תרגיל 4 - IML

שאלה 1:

נראה שקילות:

$b \Longleftarrow a$: נתון $\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]=0$. מתקיים

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]=0\iff\forall\varepsilon_0>0\ \exists m_0\ \forall m>m_0\ \left|\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]\right|<\varepsilon_0\\
\iff&\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]=0\iff\forall\varepsilon_0>0\ \exists m_0\ \forall m>m_0\ \ \mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]<\varepsilon_0
\end{aligned}$$

יהיו $\delta,\varepsilon>0$. נבחר $\varepsilon_0=\varepsilon\delta$. אז קיים m_0 כך שלכל $m>m_0$ מתקיים

$$\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]<\varepsilon\delta$$

ממרקוב ($L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)$ הינו משתנה מקרי אי שלילי כי $L_{\mathcal{D}}$ מוגדר להיות תוחלת של פונקציית loss שהיא אי שלילית) מתקיים

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)>\varepsilon\right)\le\frac{\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]}{\varepsilon}<\frac{\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon}=\delta\\
\iff&\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\ge\varepsilon\right)\le1-\delta
\end{aligned}$$

נסמן $m\left(\varepsilon,\delta\right)=m_0$ ונקבל את הדרוש.

$a \Longleftarrow b$: נתון שלכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $m\left(\varepsilon,\delta\right)$ כך שלכל $m\ge m\left(\varepsilon,\delta\right)$ מתקיים:

$$\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\le\varepsilon\right)\ge1-\delta$$

יהי $\varepsilon>0$. אז לכל $m\ge m\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ מתקיים

$$\left(*\right)\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)>\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

כעת:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]&=\int_{x=0}^{x=1}x\cdot\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)\\
&=\int_{x=0}^{x=\frac{\varepsilon}{2}}x\cdot\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)+\int_{x=\frac{\varepsilon}{2}}^{x=1}x\cdot\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)\\
&\le\int_{x=0}^{x=\frac{\varepsilon}{2}}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)+\int_{x=\frac{\varepsilon}{2}}^{x=1}1\cdot\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)\\
&=\frac{\varepsilon}{2}\int_{x=0}^{x=\frac{\varepsilon}{2}}\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)+\int_{x=\frac{\varepsilon}{2}}^{x=1}\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)=x\right)\\
&=\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\le\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&<\frac{\varepsilon}{2}\cdot1+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מ־$(*)$ ומכך שהסתברות חסומה ע"י 1. סה"כ ראינו שבהנתן $\varepsilon>0$ קיים $m_0=m\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ כך שלכל $m\ge m_0$ מתקיים $\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]<\varepsilon$ וכיוון ש־ $L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)$ אי שלילי זה שקול לכך ש־ $\left|\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]\right|<\varepsilon$, וכל זה שקול ל־ $\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left[L_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right)\right]=0$ כדרוש.

שאלה 2:

יהיו $\mathcal{X}=\mathbb{R}^2, \mathcal{Y}=\{0,1\}$, $\mathcal{H}=\{h_r \mid r\in\mathbb{R}_+\}$ ו־$h_r(x)=1_{[||x||_2\leq r]}$.
צ"ל ש־$\mathcal{H}$ היא למידה PAC ושמתקיים:

$$m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)\leq\frac{\log(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon}$$

נגדיר את $\mathcal{A}$ להיות אלגוריתם ה־ERM הבא: בהנתן training set S מחזיר את h_S - המעגל עם הרדיוס הקטן ביותר שמכיל את כל הדגימות x_i ב־S עם $y_i=1$. נסמן את רדיוסו ב־ r_S.
נניח ריאלייזביליות. יהי h^* מעגל עם שגיאת הכללה 0. נסמן את הרדיוס של h^* ב־r^*.
יהיו $\varepsilon,\delta>0$. יהי $r\leq r^*$ עבורו $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}\left(\{x\mid r\leq||x||\leq r^*\}\right)=\varepsilon$. נגדיר $E=\left\{x\in\mathbb{R}^2\mid r\leq||x||\leq r^*\right\}$.
כעת, ההסתברות ש־$L_{\mathcal{D}}\left(h_S\right)\geq\varepsilon$ חסומה מלמעלה ע"י ההסתברות שאף דגימה ב־S לא נמצאת ב־E. כלומר כל הנקודות ב־S נדגמו ברדיוס שקטן מ־r, כלומר שגיאה גדולה יותר מ־ε (לא יתכן שידגמו נקודות ברדיוס שגדול מ־r^* בגלל ש־h^* אופטימלית).
הסתברות לנקודה ב־E היא ε, ולכן ההסתברות לא ליפול שם היא $1-\varepsilon$. סה"כ, כיוון שיש m דגימות ב־S מתקיים

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}\left(L_{\mathcal{D}}\left(h_S\right)\geq\varepsilon\right)\leq(1-\varepsilon)^m$$

מהתכונה הנתונה לנו בתרגיל: $1-\varepsilon\leq e^{-\varepsilon}$ נקבל $(1-\varepsilon)^m\leq e^{-\varepsilon m}$.
אנחנו רוצים שההסתברות תהיה קטנה מ־δ, נמצא איזה m נצטרך לפי החסם הזה:

$$\delta\geq e^{-\varepsilon m}\iff\delta e^{\varepsilon m}\geq1\iff e^{\varepsilon m}\geq\frac{1}{\delta}\iff\log_e\left(e^{\varepsilon m}\right)\geq\log_e\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

$$\iff\varepsilon m\geq\log_e\left(\frac{1}{\delta}\right)\iff m\geq\frac{\log_e\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\varepsilon}$$

לכן מהמינימליות של $m_{\mathcal{H}}$ נקבל ש־$m_{\mathcal{H}}\left(\varepsilon,\delta\right)\leq\frac{\log_e\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\varepsilon}$. סה"כ הראינו שלכל $\varepsilon,\delta>0$ ולכל $m\geq\frac{\log_e\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\varepsilon}\geq m_{\mathcal{H}}\left(\varepsilon,\delta\right)$ מתקיים $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}\left(L_{\mathcal{D}}\left(h_S\right)\geq\varepsilon\right)\leq\delta$ ולכן $\mathcal{H}$ היא למידה PAC.

שאלה 3:

תהי $\mathcal{H}=\{h_1,...,h_N\}$ מחלקת היפוטזות סופית. מימד ה־VC שלה בהכרח סופי (לא יתכן שקיימת תת קבוצה של $\mathcal{H}$ בגודל יותר מ־$|\mathcal{H}|$ שמנתצת). נסמן $VC-dim\left(\mathcal{H}\right)=x$. אז בהכרח $2^x\leq|\mathcal{H}|$ (מהגדרת ניתוץ). **האם אפשר להניח ש־ $\mathcal{Y}=\{0,1\}$?** ולכן $x\leq\log_2|\mathcal{H}|$ וכיוון ש־x מספר שלם מתקיים $x\leq\lfloor\log_2|\mathcal{H}|\rfloor$

שאלה 4:

יהיו $\mathcal{X}=\{0,1\}^n$ ו־$\mathcal{Y}=\{0,1\}$. לכל $I\subseteq[n]$ נגדיר את הparity function:

$$h_I(x)=\left(\sum_{i\in I}x_i\right)\mod 2$$

$\mathcal{H}_{\text{parity}}=\{h_I\mid I\subseteq[n]\}$. נטען כי $VC-dim\left(\mathcal{H}_{\text{parity}}\right)=n$. מתרגיל 3 אנו יודעים שמתקיים

$$VC-dim\left(\mathcal{H}_{\text{parity}}\right)\leq\lfloor\log_2|\mathcal{H}_{\text{parity}}|\rfloor=\log_2 2^n=n$$

כעת נראה שקיימת תת קבוצה $C\subset\mathcal{X}$ בגודל n אשר מנותצת ע"י $\mathcal{H}$. נגדיר

$$C=\{(x_1,...,x_n)\in\{0,1\}^n\mid\forall i\in[n],\forall j\neq i,x_i=1,x_j=0\}=\{e_1,...,e_n\}$$

מספר הפונקציות $h:C\to\mathcal{Y}$ הוא 2^n. לכל $I\subseteq[n]$ הפונקצייה $h_I\in\mathcal{H}$ מקיימת

$$h_I\left(x\right)=\left(\sum_{i\in I}x_i\right)\mod 2$$

נטען שהצמצום של h_I ל־C מקיים

$$h_I\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in C_I:=\{e_i\mid i\in I\}\\0 & x\in C\setminus C_I\end{cases}$$

וכך נראה ש־$\mathcal{H}$ מנותצת את C. עבור $I \subseteq [n]$, לכל $e_j \in C$ מתקיים

$$h_I\left(e_j\right)=\left(\sum_{i\in I} x_i\right) \mod 2=\begin{cases}1 & j\in I\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ולכן בהנתן $I \subseteq [n]$, הפונקציה ששולחת את הוקטורים $C_I := \{e_i \mid i \in I\}$ ל־1 ואת שאר הוקטורים ב־C ל־0 היא בדיוק h_I (מצומצמת ל־C). סה"כ הראינו שכל הפונקציות $h : C \to \mathcal{Y}$ קיימות ב־$\mathcal{H}$ (אחרי צמצום ל־C) ולכן C מנותצת ע"י $\mathcal{H}$.

שאלה 5:

בהנתן מספר k, תהי $\left([a_i,b_i]\right)_{i=1}^{k}$ קבוצה של k אינטרוולים על $\mathbb{R}$ ונגדיר את האיחוד שלהם $A=\bigcup_{i=1}^{k}[a_i,b_i]$ (נניח שהם זרים זה לזה).
מחלקת ההיפותזות $\mathcal{H}_{k-intervals}$ כוללת את הפונקציות

$$h_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

נטען כי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{k-intervals}\right)=2k$. נקח

$$C=\{x_1,...,x_{2k}\}$$

עבור $h_A \in \mathcal{H}_{k-intervals}$ אשר מקיימת

$$h_A\left(x_1\right)=1,h_A\left(x_2\right)=0,h_A\left(x_3\right)=1,...,h_A\left(x_{2k-1}\right)=1,h_A\left(x_{2k}\right)=0$$

נשים לב שיש k איברים אותם h_A שולחת ל־1 ובין כל שני איברים כאלה יש איבר שנשלח ל־0. כלומר צריך k אינטרוולים ב־A. לכל h_A אחר צריך פחות אינטרוולים.
נראה כי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{k-intervals}\right)<2k+1$. נניח בשלילה ש־ $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{k-intervals}\right)\ge 2k+1$. אז קיימת קבוצה $C=\mathbb{R} \supseteq \{x_1<...<x_{2k+1}\}$ שמנותצת ע"י $\mathcal{H}_{k-intervals}$. בפרט קיימת הפונקציה $h_A \in \mathcal{H}$ כך ש־ $A=\bigcup_{i=1}^{k}[a_i,b_i]$, אשר מקיימת

$$h_A\left(x_1\right)=1,h_A\left(x_2\right)=0,h_A\left(x_3\right)=1,...,h_A\left(x_{2k}\right)=0,h_A\left(x_{2k+1}\right)=1$$

נשים לב שיש $k+1$ איברים ש־h_A שולחת ל־1. בין כל שני איברים ש־h_A שולחת ל־1, יש איבר שהיא שולחת ל־0. כלומר יש סה"כ $k+1$ אינטרוולים **זרים** ב־A, בסתירה לכך שיש k בלבד כאלו.

כעת נניח ש־A היא כל איחוד סופי של אינטרוולים, כלומר k לא מוגבל. אזי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{intervals}\right)=\infty$. נוכיח: מתקיים

$$\mathcal{H}_{intervals}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_{k-intervals}$$

נניח בשלילה ש־ $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{intervals}\right)=2k-1$ עבור $2\le k\in\mathbb{N}$ כלשהו. אבל קודם הוכחנו כי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{k-intervals}\right)=2k$ לכן קיימת $C\subset\mathbb{R}$ שמנותצת ע"י $\mathcal{H}_{k-intervals}$ וכיוון שמתקיים ש־ $\mathcal{H}_{k-intervals}\subset\mathcal{H}_{intervals}$, בפרט C מנותצת ע"י $\mathcal{H}_{intervals}$ ־ כלומר $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{intervals}\right)\ge 2k$ בסתירה להנחה.

שאלה 6:

נטען כי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{\text{con}}\right)=d$. נראה כי ישנה קבוצה מנותצת מגודל d:
נגדיר את הקבוצה $C=\left\{x^1,..,x^d\right\}$ כאשר לכל $i\in d$ מתקיים $x^i=e_i$ (וקטור יחידה).
לכל $I\subseteq[d]$ נגדיר את הפונקציה:

$$h_I\left(x^i\right)=\begin{cases}1 & i\in I\\ 0 & i\notin I\end{cases}$$

$h_I\in\mathcal{H}_{\text{con}}$: לכל $i\in I$ נכתוב את הליטרל x_i ועבור $i\in[d]\setminus I$ נכתוב $\bar{x}_i$ונצרף את כל הליטרלים ע"י $\wedge$.
h_I הן כל הפונקציות הנחוצות להראות ש־C מנותצת. לכן $VCdim(\mathcal{H}_{con})\ge d$.

נניח בשלילה כי $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{\text{con}}\right) > d$. אז קיימת קבוצה $C=\left\{x^1,...,x^{d+1}\right\}\subset\mathcal{X}$ אשר מנותצת ע"י $\mathcal{H}_{\text{con}}$. בפרט לכל $i,j\in[d+1]$ קיימת $h_i\in\mathcal{H}_{\text{con}}$ כך ש

$$h_i\left(x^j\right)=\begin{cases}0 & i=j\\ 1 & \text{else}\end{cases}$$

מהגדרה זו, לכל h_i קיים ליטרל ℓ_i אשר הוא שקר על x^i ואמת על כל x^j עבור $j\neq i$. מתוך הליטרלים $\ell_1,...,\ell_{d+1}$ משובך היונים קיימים שני ליטרלים המתאימים לאותו משתנה בוליאני. נסמנם ℓ_i,ℓ_j עבור $i\neq j\in[d+1]$.
אם $\ell_i=\ell_j$, כיוון ש- ℓ_j נותן אמת על x^i נקבל שגם ℓ_i נותן אמת על x^i, בסתירה להגדרתו.
אם $\ell_i\neq\ell_j$, יהי $k\in[d+1]$ כך ש- $k\notin\{i,j\}$, אזי לא יתכן שגם ℓ_i וגם ℓ_j יתנו אמת על x^k וזו בסתירה להגדרתם.
סה"כ קיבלנו סתירה ולכן $\text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_{\text{con}}\right)\le d$.

שאלה 7:

נתון כי $\mathcal{H}$ היא בעלת תכונת UC. יהיו $\delta,\varepsilon>0$. מתקיים, לכל $m\ge m_{\mathcal{H}}^{UC}\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta\right)$

$$\mathcal{D}^m\left(\left\{S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m \mid S\text{ is }\frac{\varepsilon}{2}\text{ representative}\right\}\right)\ge 1-\delta$$

נוכיח את הטענה הבאה: יהיו $\mathcal{H},\mathcal{D},\ell$. אם $S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m$ היא $\frac{\varepsilon}{2}$ representative אז בהנתן $h_S\in\underset{h\in\mathcal{H}}{\text{ERM}}(S)$ מתקיים

$$L_{\mathcal{D}}(h_S)\le\min_{h\in\mathcal{H}}L_{\mathcal{D}}(h)+\varepsilon$$

הוכחה: מכך ש-S היא $\frac{\varepsilon}{2}$ representative מתקיים

$$\forall h\in\mathcal{H}\ \ \left|L_S(h)-L_{\mathcal{D}}(h)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $h_S\in\min_{h\in\mathcal{H}}L_S(h)$, $h^*\in\min_{h\in\mathcal{H}}L_{\mathcal{D}}(h)$. מתקיים

$$\left|L_S(h^*)-L_{\mathcal{D}}(h^*)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\iff-\frac{\varepsilon}{2}<L_S(h^*)-L_{\mathcal{D}}(h^*)<\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow(*)\,L_S(h^*)<L_{\mathcal{D}}(h^*)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|L_S(h_S)-L_{\mathcal{D}}(h_S)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\iff-\frac{\varepsilon}{2}<L_S(h_S)-L_{\mathcal{D}}(h_S)<\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow L_{\mathcal{D}}(h_S)<L_S(h_S)+\frac{\varepsilon}{2}\le L_S(h^*)+\frac{\varepsilon}{2}\overset{(*)}{<}L_{\mathcal{D}}(h^*)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\min_{h\in\mathcal{H}}L$$

מהטענה שהוכחנו נקבל:

$$\left\{S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m \mid S\text{ is }\frac{\varepsilon}{2}\text{ representative}\right\}\subseteq\left\{S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m \mid L_{\mathcal{D}}(h_S)\le\min_{h\in\mathcal{H}}L_{\mathcal{D}}(h)+\varepsilon\right\}$$

ולכן לכל $m\ge m_{\mathcal{H}}^{UC}\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta\right)$

$$\mathcal{D}^m\left(\left\{S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m \mid L_{\mathcal{D}}(h_S)\le\min_{h\in\mathcal{H}}L_{\mathcal{D}}(h)+\varepsilon\right\}\right)\ge\mathcal{D}^m\left(\left\{S\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^m \mid S\text{ is }\frac{\varepsilon}{2}\text{ representative}\right\}\right)\ge 1-\delta$$

כלומר $\mathcal{H}$ היא Agnostic-PAC עם פונ' $m_{\mathcal{H}}$. כיוון ש- $m_{\mathcal{H}}$ מחזירה את מספר הדגימות המינימלי, מתקיים $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)\le m_{\mathcal{H}}^{UC}\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta\right)$.

שאלה 8:

$\mathcal{H}$ איננה למידה Agnostic PAC. נקח לדוגמא את המחלקה $\mathcal{H}=\{h:\mathcal{X}\to\{\pm1\}\}$. אנו יודעים שהיא איננה למידה PAC - ולכן גם איננה למידה Agnostic PAC. נניח בשלילה שכן. אז קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ ופונקציה $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$ כך שלכל $\varepsilon,\delta\in(0,1)$ ולכל התפלגות $\mathcal{D}$ מעל Z, אם $m\ge m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$ ו-$S\sim\mathcal{D}^m$ אז $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}(S)\le\min_{h\in\mathcal{H}}L_{\mathcal{D}}(h)+\varepsilon\right)\ge1-\delta$. בפרט זה נכון לכל התפלגות $\mathcal{D}$ עם פונקציה דטרמיניסטית $f\in\mathcal{H}$.

$$\mathcal{D}(y\mid x)=\begin{cases}1 & y=f(x)\\ 0 & else\end{cases}$$

אפשר לבנות כל התפלגות כזו אפשר לבנות ע"י בחירת התפלגות על $\mathcal{X}$ ובחירת $f\in\mathcal{H}$. כלומר $\mathcal{H}$ למידה PAC בסתירה.

שאלה 9:

נתון ש־ $\mathcal{H}$ היא למידה PAC עם סיבוכיות מדגם $m_{\mathcal{H}}$. נתונים $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1$ ו־$\delta \in (0,1)$. נסמן $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon_1, \delta) = m_1, m_{\mathcal{H}}(\varepsilon_2, \delta) = m_2$. נסמן ב־$\mathcal{A}$ את האלג'. מהגדרת למידות PAC, לכל התפלגות $\mathcal{D}$ ופונ' תיוג f מתקיים שלכל $m \geq m_1$

$$\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) \leq \varepsilon_1\right) \geq 1-\delta$$

כיוון ש־ $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ מתקיים $\{S \mid L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) \leq \varepsilon_1\} \subseteq \{S \mid L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) \leq \varepsilon_2\}$ ולכן

$$\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) \leq \varepsilon_2\right) \geq \mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) \leq \varepsilon_1\right) \geq 1-\delta$$

תכונה זו גם נכונה לכל $m \geq m_2$. מהמינימליות של m_2 מתקיים $m_2 \leq m_1$.

נתונים $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1$ ו־$\varepsilon \in (0,1)$. נסמן $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon, \delta_1) = m_1, m_{\mathcal{H}}(\varepsilon, \delta_2) = m_2$. נסמן ב־$\mathcal{A}$ את האלג'. מהגדרת למידות PAC, לכל התפלגות $\mathcal{D}$ ופונ' תיוג f מתקיים שלכל $m \geq m_1$

$$\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) > \varepsilon\right) \leq \delta_1 \leq \delta_2$$

התכונה $\mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}\left(L_{\mathcal{D},f}\left(\mathcal{A}\left(S\right)\right) > \varepsilon\right) \leq \delta_2$ גם נכונה לכל $m \geq m_2$ וממינימליות m_2 מתקיים $m_2 \leq m_1$.

שאלה 10:

נתון $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. נניח בשלילה כי

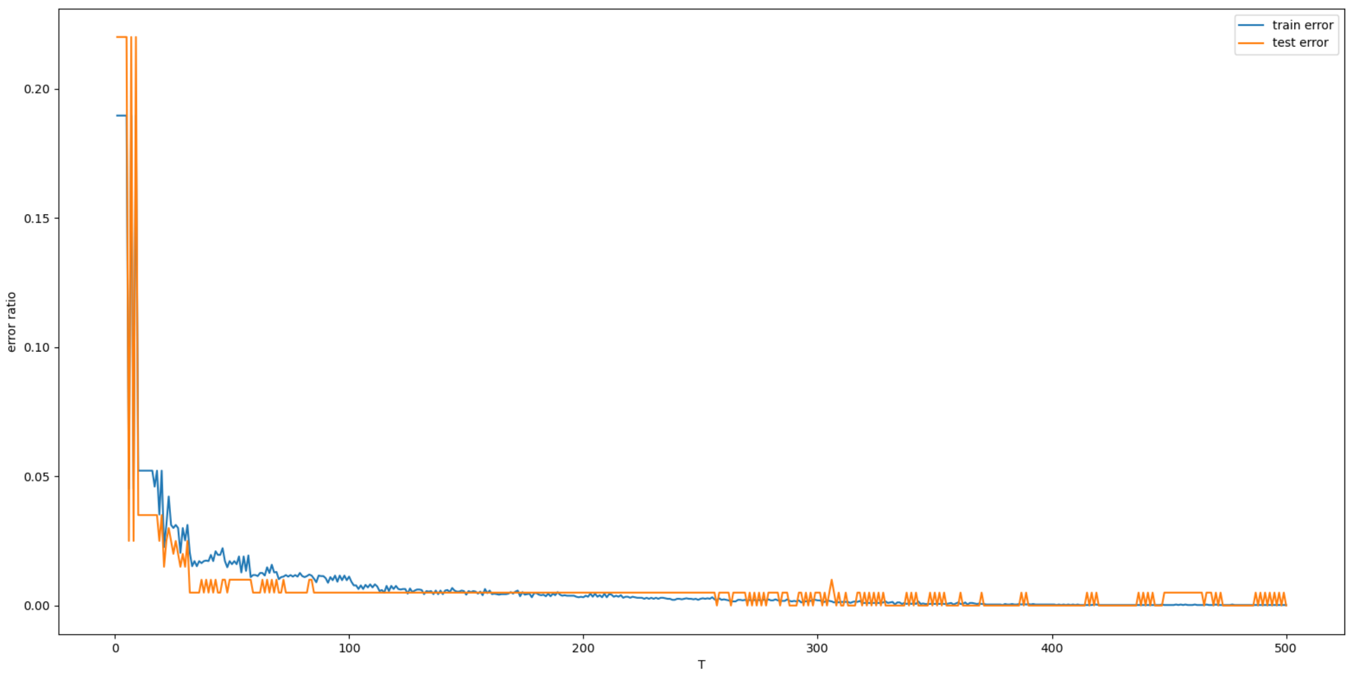
$$d = \text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_2\right) < \text{VC-dim}\left(\mathcal{H}_1\right) = k$$

אז קיימת ב־$\mathcal{H}_1$ תת קבוצה בגודל k שמנותצת ע"י $\mathcal{H}_1$ וכיוון ש־ $d < k$, בהכרח קבוצה זו לא קיימת ב־$\mathcal{H}_2$. אך זו סתירה כי $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$.

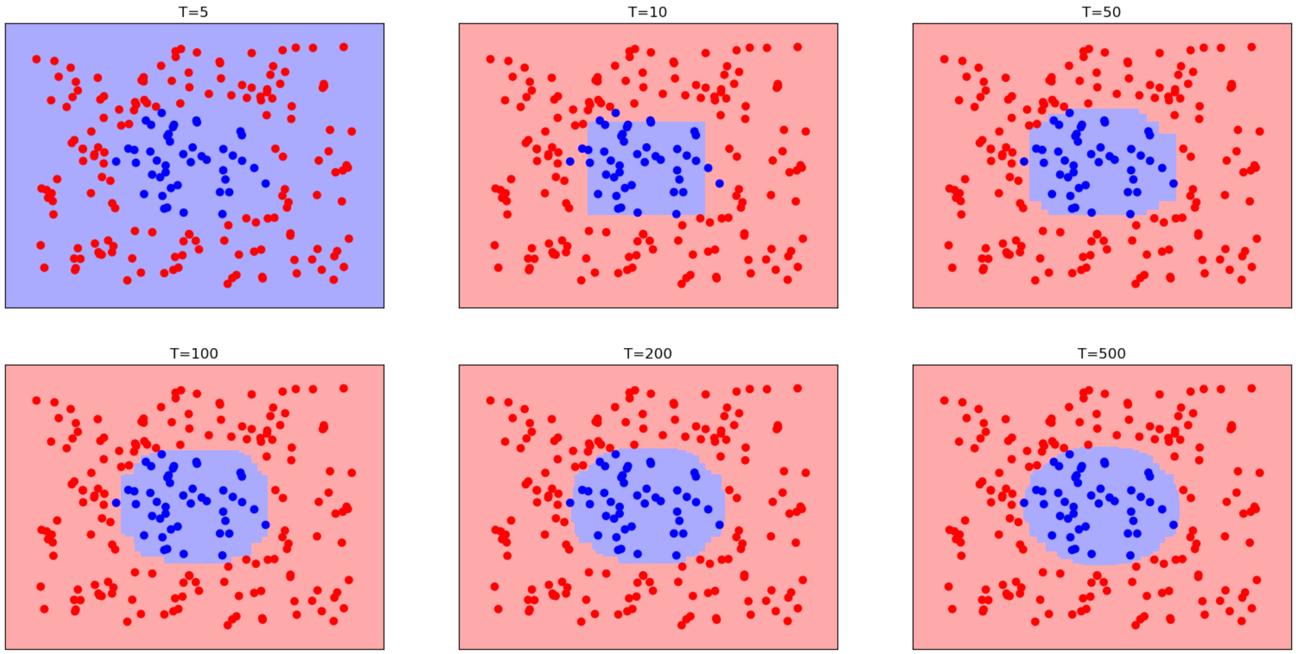
AdaBoost

סעיפים 13-16 עם רעש 0:

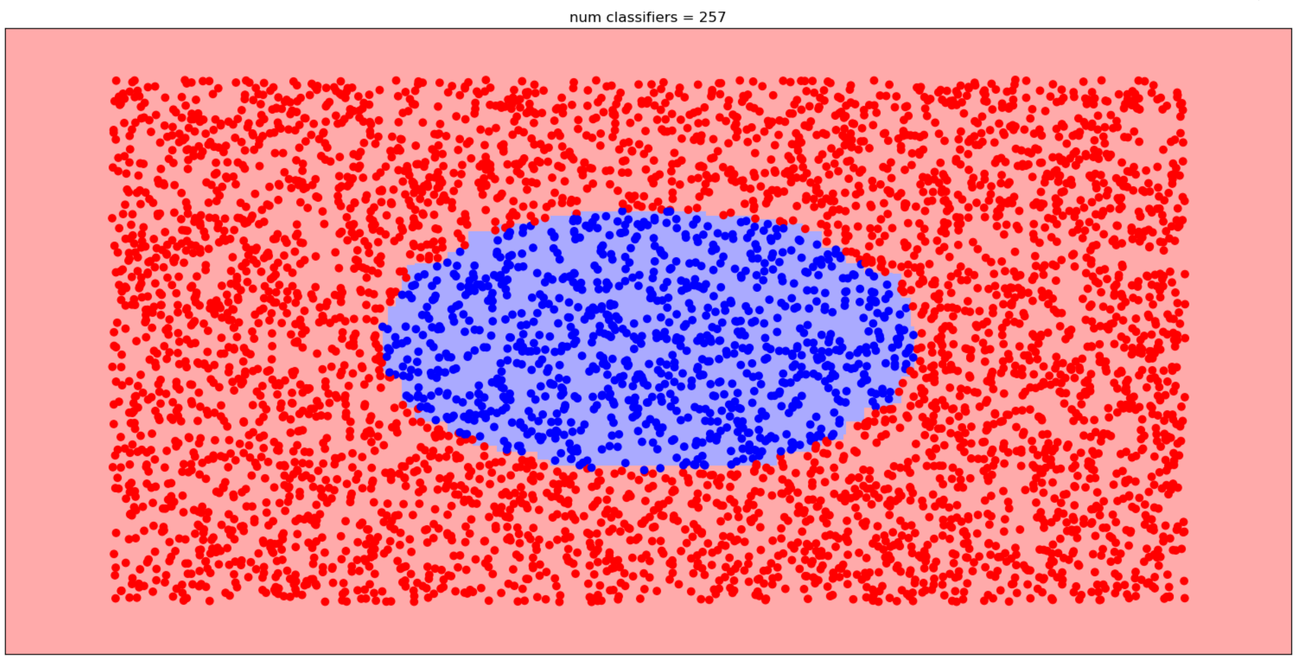
סעיף 13:



סעיף 14:

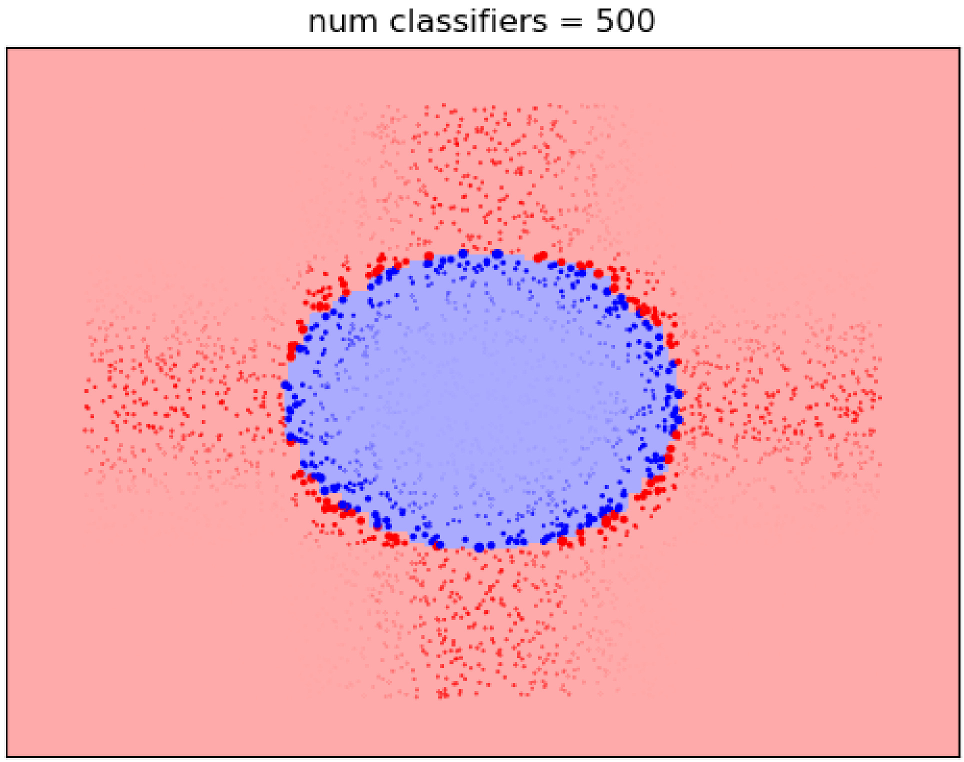


סעיף 15:



ה־T שמזער את השגיאה הוא 257 עם שגיאה 0.

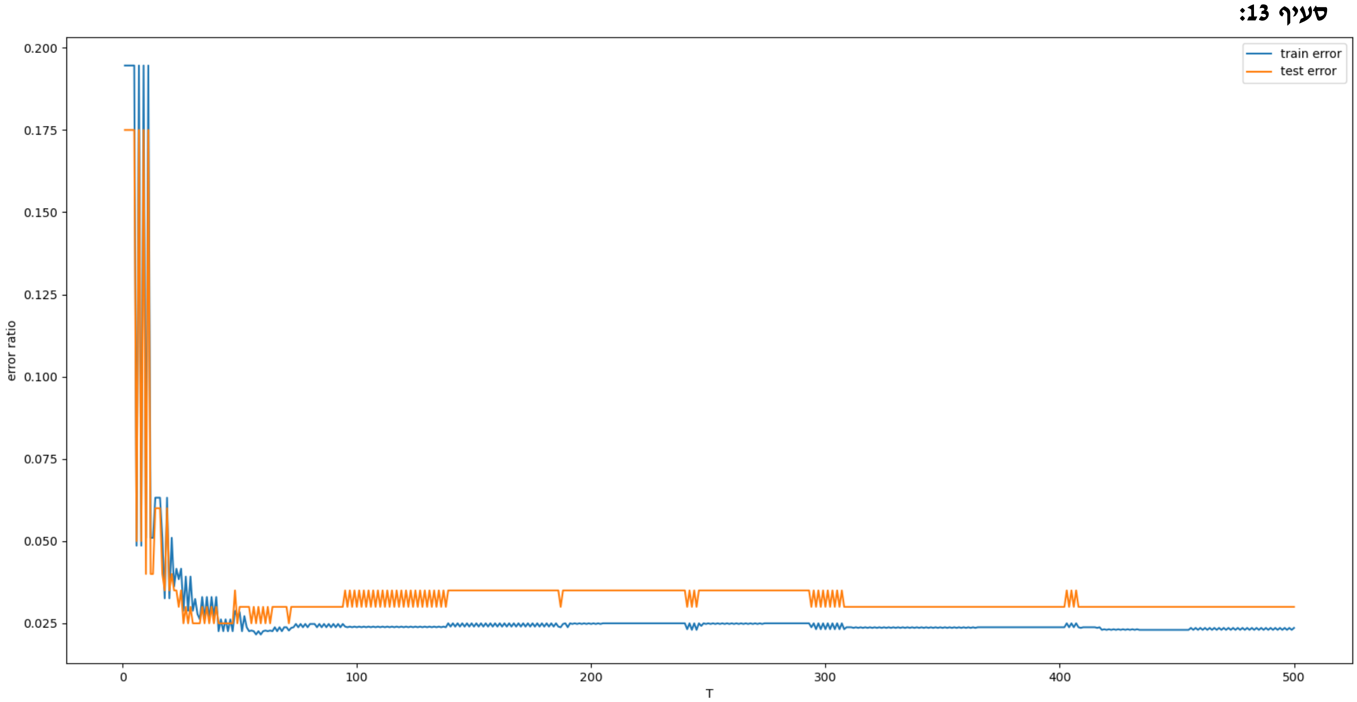
סעיף 16:



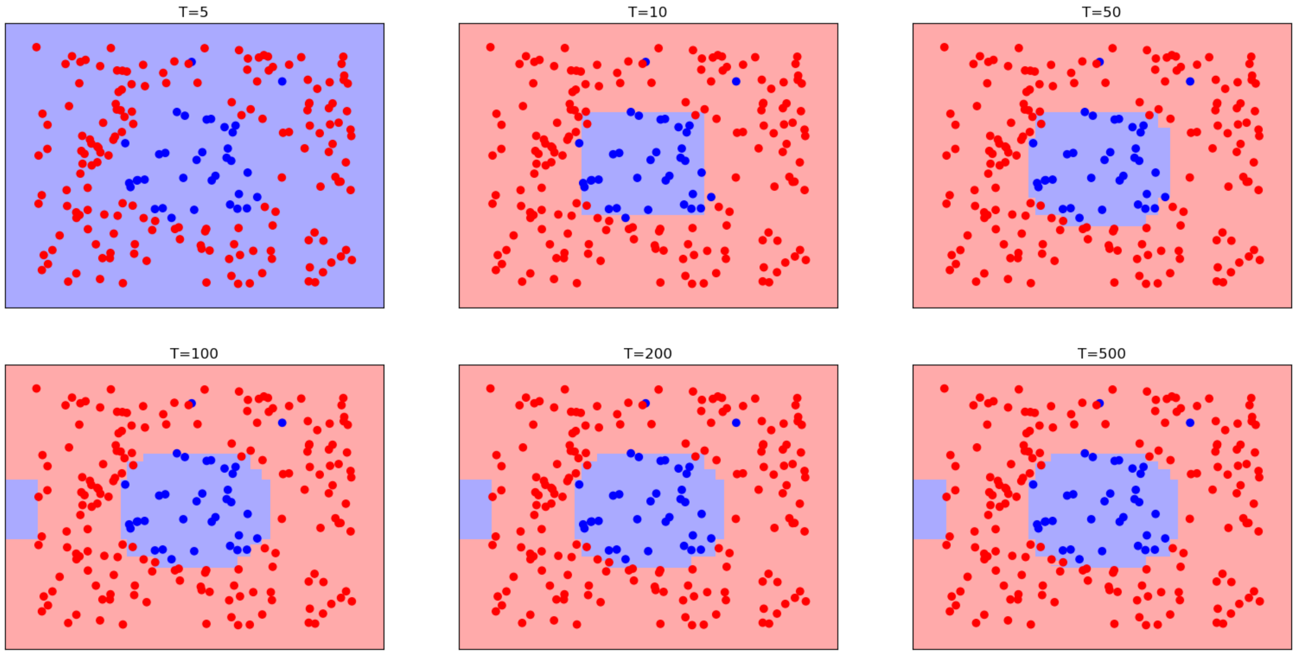
ניתן לראות שסביב העיגול הכחול המשקלים גבוהים יותר ־ זהו איזור בו המסווג לא בטוח בהחלטתו (איזור בו יש ריכוז גבוה של שתי המחלקות) וכנראה טעה הרב פעמים במהלך האיטרציות ולכן המשקלים גדולים.
לגבי 4 האיזורים האדומים עם משקלים גדולים יותר ־

סעיפים 13־16 עם רעש 0.01:

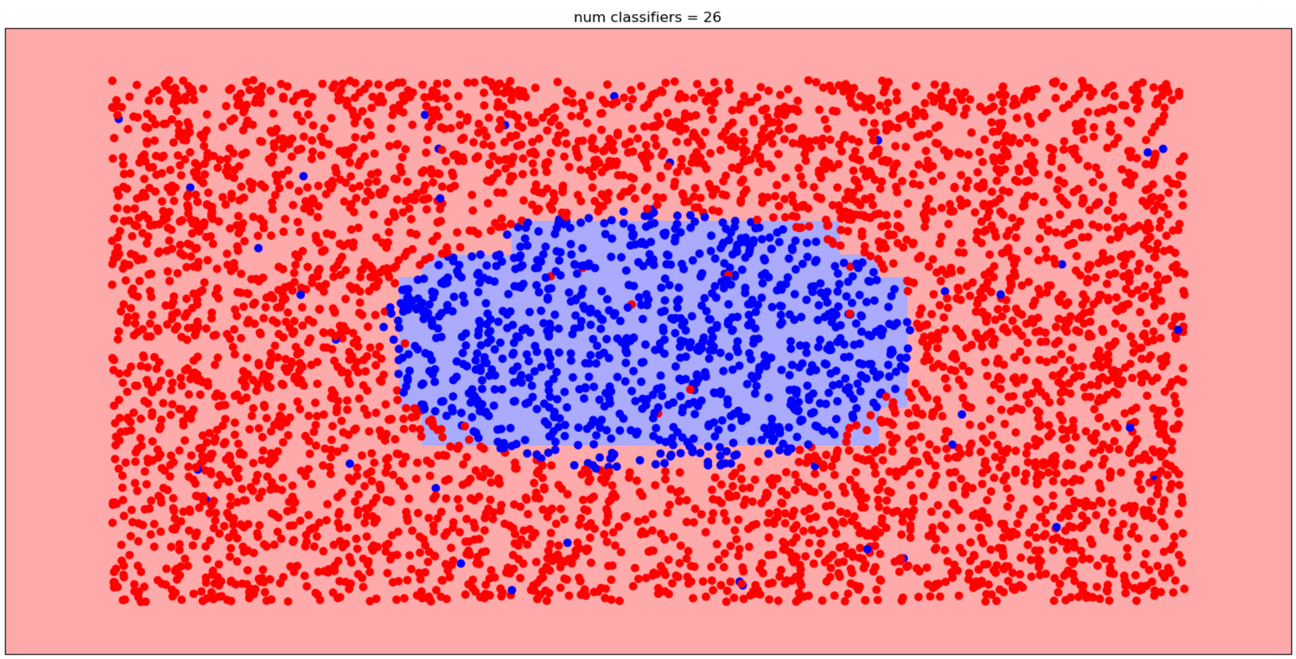
סעיף 13:



סעיף 14:

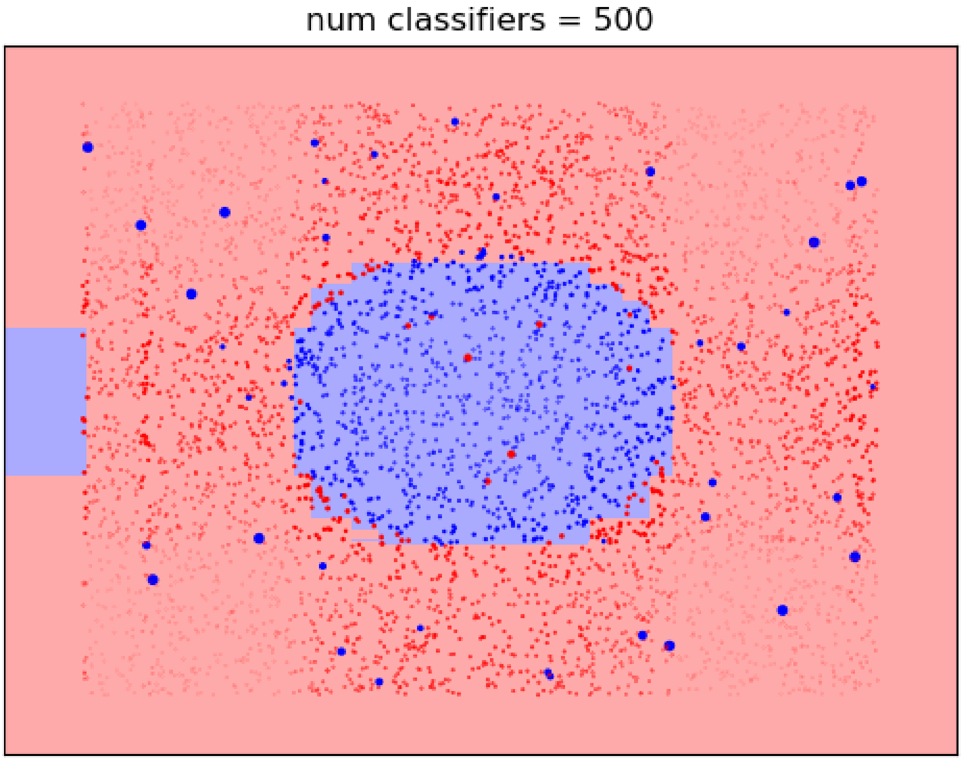


סעיף 15:



ה־T שמזער את השגיאה הוא 26 עם שגיאה 0.025.

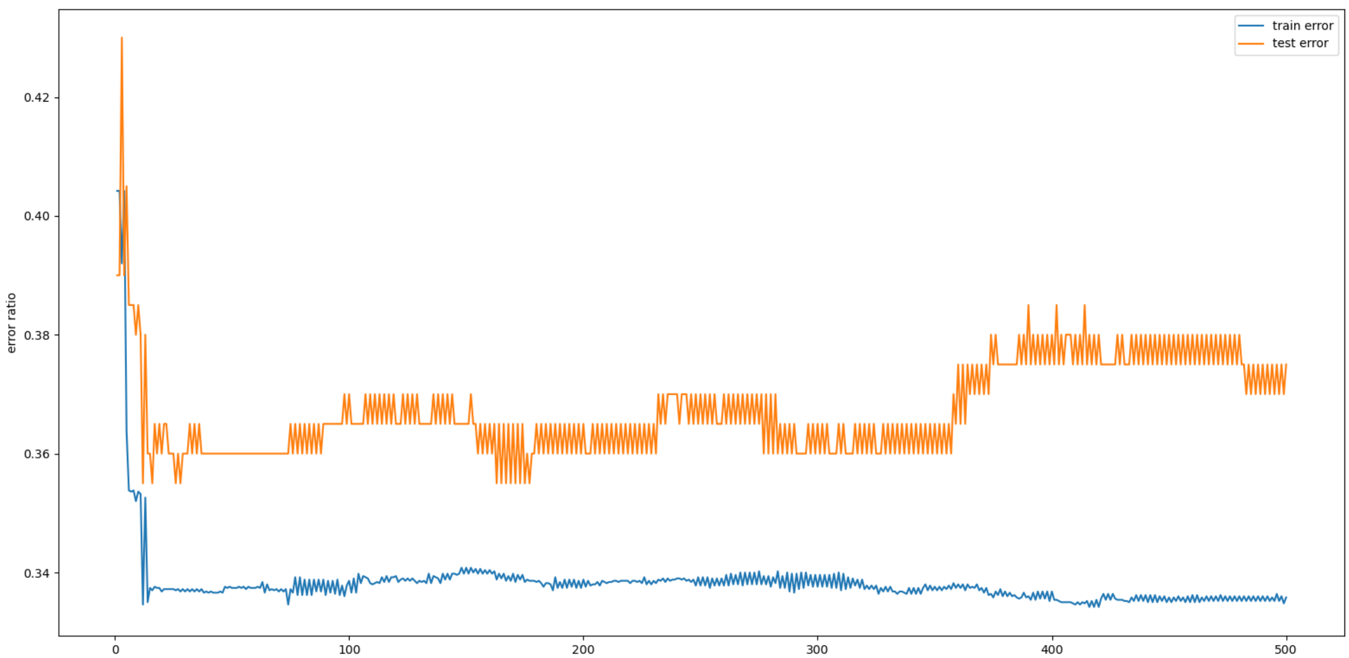
סעיף 16:



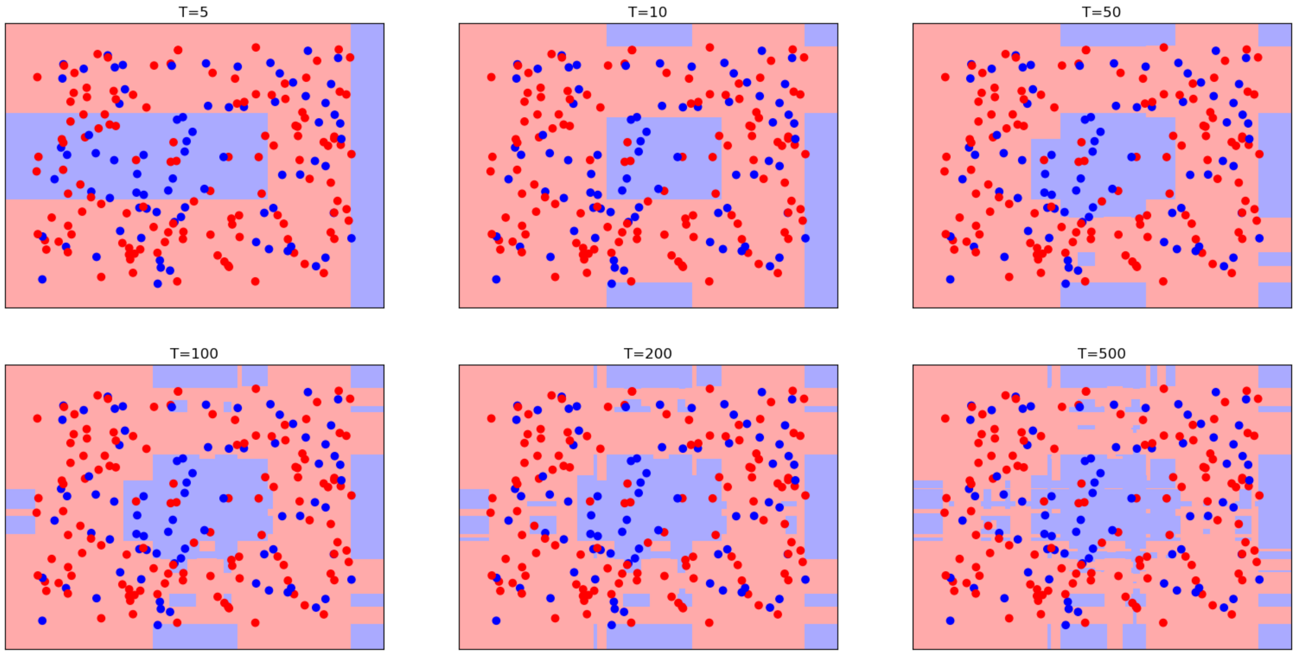
הנקודות הכחולות על הרקע האדום הם בעצם רעש ואנו רואים שהמסווג מתקשה לסווג אותן, ובגרף זה ניתן לראות בהתאם שהמשקלים שהוא נותן לנקודות האלה גדולים יחסית. זה גם נכון לנקודות האדומות שנמצאות בתוך העיגול הכחול.

סעיפים 13-16 עם רעש 0.4:

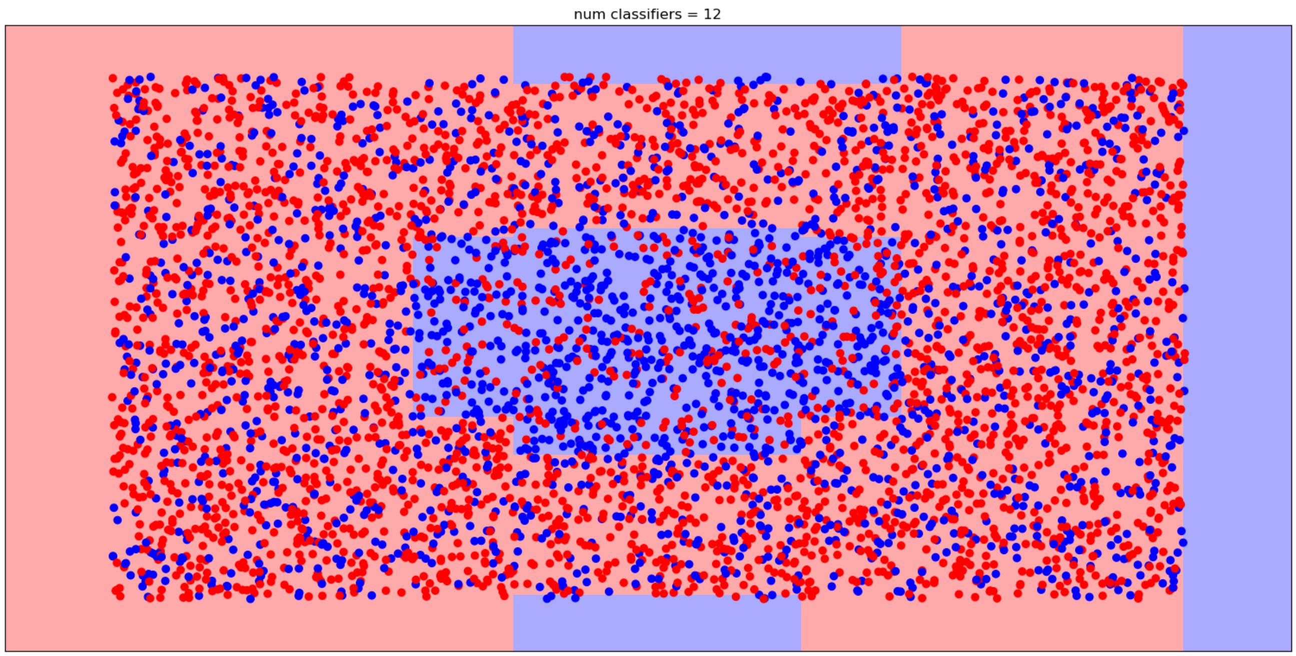
סעיף 13:



סעיף 14:

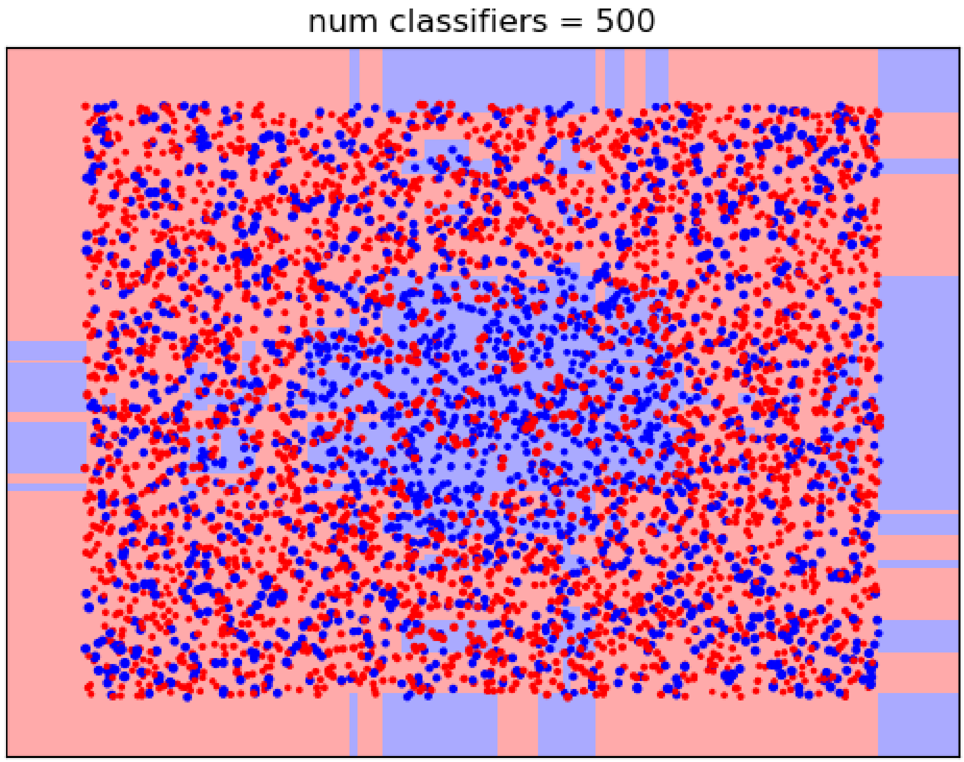


סעיף 15:



ה־T שמזער את השגיאה הינו 12 עם שגיאה 0.355.

סעיף 16:



הסבר שאלה 13: ככל שיש יותר רעש, אם אנו משתמשים בהרבה decision stumps אנו מקבלים over-fitting, ואז השגיאה הכללית גדלה. ובאמת רואים שככל ש־T גדל כך שהשגיאה על ה־test set גדלה כשיש יותר רעש.

15: ככל שהדאטה רועש יותר כך המסווג טועה יותר. אם נשתמש בהרבה decision stumps, כאשר הדאטא מורעש אנחנו מקבלים over-fitting עבור דגימות מורעשות ושגויות ולכן השגיאה גדלה.
לכן אנחנו מקבלים תוצאות טובות יותר עבור T נמוך יותר כאשר הרעש גבוה.