isolierten Kantenachsendrehungen und 90° -Flächenachsendrehungen zuläßt. Erstere erfordern zwei Kantenflips und fünf Transpositionen, letztere drei 4-Zyklen, beide also ungerade Permutationen. Hingegen sind 180° -Flächenachsendrehungen mit sechs Transpositionen isoliert möglich und führen zu vier Schachbrettseiten, im Falle von b_O^2 etwa durch

$$h_6 = R^2 V^2 M_R^2 H^2 L^2 M_U^2 B_V^2 \quad (6)$$

Nach der anschließenden Punktspiegelung s_M ist das Kantencubiesystem insgesamt einfach an der waagerechten Ebene gespiegelt worden (vgl. Bild 3.1.1 Mitte rechts). Man erhält eine Position mit 4 richtigen Seiten und zwei Schachbrettseiten, die man auch durch

$$h_7 = O^2 M_U M_R^2 M'_U M_V^2 O^2 \quad (6)$$

direkt herbeiführen kann.

Aus physikalischen Gründen kann weder das starre Flächencubiesystem noch irgendein Eckencubie der Punktspiegelung s_M unterworfen werden. Sobald unser „markantes Teilsystem“ die Gesamtheit der Flächencubies oder mindestens ein Eckencubie enthält, brauchen wir daher nur noch die eigentlichen Bewegungen, d.h. die Elemente der Drehgruppe D , zu betrachten. Unser erstes Beispiel hierfür ist das aus allen Kanten- und Flächencubies bestehende Ringsystem oder – dual betrachtet – das System der 8 Eckencubies. Am einfachsten ist hier eine Kantenachsendrehung zu bewerkstelligen, etwa b_{OH} für das Eckencubiesystem durch

$$h_8 = R' m_{350} R = R' M_R^2 M_V^2 O^2 M_R^2 M_V^2 U^2 R \quad (\text{Foto 5 links})$$

(„Weihnachtspaket der Ordnung 2“). Wegen $b_{OH} b_{OL} = b_{OVR}$ führen zwei Kantenachsendrehungen auf eine Eckenachsendrehung, und wir erhalten das hübsche „Weihnachtspaket der Ordnung 3“ durch

$$h_9 = h_8 B_{OH} h_8 B'_O \quad (16) \quad (\text{Foto 5 rechts}).$$

Den 6 Kantenachsendrehungen entsprechen 6 „Weihnachtspakete der Ordnung 2“, den 8 Eckenachsendrehungen 8 „Weihnachtspakete der Ordnung 3“, und mit diesen 14 R-Positionen haben wir alle „Sechs-Plus-Muster“.

Das System der 8 Eckencubies kann allerdings auch um eine Flächenachse gedreht werden: um 180° durch

$$h_{10} = m_{350} = M_R^2 M_V^2 O^2 M_R^2 M_V^2 U^2 \quad (6)$$

und um 90° durch

$$h_{11} = m_{365} = O^2 M_R^2 O^2 M_R^2 O^2 \cdot M_V^2 U' M_V^2 \quad (8)$$

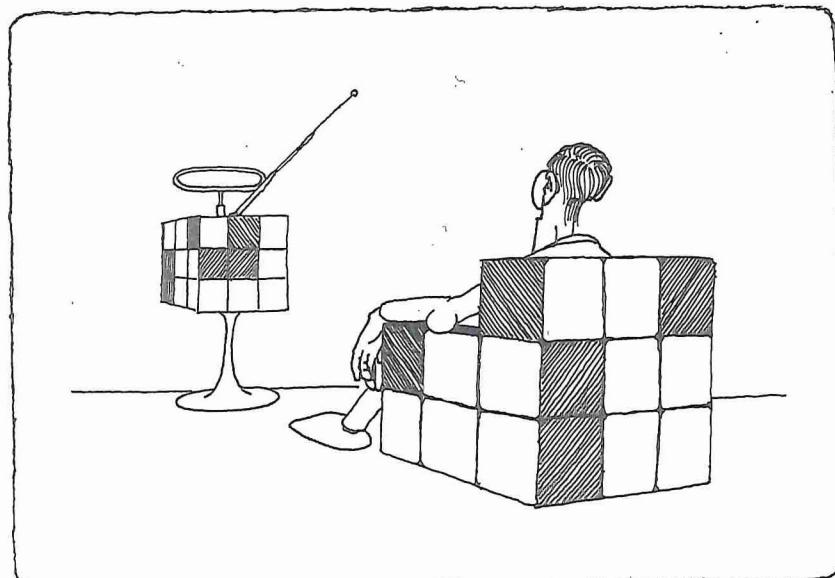
wobei in beiden Fällen ein Muster mit vier Plus-Seiten und zwei fertigen Seiten entsteht.

Wir beherrschen damit vollständig alle isoliert möglichen Bewegungen des Gesamtsystems der Flächencubies (h_1 und h_2), des Gesamtsystems der Kantencubies (h_3 bis h_7) und des Gesamtsystems der Eckencubies (h_8 bis h_{11}) und können diese drei Bewegungsarten beliebig kombinieren. Ein besonders reizvolles Muster mit sechs „Plus-Punkt-Seiten“ entsteht, wenn Kantencubies und Flächencubies um dieselbe Eckenachse in verschiedene Richtung gedreht werden:

$$h_{12} = h_9 h_2 \quad (20) \quad (\text{Foto 6 Mitte}).$$

Weitere hübsche Kombinationen sind

$$h_{13} = h_9 h_3 \quad (19) \quad (\text{ebenfalls sechs Plus-Punkt-Seiten})$$



und das vier Plus- und zwei Schachbrettseiten erzeugende Manöver

$$h_{14} = M_R^2 M_U M_V^2 M_U \quad (4) \sim h_3 h_1 \quad (\text{Foto 6 rechts}).$$

Ein ganz anderes markantes Teilsystem besteht aus zwei diametral gegenüberliegenden „Spitzen“, wobei sich eine Spitzte aus einem Eckencubie und dessen drei Nachbarkantencubies zusammensetzt. Durch

$$\begin{aligned} h_{15} &= h_{19} h'_2 \\ &= H L' U^2 L U V' U^2 V U' H' \cdot V' R O^2 R' O' H O^2 H' O V \cdot M'_R M'_U M_R M_U \\ &\quad (24) \quad (\text{Foto 7 links}) \end{aligned}$$

werden die Spitzen bei orv und uhl -der Eckenachsendrehung b_{ORV} unterworfen: „Gedrehte Spitzen“. Wie bei den Sechs Punkten, dem Schachbrett der Ordnung 3 und dem Weihnachtspaket der Ordnung 3 gibt es 8 R-Positionen dieser Art. Mit

$$\begin{aligned} h_{16} &= H^2 L O' R' O L' O^2 R O' R' O^2 R H' O M'_R H' \cdot L' M'_U L^2 M'_U L' \cdot \\ &\quad \cdot H M_R O' H' \quad (25) \quad (\text{Foto 8 links}) \end{aligned}$$

werden dieselben Spitzen per Kantenachsendrehung b_{VL} vertauscht: „Vertauschte Spitzen“. Da jedes der 4 Spitzenpaare auf 3 Weisen vertauscht werden kann, gibt es hiervon 12 R-Positionen.

ersetzen wir in beiden Spitzen das Eckencubie durch seine drei Nachbarflächencubies, so entsteht ein neues markantes Teilsystem: zwei diametral gegenüberliegende „Ringe“, die die gleichen Bewegungen wie die Spitzen erlauben. Das Manöver

$$\begin{aligned} h_{17} &= h_2 m_{550} B_{OH} m'_{550} B_{OH} \quad (26) \\ &= M'_U M'_R M_U M_R \cdot R' O^2 U H' M_U H^2 M'_U H' O^2 U' R \cdot B_{OH} \cdot \\ &\quad \cdot R' U O^2 H M_U H^2 M'_U H U' O^2 R \cdot B_{OH} \quad (26) \quad (\text{Foto 7 rechts}) \end{aligned}$$

bewirkt die Eckenachsendrehung b_{ORV} der Ringe um orv und uhl : „Gedrehte Ringe“. Zu „Vertauschten Ringen“ (Kantenachsendrehung b_{OH}) führt

$$\begin{aligned} h_{18} &= V M_U V' O^2 V M'_U V' O^2 \cdot R V^2 M_R O^2 H V R^2 \cdot H' V' O^2 L' \cdot B_V^2 \quad (19) \\ &\quad (\text{Foto 8 rechts}, R. Walker und R. Ahrens). \end{aligned}$$

Wie bei den Spitzen gibt es 8 Muster vom Typ der Gedrehten Ringe und 12 Muster vom Typ der Vertauschten Ringe.

Von den Gedrehten Spitzen ist es nicht weit zu einem der eindrucksvollsten Muster, den „Würfeln im Würfel“. Es handelt sich um zwei diametral gegenüberliegende $2 \times 2 \times 2$ -Würfel, die als Vereinigungsmenge von Spitzen

und Ringen entstehen, sich im fiktiven Mittelwürfel (Raumcubie) überschneiden und nach R. Walker durch

$$h_{19} = H L' U^2 L U V' U^2 V U' H' \cdot V' R O^2 R' O' H O^2 H' O V \cdot B_{O R V} \quad (20)$$

(Foto 9 links)

um die verbindende Eckenachse rotieren. Vertauschen lassen sich beide Würfel jedoch nur durch gewaltsamen Einbruch in einen fremden Orbit: Sieben Transpositionen ergeben eine ungerade Permutation, also eine unmögliche Operation.

Lassen wir das Würfel-im-Würfel-Muster um die Eckenachse rotieren, die die beiden $2 \times 2 \times 2$ -Würfel verbindet, so sehen wir ein Zickzack-Gebilde, das sich um den gesamten Würfel herumschlängelt: Wir sind im Reiche der Schlangen angekommen! Seine beiden prominentesten Vertreter sind die „Anakonda“ und der „Python“, die sich nach R. Walker mit

$$h_{20} = V' M'_U R O^2 L' M_V L O^2 R' V^2 O' R^2 O M'_R O' R^2 O M_R V' \quad (19)$$

(Foto 9 rechts und Foto 10 links)

bzw.

$$h_{21} = H M'_R H' R^2 \cdot H M_R H' R^2 \cdot O H^2 M'_U V^2 U' \cdot B_V^2 \quad (13)$$

(Foto 10 rechts)

beschwören lassen. Während die Anakondas zu den Eckenachsendrehern zählen und daher in 8 Arten auftreten, gehört die Pythonfamilie zu den Kantenachsendrehern und zerfällt auf Grund einer seltsamen Unsymmetrie in zwei Gattungen zu je 6 Arten.

Die Mittelsenkrechtenebene zu zwei diametral gegenüberliegenden Ecken, etwa ov und uhl , halbiert 6 der 12 Würfelkanten, und die 6 Schnittpunkte bilden ein regelmäßiges Sechseck (Bild 1). Die Menge der an den Ecken eines solchen Sechsecks liegenden 6 Kantencubies ist ein weiteres mar-

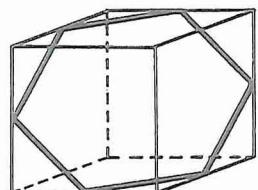


Bild 1 Das Kanten-Sechseck

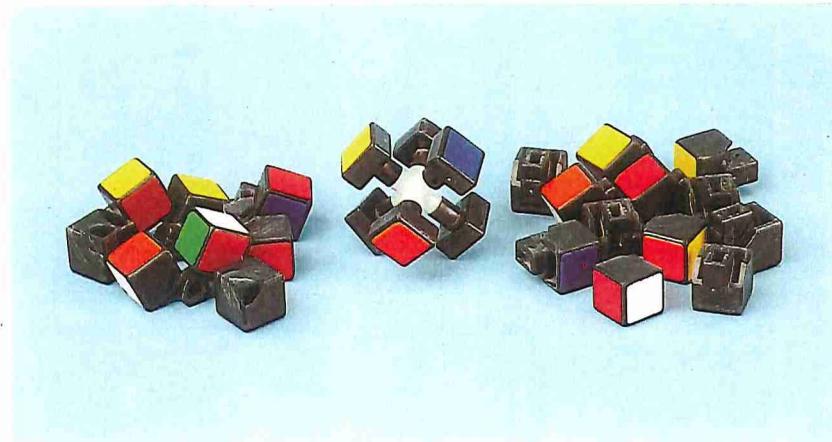


Foto 1

Die Bausteine von Rubik's Cube: links die Eckencubies, rechts die Kanten-cubies, in der Mitte das dreidimensionale Kreuz mit den Flächencubies

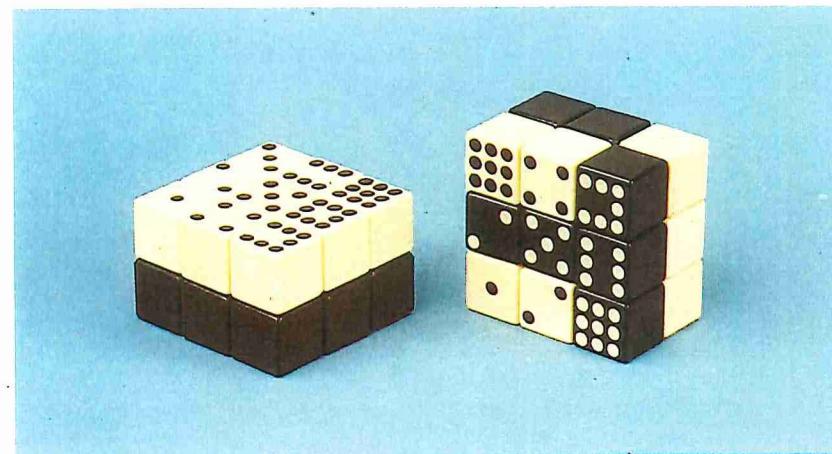


Foto 2

Das magische Domino: links im Ausgangszustand, rechts gemischt

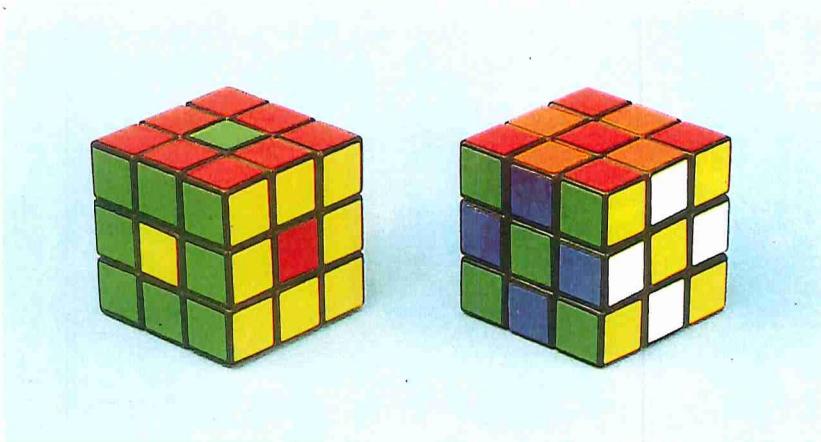


Foto 3

Links: „Sechs Punkte“

Rechts: „Schachbrettwürfel der Ordnung 2“

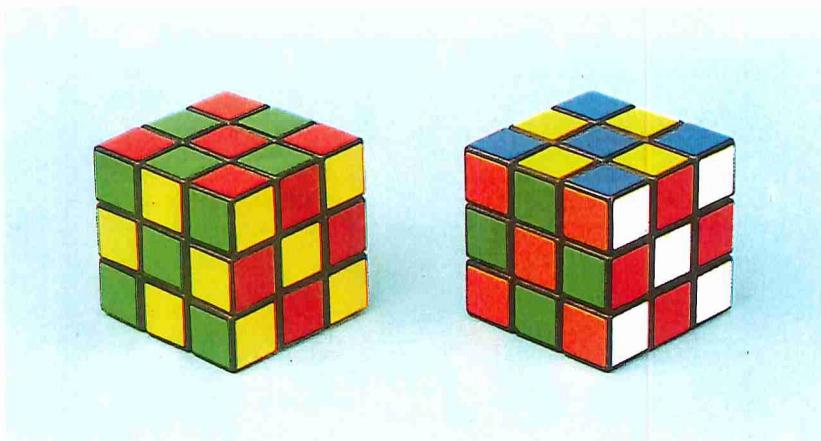


Foto 4

Links: „Schachbrettwürfel der Ordnung 3“

Rechts: „Schachbrettwürfel der Ordnung 6“

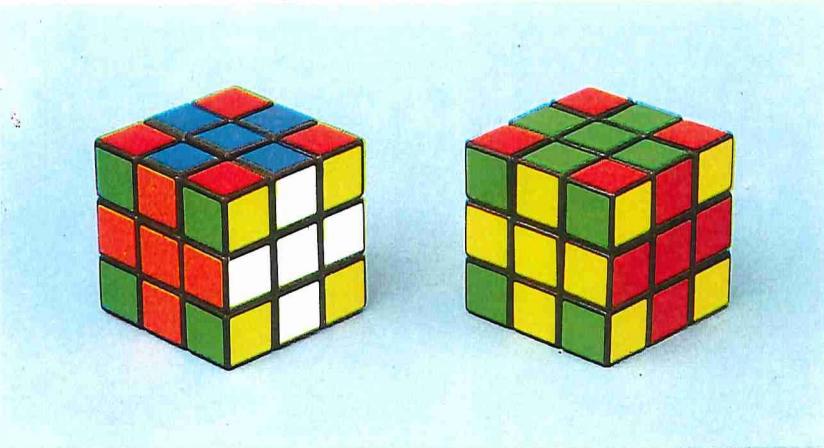


Foto 5

Links: „Weihnachtspaket der Ordnung 2“

Rechts: „Weihnachtspaket der Ordnung 3“

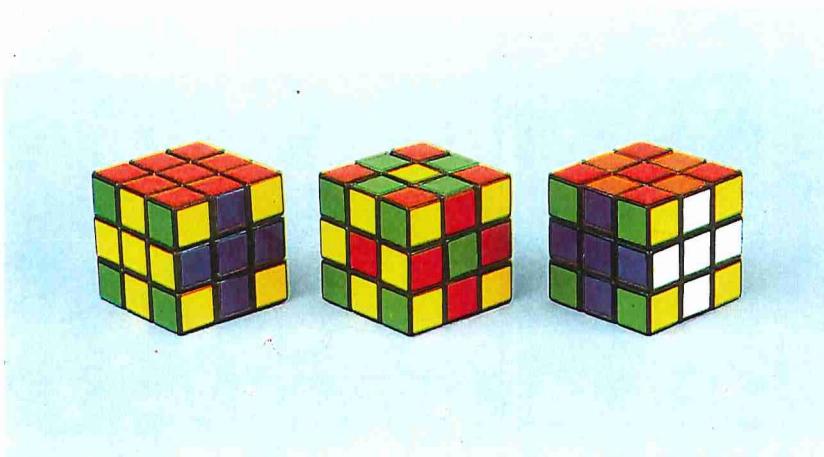


Foto 6

Links: „Vier Plus“

Mitte: „Sechs Plus-Punkte“

Rechts: „Vier Plus und zwei Schachbrettseiten“

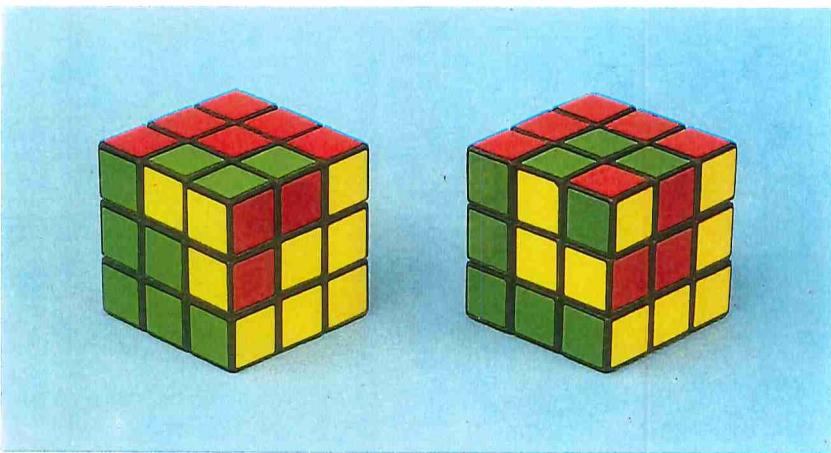


Foto 7
Links: „Gedrehte Spitzen“

Rechts: „Gedrehte Ringe“

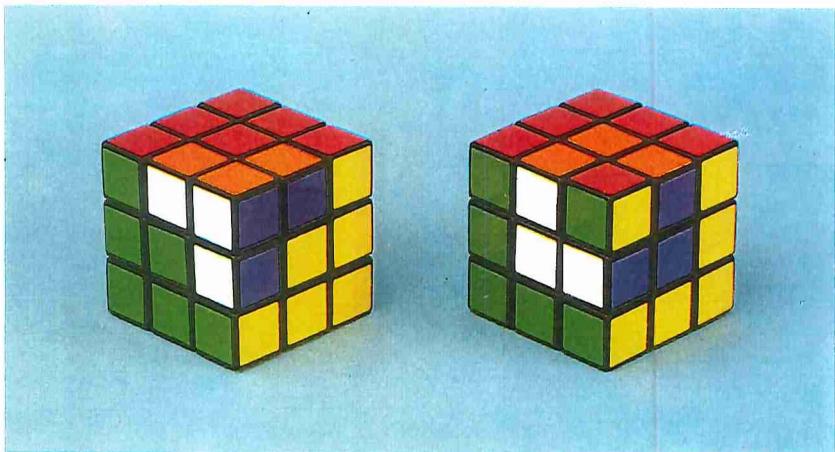


Foto 8
Links: „Vertauschte Spitzen“

Rechts: „Vertauschte Ringe“

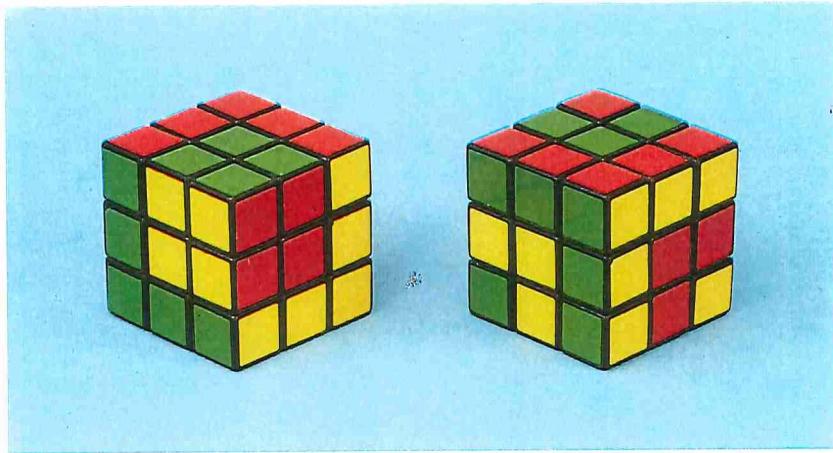


Foto 9
Links: „Würfel im Würfel“

Rechts: „Anakonda“

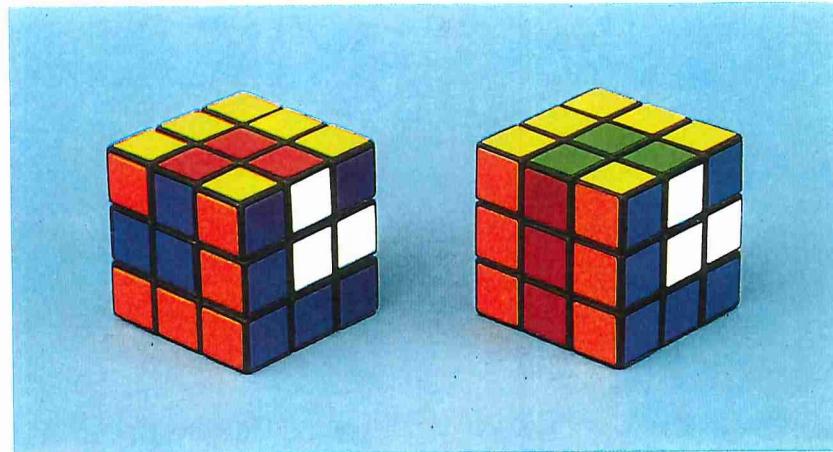


Foto 10
Links: „Anakonda“ aus anderer Sicht

Rechts: „Python“

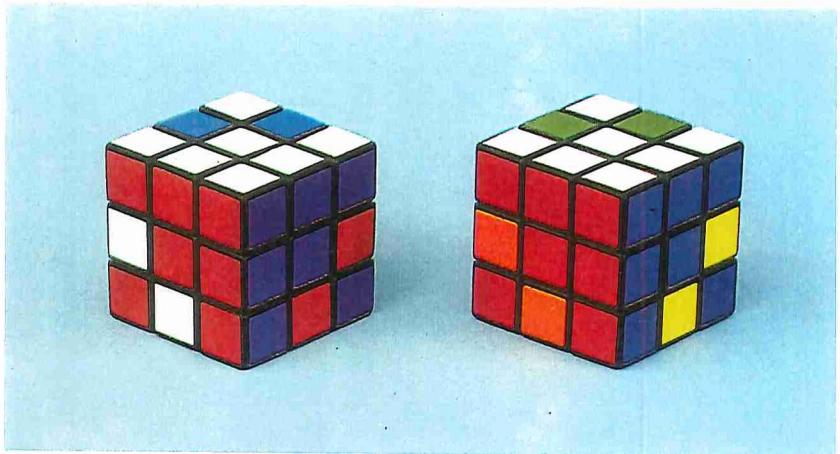


Foto 11
Links: „Kanten-Sechseck der Ordnung 3“
Rechts: „Kanten-Sechseck der Ordnung 2“

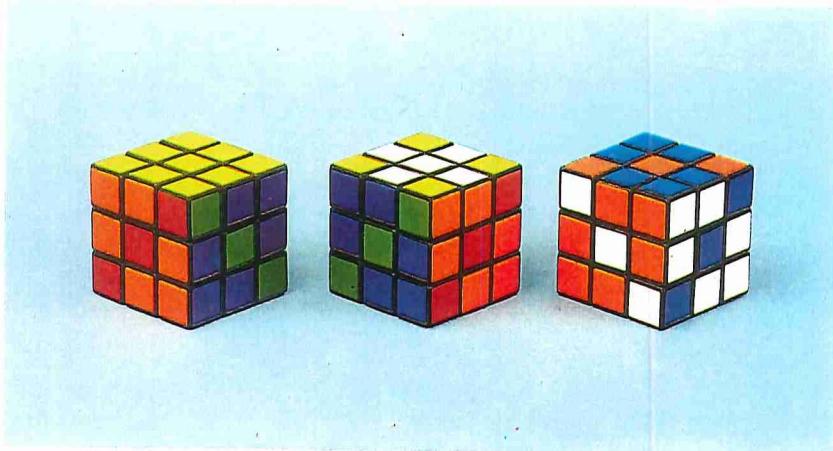


Foto 12
Links: „Vier Diagonalen“
Mitte: „Vier Diagonalen und zwei Plus“
Rechts: „Sechs Diagonalen“ (aus einem anderen Orbit)

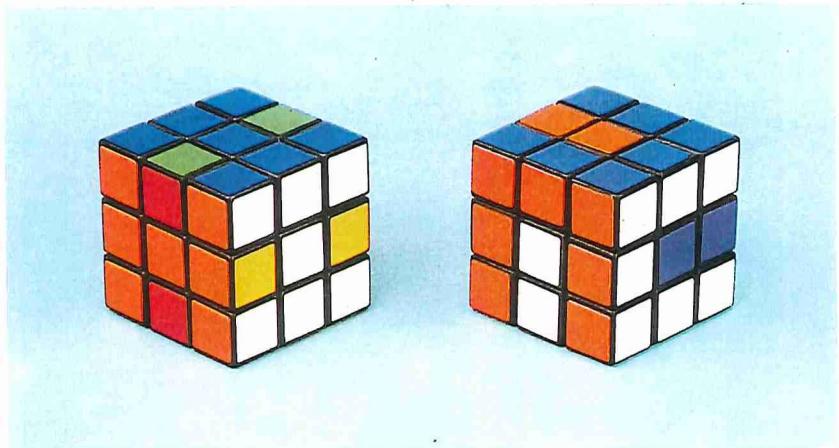


Foto 13
Links: „Sechs H“
Rechts: „Sechs U“

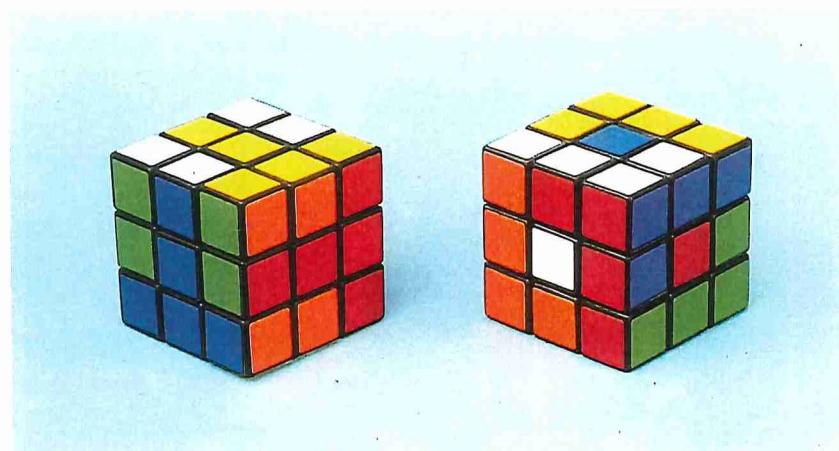


Foto 14
Links: „Sechs T“
Rechts: „Sechs Doppel-L“

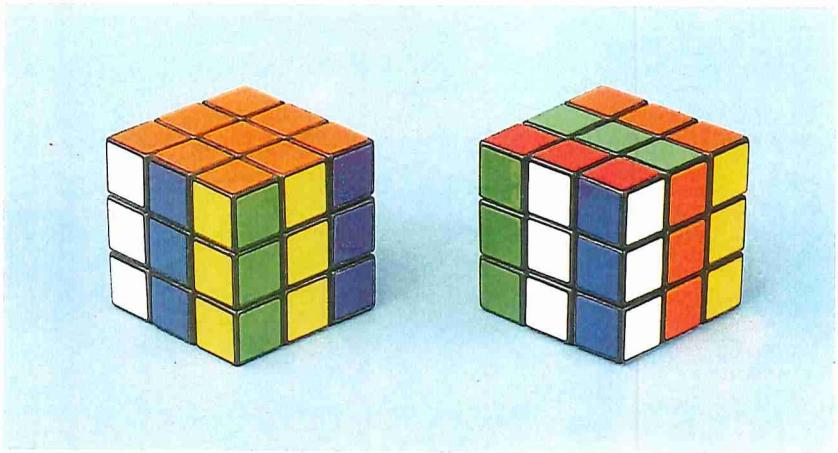


Foto 15
Links: „Vier Trikoloren“
Rechts: „Sechs Trikoloren“

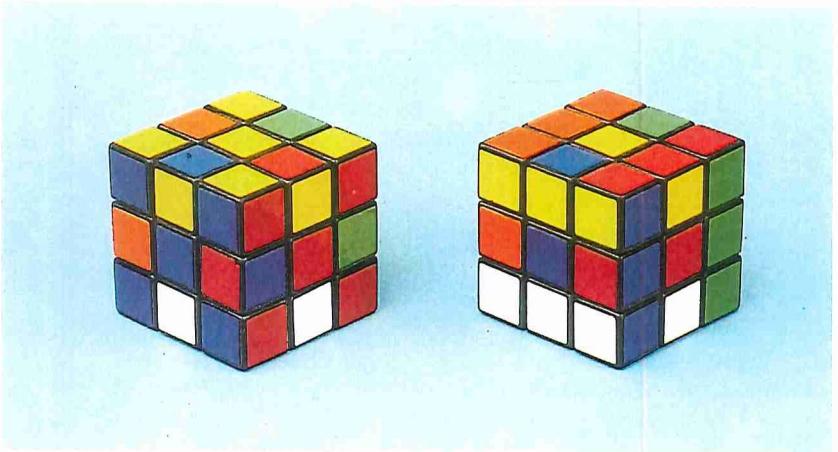


Foto 16
Links: „Superflip“
Rechts: „Superfliptwist“

kantes Teilsystem. Es kann um 120° um die zum Sechseck senkrechte Eckenachse gedreht werden (zwei 3-Zyklen), im betrachteten Beispiel etwa durch

$$h_{22} = O'R'V^2RV \cdot ORO^2R'V' \cdot V'O'R^2OR \cdot VOV^2O'R' \quad (19)$$

(Foto 11 links)

(Drehung b_{ORV} , „Kanten-Sechseck der Ordnung 3“, 8 R-Positionen, R. Walker) und um jede der drei Kantenachsen, die gegenüberliegende Ecken des Sechsecks verbinden, etwa durch

$$h_{23} = R'V^2OUR^2O'V'RU'VM_R'V'UR'VU'M_RV^2O^2R \quad (20)$$

(Foto 11 rechts)

(Drehung b_{OH} , „Kanten-Sechseck der Ordnung 2“, 12 R-Positionen, R. Walker).

Zwischen h_8 (Weihnachtspaket der Ordnung 2), h_{18} (Vertauschte Ringe) und h_{23} (Kanten-Sechseck der Ordnung 2) besteht ein subtiler Zusammenhang: Das Produkt von je zwei der drei Manöver $h_8 B_{OH}$, h_{18} und h_{23} bewirkt dasselbe wie das dritte Manöver! —

Die weiter oben betrachteten Anakondas entstehen durch simultane Drehung des Kanten-Sechsecks und des Flächencubiesystems um dieselbe Eckenachse: $h_{20} \sim h_{22}h_2 \sim h_2h_{22}$. Werden hierbei das Kanten-Sechseck und das Flächencubiesystem in verschiedene Richtung gedreht, so erscheint die reizvolle Abart der „Buntanakondas“ (Anaconda multicolor)

$$h_{24} = h_{22}h'_2.$$

Unerfahrene Zoologen verwechseln die letztere leicht mit der äußerst gefährlichen „Falschen Buntanakonda“ (Pseudoanaconda multicolor)

$$h_{25} = h_{23}h_2.$$

Wir verlassen daher lieber die Riesenschlangen und betrachten einige weitere Muster, deren Struktur der inzwischen geübte Leser selbst aufdecken wird:

$$h_{26} = (VHRL)^3 \quad (12) \quad (\text{„Vier Diagonalen“, Foto 12 links}),$$

$$h_{27} = ((OURL)^3 B_O)^2 \quad (24) \quad (\text{„Vier Diagonalen und zwei Plus“, Foto 12 Mitte}),$$

$$h_{28} = h_2 m_{126} \cdot (-uhl) = M'_U M'_R M_U M_R \cdot R' OH^2 O' V' OH^2 O' VR \cdot (-uhl) \quad (\text{„Sechs Diagonalen“, Foto 12 rechts}).$$

Dies ist ein weiteres Beispiel für ein hübsches Muster in einem anderen Orbit.

Es kann leicht gezeigt werden (systematische Fall-Unterscheidung), daß alle Muster mit sechs Diagonalen unmöglich sind.

$$\begin{aligned}
 h_{29} &= m_{773} = U^2 M_R M_V^2 M'_R O^2 B_O^2 \quad (5) \quad (\text{,,Sechs H'', Foto 13 links}), \\
 h_{30} &= V' M'_U R O^2 L' M_V L O^2 R' V \quad (10) \quad (\text{,,Sechs U'', Foto 13 rechts}), \\
 h_{31} &= M_R^2 O M_R^2 O^2 M_R^2 U M_V^2 M_U \quad (8) \quad (\text{,,Vier U''}), \\
 h_{32} &= M'_U R^2 M_U R^2 \cdot O^2 V^2 R^2 H^2 R^2 U^2 \quad (10) \\
 &\quad (\text{,,Sechs T'', Foto 14 links}), \\
 h_{33} &= O^2 V^2 R^2 O^2 M'_R U' M_R^2 U^2 M_R^2 O' H' V' M'_R V^2 B_R^2 \quad (14) \\
 &\quad (\text{,,Sechs Doppel-L'', Foto 14 rechts}), \\
 h_{34} &= R^2 V^2 M_R^2 H^2 L^2 \quad (5) \quad (\text{,,Vier parallele Minus''}), \\
 h_{35} &= R^2 U^2 M_R^2 O^2 R^2 \quad (5) \quad (\text{,,Vier orthogonale Minus''}), \\
 h_{36} &= h_{34} M_R \quad (6) \quad (\text{,,Sechs Minus''}).
 \end{aligned}$$

Sechs-Minus-Muster, bei denen die Minus-Zeichen benachbarter Seiten stets aufeinander senkrecht stehen, sind unmöglich.

$$\begin{aligned}
 h_{37} &= (B_O^2 \cdot R^2 V U R^2 U' R \cdot H^2 \cdot R' U R^2 U' V' R^2 \cdot H^2)^2 \cdot \\
 &\quad \cdot (H^2 M_R^2)^2 M_V^2 \quad (31) \\
 &\quad (\text{,,Vier Trikoloren'' nach D. Benson, Foto 15 links}), \\
 h_{38} &= (B_O^2 \cdot R^2 V U R^2 U' R \cdot H^2 \cdot R' U R^2 U' V' R^2 \cdot H^2)^2 \cdot \\
 &\quad \cdot H^2 M_R^2 V^2 R \quad (30) \\
 &\quad (\text{,,Sechs Trikoloren'' nach D. Benson}), \\
 h_{39} &= O' H^2 L^2 O M_R^2 O' R^2 V^2 U V H R M_U R' H' R' M_U R^2 M'_U R' V' H^2 R^2 M'_V \\
 &\quad (24) \quad (\text{,,Sechs Trikoloren'' nach R. Gall, Foto 15 rechts.})
 \end{aligned}$$

Sechs Trikoloren, bei denen die Streifen benachbarter Seiten stets aufeinander senkrecht stehen, sind in keinem Orbit möglich.

$$\begin{aligned}
 h_{40} &= m_{490} = ((M_R O)^4 B_{OLV})^3 \quad (24) \\
 &\quad (\text{,,Superflip'', Foto 16 links}).
 \end{aligned}$$

Hieraus kann leicht ein hübsches Muster mit sechs sechsfarbigen Seiten erzeugt werden, z.B. durch

$$h_{41} = h_{40} m_{340} = h_{40} M_U R^2 M'_U R^2 O^2 V^2 R^2 V^2 R^2 O^2 \quad (34).$$

Einfacher erhält man sechs sechsfarbige Seiten durch

$$\begin{aligned}
 h_{42} &= R L V H R L M_V^2 \quad (7), \\
 h_{43} &= ??? \quad (\text{,,Superfliptwist'', Foto 16 rechts}),
 \end{aligned}$$

s. Such-Anzeige am Ende des Buches.

5

Varianten und Verallgemeinerungen

Eine geringfügige Veränderung macht jeden magischen Würfel zum „Superwürfel“, einem Puzzle mit mehr als 2000mal so vielen Positionen. Seine Lösung und ein geeignetes mathematisches Modell enthält der erste Abschnitt dieses Kapitels. Der zweite ist eine Reverenz an einen mehr als 100 Jahre alten Vorläufer von Rubik's Cube. Wir geben hier einen vielleicht neuen, besonders einfachen Beweis des Hauptsatzes über Sam Loyds Schiebe-puzzle. Meist nicht mehr kubisch, aber auf Grund ihrer technischen und strukturellen Verwandtschaft doch zur Cubologie zählend, sind die Objekte des dritten Abschnittes: magische Polyeder aller Art.

5.1 Der Superwürfel

In diesem Abschnitt wird die Cubologie zu einer echten Geheimwissenschaft: Ihre Operationen werden unsichtbar!

Betrachten wir etwa die 2-zügigen Manöver

$$\begin{aligned}
 OR &\rightarrow (-ovl, olh, hur, uvr, vor) (+ohr) (ov, ol, oh, hr, ur, vr, or), \\
 OR' &\rightarrow (-ovl, olh, vor) (+ohr, vru, urh) (ov, ol, oh, vr, ur, hr, or).
 \end{aligned}$$

Aus der Zyklenstruktur ihrer Operationen entnehmen wir

$$\begin{aligned}
 (OR)^{105} (210) &\sim I_M, \\
 (OR')^{63} (126) &\sim I_M.
 \end{aligned}$$

Die Manöver $(OR)^{105}$ und $(OR')^{63}$ führen also jeden Würfel aus dem Ausgangszustand in den Ausgangszustand zurück. Dennoch bewirken sie etwas: Da beim ersten Manöver $105 = 26 \cdot 4 + 1$ mal die obere und ebensooft die rechte Scheibe um 90° im Uhrzeigersinn gedreht werden, sind die Flächen-cubies o und r nach dem Manöver um 90° nach rechts gedreht. Analoges gilt für das zweite Manöver, das o um 90° nach links und r um 90° nach rechts dreht.

Es kann leicht gezeigt werden (systematische Fall-Unterscheidung), daß alle Muster mit sechs Diagonalen unmöglich sind.

$$\begin{aligned} h_{29} &= m_{773} = U^2 M_R M_V^2 M'_R O^2 B_O^2 \quad (5) \quad (\text{,,Sechs H'', Foto 13 links}), \\ h_{30} &= V' M'_U R O^2 L' M_V L O^2 R' V \quad (10) \quad (\text{,,Sechs U'', Foto 13 rechts}), \\ h_{31} &= M_R^2 O M_R^2 O^2 M_R^2 U M_V^2 M_U \quad (8) \quad (\text{,,Vier U''}), \\ h_{32} &= M'_U R^2 M_U R^2 \cdot O^2 V^2 R^2 H^2 R^2 U^2 \quad (10) \\ &\quad (\text{,,Sechs T'', Foto 14 links}), \\ h_{33} &= O^2 V^2 R^2 O^2 M'_R U' M_R^2 U^2 M_R^2 O' H' V' M'_R V^2 B_R^2 \quad (14) \\ &\quad (\text{,,Sechs Doppel-L'', Foto 14 rechts}), \\ h_{34} &= R^2 V^2 M_R^2 H^2 L^2 \quad (5) \quad (\text{,,Vier parallele Minus''}), \\ h_{35} &= R^2 U^2 M_R^2 O^2 R^2 \quad (5) \quad (\text{,,Vier orthogonale Minus''}), \\ h_{36} &= h_{34} M_R \quad (6) \quad (\text{,,Sechs Minus''}). \end{aligned}$$

Sechs-Minus-Muster, bei denen die Minus-Zeichen benachbarter Seiten stets aufeinander senkrecht stehen, sind unmöglich.

$$\begin{aligned} h_{37} &= (B_O^2 \cdot R^2 V U R^2 U' R \cdot H^2 \cdot R' U R^2 U' V' R^2 \cdot H^2)^2 \cdot \\ &\quad \cdot (H^2 M_R^2)^2 M_V^2 \quad (31) \\ &\quad (\text{,,Vier Trikoloren'' nach D. Benson, Foto 15 links}), \\ h_{38} &= (B_O^2 \cdot R^2 V U R^2 U' R \cdot H^2 \cdot R' U R^2 U' V' R^2 \cdot H^2)^2 \cdot \\ &\quad \cdot H^2 M_R^2 V^2 R \quad (30) \\ &\quad (\text{,,Sechs Trikoloren'' nach D. Benson}), \\ h_{39} &= O' H^2 L^2 O M_R^2 O' R^2 V^2 U V H R M_U R' H' R' M_U R^2 M'_U R' V' H^2 R^2 M'_V \\ &\quad (24) \quad (\text{,,Sechs Trikoloren'' nach R. Gall, Foto 15 rechts.}) \end{aligned}$$

Sechs Trikoloren, bei denen die Streifen benachbarter Seiten stets aufeinander senkrecht stehen, sind in keinem Orbit möglich.

$$\begin{aligned} h_{40} &= m_{490} = ((M_R O)^4 B_{OLV})^3 \quad (24) \\ &\quad (\text{,,Superflip'', Foto 16 links}). \end{aligned}$$

Hieraus kann leicht ein hübsches Muster mit sechs sechsfarbigen Seiten erzeugt werden, z.B. durch

$$h_{41} = h_{40} m_{340} = h_{40} M_U R^2 M'_U R^2 O^2 V^2 R^2 V^2 R^2 O^2 \quad (34).$$

Einfacher erhält man sechs sechsfarbige Seiten durch

$$\begin{aligned} h_{42} &= R L V H R L M_V^2 \quad (7), \\ h_{43} &= ??? \quad (\text{,,Superfliptwist'', Foto 16 rechts}), \end{aligned}$$

s. Such-Anzeige am Ende des Buches.

5

Varianten und Verallgemeinerungen

Eine geringfügige Veränderung macht jeden magischen Würfel zum „Superwürfel“, einem Puzzle mit mehr als 2000mal so vielen Positionen. Seine Lösung und ein geeignetes mathematisches Modell enthält der erste Abschnitt dieses Kapitels. Der zweite ist eine Reverenz an einen mehr als 100 Jahre alten Vorläufer von Rubik's Cube. Wir geben hier einen vielleicht neuen, besonders einfachen Beweis des Hauptsatzes über Sam Loyds Schiebe-puzzle. Meist nicht mehr kubisch, aber auf Grund ihrer technischen und strukturellen Verwandtschaft doch zur Cubologie zählend, sind die Objekte des dritten Abschnittes: magische Polyeder aller Art.

5.1 Der Superwürfel

In diesem Abschnitt wird die Cubologie zu einer echten Geheimwissenschaft: Ihre Operationen werden unsichtbar!

Betrachten wir etwa die 2-zügigen Manöver

$$\begin{aligned} OR &\rightarrow (-ovl, olh, hur, uvr, vor) (+ohr) (ov, ol, oh, hr, ur, vr, or), \\ OR' &\rightarrow (-ovl, olh, vor) (+ohr, vru, urh) (ov, ol, oh, vr, ur, hr, or). \end{aligned}$$

Aus der Zyklenstruktur ihrer Operationen entnehmen wir

$$\begin{aligned} (OR)^{105} (210) &\sim I_M, \\ (OR')^{63} (126) &\sim I_M. \end{aligned}$$

Die Manöver $(OR)^{105}$ und $(OR')^{63}$ führen also jeden Würfel aus dem Ausgangszustand in den Ausgangszustand zurück. Dennoch bewirken sie etwas: Da beim ersten Manöver $105 = 26 \cdot 4 + 1$ mal die obere und ebensooft die rechte Scheibe um 90° im Uhrzeigersinn gedreht werden, sind die Flächen-cubies o und r nach dem Manöver um 90° nach rechts gedreht. Analoges gilt für das zweite Manöver, das o um 90° nach links und r um 90° nach rechts dreht.

Wir schreiben hierfür kurz

$$(OR)^{105} (210) \rightarrow (+o) (+r), \\ (OR')^{63} (126) \rightarrow (-o) (+r).$$

Die 180° -Drehung eines Flächencubies notieren wir mit zwei Plus-Zeichen nebeneinander, z.B.

$$(OR)^{210} (420) \sim (OR')^{126} (252) \rightarrow (++)o (++)r.$$

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, die normalerweise unsichtbaren Drehungen der Flächencubies sichtbar zu machen: andere Färbungen, hübsche Bilder oder häßliche Werbesprüche. Die einfachste scheint zu sein, auf jede der sechs Würfelseiten einen Strich zu machen, der den Mittelpunkt des Flächencubiefarbspättchens mit dem Mittelpunkt eines Nachbarplättchens verbindet. In Bild 1 sind die Striche so angeordnet, daß auf jeder der 12 Cubies, die eine Anakonda bilden (s. Kapitel 4), ein halber Strich liegt.

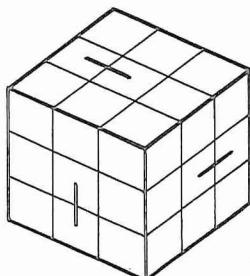


Bild 1 Ein Superwürfel

Das Solitärspiel „Superwürfel“ besteht nun darin, einen markierten und anschließend gemischten Würfel so in den Ausgangszustand „zurückzudrehen“, daß auch die Strichhälften wieder richtig zusammenpassen. Ignoriert man die Striche zunächst einfach, so steht die Chance, mit dem Ausgangszustand des gewöhnlichen Würfels auch den Ausgangszustand des Superwürfels zu erreichen, mit 1:2048 nicht gerade günstig. In der Tat ergibt sich schon aus den beiden oben diskutierten Manövern, daß die Flächencubies in jeder Position (im Sinne des gewöhnlichen Würfels) mindestens $4^5 \cdot 2 = 2^{11} = 2048$ verschiedene Lage-Kombinationen haben können: Fünf der sechs Flächencubies können unabhängig voneinander in jede von vier Lagen gedreht werden, und für das sechste bestehen dann noch immer zwei Möglichkeiten. Daß keine weiteren existieren, folgt aus dem unten bewiesenen Satz 1.

Die beiden schönen, aber langen Manöver $(OR)^{105}$ und $(OR')^{63}$ bilden damit zusammen mit einer Strategie für den gewöhnlichen Würfel im Prinzip bereits eine Strategie für den Superwürfel. Eine besonders ökonomische Strategie ermöglichen die in Bild 2 zusammengestellten kurzen Superwürfel-Manöver. Die Struktur der vier 8-zügigen Manöver $m_{802}, m_{803}, m_{805}$ und m_{806} zeigt eine neue reizvolle Anwendung des in Abschnitt 3.4 besprochenen Isolationsprinzips.

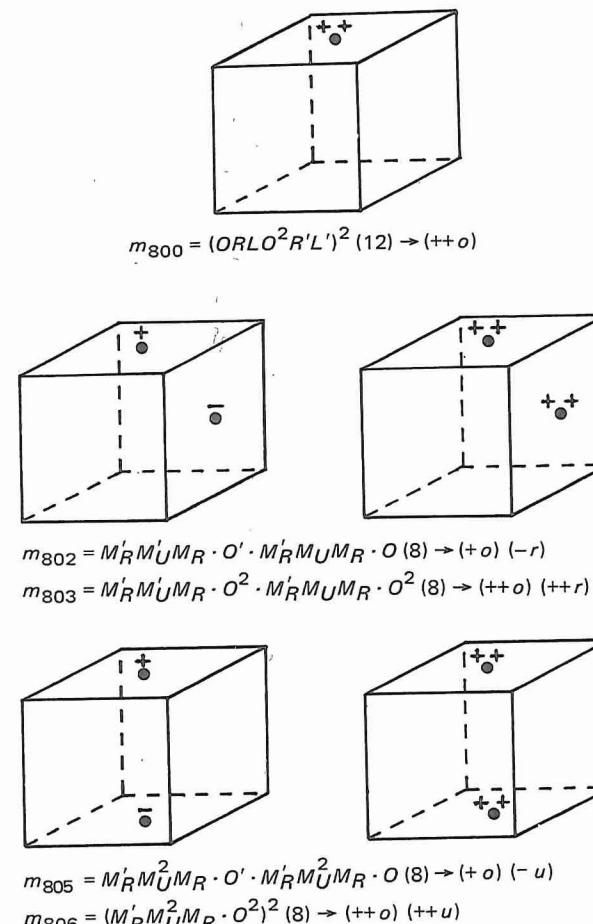


Bild 2 Fünf kurze Superwürfel-Manöver

Die Drehungen der Flächencubies können in einem mathematischen Modell völlig analog zur Charakterisierung der verschiedenen Lagen der Ecken und Kantencubies berücksichtigt werden. Wir denken uns hierzu die Markierungsstriche des Superwürfels in dessen Ausgangszustand auf die schon in Abschnitt 2.3 verwendete fiktive, niemals bewegte durchsichtige Würfelhülle übertragen. Gleichzeitig beschriften wir die 4 Seiten eines jeden Flächencubies („Seiten“ hier im Sinne von Seiten eines Quadrates) im Uhrzeigersinn so mit 0, 1, 2 und 3, daß die markierte Seite die Zahl 0 erhält. Nach Wahl einer beliebigen Numerierung der 6 Flächencubies können nun ihre Lagen durch ein 6-tupel $z = (z_1, \dots, z_6) \in Z := \{0, 1, 2, 3\}^6$ beschrieben werden, wobei z_k angibt, welche der 4 Seiten des k -ten Flächencubies unter dem Markierungsstrich der fiktiven Hülle liegt ($k = 1, \dots, 6$). Wir gelangen so zu folgender

Definition. Eine *R-Position des Superwürfels* ist ein 5-tupel (ρ, σ, x, y, z) , wobei (ρ, σ, x, y) eine R-Position des Würfels und $z \in Z = \{0, 1, 2, 3\}^6$ ist. Sie heißt *möglich*, wenn sie aus dem Ausgangszustand $(1, 1, 0, 0, 0)$ des Superwürfels durch Randscheibendrehungen erreichbar ist. (Auf die naheliegende mathematische Formalisierung dieser Aussage wird aus Rücksicht auf den Leser verzichtet.)

Satz 1. Eine R-Position des Superwürfels ist genau dann möglich, wenn die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 2.3.3 und die Bedingung

$$(d) \quad (-1)^{z_1 + \dots + z_6} = \operatorname{sgn} \rho$$

erfüllt ist.

Beweis. Ist (ρ, σ, x, y, z) eine mögliche R-Position des Superwürfels, so ist (ρ, σ, x, y) eine mögliche R-Position des gewöhnlichen Würfels, d.h. die Bedingungen (a), (b) und (c) des Satzes 2.3.3 sind erfüllt. Gleichung (d) ist notwendig, da sie für den Ausgangszustand $(1, 1, 0, 0, 0)$ des Superwürfels erfüllt ist (hier ist $z_1 = \dots = z_6 = 0$ und $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} I_{S_8} = 1$) und bei jedem der 90° -Randscheibenzyge V, H, R, L, O und U erhalten bleibt: Jeder dieser Züge verändert das Vorzeichen von ρ (Ecken-4-Zyklus) und einen der Summanden in der Summe $z_1 + \dots + z_6$ um 1. Daß (a), (b), (c) und (d) hinreichen, folgt aus Satz 2.3.3 und den voranstehenden Überlegungen. \square

Wie angekündigt folgt hieraus unmittelbar

Satz 2. Es gibt genau

$$2^{11} \cdot |P| = 88\,580\,102\,706\,155\,225\,088\,000 = 2^{38} 3^{14} 5^3 7^2 11$$

(mehr als 88 Trilliarden) mögliche R-Positionen des Superwürfels.

Konnten wir in Abschnitt 2.4 die Länge einer Brücke aus allen Würfeln mit verschiedenen möglichen R-Positionen noch an Hand einer Entfernung innerhalb unseres Milchstraßensystems veranschaulichen, so ist im Falle des Superwürfels der Schritt in den intergalaktischen Raum erforderlich. $88,58 \dots \cdot 10^{21}$ kleine Superwürfel ergeben nebeneinandergelegt eine Strecke von über 500 000 Lichtjahren, und das ist etwa ein Viertel der Entfernung zum Andromedanebel. Dicht gepackt würden die Superwürfel – jeder in einer anderen R-Position! – die gesamte Erdoberfläche ($51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$) ca 30,5 km hoch bedecken. Ein eindrucksvoller zeitlicher Vergleich, der für eine Beurteilung der Einsatz-Möglichkeiten elektronischer Rechenanlagen nützlich ist, wurde von D. Singmaster angegeben: Würde ein Computer alle Superwürfel abzählen und dabei pro Sekunde eine Million schaffen, so benötigte er etwa ein Drittel des gesamten Alters des Universums (Zeitraum seit dem hypothetischen Urknall).

Sieht man die Lage des Würfels als relevant an, so erhält man einen Positions begriff, bei dem die drei Cubietypen völlig gleichberechtigt sind: Eine *Position des Superwürfels* ist ein 6-tupel $(\rho, \sigma, \tau, x, y, z)$ mit $\rho \in S_8$, $\sigma \in S_{12}$, $\tau \in S_6$, $x \in X = C_3^8$, $y \in Y = C_2^{12}$, $z \in Z = C_4^6$.

5.2 Sam Loyds Schiebepuzzle

Schon einmal, in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts, hat ein Puzzle die Welt und vor allem Amerika erobert. Es stammt von Sam Loyd (1841–1911), einem unglaublich vielseitigen und produktiven Erfinder von Rätseln jeder Art. Und unglaublich sind auch die Anekdoten um jenes Puzzle, das noch heute zu den beliebtesten Preisen auf vielen Kinderfesten gehört. Geschäftsleute haben ihren Laden nicht mehr geöffnet, Menschen tagelang nichts gegessen, Wett-Begeisterter ein Vermögen verloren.

Dabei handelt es sich, verglichen mit Rubik's Cube, eigentlich um ein recht bescheidenes Ding. Fünfzehn durchnumerierte quadratische Scheibchen lassen sich in einem 4×4 -Rahmen, der stets ein leeres Feld enthält, hin und her bewegen, indem jeweils eines der gerade neben dem leeren Feld befindlichen Scheibchen in das leere Feld geschoben wird. Bevor das Spiel seine heute übliche Form (Bild 1) erhielt, bestand es einfach aus 15 numerierten Klötzen mit quadratischem Grundriß, die in einer Schachtel hin und her gesetzt wurden.

Bild 1 zeigt den „Ausgangszustand“: Die Scheibchen sind zeilenweise von 1 bis 15 numeriert, und das leere Feld ist unten rechts. In jeder anderen Position mit dem leeren Feld unten rechts haben einige oder alle Scheibchen

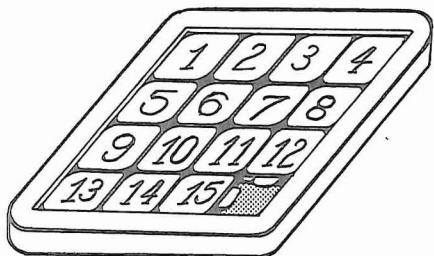


Bild 1 Sam Loyds Schiebepuzzle

ihre Plätze getauscht. Die Position entspricht damit einer Permutation der Zahlen von 1 bis 15, also einem Element der symmetrischen Gruppe S_{15} . Die Position, in der das Spiel zu Sam Loyds Zeiten listigerweise meist verkauft wurde, zeigt Bild 2. Sie entsteht aus dem Ausgangszustand durch Vertauschen der 14 mit der 15, ist also eine ungerade Permutation. Daß die damaligen Puzzle-Freunde bei ihren Versuchen, den Ausgangszustand zu erreichen, nicht ganz zufällig an den Rand des Wahnsinns gerieten, zeigt der folgende

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Bild 2
Eine unmögliche Position für
Sam Loyds Schiebepuzzle

Satz. Die aus dem Ausgangszustand von Sam Loyds Schiebepuzzle durch Schieben der Scheibchen erreichbaren Positionen (leeres Feld unten rechts) sind genau die $15!/2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots \cdot 15 = 1\ 307\ 674\ 368\ 000$ geraden Permutationen der Zahlen von 1 bis 15.

Beweis. Wir bezeichnen das leere Feld mit 16. Bei jeder Schiebung eines einzelnen Scheibchens wird dann die 16 mit einem der benachbarten Scheibchen vertauscht, und jeder Zustand des Puzzles (leeres Feld an beliebiger Stelle) kann als ein Element der symmetrischen Gruppe S_{16} aufgefaßt werden.

(a) Bei jeder Folge von Schiebungen, die den Ausgangszustand in eine andere Position mit leerem Feld unten rechts überführt, beschreibt die 16 einen geschlossenen Weg. Er enthält ebenso viele „Nord“- wie „Süd“-Etappen und ebenso viele „West“- wie „Ost“-Etappen. Der Weg besteht damit insgesamt aus einer geraden Anzahl einzelner Etappen ($2 \times$ Anzahl der Nord-Etappen + $2 \times$ Anzahl der West-Etappen), es wird eine gerade Anzahl von Transpositionen ausgeführt, und die erreichte Permutation der S_{16} ist gerade. Da hierbei die 16 ganz am Ende steht (sie ist ein „Fixpunkt“ der Permutation), ist auch das durch Streichen der 16 entstehende Element der S_{15} gerade. Zusammenfassung: Höchstens alle geraden Permutationen sind erreichbar.

(b) Verschiebt man die drei Scheibchen, die das leere Feld unten rechts umgeben, mit der Zugfolge Süd-Ost-Nord-West im Kreis herum, so wird der 3-Zyklus (11, 12, 15) bewirkt, kurz: $SONW \rightarrow (11, 12, 15)$. Zusammenfassung: Es ist leicht, einen speziellen 3-Zyklus zu erreichen.

(c) Sei m ein „Manöver“, das drei vorgegebene Scheibchen a, b und c auf die Plätze (Cubizile für Scheibchen) 11, 12 und 15 bringt, wobei die übrigen Scheibchen beliebig verändert werden dürfen. Mit m' werde wie beim Würfel das „inverse Manöver“, das m wieder rückgängig macht, bezeichnet. Dann gilt $m \cdot SONW \cdot m' \rightarrow (a, b, c)$ (Konjugation in der Gruppe S_{16}). Zusammenfassung: Jeder 3-Zyklus, also auch jede gerade Permutation (Satz 2.2.2), ist erreichbar. \square

Satz und Beweis können offensichtlich auf beliebige rechteckige Schiebepuzzle der Größe $r \times s$ mit $r \geq 2$ und $s \geq 2$ übertragen werden.

Teil (a) des Beweises erinnert an eine bekannte Schachaufgabe von K. Fabel. Da die Cubologie ohnehin eine Reihe von Wesenszügen (also vermutlich auch eine Reihe von Freunden) mit dem Problemschach gemein hat, wollen wir diese Aufgabe für einschlägige Experten kurz zitieren. Weiß: Kc8, Te1, Sd1, Se2, Bb2, b5, c6, g3 (8 Steine). Schwarz: Kh1, Th2, La7, Lg2, Sa8, Sf1, Sh3, Bb3, b6, c7, g4, g6, g7, h7 (14 Steine). Weiß am Zuge erzwingt Matt in 182 Zügen. Weder der dritte schwarze Springer (Umwandlungsfigur) noch die Zügezahl (ein Hundertzweiundachtzig) sind ein Druckfehler. Der weiße König muß einige geschlossene Wege von d8 nach d8 zurücklegen. Bleibt er dabei stets auf schwarzen Feldern, so benötigt er eine gerade Anzahl von Zügen.

5.3 Andere magische Polyeder

Der Versuch liegt nahe, die faszinierende Technik des Zauberwürfels auf andere Körper zu übertragen. An erster Stelle bieten sich hierfür die regelmäßigen Polyeder an.

Unter einem *Polyeder* (Vielflach) versteht man einen Körper mit ebenen Begrenzungsflächen. Es heißt *konvex*, falls alle seine Ecken nach außen weisen. Ein *regelmäßiges Polyeder* oder *platonischer Körper* ist ein konvexas Polyeder, das von untereinander kongruenten regelmäßigen Vielecken, von denen an jeder Ecke gleich viele zusammentreffen, begrenzt wird.

Man sieht leicht, daß regelmäßige Vielecke mit 6 oder mehr Ecken zum Aufbau regelmäßiger Polyeder nicht taugen: Ihr Innenwinkel beträgt mindestens 120° (Sechseck), so daß sich nicht drei oder mehr von ihnen zu einer Ecke zusammenlegen lassen. Das gleiche Argument zeigt, daß an einer Ecke nicht mehr als 3 regelmäßige Fünfecke (Innenwinkel 108°), nicht mehr als 3 Quadrate (Innenwinkel 90°) und nicht mehr als 5 gleichseitige Dreiecke (Innenwinkel 60°) zusammentreffen können. Damit bleiben genau 5 Fälle übrig, die sich, wie man leicht nachrechnen kann, auch alle realisieren lassen (Bild 1):

- (a) 3 gleichseitige Dreiecke an jeder Ecke ergeben das *Tetraeder* (Vierflach: 4 Flächen, 6 Kanten, 4 Ecken).
- (b) 4 gleichseitige Dreiecke an jeder Ecke ergeben das *Oktaeder* (Achtflach: 8 Flächen, 12 Kanten, 6 Ecken).

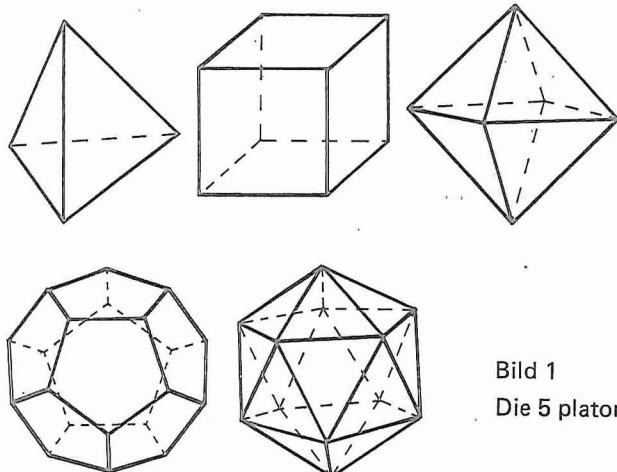


Bild 1
Die 5 platonischen Körper

- (c) 5 gleichseitige Dreiecke an jeder Ecke ergeben das *Ikosaeder* (Zwanzigflach: 20 Flächen, 30 Kanten, 12 Ecken).
- (d) 3 Quadrate an jeder Ecke ergeben das *Hexaeder* (Sechsflach: 6 Flächen, 12 Kanten, 8 Ecken). Es ist uns unter seinem bürgerlichen Namen „Würfel“ nicht mehr ganz unbekannt.
- (e) 3 regelmäßige Fünfecke an jeder Ecke ergeben das *Dodekaeder* (Zwölfflach: 12 Flächen, 30 Kanten, 20 Ecken).

Wir schneiden nun einen platonischen Körper mit so vielen Ebenen, wie er Flächen besitzt, wobei jede der Schnittebenen parallel zu einer der Flächen in einem für alle Ebenen gleichen, nicht zu großen Abstand verläuft. Er zerfällt hierdurch in ein Zentralstück (kleinerer platonischer Körper desselben Typus), in untereinander kongruente Eckstücke, in untereinander kongruente Kantenstücke und in untereinander kongruente Flächenstücke. Durch geeignete „Füße“ und Aussparungen an den einzelnen Teilen kann man ähnlich wie beim Würfel erreichen, daß alle Stücke zusammenhalten und sich jede der aus einem Flächenstück und den angrenzenden Kanten- und Eckstücken bestehenden Scheiben um ihre Symmetrieachse drehen läßt. Dies ist nicht immer ganz einfach, doch aus gutem Grund können wir annehmen, daß sich einige der vom Würfel verschiedenen *magischen platonischen Körper* schon bald im Handel befinden werden.

Betrachten wir als Beispiel das *magische Dodekaeder* genauer, das wegen seiner harmonischen Gestalt die Königin aller magischen Körper ist (Bild 2). Hier können 12 Farben „gemischt“ und wieder „sortiert“ werden, wenn im Ausgangszustand jede der Seiten einfarbig ist und die Farben aller Seiten verschieden sind. Man sieht leicht, daß durch geeignete Drehungen der Scheiben um ganzzahlige Vielfache von 72° jedes Eckstück von jeder der 20 Ecken zu jeder anderen Ecke und jedes Kantenstück von jeder der 30 Kanten zu jeder anderen Kante transportiert werden kann. Wie beim Würfel kann ein Eckstück an jeder Ecke 3 und ein Kantenstück auf jeder Kante 2 Lagen einnehmen. Eine *mögliche R-Position* ist ein Farbmuster, das sich durch Drehungen der 12 (Rand-)Scheiben aus dem Ausgangszustand erreichen läßt.

Satz 1. Das *magische Dodekaeder* besitzt genau

$$d := 20! \cdot 30! \cdot 3^{20} \cdot 2^{30} / (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = 20! \cdot 30! \cdot 3^{19} \cdot 2^{27} \approx 10^{68}$$

mögliche *R-Positionen*.

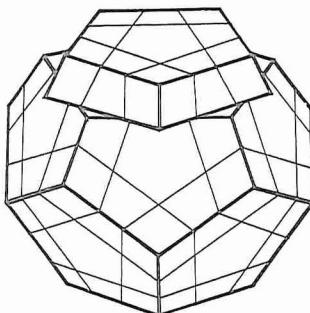
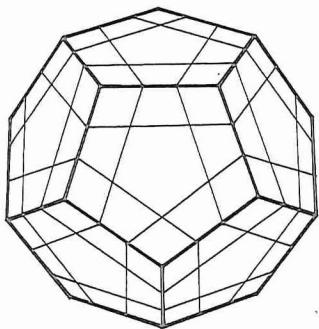


Bild 2 Das magische Dodekaeder

Beweis. Wegen der Analogie zum Beweis des entsprechenden Würfelsatzes können wir uns kurz fassen.

(a) Jede 72° -Drehung einer Scheibe bewirkt einen 5-Zyklus für Eckstücke und einen 5-Zyklus für Kantenstücke. Es sind daher nur gerade Permutationen der Eckstücke und gerade Permutationen der Kantenstücke möglich. Ein Markierungsverfahren ähnlich demjenigen für den Würfel zeigt, daß die Lagen von 19 Eckstücken und 29 Kantenstücken diejenige des 20. Eckstückes und des 30. Kantenstückes bestimmen. Es ist daher *höchstens* die angegebene Anzahl von R-Positionen möglich.

(b) Durch Isolation (s. Abschnitt 3.4), die auf dem „weiträumigen“ Dodekaeder sogar leichter möglich ist als auf dem Würfel, kann ein 3-Zyklus für Eckstücke, ein 3-Zyklus für Kantenstücke, die Drehung zweier Eckstücke (entgegengesetzte Richtung) und die Drehung zweier Kantenstücke kon-

struiert werden. Konjugation und Kombination (Abschnitte 3.3 und 3.2) zeigen dann schnell, daß *mindestens* die angegebene Anzahl von R-Positionen möglich ist. \square

Ähnlich wie beim Würfel verwandeln 12 kleine Striche das magische Dodekaeder in ein Superdodekaeder, bei dem die Lage der Flächenstücke relevant ist.

Satz 2. Das Superdodekaeder besitzt genau

$$5^{12} \cdot d = 5^{12} \cdot 20! \cdot 30! \cdot 3^{19} \cdot 2^{27} \approx 2,46 \cdot 10^{76}$$

mögliche R-Positionen.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß ein einzelnes Flächenstück isoliert um 72° gedreht werden kann.

Die im Beweisteil (b) von Satz 1 durch Isolation und Konjugation konstruierten Manöver für Ecken- und Kanten-3-Zyklen sind Kommutatoren der Dodekaeder-Manövergruppe (vgl. Beweis zu Satz 2.5.3). Sie enthalten daher mit jedem Zug auch den inversen Zug und lassen die Flächenstücke unverändert. Die gleiche Eigenschaft haben Ecken- und Kanten-5-Zyklen, die durch Verknüpfung von zwei dieser 3-Zyklen entstehen (s. Abschnitt 3.2). Die gewünschte Drehung eines einzelnen Flächenstückes kann daher durch Drehung einer ganzen Scheibe und anschließendes Zurückdrehen der Eck- und Kantenstücke mit 5-Zyklen, die keine Flächenstücke verdrehen, bewirkt werden. \square

Betrachten wir noch einmal den Superwürfel aus Abschnitt 5.1. Jedes Eckencubie kann an 8 verschiedenen Plätzen 3 verschiedene Lagen einnehmen, insgesamt also $8 \cdot 3 = 24$ Lagen. Analog gibt es für jedes Kantencubie $12 \cdot 2 = 24$ und für jedes Flächencubie $6 \cdot 4 = 24$ Lagen, und 24 ist auch die Ordnung der Drehgruppe D des Würfels. Auf Grund der besonderen Symmetrie-Eigenschaften dieser Körper gilt ein entsprechender Satz für jeden der 5 „Superplatons“. Beim Superdodekaeder kann jedes Eckstück, jedes Kantenstück und jedes Flächenstück 60 Lagen einnehmen, und dies ist die Ordnung der Drehgruppe des Dodekaeders, die zur A_5 isomorph ist.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß nicht unbedingt jeder Ecke, Kante und Fläche ein bewegliches Teil zugeordnet sein muß und auch keineswegs nur platonische Körper in Betracht kommen.

Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel (Bild 3) ist bereits in Rubiks Patentschrift von 1975 ausführlich beschrieben. Er besteht genau aus den Eckencubies des gewöhnlichen Würfels. Der für die Ecken zuständige Teil einer Strategie des

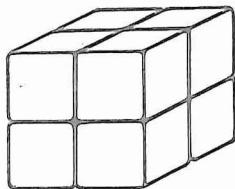


Bild 3 Der 2 X 2 X 2-Würfel

großen Würfels ist damit stets eine Strategie für den kleinen Würfel. Um eine feste Orientierung zu erhalten, kann angenommen werden, daß eines der Eckencubies, etwa *uhl*, stets festbleibt. (Jede Drehung der unteren Scheibe kann durch eine Drehung der oberen ersetzt werden, jede Drehung der hinteren Scheibe durch eine Drehung der vorderen und jede Drehung der linken Scheibe durch eine Drehung der rechten.) Die übrigen sieben Eckencubies können jedoch dann beliebig permuiert werden, da jedes Manöver, das auf dem großen Würfel eine Ecken-Transposition und irgendeine ungerade Kanten-Permutation erzeugt, auf dem kleinen Würfel nur noch die Ecken-Transposition bewirkt. Die Einschränkung hinsichtlich der Orientierung bleibt indes unverändert bestehen, und wir erhalten

Satz 3. Der 2 X 2 X 2-Würfel besitzt genau $7! \cdot 3^6 = 3\,674\,160$ mögliche Farbmuster.

Das *magische Domino* (Foto 2) wird in Ungarn seit 1979 hergestellt. Im Unterschied zum 2 X 2 X 2-Würfel erfordert es neue strategische Überlegungen, da nur solche Würfel-Manöver übertragen werden können, die keine 90° -Züge mit senkrechten Scheiben enthalten. Die wichtigsten sind

$$m_{620} = (R^2 O^2)^3 (6) \rightarrow (ov, oh),$$

$$m_{100a} = R^2 V^2 OH^2 O' V^2 OH^2 O' R^2 (10) \rightarrow (ovl, orv, ohr),$$

$$m_{100a}O = R^2 V^2 OH^2 O' V^2 OH^2 O' R^2 O (11) \rightarrow (olh, ohr) (oh, or, ov, ol).$$

Mit dem letzten Manöver kann relativ leicht jede Permutation der 8 Eckencubies erreicht werden (Konjugation), wobei auf die 8 Kantencubies keine Rücksicht genommen wird. Diese lassen sich anschließend mit m_{620} beliebig umordnen. Da jedoch Umordnungen, die sich auch durch eine Drehung des gesamten Dominos um seine senkrechte Achse erreichen lassen, nicht erneut gezählt werden dürfen, ergibt sich

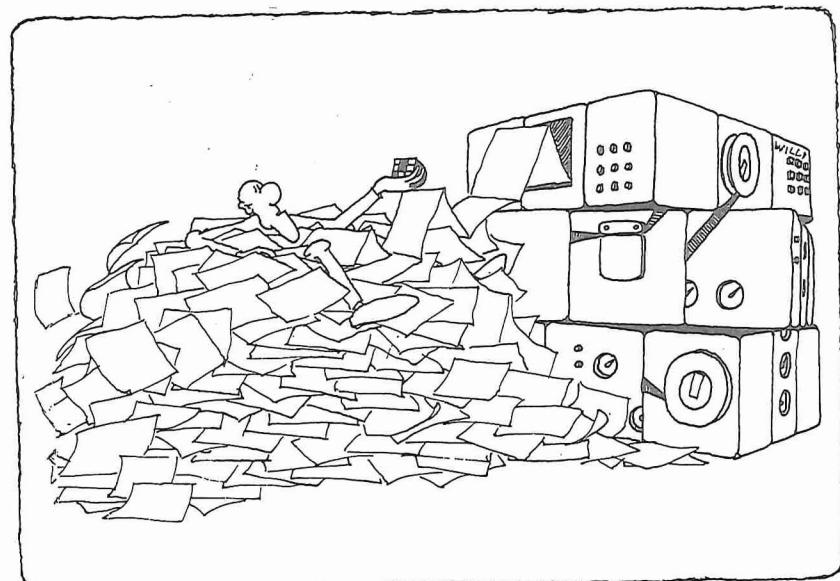
Satz 4. Das *magische Domino* besitzt genau $(8!)^2 / 4 = 406\,425\,600$ mögliche „Muster“.

6

Computer-Cubologie

Elektronische Rechenanlagen können auf vielfache Weise für Rubiks Zauberwürfel eingesetzt werden.

Am nächstliegenden scheint es zu sein, die Suche nach guten Manövern an einen Computer zu delegieren. Der Computer simuliert systematisch alle 2-zügigen, 3-zügigen, 4-zügigen usw. Manöver mit Zügen aus einer vorgegebenen Teilmenge der Menge aller Züge. Sobald ein Manöver ein vorgegebenes Kriterium erfüllt, wird es ausgedruckt, am besten gleich zusammen mit der Zyklenerlegung seiner Operation. Beachtet man, daß aus jeder Variationsklasse



höchstens ein Manöver zu untersuchen ist, so verringert sich die Arbeit beträchtlich. So sind z.B. nicht mehr als $3^9 + 2 \cdot 3^7 = 11 \cdot 3^7 = 24057$ zehn-zügige Manöver mit 2 aufeinander senkrecht stehenden Randscheiben zu prüfen, was jeder größere Rechner bei geeigneter Programmierung schnell bewältigt. (O.B.d.A. wird abwechselnd die rechte und die obere Scheibe gedreht, mit R begonnen und beliebig fortgesetzt (3^9) oder mit R^2 begonnen, mit O oder O^2 fortgesetzt und mit O^2 geendet ($2 \cdot 3^7$). Eine genauere Analyse reduziert die Anzahl noch einmal auf fast die Hälfte.) Sinnvolle Kriterien sind u.a. die Nichtüberschreitung einer Schranke für die Anzahl der bewegten Cubies, die Erhaltung eines Teilbereiches des Würfels (z.B. einer Scheibe, der Ecken oder der Kanten) oder das Bewirken einer Operation mit vorgegebener Zyklenstruktur. Mit dem letzten Kriterium scheint J. B. Butler sein 5-zügiges Manöver $RO^2U'HU'$ für eine Operation der maximalen Ordnung 1260 gefunden zu haben. Ein sehr einfaches „Manöver-Programm“ für den Taschenrechner TI 59 beschreibt Michel Dauphin, ein breit angelegtes Programm wurde von Morwen B. Thistlethwaite entwickelt.

Mathematiker können spezielle Probleme der Struktur der Gruppe G , etwa die Bestimmung von Erzeugendensystemen und definierenden Relationen, mit dem Computer angehen.

Wir wollen in diesem Abschnitt den Computer zur Lösung des Solitärspiels selbst verwenden, d.h. zur Rückführung eines beliebig gemischten Würfels in den Ausgangszustand. Ein solches Programm kann als Demonstration einer Lösungsstrategie, als populäres Vorführprogramm, vor allem aber einfach als eine reizvolle Übung in der Programmierung nicht-numerischer Probleme angesehen werden.

Kann ein Rechner zu einer beliebigen Position ein optimales, d.h. kürzestes Rückführmanöver durch systematisches Ausprobieren aller Manöver immer größer werdender Länge finden? Diese Idee erweist sich schnell als völlig abwegig: Selbst wenn ein „Manöver-Generator“ ohne jede Redundanz arbeiten würde, d.h. ausschließlich paarweise nicht-äquivalente Manöver erzeugte, so wären dies so viele wie Positionen, also mehr als 43 Trillionen, und damit selbst für die schnellsten Computer weit jenseits der dem Menschen auf Erden vergönnten kurzen Zeit.

Die Situation ändert sich sofort, wenn das systematische Probieren auf eine starre, vorher festgelegte *Stufenleiter* beschränkt wird. Unter einer Stufenleiter verstehen wir eine Folge P_0, P_1, \dots, P_n von Positionsmengen (*Stufen*), wobei P_0 die Menge aller möglichen Positionen ist und P_n lediglich die angestrebte Ausgangsposition enthält. Oft, aber nicht immer, werden die P_i (genauer: die zugehörigen Mengen von Operationen) Untergruppen von G

mit $P_{i-1} \supset P_i$ sein. Die kleinste natürliche Zahl z_i , so daß zu jedem $p \in P_{i-1}$ ein höchstens z_i -zügiges Manöver m mit $pm \in P_i$ existiert, nennen wir die *Höhe* der i -ten Stufe. Gelingt es, eine Stufenleiter mit hinreichend kleinen Stufenhöhen zu finden, bei der überdies die Zugehörigkeit einer Position zu einer bestimmten Stufe leicht zu prüfen ist, so kann der Rechner durch systematisches Probieren ein im Rahmen der Stufenleiter optimales Lösungsmanöver mit maximal $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ Zügen finden. Die Entwicklung einer geeigneten Stufenleiter und die Abschätzung der Stufenhöhen unterscheiden sich jedoch prinzipiell nicht wesentlich von der Entwicklung einer guten Strategie und der bereits ausführlich diskutierten Konstruktion spezieller Manöver. Wir wollen diesen Gedanken hier nicht weiter verfolgen.

Stattdessen beschreiben wir ein Programm, bei dem der Rechner in allen Phasen unsere wohlbekannte „einfache Strategie“ verfolgt. Wegen der Vielfalt der vorhandenen und sich entwickelnden oder verändernden Programmiersprachen wählen wir hierfür die Form eines für jeden Programmierer leicht verständlichen und eindeutigen Programmablaufplanes (Flußdiagramm). Wir halten uns im wesentlichen an die Empfehlungen der DIN 66 001 für Programmablaufpläne. Lediglich die Verwendung des sonst den sogenannten Programm-Modifikationen vorbehaltenen stilisierten Rhombus für Verzweigungen und die Gestaltung von Schleifen weichen aus Platzgründen von dieser Norm ab. Ist bei einer Verzweigung innerhalb einer Schleife keine der den möglichen Ausgängen zugeordneten Bedingungen erfüllt, so ist für den aktuellen Wert der Laufvariablen die ganze Arbeit bereits geleistet und nichts weiter zu tun.

Die *Eingabe* einer Position erfolgt durch Angabe der Farben aller $6 \cdot 9 = 54$ Teilquadrate der Würfeloberfläche, denen programmintern die 54 Textvariablen $N1, N2, \dots, N9, V1, \dots, V9, L1, \dots, L9, H1, \dots, H9, R1, \dots, R9, S1, \dots, S9$ wie in Bild 1 entsprechen. Nach Wahl beliebiger Bezeichnungen für die 6 Würelfarben und einer Anfangslage des Würfels werden zunächst die Farben der 9 Quadrate der oberen Würfelseite zeilenweise eingegeben. Die Bewegungsmanöver REB (rubikisch, s. Abschnitt RENERINIVINIVE), VEB, VEB, VEB, VEBREB bringen dann nacheinander die vordere, linke, hintere, rechte und untere Scheibe nach oben, wo sie wie zuvor die obere Seite eingegeben werden. Zum Schluß erhält der Würfel durch RUB seine Ausgangslage zurück. Schematische Zusammenfassung:

N (REB) V (VEB) L (VEB) H (VEB) R (VEBREB) S (RUB).

	N1	N2	N3
	N4	N5	N6
	N7	N8	N9'
L1	L2	L3	V1
L4	L5	L6	V4
L7	L8	L9	V7
S1	S2	S3	R1
S4	S5	S6	R2
S7	S8	S9	R3
V2	V3	R4	H1
V5	V6	R5	H2
V8	V9	R6	H3
V1	R7	H4	H5
V4	R8	H5	H6
V7	R9	H7	H8
V9	R7	H8	H9

Bild 1

Bezeichnung der Variablen für die 54 Cubie-Flächen

Wir haben die bei der Eingabe erforderlichen Bewegungszüge in rubikisch notiert, weil sich diese Sprache für die Ausgabe, die wir nun beschreiben wollen, sehr gut eignet. Unser Programm führt zunächst eine gründliche Prüfung der Eingabe durch. Ist die Eingabe sinnlos (haben z.B. zwei Flächen-cubies dieselbe Farbe), so wird der Text EINGABEFEHLER geschrieben. Handelt es sich um einen korrekten magischen Würfel, dessen Cubies jedoch falsch zusammengesetzt sind, so daß der Ausgangszustand nicht durch Scheibendrehungen erreicht werden kann, so erscheint zunächst der Text WÜRFEL FALSCH ZUSAMMENGESETZT und anschließend eine vollständige Reparatur-Anleitung, die aus einer geeigneten Auswahl der folgenden Zeilen besteht:

VERTAUSCHE 2 BELIEBIGE ECKENCUBIES ODER 2 BELIEBIGE KANTENCUBIES!

DREHE EIN BELIEBIGES ECKENCUBIE IM UHRZEIGERSINN!

DREHE EIN BELIEBIGES ECKENCUBIE GEGEN DEN UHRZEIGERSINN!

DREHE EIN BELIEBIGES KANTENCUBIE UM!

Die Anweisung zur Vertauschung zweier Cubies ist hierbei stets als orientierungstreuer 2-Zyklus auszuführen, d.h. die einzelnen Seiten der Cubies müssen einzeln ihre Plätze tauschen, etwa wie in Bild 2. Zwei Kantencubies können auf 2, zwei Eckencubies auf 3 Weisen orientierungstreu vertauscht werden. Mit einem umorientierenden Kantencubie-2-Zyklus (Bild 3) wird die Vertauschung zweier Kantencubies zusammen mit dem Umdrehen eines Kantencubies ausgeführt, d.h. die erste und die vierte der obigen Anweisungen simultan. Analoges gilt für Eckencubies.

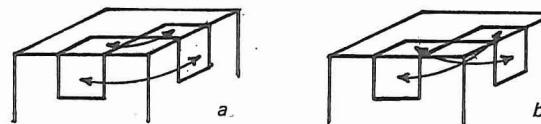


Bild 2 Orientierungstreue Kantencubie-2-Zyklen

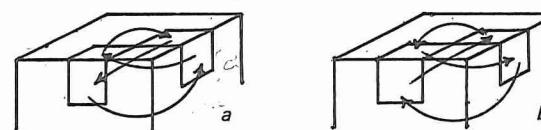


Bild 3 Umorientierende Kantencubie-2-Zyklen

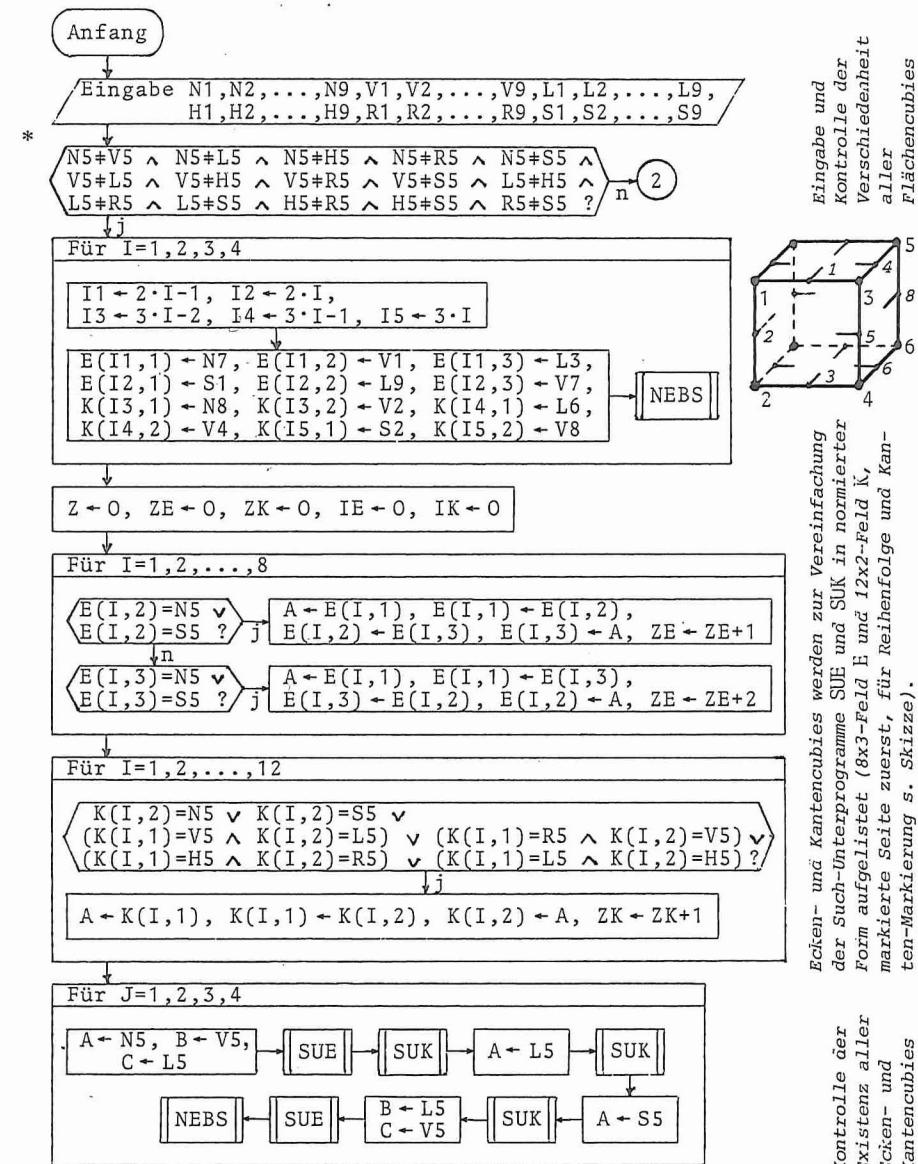
Bei der Übertragung des Flußdiagrammes in ein Programm mögen folgende Hinweise helfen:

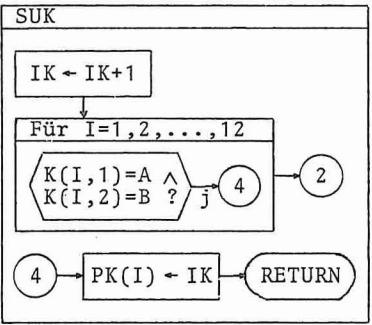
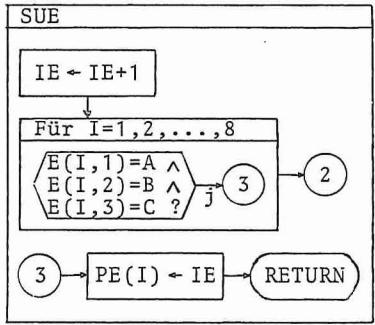
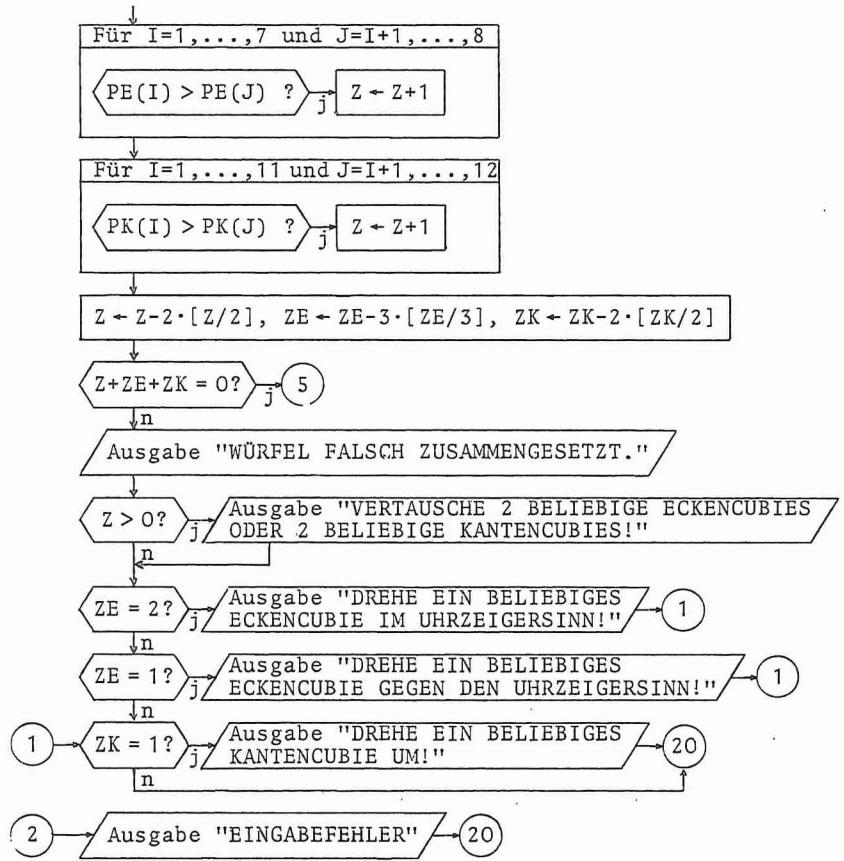
1. Alle Unterprogramme werden als parameterlose Unterabläufe, denen das gesamte Datenmaterial des Hauptprogrammes direkt zugängig ist, aufgefaßt. Mit Ausnahme der beiden im Prüfteil vorkommenden Unterprogramme SUE und SUK (such Ecke, such Kante) ist jeder Unterprogrammname die rubikische Bezeichnung eines Zuges, der gelegentlich noch der Buchstabe S angehängt ist. Das Unterprogramm NE führt die beim Zug NE erforderlichen Umspeicherungen durch (fünf 4-Zyklen!) und gibt die Silbe NE aus. Das Unterprogramm NES führt die Umspeicherungen durch, ohne die Silbe NE auszugeben („Simulation des Zuges NE“). Analoges gilt für alle anderen Zug-Unterprogramme, deren Definition wir daher nicht ausführlich aufschreiben. Spielt Rechenzeit keine Rolle, so können alle Züge aus wenigen Elementen zusammengesetzt werden, z.B. aus den 5 Bausteinen NES, SIMS, SIS, RES, REMS: NEBS ~ NES-SIMS-SIS, RIS ~ RES-RES-RES, LIS ~ NEBS-NEBS-RIS-NEBS-NEBS, REBS ~ RES-REMS-LIS usw.

2. An vielen Stellen ist es wesentlich ökonomischer, die durch eine Folge von Zügen bewirkte Positionsänderung mit wenigen Umspeicherungen direkt zu realisieren und das zugehörige Manöver auszugeben, als die entsprechende Folge von Zug-Unterprogrammen aufzurufen. Wir haben jedoch hierauf verzichtet, da das Flußdiagramm so am leichtesten verstanden werden kann. Darüberhinaus ist es in dieser Form unabhängig von jeder Absicht zur Programmierung als präzise und vollständige Beschreibung eines Algorithmus lesbar.

3. Sollten bei der Realisierung auf kleineren Anlagen Kapazitätsschwierigkeiten auftreten, so kann der von * bis ** reichende reine Prüfteil ohne weitere Änderungen weggelassen werden. Zusätzlich kann der Programmteil von ** bis *** ersatzlos entfallen, wenn die untere Scheibe des Würfels bereits fertig ist. In dieser reduzierten Form wurde das Programm mit einigen Tricks (Ausgabe von Ziffern für Züge und ganze Manöver, NEM statt NEB etc.) von R. Gall sogar auf einem TI 59 realisiert (mittlere Rechenzeit 3 Minuten und 10 Sekunden). Das vollständige Programm wurde von F. Inkmann in FORTRAN IV geschrieben und benötigt auf der alten TR 440 der Ruhr-Universität Bochum, die in Kürze durch ein wesentlich schnelleres System ersetzt wird, pro Würfel im Mittel 0,3 Sekunden. R. Bürger, Schüler der Albert-Einstein-Schule in Bochum, realisierte das Programm in BASIC bewußt ohne Kenntnis der Strategie als Test für die Verständlichkeit des Flußdiagramms. Seine Alphatronic P2 braucht im Mittel 28 + 15 (Prüfteil) Sekunden.

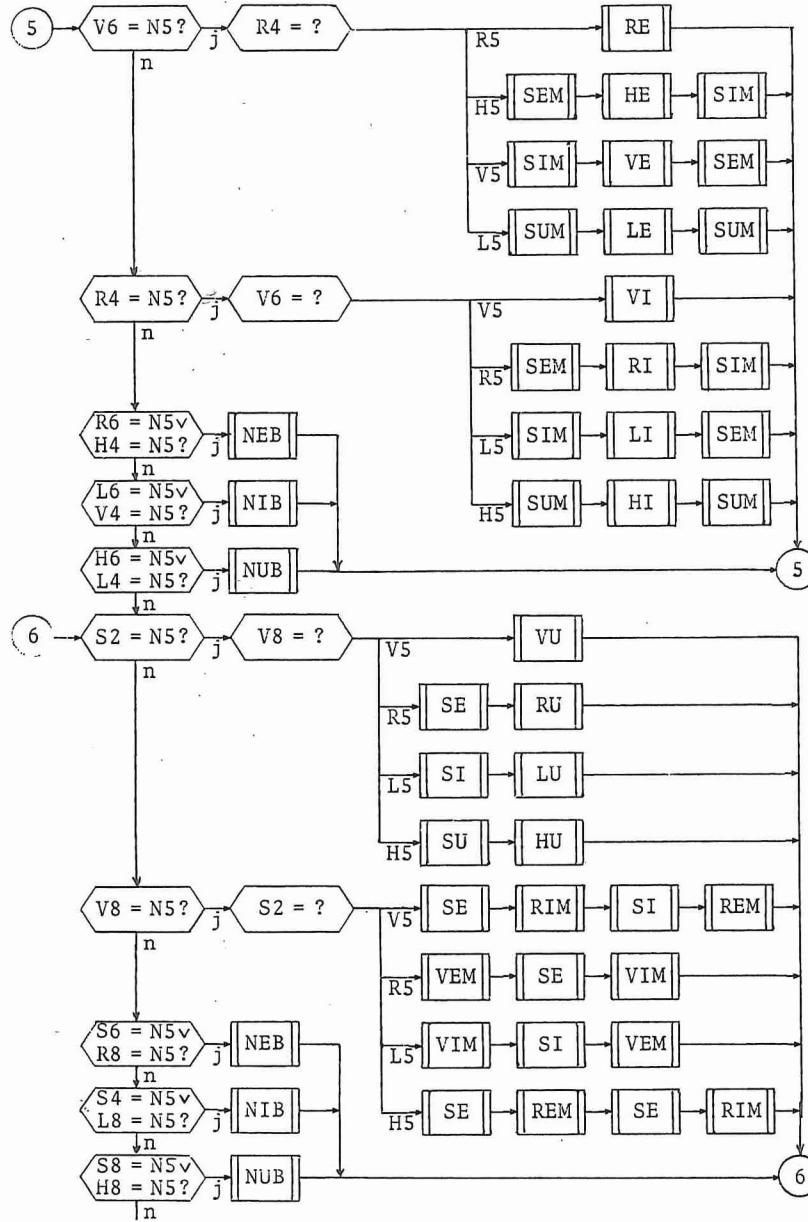
4. Ohne Prüfteil (* bis **) werden neben den 54 Textvariablen N1, N2, ..., S8, S9 lediglich die beiden Textvariablen A und B, das 4 X 2-Textvariablenfeld E und die Zählvariablen I und Z benötigt. Der Prüfteil verwendet zusätzlich die Textvariable C, das 8 X 3-Textvariablenfeld E (statt des 4 X 3-Feldes), das 12 X 2-Textvariablenfeld K, die Zählvariablen J, I1, I2, I3, I4, I5, ZE, ZK, IE, IK und die 1 X 8 bzw. 1 X 12 Zählfelder PE (Permutation der Ecken) bzw. PK (Permutation der Kanten).





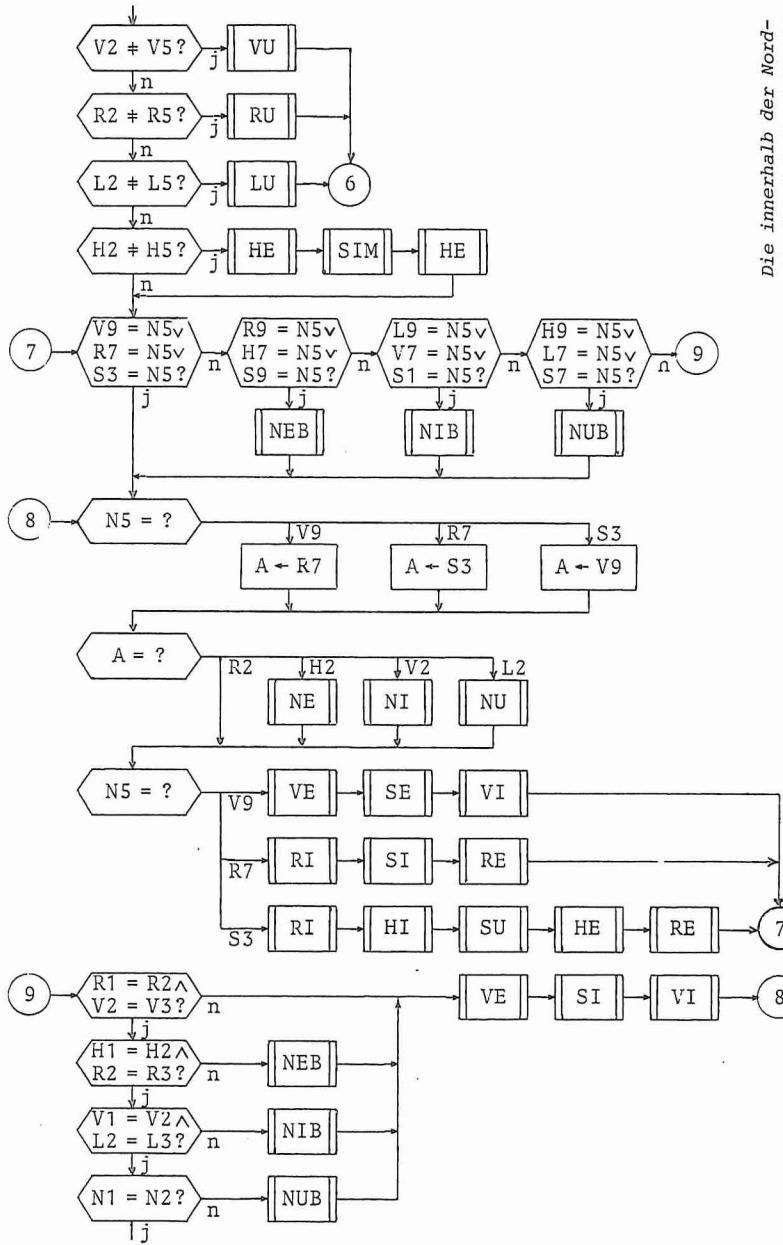
**

Die Ecken- bzw. Kantencubies werden in der Reihenfolge gesucht, in der sie in der Liste E bzw. K stünden, falls sich der Würfel in der Ausgangsstellung befindet. So kann gleichzeitig die Anzahl der Inversionen bestimmt werden, die gerade sein muss. $[x]$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$ (Gauß-Klammer).



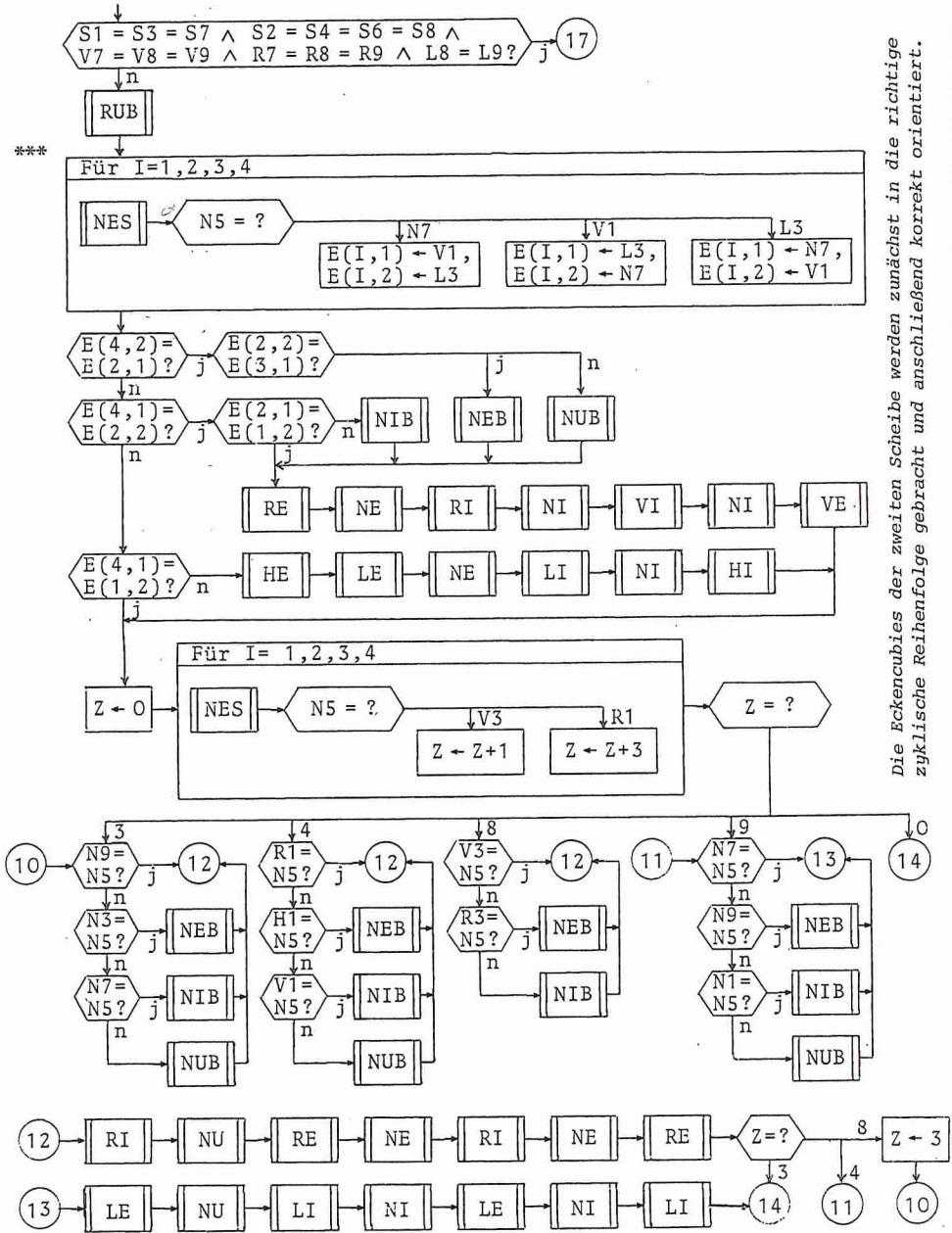
Hier wird den N-Kantencubies, die sich bis in den Süden verirrt haben, ein Weg nach Hause gewiesen. Br führt stets über vorn-unten.

Die (NS)-Mittelscheibe wird nach Kantencubies durchsucht, die in die N-Scheibe gehören. Sie werden von rechts-vorn aus auf ihren Stammplatz gebracht.

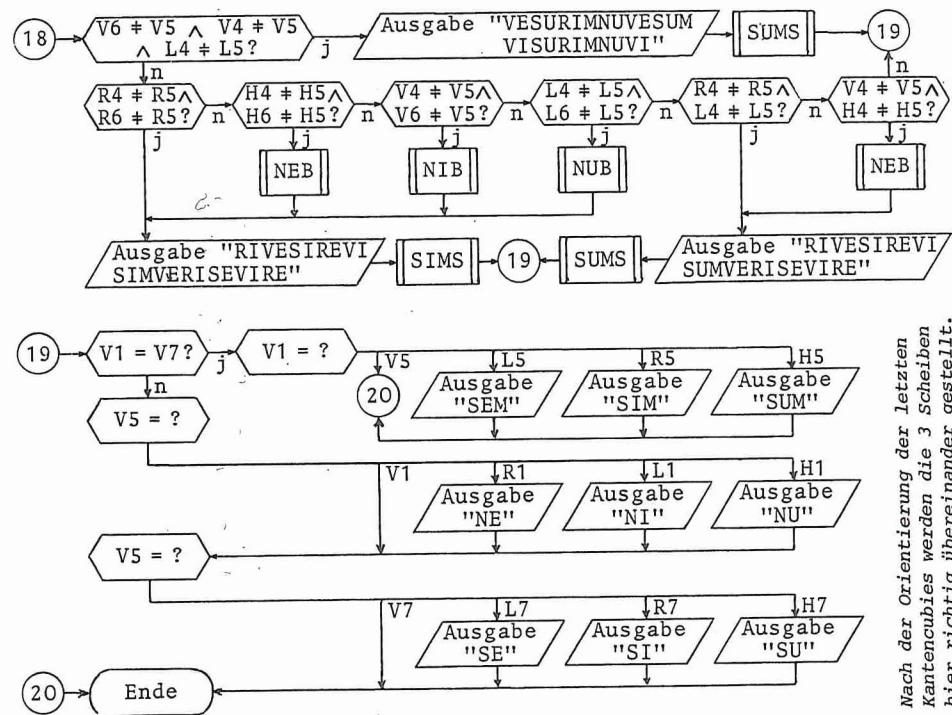
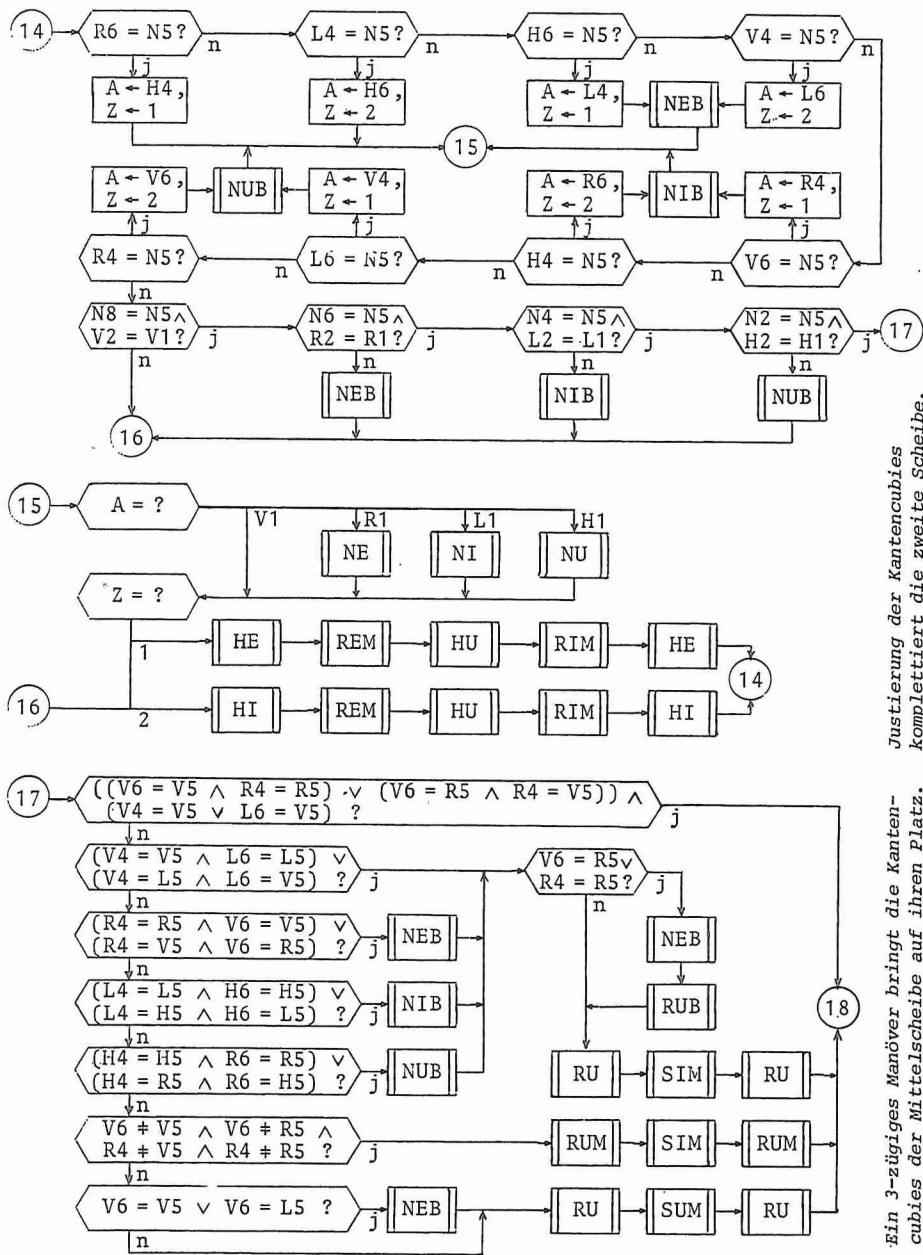


Die innerhalb der Nord-scheibe falsch stehenden Kantenkübes werden nach Süden gedreht, wo sie die vorbereiteten Wegweiser antreffen.

Hier werden die Eckencubies der ersten Scheibe justiert. Jeder falsche Cubie wird zunächst nach rechts-vorn-unten gebracht und sein Stammplatz direkt darüber (also nach rechts-vorn-oben) gedreht. Die erste Scheibe ist nun fertig.



Die Eckencubies der zweiten Scheibe werden zunächst in die richtigezyklische Reihenfolge gebracht und anschließend korrekt orientiert.



NES

```
B ← N1, N1 ← N7, N7 ← N9, N9 ← N3, N3 ← B,
B ← N2, N2 ← N4, N4 ← N8, N8 ← N6, N6 ← B,
B ← V1, V1 ← R1, R1 ← H1, H1 ← L1, L1 ← B,
B ← V2, V2 ← R2, R2 ← H2, H2 ← L2, L2 ← B,
B ← V3, V3 ← R3, R3 ← H3, H3 ← L3, L3 ← B
```

NE

```
NES → Ausgabe "NE"
```

etc.

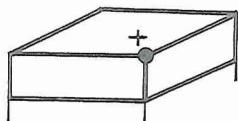
Manöver-Lexikon

Es gibt mehr als 43 Trillionen mögliche R-Positionen, ebenso viele mögliche R-Operationen, und zu jeder möglichen Operation unendlich viele Manöver. Jede Auswahl ist damit zwangsläufig unvollständig.

Die folgende Liste enthält jedoch u.a. alle 3-Zyklen, genauer: zu jedem Kanten- oder Ecken-3-Zyklus ein Manöver, das eine Variation des 3-Zyklus bewirkt. Allgemeiner sind in diesem Sinne alle Operationen, bei denen nicht mehr als 3 Cubies bewegt werden, vertreten. Die naheliegende Idee, zu jeder Variationsklasse höchstens ein Manöver aufzuführen, wurde verworfen, um die Gesamtheit der Möglichkeiten für einige Situationen zu zeigen und ein möglichst direkt anwendbares „Lexikon“ zu erhalten. Die Manöver sind nach der Zyklenstruktur der zugehörigen Operation klassifiziert.

Die Urheberschaft der Manöver im einzelnen gerecht zu dokumentieren, ist ein hoffnungsloses Unterfangen. Offensichtlich wurden und werden die meisten schönen Manöver viele Male unabhängig voneinander entdeckt. Wir haben daher nur in einigen wenigen Fällen Namen angegeben.

(a) Eckencubies: Drehungen



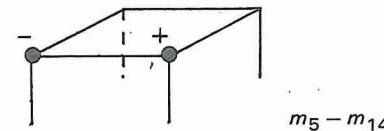
$m_0 - m_4$

$$m_0 = R'URVUV' (6) \rightarrow (+ovr) \cdot (+uvr) (+urh, uhl, ulv) (vr, ul, uv, ru, hu)$$

(Isotwist für die obere Scheibe, s. Abschnitt 3.4)

$$m_1 = (RV'R'V)^2 (8) \rightarrow (+ovr) \cdot (+uvr) (-ulv) (-urh) (vr, ur, vu)$$

(Isotwist der Ordnung 3 für die obere Scheibe, s. Abschnitt 3.4)



$m_5 - m_{14}$

$$m_5 = R(O^2RV'U^2VR')^2R' (13) \rightarrow (+ovr) (-ovl)$$

$$m_{5a} = m_0 O'm'_0 O = R'URVUV' \cdot O' \cdot VU'V'R'U'R \cdot O (14)$$

$$m_{5b} = B'_O \cdot R'O^2ROR'OR \cdot LO^2L'O'LO'L' \cdot B_O (14)$$

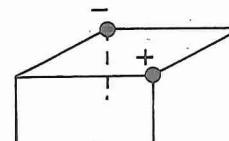
$$m_{10} = V^2R^2H'V'RVR'HR^2V^2O'R'OR (14) \rightarrow (+ovr) (-ovl) \cdot (+ov) (+or)$$

(M. B. Thistlethwaite)

$$m_{11} = R'VRV' \cdot OV'O'V \cdot O'ROR' (12) \rightarrow (+ovr) (-ovl) \cdot (ov, ro, vr)$$

(R. Ahrens)

$$m_{12} = (V'O)^3(VO')^3 (12) \rightarrow (+ovr) (-ovl) \cdot (vo, ro, ho, lo, vl, vu, vr)$$



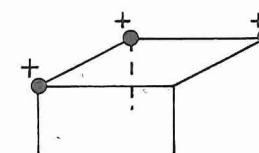
$m_{15} - m_{19}$

$$m_{15} = (O^2L'V \cdot B_{LV})^4 (12) \rightarrow (+ovr) (-oh)$$

(E. Rubik)

$$m_{17} = ORO' \cdot HO'H'O \cdot H'RHR^2 (11) \rightarrow (+ovr) (-oh) (vr, ho, ro)$$

$$m_{20} = (R'U^2R \cdot B_{VL})^4 (12) \rightarrow (+ovr) (-uh)$$



$m_{25} - m_{34}$

$$m_{25} = O^2(VR'V^2R)^2O^2 \cdot LVL'V' (14) \rightarrow (+ovl) (+oh) (+ohr)$$

(M. B. Thistlethwaite)

$$m_{30} = R'O^2ROR'ORO^2 (8) \rightarrow (+ovl) (+oh) (+ohr) \cdot (ov, ol, oh)$$

$$m_{31} = VRH'RHR^2V'O^2 (8) \rightarrow (+ovl) (+oh) (+ohr) \cdot (ol, or, ho)$$

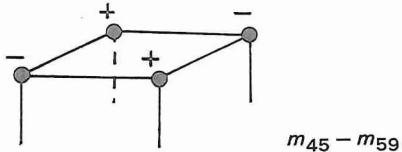
(3-D Jackson)

$$m_{32} = (O^2 R' O' \cdot B_{OHR})^3 (9) \rightarrow (+ovl) (+oh) (+ohr) \cdot (+ol) (+oh)$$

(D. J. Benson)

$$m_{35} = VO' V' R^2 (VU' V^2 U)^2 R^2 O (14) \rightarrow (+ovl) (+orv) (+urh)$$

$$m_{40} = R m_{35} R' (16) \rightarrow (+ovl) (+ohr) (+uvr)$$



$$m_{45} = V(ORO'HO'H'OR')^2 V' (18) \rightarrow (+orv) (-ovl) (+oh) (-ohr)$$

$$m_{50} = R'O^2 ROR' O'ROR' OR (11) \rightarrow (+orv) (-ovl) (+oh) (-ohr) \cdot (ov, ol, or)$$

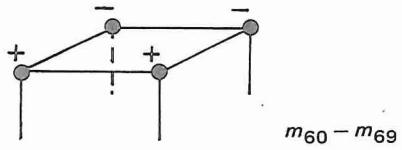
$$m_{51} = R^2 O^2 RO^2 R^2 O (6) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (-ovl) (+oh) (-ohr) \cdot (ov, ol, vr) (oh, or, hr)$

$$m_{52} = (ROR^2 VRV^2 OV)^2 (16) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (-ovl) (+oh) (-ohr) \cdot (+ov) (+ol) (+oh) (+or)$

(D. J. Benson, J. Conway, D. J. Seal)



$$m_{60} = R' H U^2 R H^2 U' H \cdot O^2 \cdot H' U H^2 R' U^2 H' R \cdot O^2 (16) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr)$

(M. B. Thistlethwaite)

$$m_{65} = RO^2 (R^2 O')^2 R^2 O^2 RO^2 (10) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr) \cdot (ol, oh, or)$

$$m_{66} = O^2 R' V R^2 H' R^2 V' R^2 H R' (10) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr) \cdot (or, ol, ho)$

$$m_{67} = V(ROR' O')^2 V' (10) \rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr) \cdot (ov, ho, ro)$$

$$m_{68} = (V' O' VRHOH' R')^2 (16) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr) \cdot (+ov) (+ol) (+oh) (+or)$

(D. J. Benson, J. Conway, D. J. Seal)

$$m_{75} = RL \cdot O \cdot R' L' \cdot V' H' \cdot O \cdot VH (10) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+oh) (-uvr) (-uhl) (vo, or, rv) (ho, ol, lh)$

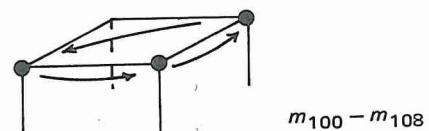
(R. Walker)

$$m_{95} = (O^2 L^2 R' U)^4 (16) \rightarrow$$

$\rightarrow (+orv) (+ovl) (-oh) (-ohr) (+uvr) (-ulv) (+uhl) (-urh)$

(M. B. Thistlethwaite)

(b) Eckencubies: 3-Zyklen



$$m_{100} = RH' RV^2 R' HRV^2 R^2 (9) \rightarrow (ovl, orv, ohr)$$

$$m_{100a} = R^2 V^2 OH^2 O' V^2 OH^2 O' R^2 (10)$$

$$m_{101} = R \cdot HL' H' \cdot R' \cdot HLH' (8) \rightarrow (ovl, orv, hro)$$

$$m_{102} = V^2 U' VO^2 V' UV O^2 V (9) \rightarrow (ovl, orv, roh)$$

$$m_{103} = H' R^2 H' L^2 H R^2 H' L^2 H^2 (9) \rightarrow (ovl, rvo, ohr)$$

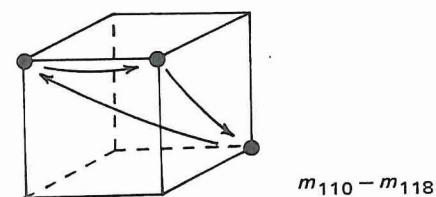
$$m_{104} = V \cdot RHR' \cdot V' \cdot RH' R' (8) \rightarrow (ovl, rvo, hro)$$

$$m_{105} = V \cdot O' H' O \cdot V' \cdot O' HO (8) \rightarrow (ovl, rvo, roh)$$

$$m_{106} = L^2 H^2 L' V^2 LH^2 L' V^2 L' (9) \rightarrow (ovl, vor, ohr)$$

$$m_{107} = HR' V^2 R' H^2 RV^2 R' H^2 R^2 H' (11) \rightarrow (ovl, vor, hro)$$

$$m_{108} = L(U' H^2 UV^2)^2 L' (10) \rightarrow (ovl, vor, roh)$$



$$m_{110} = (R^2 U L^2 U')^2 (8) \rightarrow (ovl, orv, urh)$$

$$m_{111} = V' U^2 V \cdot O \cdot V' U^2 V \cdot O' (8) \rightarrow (ovl, orv, rhu)$$

$$m_{112} = O' \cdot V U' V' \cdot O \cdot V U V' (8) \rightarrow (ovl, orv, hur)$$

$$m_{113} = O H^2 O' \cdot V' \cdot O H^2 O' \cdot V (8) \rightarrow (ovl, rvo, urh)$$

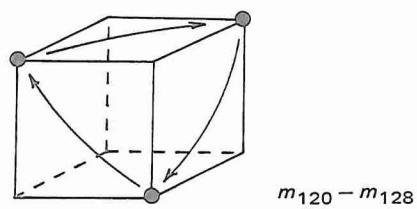
$$m_{114} = O L O' \cdot R^2 \cdot O L' O' \cdot R^2 (8) \rightarrow (ovl, rvo, rhu)$$

$$m_{115} = V \cdot O' H O \cdot V' \cdot O' H' O (8) \rightarrow (ovl, rvo, hur)$$

$$m_{116} = H^2 L^2 U' L O^2 L' U L O^2 L H^2 (11) \rightarrow (ovl, vor, urh)$$

$$m_{117} = H L^2 H^2 L' V^2 L H^2 L' V^2 L' H' (11) \rightarrow (ovl, vor, rhu)$$

$$m_{118} = U^2 R O^2 R U^2 R' O^2 R U^2 R^2 U^2 (11) \rightarrow (ovl, vor, hur)$$



$$m_{120} = R' U^2 R O^2 R U^2 R' O^2 R U^2 R^2 U^2 R (13) \rightarrow (ovl, ohr, uvr)$$

$$m_{121} = O^2 \cdot H' U H \cdot O^2 \cdot H' U' H (8) \rightarrow (ovl, ohr, vru)$$

$$m_{122} = L U' L' \cdot O^2 \cdot L U L' \cdot O^2 (8) \rightarrow (ovl, ohr, ruv)$$

$$m_{123} = V^2 \cdot L' H L \cdot V^2 \cdot L' H' L (8) \rightarrow (ovl, hro, uvr)$$

$$m_{124} = H L' H' \cdot R^2 \cdot H L H' \cdot R^2 (8) \rightarrow (ovl, hro, vru)$$

$$m_{125} = R V' O H^2 O' V O H^2 O' R' (10) \rightarrow (ovl, hro, ruv)$$

$$m_{126} = R' O H^2 O' V' O H^2 O' V R (10) \rightarrow (ovl, roh, vru)$$

$$m_{127} = U H' U' \cdot V^2 \cdot U H U' \cdot V^2 (8) \rightarrow (ovl, roh, uvr)$$

$$m_{128} = R^2 \cdot U' L U \cdot R^2 \cdot U' L' U (8) \rightarrow (ovl, roh, ruv)$$

(c) Eckencubies: orientierungstreue Doppel-Transpositionen

$$m_{200} = (M_R^2 O M_R^2 O^2)^2 (8) \rightarrow (ovl, ohr) (orv, olh)$$

$$m_{210} = (R' U V' U^2 V U' R O^2)^2 (16) \rightarrow (ovl, orv) (olh, ohr)$$

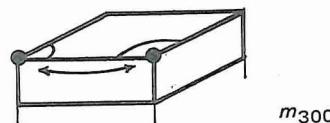
$$m_{211} = V (O R O' R')^3 V' (14) \rightarrow (lov, rvo) (lho, roh)$$

$$m_{220} = V^2 (M_U^2 R M_U^2 R^2)^2 V^2 (10) \rightarrow (ovl, ohr) (ulv, urh)$$

$$m_{225} = (V R V' R')^3 (12) \rightarrow (lov, rvo) (vru, hur)$$

$$m_{230} = (V R' V' R)^3 (12) \rightarrow (ovl, ohr) (orv, uvr)$$

(d) Eckencubies: Sonstiges



$$m_{300} = R' U V' U^2 V U' R (7) \rightarrow (ovl, orv) \cdot (uvr, uhl) (uv, uh) (vl, rv) \\ (\text{Isoswap der Ordnung 2 für die obere Scheibe, s. Abschnitt 3.4})$$

$$m_{310} = O^2 R (O R')^2 (O' R^2)^2 O^2 R (12) \rightarrow (+ovl, roh) (-orv, hol)$$

$$m_{320} = R' V' R L^2 H' R' H L^2 M_V' O H B_V (11) \rightarrow (-ovl, orv) (+olh, ohr)$$

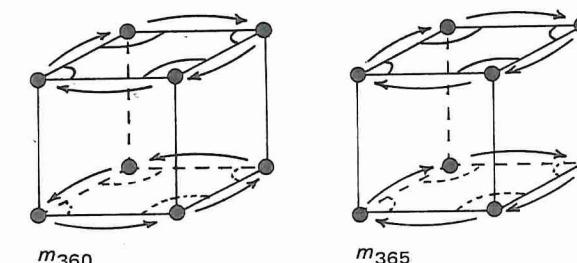
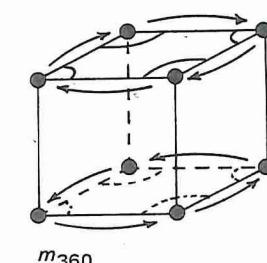
$$m_{333} = H L O L' O' H' (6) \rightarrow (-ovl, orv) (+olh, ohr) (ov, ho, ol) (H. Linihi)$$

$$m_{334} = H R H R' O' H' (6) \rightarrow (-ovl, orv) (+olh, ohr) (+ov, or, lo) (+oh, lh, hr)$$

$$m_{340} = M_U R^2 M_U' R^2 \cdot O^2 V^2 R^2 V^2 R^2 O^2 (10) \rightarrow (ovl, ohr, uvr) (olh, urh, ulv)$$

$$m_{350} = M_R^2 M_V^2 O^2 M_R^2 M_V^2 U^2 (6) \rightarrow (ovl, ohr) (orv, olh) (ulv, urh) (uvr, uhl)$$

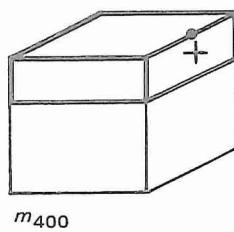
$$m_{355} = M_V^2 M_R^2 O M_V^2 L^2 (M_U^2 V M_U^2 V^2)^2 R^2 O B_R^2 (15) \rightarrow \\ \rightarrow (ovl, orv) (olh, ohr) (ulv, uvr) (uhl, urh)$$



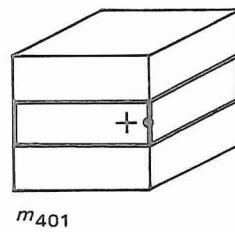
$$m_{360} = M_R^2 M_V^2 O M_R^2 M_V^2 U (6) \rightarrow (ovl, olh, ohr, orv) (ulv, uvr, urh, uhl)$$

$$m_{365} = O^2 M_R^2 O M_R^2 O^2 \cdot M_V^2 U' M_V^2 (8) \rightarrow (ovl, olh, ohr, orv) (ulv, uhl, urh, uvr)$$

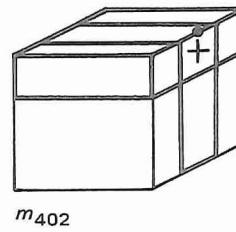
(e) Kantencubies: Drehungen



m_{400}



m_{401}



m_{402}

$$m_{400} = RM_U R^2 M_U' R \text{ (5)} \rightarrow (+or) \cdot (+vl) (hl, ru) (v, l, h, r) \\ (\text{Isoflip für die obere Scheibe, s. Abschnitt 3.4})$$

$$m_{401} = R' VU' RV' \text{ (5)} \rightarrow (+vr) \cdot (+ov, ro, ul, uh) (+orv, luh) (-ovl, roh, ruv) \\ (\text{Isoflip für die O-U-Mittelscheibe, s. Abschnitt 3.4})$$

$$m_{402} = (M_U R)^4 \text{ (8)} \rightarrow (+or) \cdot (+vl) (+lh) (+hr) \\ (\text{Isoflip der Ordnung 2 für die obere Scheibe und für die V-H-Mittelscheibe, s. Abschnitt 3.4})$$

$$m_{405} = R' VU' RV' \cdot M_U' \cdot VR' UV' R \cdot M_U \text{ (12)} \rightarrow (+vr) (+hr) \\ m_{405a} = (M_U R)^2 M_U R^2 (M_U' R)^2 M_U' R^2 \text{ (12)} \\ m_{405b} = (M_V R)^4 (M_V R')^4 \text{ (16)}$$

$$m_{406} = VR' U \cdot R^2 \cdot U' RV' \cdot R^2 \text{ (8)} \rightarrow (+vr) (+hr) \cdot (ovl, uvr, orv, urh, ohr)$$

$$m_{410} = R' VU' RV' \cdot M_U^2 \cdot VR' UV' R \cdot M_U^2 \text{ (12)} \rightarrow (+vr) (+hl)$$

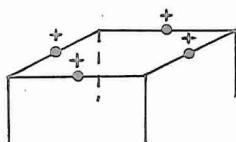
$$m_{415} = RM_U R^2 M_U^2 R \cdot O' \cdot R' M_U^2 R^2 M_U' R' \cdot O \text{ (12)} \rightarrow (+ov) (+or) \\ m_{415a} = (M_U R)^4 O' (M_U R)^4 O \text{ (18)} \\ m_{415b} = (M_U R)^4 (M_U' V')^4 \text{ (16)}$$

$$m_{416} = R' VRV' \cdot OV' O' V \text{ (8)} \rightarrow (+ov) (+or) \cdot (+ovl, uvr) (-orv, roh)$$

$$m_{420} = M_U R^2 M_U^2 RO' R' M_U^2 R^2 M_U' R' OR \text{ (12)} \rightarrow (+ov) (+rh)$$

$$m_{430} = VU^2 M_R' O^2 VM_U^2 \cdot V' U^2 M_R' O^2 V' M_U^2 \text{ (12)} \rightarrow (+vl) (+lh) (+hr) (+rv)$$

$$m_{431} = (M_R O)^4 \text{ (8)} \rightarrow (+ol) (+oh) (+hu) (+uv)$$



m_{435}

$$m_{435} = V^2 M_R' V^2 M_R^2 \cdot O' \cdot M_R^2 V^2 M_R V^2 \cdot O \text{ (10)} \rightarrow (+ov) (+ol) (+oh) (+or) \\ (\text{H. Kraß})$$

$$m_{435a} = R^2 H^2 R^2 O^2 M_R' \cdot O \cdot M_R O^2 R^2 H^2 R^2 \cdot O \text{ (12)} \\ (\text{M. B. Thistlethwaite})$$

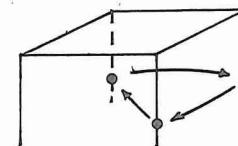
$$m_{435b} = OM_R O^2 M_R' O^2 M_R \cdot O' M_R' O^2 M_R O^2 M_R' \text{ (12)} \text{ (H. Kraß)} \\ m_{435c} = (M_R O)^4 (M_R' O)^4 \text{ (16)}$$

$$m_{470} = (OUB_OVL)^6 \text{ (12)} \rightarrow (+ol) (+lv) (+lu) (+lh) (+ro) (+rv) (+ru) (+rh)$$

$$m_{480} = M_R^2 (UHVRLO)^2 M_R^2 \text{ (14)} \rightarrow$$

$$\rightarrow (+ov) (+ol) (+oh) (+or) (+vl) (+lh) (+hr) (+rv) \\ m_{490} = ((M_R O)^4 B_{OLV})^3 \text{ (24)} \rightarrow \\ \rightarrow (+ov) (+ol) (+oh) (+or) (+uv) (+ul) (+uh) (+ur) (+vl) (+lh) \\ (+hr) (+rv)$$

(f) Kantencubies: 3-Zyklen



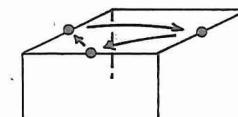
$m_{500} - m_{503}$

$$m_{500} = R^2 M_U' R^2 M_U \text{ (4)} \rightarrow (vr, hl, hr)$$

$$m_{501} = VM_U' RUR' M_U RU' R' V' \text{ (10)} \rightarrow (vr, hl, rh)$$

$$m_{502} = H' M_R H \cdot R^2 \cdot H' M_R' H \cdot R^2 \text{ (8)} \rightarrow (vr, lh, hr)$$

$$m_{503} = H^2 \cdot RM_V R' \cdot H^2 \cdot RM_V' R' \text{ (8)} \rightarrow (vr, lh, rh)$$



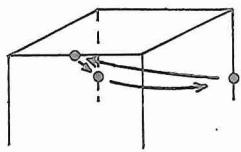
$m_{510} - m_{513}$

$$m_{510} = V^2 OM_R O^2 M_R' OV^2 \text{ (7)} \rightarrow (ov, ol, or)$$

$$m_{511} = ROR' \cdot M_V' \cdot RO'R' \cdot M_V \text{ (8)} \rightarrow (ov, ol, ro)$$

$$m_{512} = M_V \cdot L'O'L \cdot M_V' \cdot L'OL \text{ (8)} \rightarrow (ov, lo, or)$$

$$m_{513} = M_R' OM_R O^2 M_R' OM_R \text{ (7)} \rightarrow (ov, lo, ro)$$



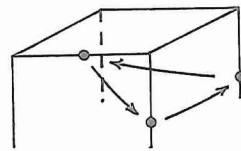
$m_{520} - m_{523}$

$$m_{520} = HM_R H^2 M'_R H (5) \rightarrow (ov, lh, rh)$$

$$m_{521} = M'_U \cdot R' O' R \cdot M_U \cdot R' O R (8) \rightarrow (ov, lh, hr)$$

$$m_{522} = M'_U \cdot HO^2 H' \cdot M_U \cdot HO^2 H' (8) \rightarrow (ov, hl, rh)$$

$$m_{523} = M'_R H' M'_R H^2 M_R H' M_R (7) \rightarrow (ov, hl, hr)$$



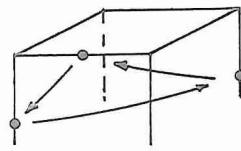
$m_{530} - m_{533}$

$$m_{530} = VO^2 L^2 U^2 HU^2 L^2 O^2 (8) \rightarrow (ov, rv, rh)$$

$$m_{531} = M_U \cdot R' O' R \cdot M'_U \cdot R' O R (8) \rightarrow (ov, rv, hr)$$

$$m_{532} = RO' R' \cdot M'_U \cdot ROR' \cdot M_U (8) \rightarrow (ov, vr, rh)$$

$$m_{533} = R^2 \cdot VM_U V' \cdot R^2 \cdot VM'_U V' (8) \rightarrow (ov, vr, hr)$$



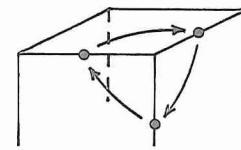
$m_{540} - m_{543}$

$$m_{540} = L^2 \cdot HM_R H^2 M'_R H \cdot L^2 (7) \rightarrow (ov, lv, rh)$$

$$m_{541} = (M'_U VM_U V)^2 (8) \rightarrow (ov, lv, hr)$$

$$m_{542} = L^2 M'_U HO^2 H' M_U HO^2 H' L^2 (10) \rightarrow (ov, vl, rh)$$

$$m_{543} = RLU' M'_R U^2 M_R U' L' R' (9) \rightarrow (ov, vl, hr)$$



$m_{550} - m_{553}$

$$m_{550} = R' O^2 UH'M_U H^2 M'_U H' O^2 U'R (11) \rightarrow (ov, ro, vr)$$

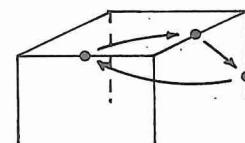
$$m_{551} = OLUR \cdot V \cdot R' U' L' O' \cdot V' (10) \rightarrow (ov, ro, rv) \text{ (E. Rubik)}$$

$$m_{551a} = O^2 H' R' M_V R^2 M'_V R' HO^2 (9)$$

$$m_{552} = VUHO \cdot R \cdot O' H' U' V' \cdot R' (10) \rightarrow (ov, or, vr)$$

$$m_{553} = RHLV \cdot O \cdot V' L' H' R' \cdot O' (10) \rightarrow (ov, or, rv)$$

$$m_{556} = R' VRV' (4) \rightarrow (ov, ro, rv) \cdot (+ovl, roh) \cdot (-orv, vru)$$



$m_{560} - m_{563}$

$$m_{560} = HR^2 O' M'_V O^2 M_V O' R^2 H' (9) \rightarrow (ov, or, rh)$$

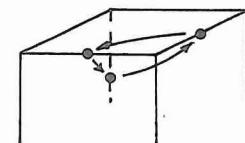
$$m_{561} = HM'_R H' \cdot O \cdot HM_R H' \cdot O' (8) \rightarrow (ov, or, hr)$$

$$m_{561a} = ROROR \cdot O' R' O' R' O' (10)$$

$$m_{562} = VO^2 RM_V R^2 M'_V RO^2 V' (9) \rightarrow (ov, ro, rh)$$

$$m_{563} = R' ORHL VO' V' L' H' (10) \rightarrow (ov, ro, hr)$$

$$m_{565} = O' R' OR (4) \rightarrow (ov, or, hr) \cdot (-ovl, orv) \cdot (+ohr, hur)$$



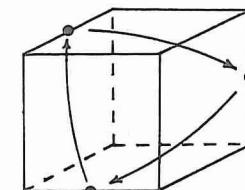
$m_{570} - m_{573}$

$$m_{570} = LM_V L' \cdot O' \cdot LM'_V L' \cdot O (8) \rightarrow (ov, lh, or)$$

$$m_{571} = RH M_R H^2 M'_R H R' (7) \rightarrow (ov, lh, ro)$$

$$m_{572} = O \cdot H' M'_R H \cdot O' \cdot H' M_R H (8) \rightarrow (ov, hl, or)$$

$$m_{573} = RM'_U HO^2 H' M_U HO^2 H' R' (10) \rightarrow (ov, hl, ro)$$



$m_{580} - m_{583}$

$$m_{580} = V'M'_URO^2R'M_URO^2R'V(10) \rightarrow (ol, rh, vu)$$

$$m_{581} = O'VM'_UV^2M_UVO(7) \rightarrow (ol, rh, uv)$$

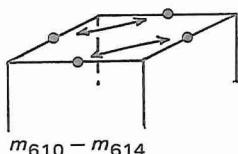
$$m_{582} = V'RM_VR^2M'_VRV(7) \rightarrow (ol, hr, vu)$$

$$m_{583} = R'OM_RO^2M'_ROR(7) \rightarrow (ol, hr, uv)$$

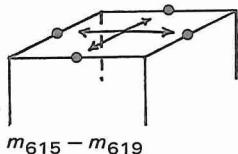
(g) Kantencubies: orientierungstreue Doppel-Transpositionen

$$m_{600} = (R^2M_U^2)^2(4) \rightarrow (vr, hr) (vl, hl)$$

$$m_{605} = (M_R^2M_U)^2(4) \rightarrow (vr, hl) (vl, hr)$$



$m_{610} - m_{614}$



$m_{615} - m_{619}$

$$m_{610} = M_V^2U'M_R^2UM'_RM_V^2M_R(7) \rightarrow (ov, or) (oh, ol)$$

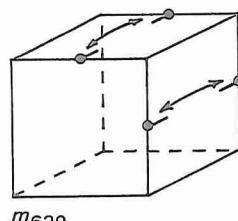
$$m_{611} = VROR'O'V^2L'L'O'LOV(11) \rightarrow (ov, ro) (oh, ol) \text{ (D. E. Taylor)}$$

$$m_{612} = RLV(R^2O^2)^3V'L'R'(12) \rightarrow (ov, ro) (oh, lo) \text{ (D. Singmaster)}$$

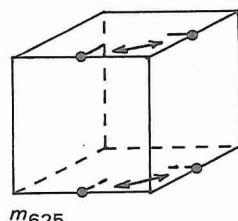
$$m_{615} = M_R^2OM_R^2O^2M_R^2OM_R^2(7) \rightarrow (ov, oh) (ol, or)$$

$$m_{615a} = RLO^2R'L' \cdot V'H'O^2VH(10) \text{ (P. Klerings)}$$

$$m_{616} = R^2L'U' \cdot M'_RHM_RH'M_RHM'_RH' \cdot ULR^2(14) \rightarrow (ov, ho) (ol, or)$$



m_{620}



m_{625}

$$m_{620} = (R^2O^2)^3(6) \rightarrow (rv, rh) (ov, oh)$$

$$m_{625} = U^2M_VM'_RU'M_RU^2M'_VU(8) \rightarrow (ov, or) (uv, ur)$$

$$m_{630} = M'_RU^2M_RU'M_VU^2M'_VU(8) \rightarrow (ov, uv) (or, uh)$$

(h) Kantencubies: Sonstiges

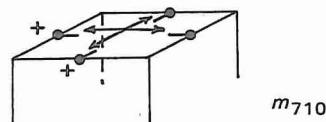
$$m_{700} = M'_UR^2M_U L^2HM_RH'L^2HM'_RH'R^2(12) \rightarrow (+vr, hr) (+vl, hl)$$

$$m_{701} = R^2M'_UR^2M_U \cdot L^2HM_RH'L^2HM'_RH'(12) \rightarrow (+vr, rh) (+vl, hl)$$

$$m_{703} = L^2HM_RH'L^2HM'_RH' \cdot R^2M'_UR^2M_U(12) \rightarrow (+vr, hl) (+vl, hr)$$

$$m_{706} = V^2M_RO'M'_RO'M_ROM'_ROV^2(10) \rightarrow (+ol, oh) (+or, ov)$$

$$m_{707} = M_R^2U'R^2M'_VR^2M_VL^2UM_RU'L^2UM_R(13) \rightarrow (+ov, or) (+ol, oh)$$



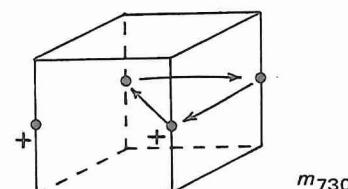
m_{710}

$$m_{710} = VO^2V'O'L'H'O^2HOL(10) \rightarrow (+ov, oh) (+ol, or)$$

$$m_{713} = OH O^2H'R'O'H'R^2HR(10) \rightarrow (+rv, rh) (+oh, ov)$$

(M. B. Thistlethwaite)

$$m_{716} = VUR^2U'R'V'U'V^2UR(10) \rightarrow (+ov, rh) (+or, lv)$$



m_{730}

$$m_{730} = R'M_VRV^2R'M'_VR'M'_UR^2M_UV^2(11) \rightarrow (+vl) (+vr, hl, hr)$$

$$m_{731} = L^2M_UH^2M'_UHM'_RHL^2H'M_RH(11) \rightarrow (+vl) (+vr, hl, rh)$$

$$m_{733} = L^2V'M'_VL^2V'M_RV'M'_UV^2M_U(11) \rightarrow (+vl) (+vr, lh, rh)$$

$$m_{750} = U'M'_RUM_R(4) \rightarrow (ov, ru, ul, uh, vu)$$

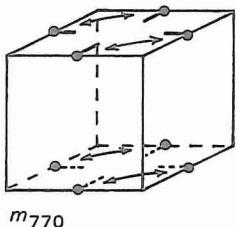
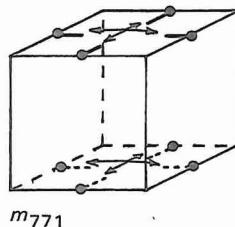
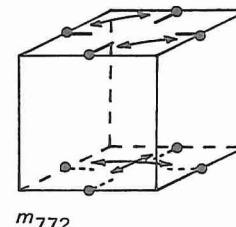
$$m_{755} = OM_R^2O'M_R^2(4) \rightarrow (ov, uh, or) (oh, uv, ol)$$

$$m_{756} = R^2O^2V^2O'M_V^2OV^2O^2M_V^2R^2(10) \rightarrow (ov, ol, or) (uv, ur, ul)$$

$$m_{757} = R^2H^2OM_V^2O'V^2L^2B_V^2(7) \rightarrow (ov, ol, or) (uh, ur, ul)$$

$$m_{760} = M_V^2U'M_R^2U'M'_RM_V^2M_RU^2(8) \rightarrow (ov, ol, oh, or) (ul, ur)$$

$$m_{765} = M_V^2M_R^2U^2M_V^2U'M'_VU^2M_VU'M_R^2U^2(11) \rightarrow (ov, ol, or) (uv, uh) (ul, ur)$$

m₇₇₀m₇₇₁m₇₇₂

$$m_{770} = M_R^2 M_V^2 O M_R^2 O^2 M_V^2 O \text{ (7)} \rightarrow (ov, or) (oh, ol) (uv, ur) (uh, ul)$$

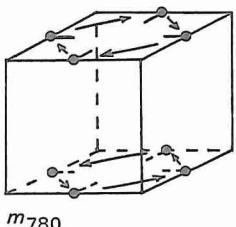
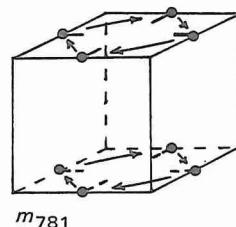
$$m_{771} = (M_R^2 M_V^2 O^2)^2 \text{ (6)} \rightarrow (ov, oh) (ol, or) (uv, uh) (ul, ur)$$

$$m_{772} = M_V^2 U M_R^2 U M_R M_V^2 M_R U^2 M_R^2 \text{ (9)} \rightarrow (ov, or) (oh, ol) (uv, uh) (ul, ur)$$

$$m_{773} = U^2 M_R M_V^2 M_R' O^2 B_O^2 \text{ (5)} \rightarrow (vr, hl) (vl, hr) (ol, ul) (or, ur)$$

$$m_{774} = RLM_U^2 R'L'M_U^2 \text{ (6)} \rightarrow (vr, hl) (vl, hr) (ol, or) (ul, ur)$$

$$m_{775} = M_R' M_U^2 M_R M_V^2 \text{ (4)} \rightarrow (vr, hl) (vl, hr) (ol, ur) (or, ul)$$

m₇₈₀m₇₈₁

$$m_{780} = U M_R^2 M_V^2 U' M_R^2 M_V^2 \text{ (6)} \rightarrow (ov, ol, oh, or) (uv, ur, uh, ul)$$

$$m_{781} = M_R^2 O^2 M_V^2 U M_V^2 O^2 M_R^2 U' \text{ (8)} \rightarrow (ov, ol, oh, or) (uv, ul, uh, ur)$$

$$m_{782} = M_R M_U M_V M_U' \text{ (4)} \rightarrow (vo, oh, hu, uv) (lo, or, ru, ul)$$

$$m_{790} = M_R^2 M_V^2 M_U^2 \text{ (3)} \rightarrow (ov, uh) (oh, uv) (ol, ur) (or, ul) (vl, hr) (vr, hl)$$

(i) Flächencubies: Drehungen („unsichtbare Operationen“)

$$m_{800} = (ORLO^2 R'L')^2 \text{ (12)} \rightarrow (+o) \text{ (M. B. Thistlethwaite)}$$

$$m_{801} = (O'R^2 O^2 R'O^2 R^2)^3 \text{ (18)} \rightarrow (+o) (+r)$$

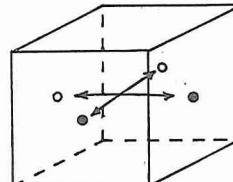
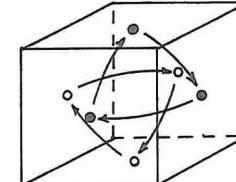
$$m_{802} = M_R' M_U' M_R \cdot O' \cdot M_R' M_U M_R \cdot O \text{ (8)} \rightarrow (+o) (-r)$$

$$m_{803} = M_R' M_U' M_R \cdot O^2 \cdot M_R' M_U M_R \cdot O^2 \text{ (8)} \rightarrow (+o) (+r)$$

$$m_{805} = M_R' M_U^2 M_R \cdot O' \cdot M_R' M_U^2 M_R \cdot O \text{ (8)} \rightarrow (+o) (-u)$$

$$m_{806} = (M_R' M_U^2 M_R \cdot O^2)^2 \text{ (8)} \rightarrow (+o) (+u)$$

(j) Flächencubies: Sonstiges

m₈₉₈m₈₉₉

$$m_{898} = M_R^2 M_U' M_R^2 M_U \text{ (4)} \rightarrow (v, h) (l, r)$$

$$m_{899} = M_U' M_R' M_U M_R \text{ (4)} \rightarrow (o, r, v) (u, l, h)$$

(k) Ecken- und Kantencubies

$$m_{900} = L' O R O' L O^2 R' O R O^2 R' \text{ (11)} \rightarrow (orv, ohr) (ov, or) \\ (\text{M. B. Thistlethwaite})$$

$$m_{905} = R H R' O H' O H O^2 R H' R' O \text{ (12)} \rightarrow (orv, hol) (ov, or) \\ (\text{M. B. Thistlethwaite})$$

$$m_{915} = R O R' O' V' O' V \text{ (7)} \rightarrow (+orv, ohr) (-ohl) (or, ol, rv, ho)$$

$$m_{920} = V' O' H O^2 H' O R O^2 R' V \text{ (10)} \rightarrow (ohl, rhu, vul) (ol, rh, vu) \text{ (R. Walker)}$$

(l) Ecken- und Flächencubies

(m) Kanten- und Flächencubies

$$m_{980} = (L^2 M_U)^2 \text{ (4)} \rightarrow (vr, hl, hr) (v, h) (l, r)$$

$$m_{981} = M_R' M_U^2 M_R \text{ (3)} \rightarrow (vr, hl) (vl, hr) (o, u) (l, r)$$

(n) Manöver von theoretischer Bedeutung

$$m_{990} = R L' V^2 H^2 R L' \cdot O \cdot L R' H^2 V^2 L R' \text{ (13)} \sim U \text{ (D. J. Benson)}$$

$$m_{991} = O H L O L' O' H' \text{ (7)} \rightarrow (-ovl, ohr) (+ohl) (+oh, or) (+ol)$$

$m_{992} = R^2 V L U' R'$ (5) $\rightarrow (orv, hur, lvu, luh, lho, lov, vru)$
 $(ov, ru, rv, ro, vu, uh, hr, lu, lh, lo, lv)$

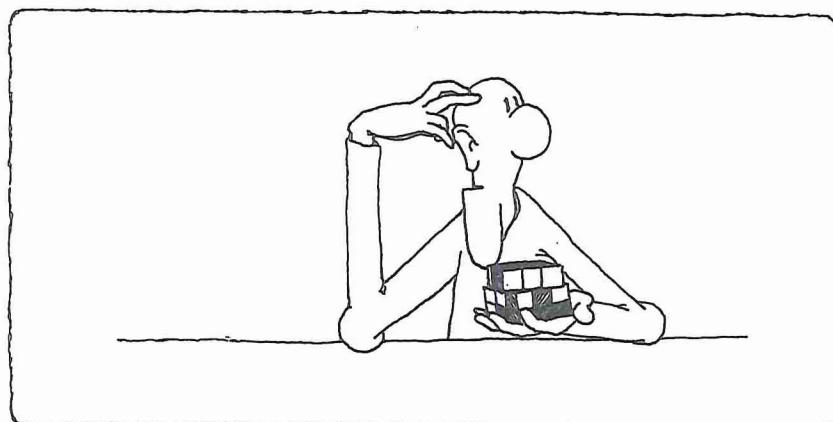
Die von m_{991} und m_{992} bewirkten Operationen erzeugen die Rubiksche Gruppe G (F. Barnes).

$m_{996} = RO^2 U' HU'$ (5) $\rightarrow (-ovl, lho, rvo) (+ohr, vul, uvr, rhu, luh)$
 $(+ov, lh, ur, vr, ol, or, ho) (+ul, rh) (uv, uh)$

m_{996} bewirkt eine mögliche R-Operation der maximalen Ordnung 1260 (J. B. Butler).

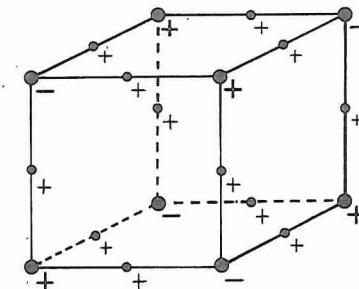
$m_{997} = RB_O$ (1) $\rightarrow (+ovl, olh, ohr, ruv) (+orv) (+ulv, uhl, urh)$
 $(+ov, ol, oh, or, rv) (+uv, ul, uh, ur, lv, hl, rh) (v, l, h, r)$

m_{997} bewirkt eine mögliche Operation der maximalen Ordnung 1260.



GESUCHT

wird ein möglichst kurzes Manöver m für die Operation
 $(+orv) (-ovl) (+olh) (-ohr) (+urh) (-uvr) (+ulv) (-uhl) (+ov)$
 $(+ol) (+oh) (+or) (+uv) (+ul) (+uh) (+ur) (+vl) (+lh) (+hr) (+rv).$



Achtung: m dreht alle Ecken- und Kantencubies auf der Stelle um, benachbarte Eckencubies in verschiedene Richtung.

Zweckdienliche Angaben sind direkt an den Autor Dr. Christoph Bandelow, Haarholzer Straße 13, 4630 Bochum, zu senden. Für die kürzesten der bis zum 1.9.1982 eingehenden Manöver sind insgesamt mehr als

1000,- DM Belohnung

in folgender Aufteilung ausgesetzt: (1) 300,-DM, (2) 200,-DM, (3) 100,- DM, (4)-(15) Buchpreise im Gesamtwert bis zu 500,-DM. Alle Gewinner erhalten zusätzlich ein Exemplar der 2. Auflage dieses Buches bei Erscheinen. Bei gleicher Manöverlänge entscheidet der Zeitpunkt des Eingangs, die Schönheit des Manövers oder das Los. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Namen der Informanten und ihre Manöver werden nicht vertraulich behandelt, sondern am Vieweg-Stand auf der Frankfurter Buchmesse 1982 öffentlich ausgehängt.

Jedes nach dem 1.9.1982 aber vor Erscheinen der 2. Auflage dieses Buches eingehende Lösungsmanöver, das kürzer als alle zuvor eingesandten ist, wird gleichfalls mit einer Belohnung bedacht. Das beste Manöver sowie eine neue Such-Anzeige werden in der 2. Auflage dieses Buches veröffentlicht.

Literatur- und Adressen-Verzeichnis

(a) Allgemeine Cubologie

Bandelow, C.: Rubiks Zauberwürfel. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1981, 227–244.
Bibliographisches Institut, Mannheim 1981.

Hofstadter, D. R.: The Magic Cube's cubies ... Scientific American 3/1981, 20–38.
(Deutsche Übersetzung in Spektrum der Wissenschaft 5/1981, 16–29.)

Singmaster, D.: Notes on Rubik's 'Magic Cube'. 1979. 5. Aufl. bei Enslow Publishers,
Hillside (New Jersey, USA) 1980. 76 S.

(b) Strategien und Manöver-Sammlungen

Backhaus, W. und Spors, H.: Das Buch zum Zauberwürfel. Marion Hildebrand Verlag,
Berlin 1980. 2. Aufl. 1981. 86 S. ca. DIN A6.

Beasley, J. D.: A solution to the twisted cubes. 1979. 12 S. (7 St. James Rd., Harpenden,
Herts, Großbritannien).

Benson, D., Conway, J. H. und Seal, D. J.: Solving the Hungarian Cube in less than 100
moves. 1980. 7 S. (University of Cambridge, 16 Mill Lane, Cambridge CB2 1SB,
Großbritannien)

Berlekamp, E. R., Conway, J. H. und Guy, R. K.: The Hungarian Cube — Búvös Kocka.
Chapter 24 of "Winning Ways". London, Academic Press 1981. Ca. 10 S.

Bild der Wissenschaft 11/1980, 174–177, 12/1980, 180–187, 4/1981, 99–106.

Buhler, J. P.: So you want to solve the Magic Cube? 1980. 7 S. (Reed College, Portland,
Oregon 97202, USA)

Cairns, C. und Griffiths, D.: Teach yourself cube-bashing. 1979. 7 S. (ICL Dataskil,
118–128 London St., Reading RG1 4SU, Großbritannien)

Deledicq, A. und Touchard, J. B.: Le Cube Hongrois (mode d'emploi). 1981. 76 S.
(Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, 2. Place Jussieu,
75005 Paris, Frankreich)

Endl, K.: Rubik's Cube. Würfel-Verlag, Gießen 1980. 2. Aufl. 1981, 54 S.

Gagola, G. G.: An algorithm for the Rubik Cube. 1980. 6 S. (Texas A & M University,
College Station, Texas 77843, USA)

Gaskin, J. S.: Cubist rescue service — emergency kit. 1980. 4 S. (5 Meadow Lane,
Fetcham, Leatherhead KT22 9UW, Surrey, Großbritannien)

Jackson, B. („3-D“): The cube dictionary. 1980. 14 S. handgeschrieben. (Dept. of Math.,
University of California Santa Cruz, Ca. 95064, USA)

Ollerenshaw, D. K.: The Hungarian Magic Cube. Bull. Inst. Math. Appl. 16, 86–92. 1980.

Der Spiegel 19.1.1981, 181–184 (A. Kunkel).

Trajber, J.: Der Würfel. Falken-Verlag, Niedernhausen 1981. 144 S.

Waldhäuser Spiegel 4/1981, 16–17 (H. Hermans).

(c) Mathematische Cubologie

Celmins, U.: The Hungarian Magic Cube puzzle. Annals of Discrete Mathematics 9,
13–20. North-Holland Publishing Company 1980.

Conder, M. D. E.: On generating the group of the 'Magic Cube' by two elements. 1980.
5 S. (Dept. of Math., University of Otago, P.O. Box 56, Dunedin, Neu Seeland)

Halberstadt, E.: Cube hongrois et théorie des groupes. Pour la Science 8/1980, 23–36.

Mrowka, M. und Weber, W. J.: Der Ungarische Würfel im Unterricht. Praxis der Mathe-
matik 5/1981, 129–137.

Neumann, P. M., Stoy, G. A. und Thompson, E. C.: The group theory of the Hungarian
Magic Cube. Chapter 19 of "Groups and Geometry". Math. Inst. of Oxford 1980.
9 S.

Perjés, Z.: On Rubik's Cube. 1980. 19 S. (Central Research Institute for Physics, Bud-
apest 114, P.O.B. 49, Ungarn)

Taylor, D. E.: The Magic Cube. 1978. 19 S. handgeschrieben. (Dept. of Pure Math.,
University of Sydney, New South Wales, 2006, Australien)

Weber, W. J.: Die didaktischen Möglichkeiten des Ungarischen Würfels. Praxis der Mathe-
matik 2/1981, 33–38.

Weber, W. J.: Ein Problem der räumlichen Geometrie und seine Lösung mit Hilfe des
Ungarischen Würfels. math. did. 1980, 219–224.

(d) Computer-Cubologie

Dauphin, M.: Un cube pas comme les autres. Mathématique et Pédagogie 11/1979,
23–29.

(e) Technische Cubologie

Rubik, E.: Ungarische Patentschrift Nr. 170 062 vom 30.1.1975, 28.10.1976, 31.12.
1977.

(f) Kurzberichte

The Mathematical Intelligencer, 1/1979: The Hungarian Magic Cube (D. Singmaster). —
The Observer, 17.6.1979 (40): Six-sided magic (D. Singmaster). — Frankfurter Rund-
schau, 12.4.1980: Der Würfel des Teufels (T. Werneck). — Stuttgarter Zeitung, 12.4.
1980: Der Rubik-Würfel. — Die Welt, 24.4.1980: Rubik's Cube bringt Tüftler zur Ver-
zweiflung. — Mainzer Allgemeine Zeitung, 5/1980: Professor orderte 300 Geduldspiele.
— Frankfurter Allgemeine Zeitung, 13.6.1980: Das Geduldsspiel in der dritten Dimen-
sion (R. Kirst). — Süddeutsche Zeitung, 12.7.1980 (142): Fassen Sie das Ding nicht an!
(G. Obermair). — Die Zeit, 12.12.1980 (59): Puzzle um acht Ecken, eine Erfindung
bringt Millionen ins Tüfteln (S. Naumann). — Stern, 23.12.1980 (140–143): Mein Hit,
der hat 8 Ecken; eine Million Deutsche suchen nach dem Dreh (P. Juppenlatz). — West-
falenpost, 14.1.1981: Nach dem Würfel-Boom rollt jetzt die Lösungswelle. — TV Hören
und Sehen 5/1981: Das Würfel-Fieber (6 Cartoons von S. Arnemann).

(g) Clubs

Rubik's Cube Club: Rainer Seitz, Amselweg 12, D-6458 Rodenbach.

(h) Sonstige Adressen

Sonderausführungen von Rubik's Cube, die für Blinde geeignet sind, werden von folgen-
den Institutionen angeboten: (1) Deutsche Blindenstudienanstalt, Am Schlag 8, D-3550
Marburg, Lahn 1 (1981: DM 24,80). (2) Verein zur Förderung der Blindenbildung e.V.,
Bleekstr. 71, D-3000 Hannover 71 (1981: DM 29,85 für Würfel und Anleitung in Blin-
dendruck oder Normalschrift).

Stichwort-Verzeichnis

Abbildung 29
–, identische 36
–, inverse 30
Abel, N. H. 34
abelsch 34
Achtflach 98
Ahrens, R. 79, 117
alternierende Gruppe 38
„Anaconda multicolor“ 89
„Anakonda“ 80, 85
Antiquark 51
Äquivalenzklasse 32
Äquivalenzrelation 32
Argument 29
Arnemann, S. 133
Assoziativgesetz, verallgemeinertes 34
Assoziativität 34
Ausgangszustand 2
Automorphismus 41
–, innerer 42

Backhaus, W. 132
Bahn 46
Barnes, F. 55, 73, 129
Baryon 51
Beasley, J. D. 132
Benson, D. J. 54, 90, 118, 119, 129, 132
Berlekamp, E. R. 132
Bewegung 40
Bewegungszug 7, 25, 26
Bijektion 30
bijektiv 30
Bildelement 29
Blindenwürfel 133
Buhler, J. P. 132
„Buntanakonda“ 89
Bürger, R. 108
Butler, J. B. 56, 104, 130

Cairns, C. 132
Cantor, G. 28
Celmins, U. 133
Conder, M. D. E. 133
Conway, J. H. 74, 118, 119, 132
Corbeck, H. VII
Cube 2
Cubie 2
Cubizil 5
Cubologie VI

Dauphin, M. 104, 133
Deckbewegung 40
–, eigentliche 41
–, uneigentliche 62

Deledicq, A. 132
Diedergruppe 59
direktes Produkt 42
disjunkt 29
Dodekaeder 99
–, magisches 99
Domino, magisches 81, 102
Doppel-Transposition 24, 37
Drehgruppe 40, 101
Drehspiegelung 62
Durchschnitt 29

Ebenenspiegelung 62
Eckenachse 26
Eckencubie 3
Eins-Element 34
Element (einer Menge) 29
–, inverses (einer Gruppe) 34
–, neutrales (einer Gruppe) 34
Endl, K. 132
Endomorphismus 41

Fabel, K. 97
falsch orientiert 45
„Falsche Buntanakonda“ 89
Fehlstellung 37
Flächenachse 26
Flächencubie 3

Gagola, G. G. 132
Gall, R. VII, 16, 90, 108
Gaskin, J. S. 132
„Gedrehte Ringe“ 79, 84
„Gedrehte Spitzen“ 79, 84
Gegenfarbe 56
Golomb, S. W. 51
Goto, D. 72
Griffiths, D. 132
Gruppe 34
–, endliche 35
Guy, R. K. 132

Halberstadt, E. 133
Hermans, H. 132
Hexaeder 99
Hofstädter, D. R. 132
Höhe (einer Stufe) 105
Homomorphismus 41
Hühnersprache 17

Ikosaeder 99
injektiv 30
Inkmann, F. 108
Inversion 37

Isoflip 72, 122
Isolation 72
isomorph 41
Isomorphismus 41
Isoswap 74, 121
Isotwist 72, 116

Jackson, B. („3-D“) 117, 132
Juppenplatz, P. 133

Kantenachse 26
Kantencubie 3
Kanten-Sechseck 80
„Kanten-Sechseck“ 86, 89
kartesisches Produkt 31
Kirst, R. 133
Kleinsche Vierergruppe 59
Klerings, P. 126
Kombination 66
kommutativ 34
Kommutativität 34
Kommutator 54
Kommutatorgruppe 54
Komplexprodukt 42
Komposition 30
kongruent 32
Konjugation 48, 69
konjugierte Elemente 70, 71
Konjugiertenklasse 71
Kranzprodukt 55
Kraß, H. 123
Krüger, N. VII
Kunkel, A. 132

Länge eines Manövers 8
– einer Strategie 9
Lieblingsmanöver 8, 27, 53, 54, 65, 67, 88, 90
linksdrehender Eckenzyklus 51
Linksdrehung 6
Loyd, S. 91, 95

Manöver 8, 26
–, inverses 8
–, leeres 40
Manövergruppe, große 40
–, kleine 40
Menge 28
–, leere 29
Meson 51
Mittelscheibenzug 6
Modell, großes 46
–, kleines 43
modulo 32
Mrowka, M. 133

nach links verdreht 44
nach rechts verdreht 44
Naumann, S. 133
Neumann, P. M. 133

Normalstruktur 55
Normalteiler 42

Obermair, G. 133
Oktaeder 98
Ollerenshaw, D. K. 132
Operation 21, 46
–, mögliche 21
–, unmögliche 46
operieren einer Gruppe auf einer Gruppe 64
– – – – Menge 45
Orbit 46
Ordnung einer Gruppe 35
– eines Gruppenelements 55
Orientierung 12, 44
orientierungstreuer Zyklus 51

Perjés, Z. 133
Permutation 36
–, gerade 37
–, ungerade 37
platonischer Körper 98
–, magischer 99
Plus-Punkt-Seite 78
Polyeder 98
–, konvexes 98
–, regelmäßiges 98
Position 46
–, mögliche 46
–, unmögliche 46
– des Superwürfels 95
Präfix 71
„Pseudoanakonda multicolor“ 89
Punktspiegelung 62
„Python“ 80, 85

Quadratgruppe 56
Quark 51
Quaternionengruppe 60

Randscheibenzug 5
rechtsdrehender Eckenzyklus 51
Rechtsdrehung 6
Reflexivität 32
Relation 31
Renn-Würfel 16
richtig orientiert 44, 45
R-Manöver 40
R-Operation 45
–, mögliche 45
–, unmögliche 45
R-Position 45
–, mögliche 5, 46
–, unmögliche 46
– des Superwürfels 94
Rubik, E. V., VI, 30, 101, 125, 133
Rubikisch 17
Rubiksche Gruppe 45, 52

„Schachbrettwürfel“ 75, 82
 Scheibe 2
 Scheibenzug 6
 Schiebepuzzle 91, 95
 Schift 71
 Schmiermittel 16
 Seal, D. J. 72, 118, 119, 132
 „Sechs Diagonalen“ 86, 89
 „Sechs Doppel-L“ 87, 90
 „Sechs H“ 87, 90
 „Sechs Minus“ 90
 „Sechs-Plus-Muster“ 77
 „Sechs Plus-Punkte“ 83
 „Sechs Punkte“ 75, 82
 sechs sechsfarbige Seiten 90
 „Sechs T“ 87, 90
 „Sechs Trikolen“ 88, 90
 „Sechs U“ 87, 90
 Seitz, R. 133
 semidirektes Produkt 42
 Singmaster, D. VII, 95, 126, 132, 133
 Spitze 79
 Spors, H. 132
 Stoy, G. A. 133
 Strategie 9
 streng orientierungstreu 24
 Stufe 104
 Stufenleiter 104
 Suffix 71
 Superdodekaeder 101
 „Superflip“ 53, 54, 88, 90
 „Superfliptwist“ 88, 90
 Superplaton 101
 Superwürfel 91
 surjektiv 30
 Symmetrie (einer Relation) 32
 Symmetriegruppe 62
 symmetrische Gruppe 36
 Taylor, D. E. 126, 133
 Teilmenge 29
 Tetraeder 98
 Thistlethwaite, M. B. 16, 104, 117, 118,
 119, 123, 127, 128, 129
 Thompson, E. C. 133
 Touchard, J. B. 132
 Trajber, J. 132
 Transitivität 32
 Transposition 32
 Tupel, n-tupel 31
 umorientierender Zyklus 51
 Untergruppe 35
 —, erzeugte 38
 —, invariante 42
 Variation 61, 65
 — sklasse 65
 Vereinigung 29
 „Vertauschte Ringe“ 79, 84, 89
 „Vertauschte Spitzen“ 79, 84
 Vielflach 98
 „Vier Diagonalen“ 86, 89
 „Vier Diagonalen und zwei Plus“ 86,
 89
 Vierflach 98
 „Vier orthogonale Minus“ 90
 „Vier parallele Minus“ 90
 „Vier Plus“ 83
 „Vier Plus und zwei Schachbrettseiten“
 83
 „Vier Punkte“ 75
 „Vier Trikolen“ 88, 90
 „Vier U“ 90
 Vorzeichen einer Permutation 37
 Walker, R. 79, 80, 89, 119, 129
 Weber, W. J. 133
 „Weihnachtspaket“ 77, 83, 89
 Werneck, T. 133
 Würfel, $2 \times 2 \times 2$ - 101, 102
 „Würfel im Würfel“ 79, 85
 Zentrum 37
 Zug 5
 Zwanzigflach 99
 Zwölfflach 99
 Zyklenstruktur 69
 zyklische Gruppe 36, 55
 Zyklus, n-Zyklus 21, 36, 37
 v, h, r, l, o, u 4
 ro, vo usw. 4, 5
 ohr, vul usw. 4, 5
 $V, H, R, L, O, U, V', V^2$ usw. 6
 M_V, M'_V, M_V^2 usw. 6
 B_V, B'_V, B_V^2 usw. 7
 B_{OV}, B_{OVL} usw. 26, 27
 $b_V, b'_V, b_V^2, b_{OV}, b_{OVL}$ usw. 41
 s_M 62
 S_h, S_A 36
 A_n 38
 C_n 35, 36
 D 40
 S 62
 Zum „kleinen Modell“ gehören:
 $P(29, 45), P^*(45), M(40),$
 $G(45), G^*(45), \pi: M \rightarrow G(45).$
 Zum „großen Modell“ gehören:
 $\bar{P}(46), \bar{P}^*(46), \bar{M}(40),$
 $\bar{G}(46), \bar{G}^*(46), \bar{\pi}: \bar{M} \rightarrow \bar{G}(46).$