Defi : $S = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ are basis of vector space V

If $\begin{cases} S \text{ is linearly independent} \\ \forall \text{ ptử } x \in V \text{ đều biểu diễn được qua } S \text{ (span)} \end{cases}$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

Note: V có thể có nhiều cơ sở $\neq$ nhau
vector space nhỏ nhất $V = \{\theta\}$ → dim = 1
→ $\not\exists$ có basis

2. Cơ sở chính tắc :

a) $R^3 = \{(a, b, c)\}$

$\Rightarrow (a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$\Rightarrow$ Mọi vector đều được biểu diễn qua:

$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

mà $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ linearly independent

$\Rightarrow S$ is basis $\Rightarrow \dim R^3 = 3$

TQ : $\boxed{\dim R^n = n}$

b) $M_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

but $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ S is linearly independent

$\Rightarrow$ S is basis $\Rightarrow \dim M_{2\times 2} = 4$

$\boxed{\text{General : } \dim_{m\times n} = m \times n}$

c) $P_2 = \{ a + bx + cx^2 \}$

$\Rightarrow a + bx + cx^2 = a.1 + b.x + c.x^2$

$\forall$ đa thức đều span qua $S = \{1, x, x^2\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S is basis $\Rightarrow \dim P_2 = 3$

General: $\dim P_n = n + 1$

Ex: Show that the set $S = \{t^2 + 1, t - 1, 2t+2\}$ is basis for vector space P_2.

$c_1(t^2+1) + c_2(t-1) + c_3(2t+2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{linearly independent}$$

$\Rightarrow S$ is a basis for vector space P_2

$\Rightarrow \text{Dim}(P_2) = 3$

Check whether S is basis or not?

a) $S = \{(1,2), (1,0), (0,1)\} \subset R^2$

S có 3 ptử, mà dim $R^2 = 2$

$\Rightarrow S$ $\cancel{o}$ phải là basis

b) $S = \{(1,3,0), (4,1,2), (-2,5,-2)\} \subset R^3$

Số ptử $S =$ dim $R^3 = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 12 + 24 - 10 = 0$$

So, S is linearly dependent

$\Rightarrow S$ is not a basis of vector space R^3

$x^2 + 2x - 1$, $2x^2 - x + 3$

$(-1, 2, 1)$ $(3, -1, 2)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$(1,1,0)$, $(2,-1,3)$, $(0,3,-1)$

c) $S = \{1+x, 2-x+3x^2, 3x-x^2\} \subset P_2$

* Số ptử của $S =$ dim $P_2 = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

=> linearly independent

=> S is a basis of vector space P_2

. Coordinate of vector :

Đ/N: Cho $S = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ là basis của V

Khi đó, vector $\vec{x} \in V$ có b.diễn duy nhất qua S:

$x = \lambda e_1 + \lambda e_2 + \lambda_n e_n$ $(*)$

=> Tọa độ của $x = [x]_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Note $(*) \Leftrightarrow (e_1 \; e_2 \; e_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = x$

Ma trận tọa độ của S là S

$\Leftrightarrow (S / x)$

Ex : Find vector coordinate

a) $x = 3 + x^2$ theo $S = \{1+x+x^2, 1+x, 1-2x\}$

$$[x]_S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow [x]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $m = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ theo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$* \ [m]_S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

$$\Rightarrow [m]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Tọa độ chính tắc :

Ex2 : Tìm tọa độ chính tắc của các vector sau

a) $x = (a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$$\Rightarrow [x]_S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

b) $p = ax + bx + cx^2 = a.1 + b.x + c.x^2$

$$\Rightarrow [p]_S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở $S \to T$

Let $S = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$

$T = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$

Ma trận chuyển $S \to T$ là ma trận tọa độ của T theo S

Note: 1/ A là mt $S \to T$

$\Rightarrow A^{-1}$ là mt chuyển $T \to S$

2/ A là mt chuyển $S \to T$

$\Rightarrow [x]_S = A[x]_T$

VD: $S = \{u_1(1,-1,1), u_2(0,1,2), u_3(0,0,-2)\}$

$T = \{v_1(1,0,-1), v_2(1,0,1), v_3(-2,2,2)\}$

Tìm $S \to T$, $T \to S$

* $[v_1]_S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow [v_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* $[v_2]_S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow [v_2]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $[v_3]_S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow [v_3]_S = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mt chuyển $S \to T$ là A

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \to S = A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$