



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

# Τεχνικές Βελτιστοποίησης, Εργασία 1

## Τεχνική Αναφορά

ΤΟΥ

Αλεξανδρίδη Φώτιου - 9953

Email: [faalexandr@ece.auth.gr](mailto:faalexandr@ece.auth.gr)

# Contents

1	Οι συναρτήσεις	1
2	Μέθοδος της Διχοτόμου	4
3	Μέθοδος του Χρυσού Τομέα	10
4	Μέθοδος Fibonacci	15
5	Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων	20
6	Συγκριτικά Αποτελέσματα	25

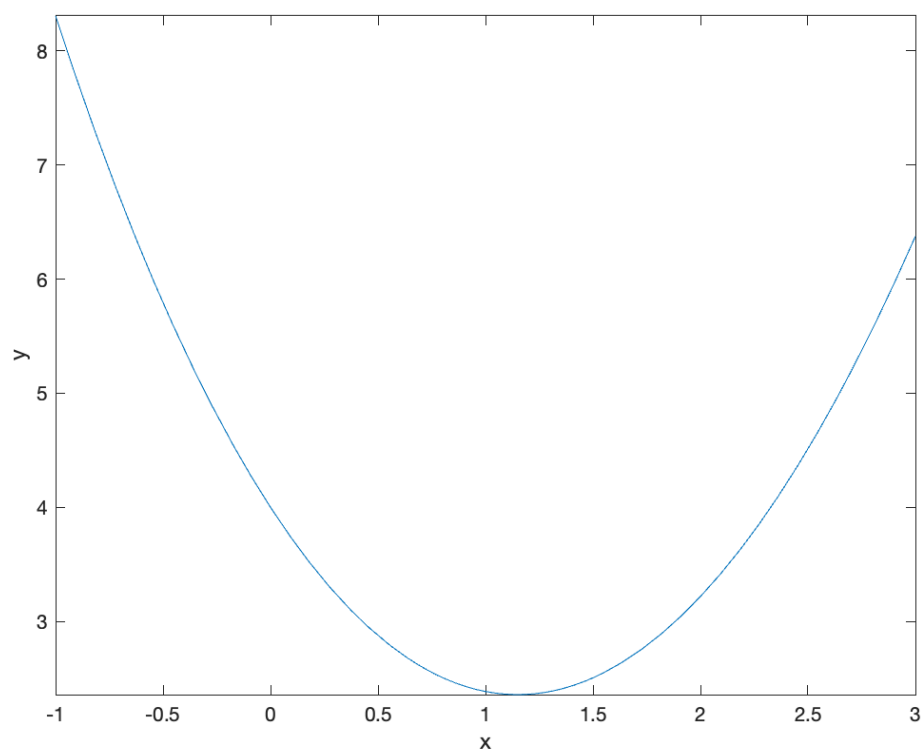
# Chapter 1

## Οι συναρτήσεις

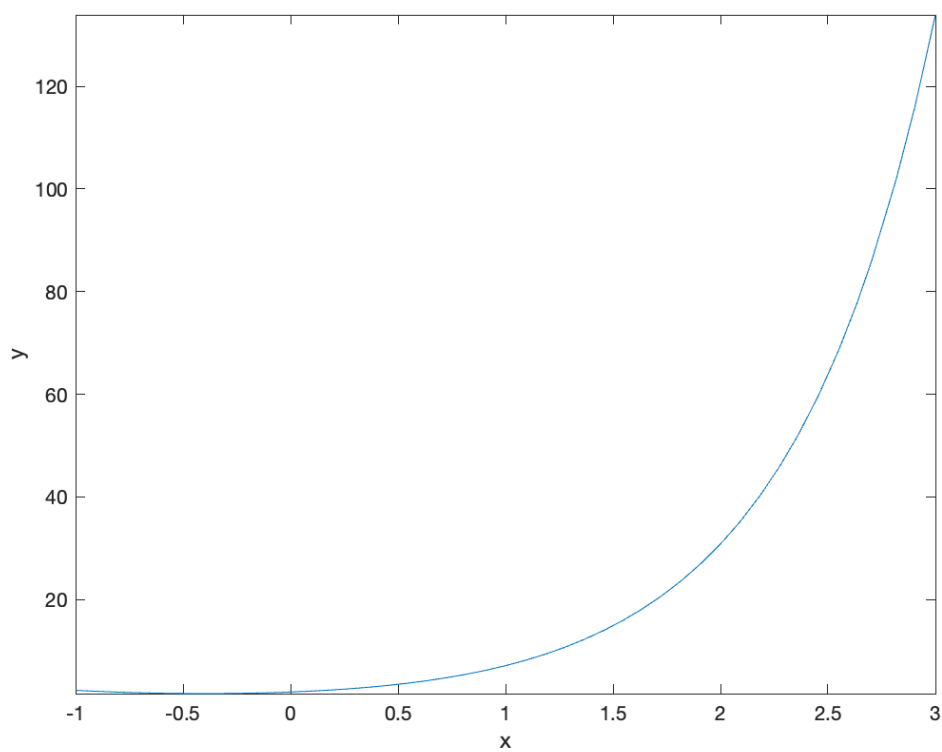
Το ζητούμενο της εργασίας είναι να ελαχιστοποιηθούν οι 3 δοσμένες συναρτήσεις,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  και  $f_3(x)$ :

$$f_1(x) = (x - 2)^2 + x \cdot \ln(x + 3)$$

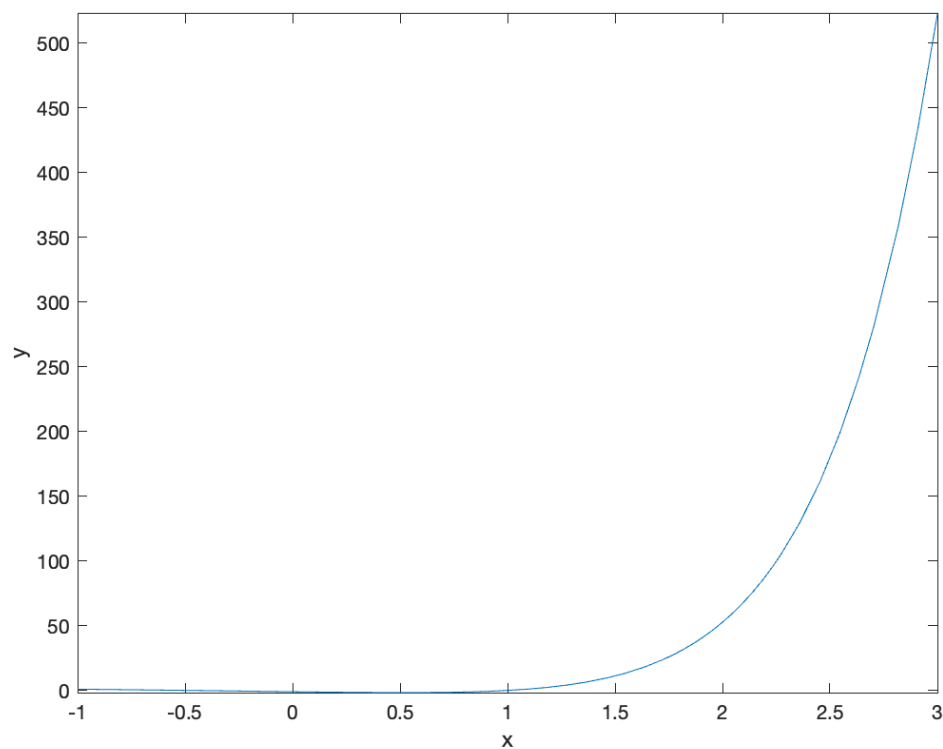
FIGURE 1.1: Graph of  $f_1(x) = y$



$$f_2(x) = 5^x + (2 - \cos(x))^2$$

FIGURE 1.2: Graph of  $f_2(x) = y$ 

$$f_3(x) = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin(x)$$

FIGURE 1.3: Graph of  $f_3(x) = y$ 

Από τις γραφικές τους παραστάσεις (ή με την χρήση της αντίστοιχης θεωρίας) μπορούμε να δούμε εύκολα πως και οι τρεις συναρτήσεις είναι κυρτές στο διάστημα που τις μελετάμε, που είναι το  $[-1, 3]$ .

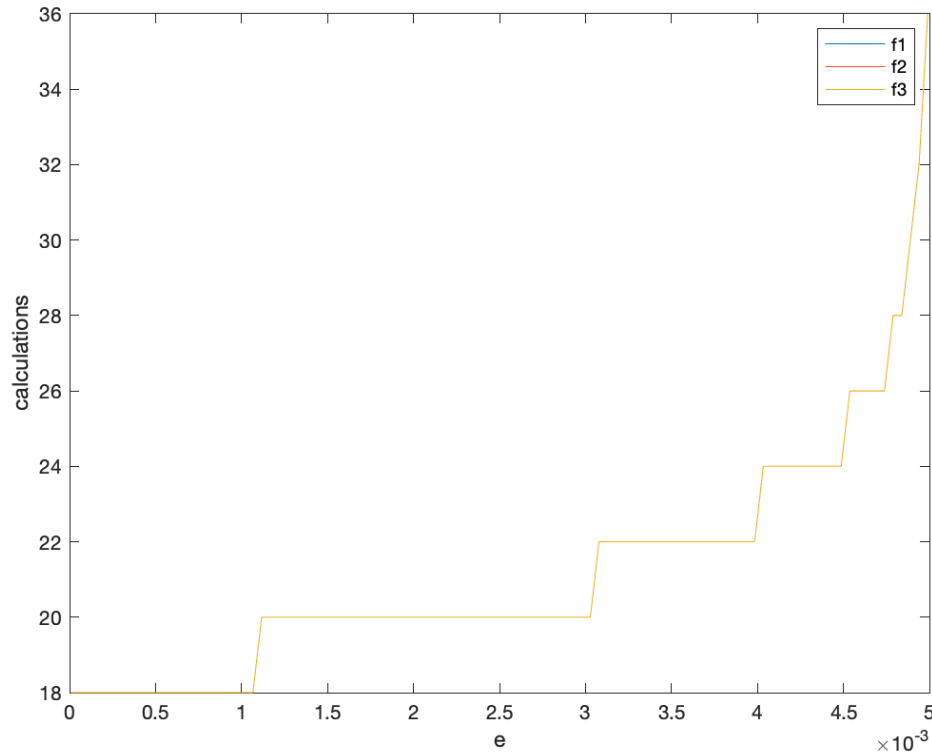
[1] Στα επόμενα 4 κεφάλαια, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα, τα αντίστοιχα γραφήματα και οι όποιες επεξηγήσεις στον κώδικα κρίνονται απαραίτητες για την εύρεση του ελαχίστου των συναρτήσεων με την χρήση των μεθόδων της διχοτόμου, του χρυσού τομέα, της Fibonacci και της διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

## Chapter 2

# Μέθοδος της Διχοτόμου

Η μέθοδος της διχοτόμου για την εύρεση του ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση περιγράφεται στην θεωρία. Στην μέθοδο αυτή υπάρχουν δύο παράμετροι, το  $e$  (απόσταση από την διχοτόμο) και το  $l$  (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης). Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `bicsection.m`.

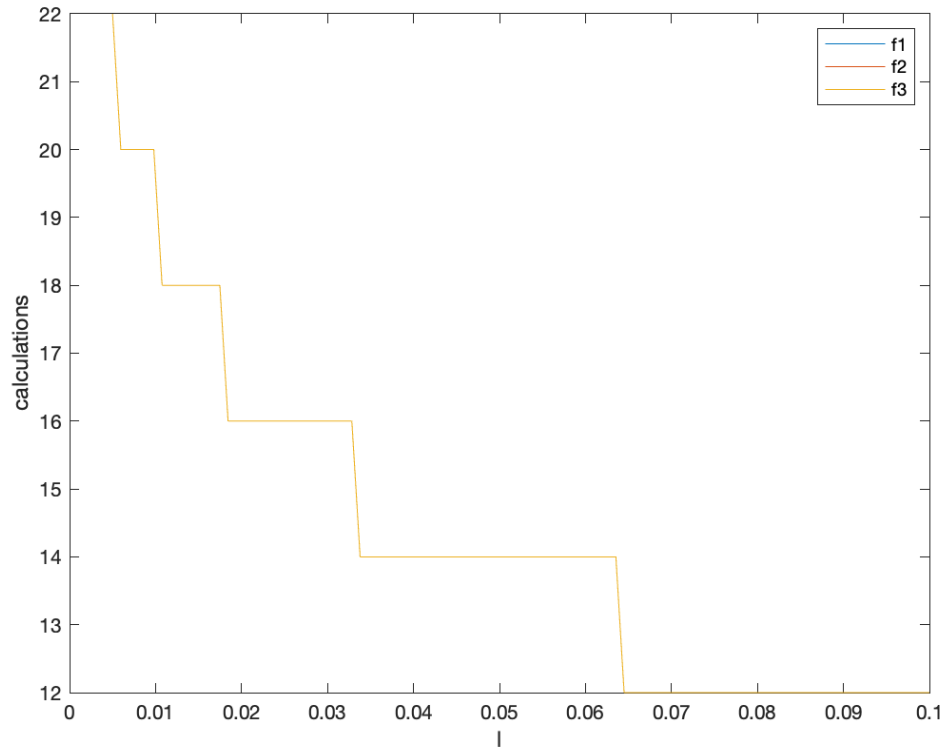
Η πρώτη μελέτη αφορά την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για σταθερό εύρος αναζήτησης  $l = 0.01$  καθώς μεταβάλλεται το  $e$ . Στην μελέτη αυτή το  $e$  ανήκει στο  $[0.00001, 0.0049]$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

FIGURE 2.1: Graph of calculations of the objective function,  $l = 0.01$ , variable  $e$ 

Παρατηρούμε ότι:

1. Το γράφημα είναι το ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό βγάζει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ( $l$ ,  $e$  και διάστημα αναζήτησης).
2. Καθώς αυξάνουμε το  $e$  βλέπουμε ότι αυξάνεται ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό συνάδει με την βιβλιογραφία, που λέει ότι για να συγκλίνει η μέθοδος θα πρέπει να ισχύει  $e \leq l/2$ . Καθώς μεγαλώνει το  $e$  παρατηρούμε "ταλαντώσεις" γύρω από το ελάχιστο, μέχρι να συγκλίνει η μέθοδος γύρω από το ζητούμενο διάστημα.

Η δεύτερη μελέτη αφορά την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για σταθερό  $e = 0.001$  καθώς μεταβάλλεται το  $l$ . Στην μελέτη αυτή το  $l$  ανήκει στο  $[0.005, 0.1]$  (για να ισχύει και η προαναφερόμενη συνθήκη σύγκλισης). Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

FIGURE 2.2: Graph of calculations of the objective function,  $e = 0.001$ , variable  $l$ 

Παρατηρούμε ότι:

1. Το γράφημα είναι το ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό βγάζει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ( $l$ ,  $e$  και διάστημα αναζήτησης).
2. Καθώς αυξάνουμε το  $l$  βλέπουμε ότι μειώνεται ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την λογική, βγάζει νόημα καθώς "χαλαρώνουμε" τους περιορισμούς για να ολοκληρωθεί η αναζήτηση.

Ενδεικτικά, για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο της βιβλιογραφίας, παρατηρούμε ότι για  $l = 0.05$  έχουμε  $n = 14$  υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την βιβλιογραφία, ισχύει ότι το  $n$  είναι ο μικρότερος θετικός αχέραιος που ικανοποιεί την  $(0.5)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ , κάτι το οποίο ισχύει καθώς  $\frac{0.05}{1 - (-3)} = 0.0125$ ,  $(0.5)^{\frac{14}{2}} = 0.0078$  και  $(0.5)^{\frac{12}{2}} = 0.0156$  (επόμενο βήμα υπολογισμών).

Παρατίθενται επίσης γραφήματα τα οποία δείχνουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης (κάτω και άνω όριο) για τρεις τιμές του  $l$ , 0.005, 0.01, 0.1 για σταθερό  $e = 0.001$ :



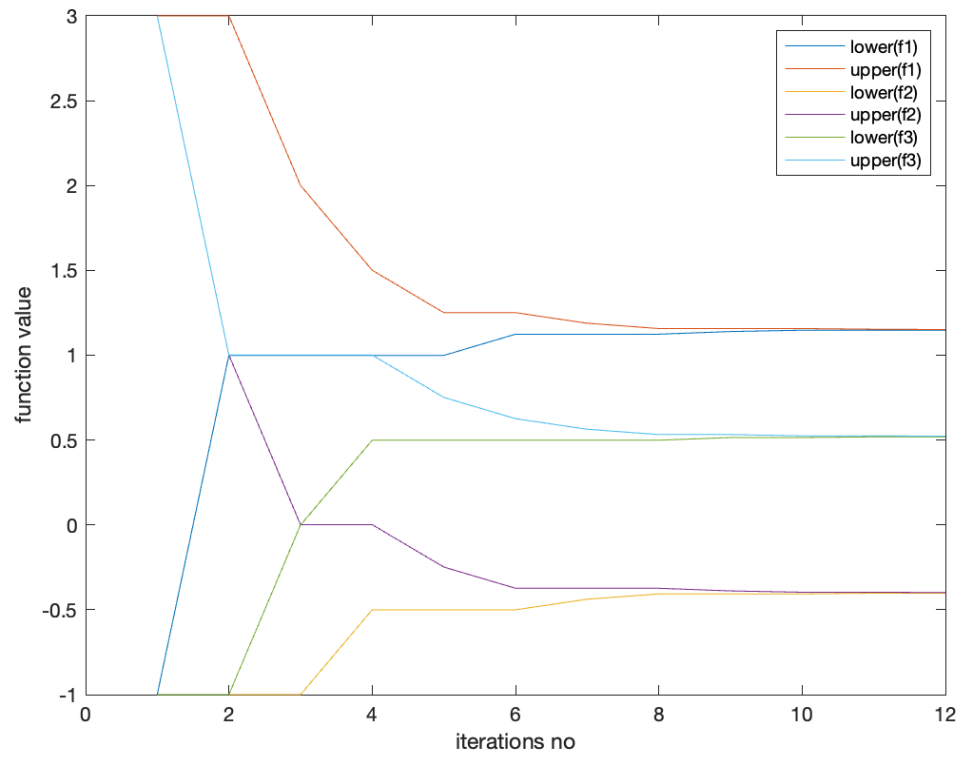
FIGURE 2.3: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.005$ ,  $e = 0.001$ 

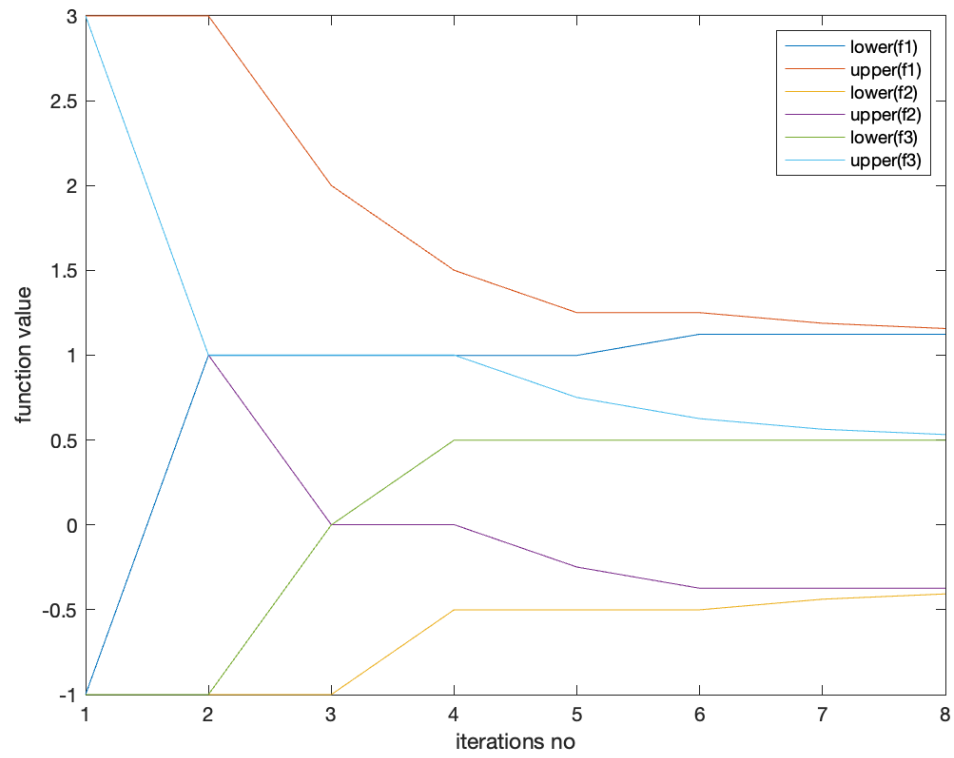
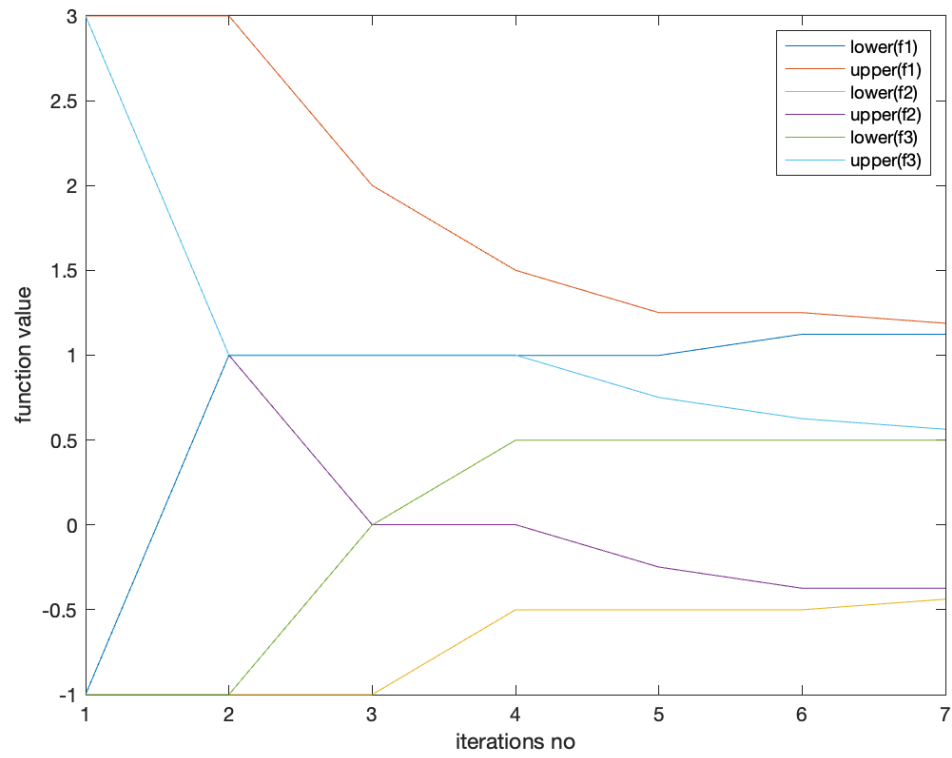
FIGURE 2.4: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.01$ ,  $e = 0.001$ 

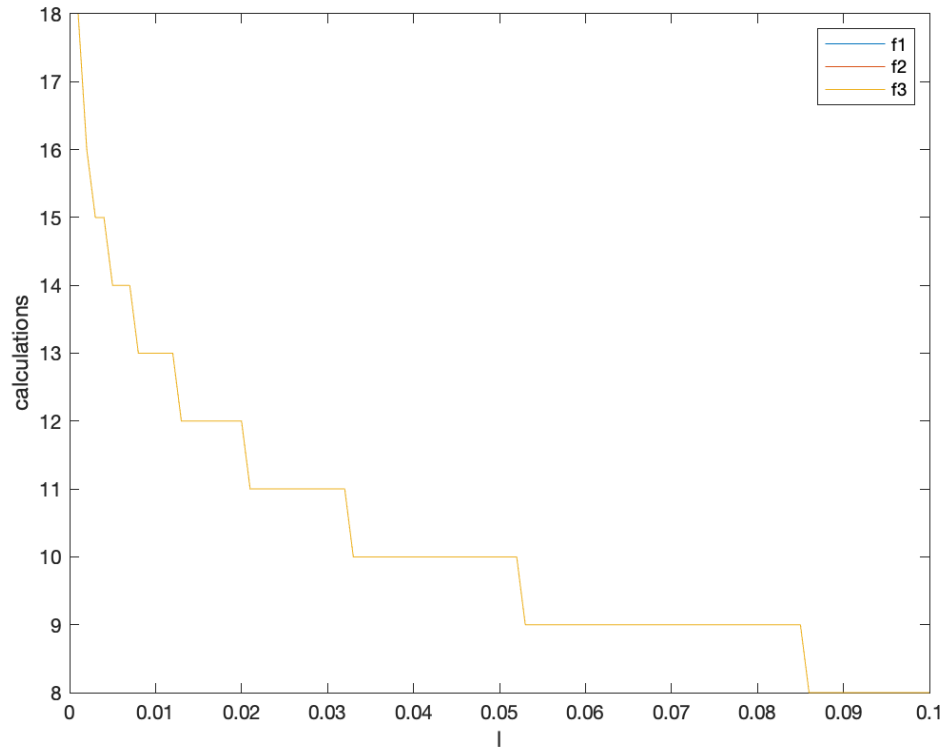
FIGURE 2.5: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.1$ ,  $e = 0.001$ 

## Chapter 3

# Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Η μέθοδος του χρυσού τομέα για την εύρεση του ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση περιγράφεται στην θεωρία. Στην μέθοδο αυτή υπάρχει μια παράμετρος, το  $l$  (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης). Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `golden_ratio.m`.

Η μελέτη αφορά την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το  $l$ . Στην μελέτη αυτή το  $l$  ανήκει στο  $[0.005, 0.1]$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

FIGURE 3.1: Graph of calculations of the objective function, variable  $l$ 

Παρατηρούμε ότι:

1. Το γράφημα είναι το ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό βγάζει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ( $l$  και διάστημα αναζήτησης).
2. Καθώς αυξάνουμε το  $l$  βλέπουμε ότι μειώνεται ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την λογική, βγάζει νόημα καθώς "χαλαρώνουμε" τους περιορισμούς για να ολοκληρωθεί η αναζήτηση.

Ενδεικτικά, για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο της βιβλιογραφίας, παρατηρούμε ότι για  $l = 0.04$  έχουμε  $n = 10$  υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την βιβλιογραφία, ισχύει ότι το  $n$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την  $(0.618)^{n-1} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ , κάτι το οποίο ισχύει καθώς  $\frac{0.04}{1 - (-3)} = 0.01$ ,  $(0.618)^9 = 0.0131$  και  $(0.618)^{10} = 0.0081$  (προηγούμενο βήμα υπολογισμών).

Παρατίθενται επίσης γραφήματα τα οποία δείχνουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης (κάτω και άνω όριο) για τρεις τιμές του  $l$ , 0.005, 0.01, 0.1:

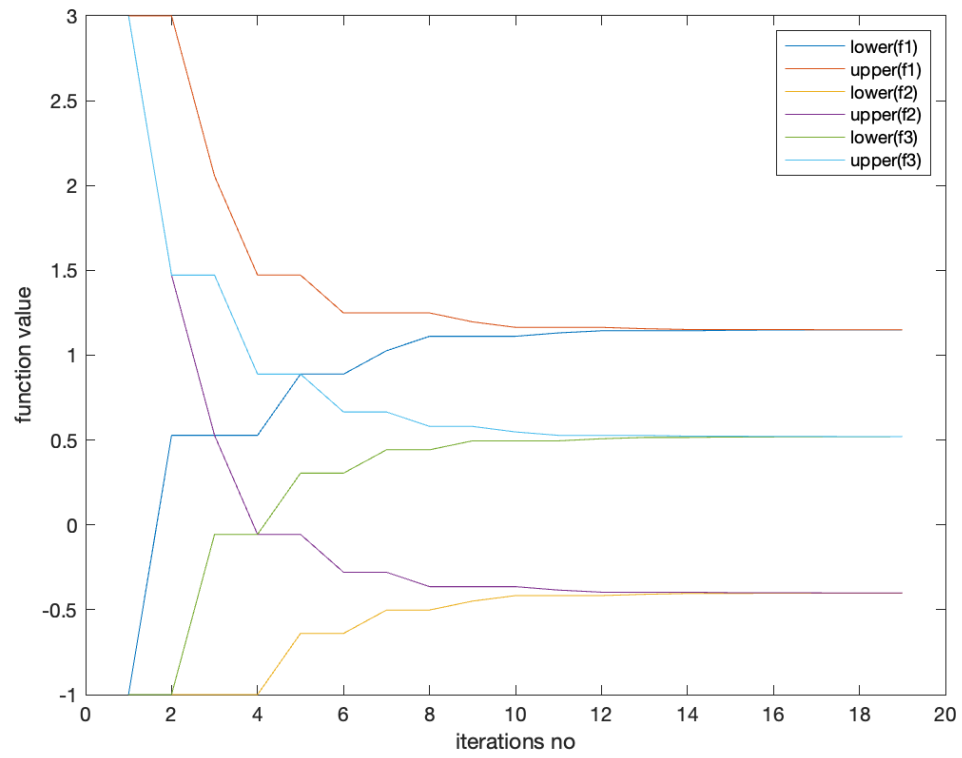
FIGURE 3.2: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.005$ 

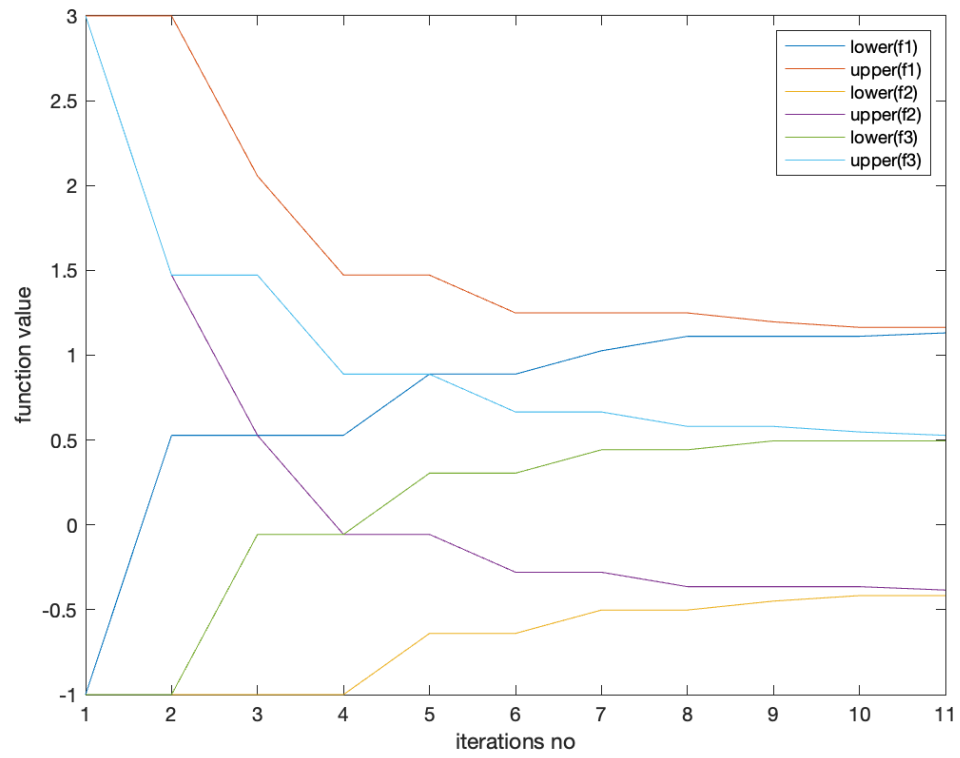
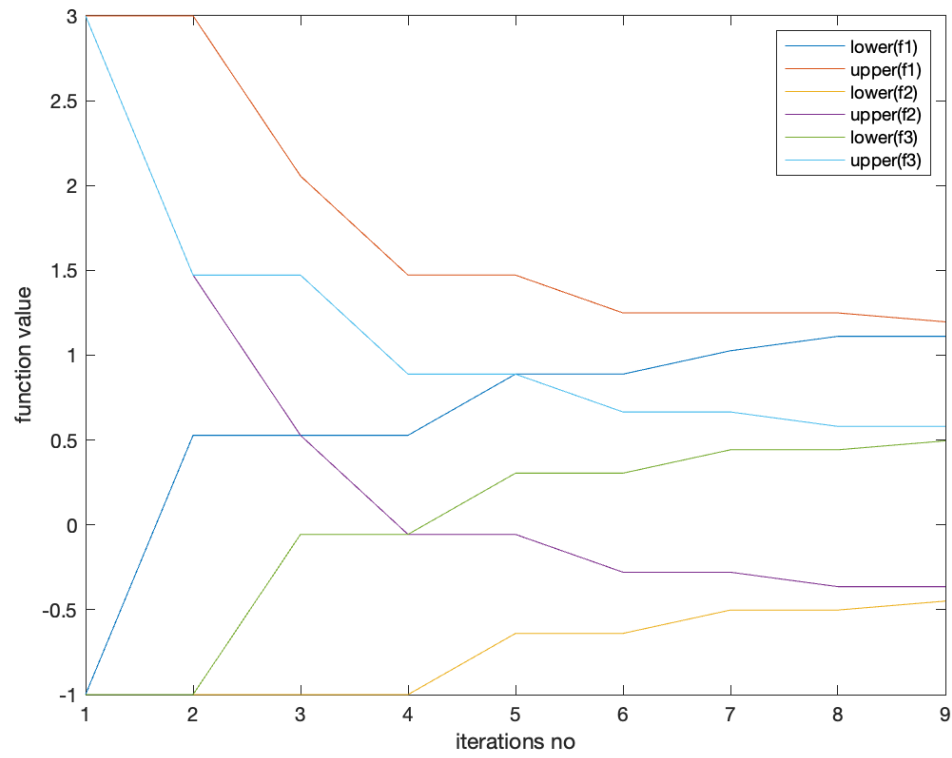
FIGURE 3.3: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.01$ 

FIGURE 3.4: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.1$ 

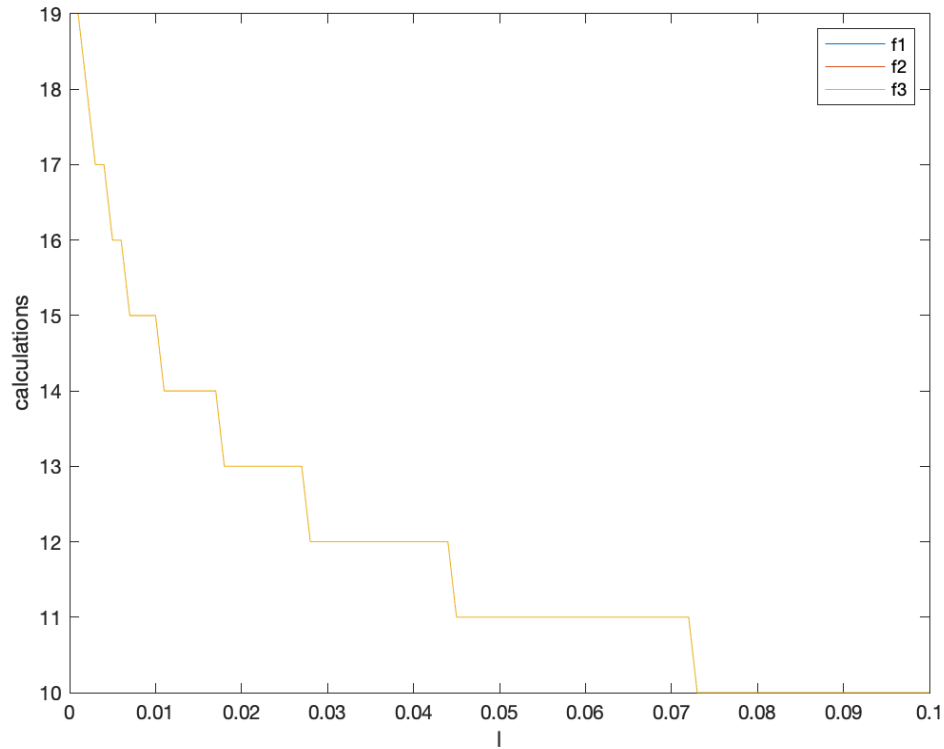


## Chapter 4

# Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος Fibonacci για την εύρεση του ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση περιγράφεται στην θεωρία. Στην μέθοδο αυτή υπάρχει μια παράμετρος, το  $l$  (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης). Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `fibonacci.m`.

Η μελέτη αφορά την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το  $l$ . Στην μελέτη αυτή το  $l$  ανήκει στο  $[0.005, 0.1]$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

FIGURE 4.1: Graph of calculations of the objective function, variable  $l$ 

Παρατηρούμε ότι:

1. Το γράφημα είναι το ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό βγάζει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ( $l$  και διάστημα αναζήτησης).
2. Καθώς αυξάνουμε το  $l$  βλέπουμε ότι μειώνεται ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την λογική, βγάζει νόημα καθώς "χαλαρώνουμε" τους περιορισμούς για να ολοκληρωθεί η αναζήτηση.

Ενδεικτικά, για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο της βιβλιογραφίας, παρατηρούμε ότι για  $l = 0.04$  έχουμε  $n = 12$  υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την βιβλιογραφία, ισχύει ότι το  $n$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την  $F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{l}$ , με  $F_n$  τον  $n$ -οστό αριθμό Fibonacci, κάτι το οποίο ισχύει καθώς  $\frac{1 - (-3)}{0.04} = 100$ ,  $F_{12} = 144$  και  $F_{11} = 89$  (προηγούμενο βήμα υπολογισμών).

Παρατίθενται επίσης γραφήματα τα οποία δείχνουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης (κάτω και άνω όριο) για τρεις τιμές του  $l$ , 0.005, 0.01, 0.1:

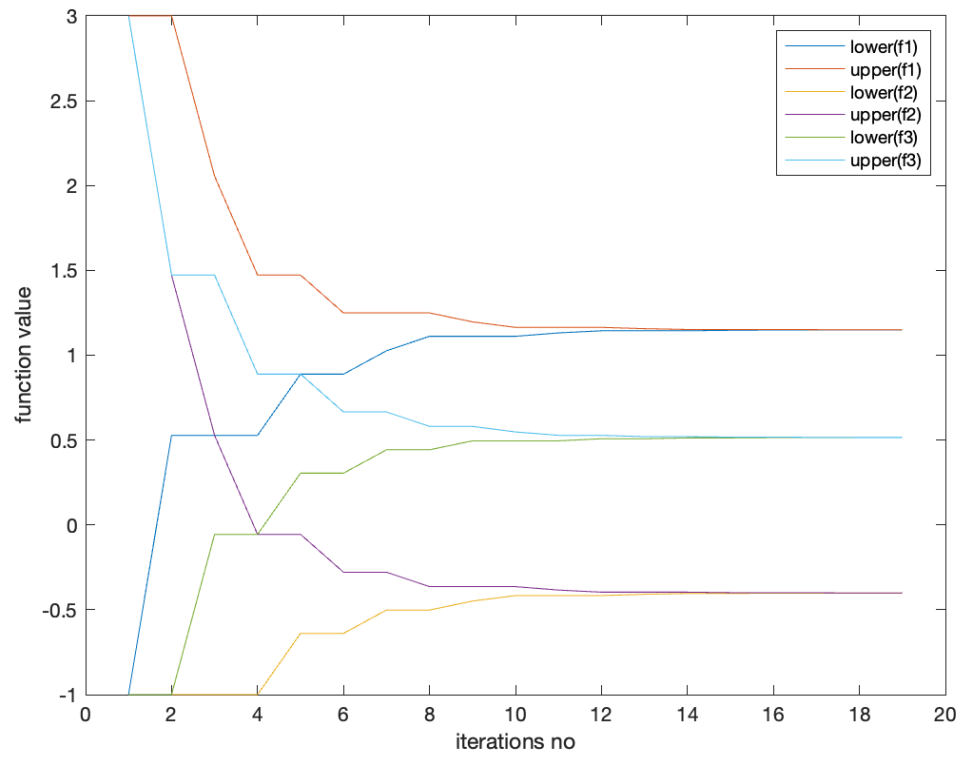
FIGURE 4.2: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.005$ 

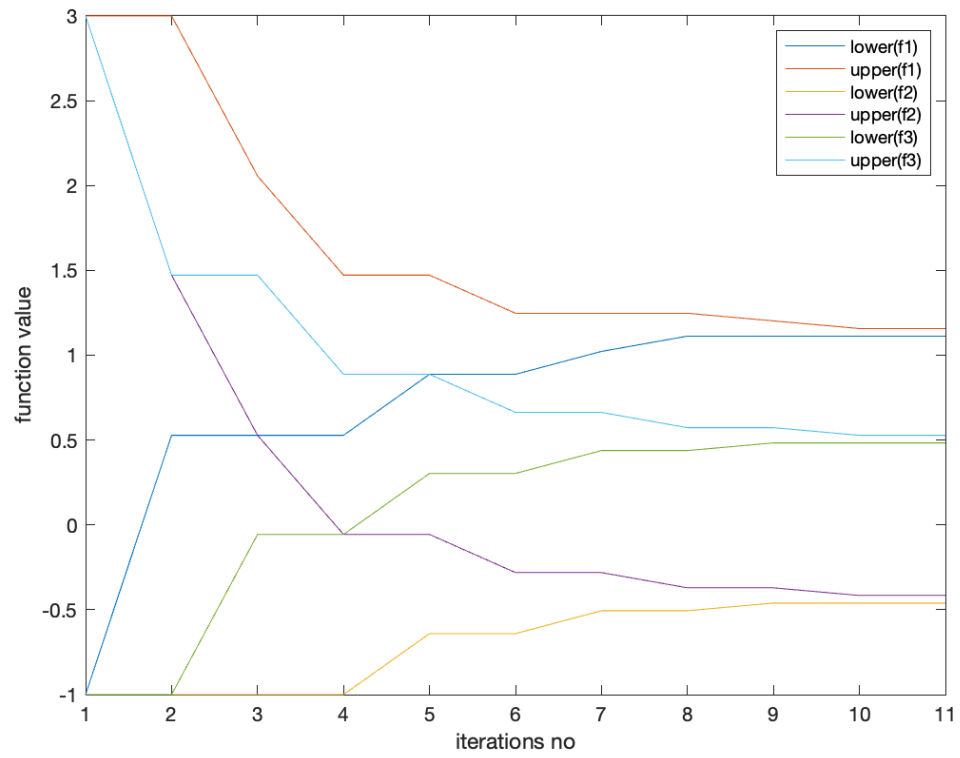
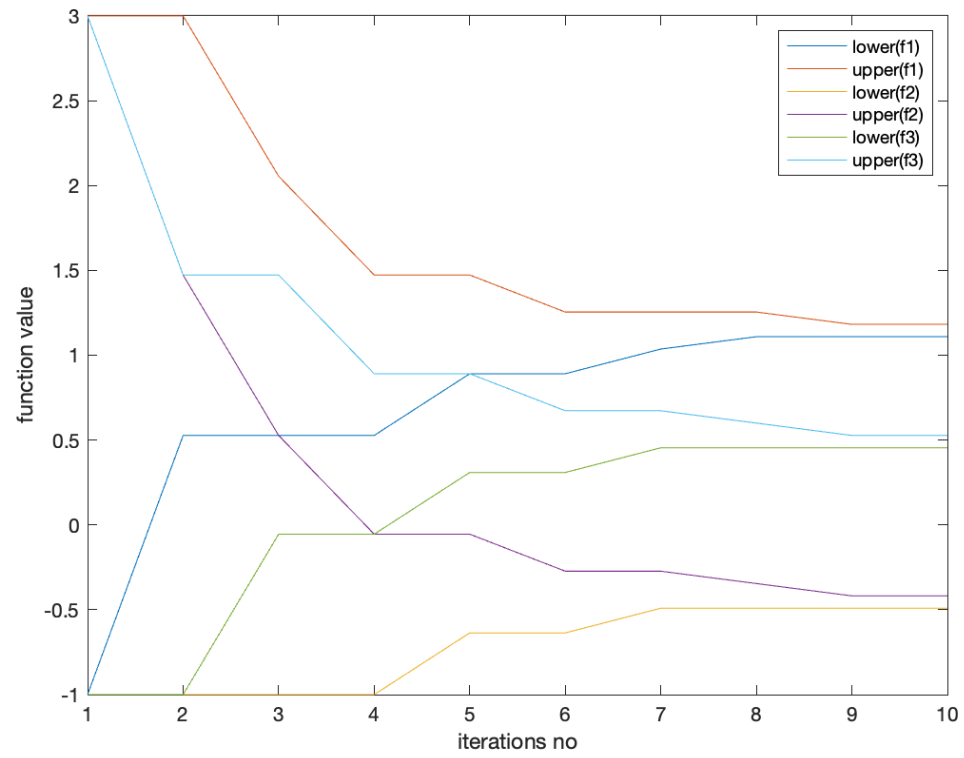
FIGURE 4.3: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.01$ 

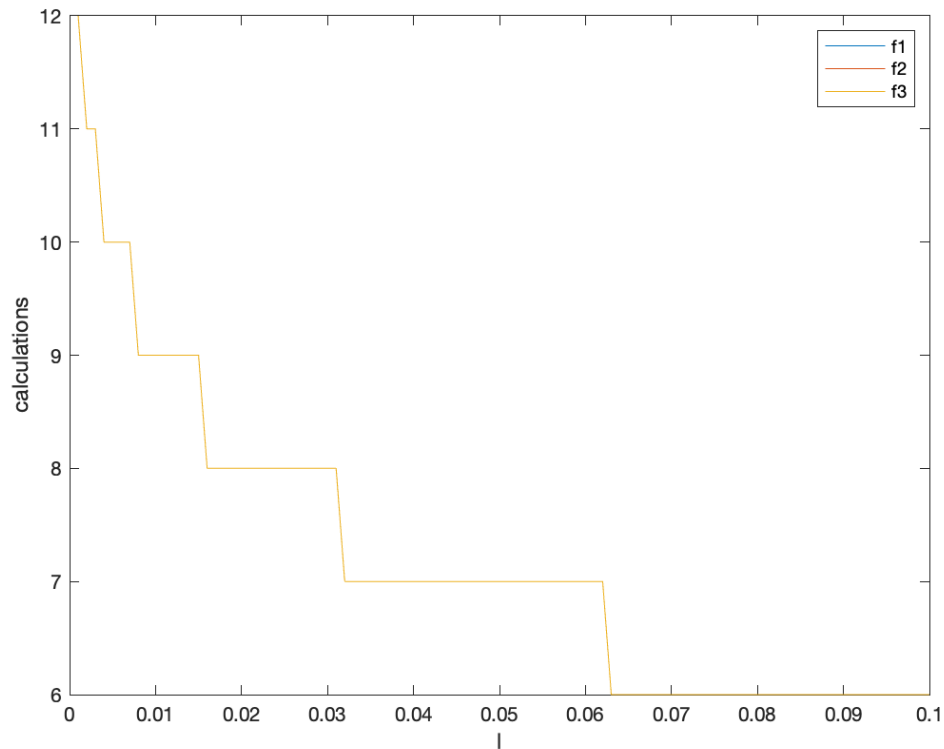
FIGURE 4.4: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.1$ 

## Chapter 5

# Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων

Η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου για την εύρεση του ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση περιγράφεται στην θεωρία. Στην μέθοδο αυτή υπάρχει μια παράμετρος, το  $l$  (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης). Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `bicsection_with_derivative.m`.

Η μελέτη αφορά την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το  $l$ . Στην συγκεκριμένη μέθοδο η αντικειμενική συνάρτηση είναι η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση, δηλαδή η  $\frac{df(x)}{dx}$ . Στην μελέτη αυτή το  $l$  ανήκει στο  $[0.005, 0.1]$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

FIGURE 5.1: Graph of calculations of the objective function, variable  $l$ 

Παρατηρούμε ότι:

1. Το γράφημα είναι το ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό βγάζει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ( $l$  και διάστημα αναζήτησης).
2. Καθώς αυξάνουμε το  $l$  βλέπουμε ότι μειώνεται ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την λογική, βγάζει νόημα καθώς "χαλαρώνουμε" τους περιορισμούς για να ολοκληρωθεί η αναζήτηση.

Ενδεικτικά, για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο της βιβλιογραφίας, παρατηρούμε ότι για  $l = 0.05$  έχουμε  $n = 7$  υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Από την βιβλιογραφία, ισχύει ότι το  $n$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την  $(0.5)^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ , κάτι το οποίο ισχύει καθώς  $\frac{0.05}{1 - (-3)} = 0.0125$ ,  $(0.5)^7 = 0.0078$  και  $(0.5)^6 = 0.0156$  (επόμενο βήμα υπολογισμών).

Παρατίθενται επίσης γραφήματα τα οποία δείχνουν την σύγκλιση των ορίων του διαστήματος αναζήτησης (κάτω και άνω όριο) για τρεις τιμές του  $l$ , 0.005, 0.01, 0.1:

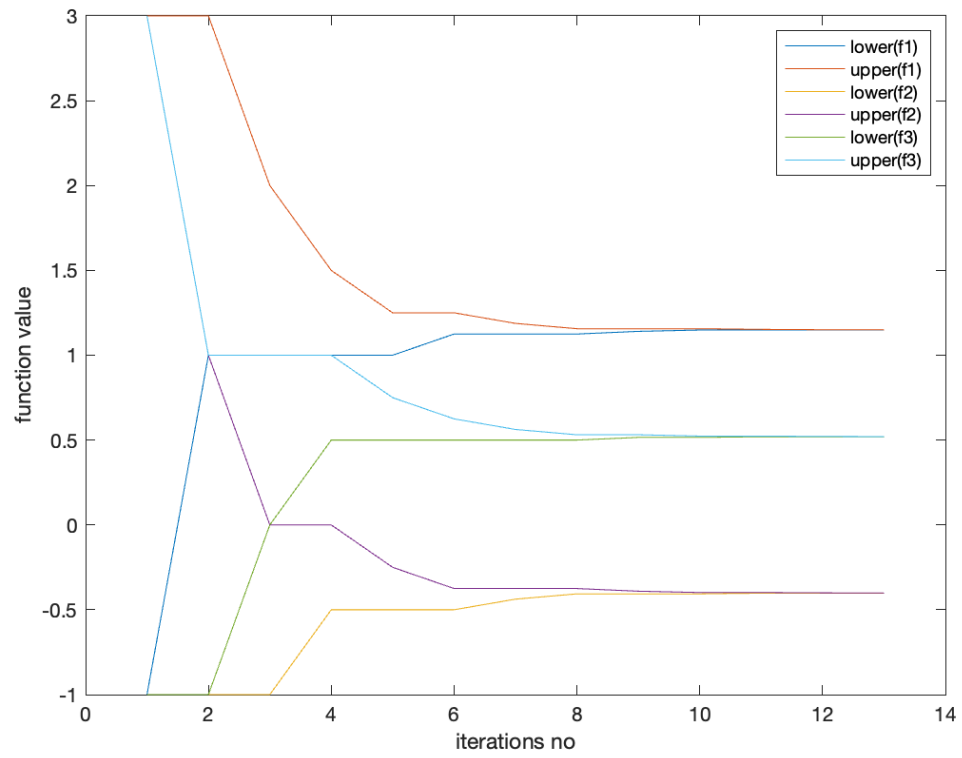
FIGURE 5.2: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.005$ 



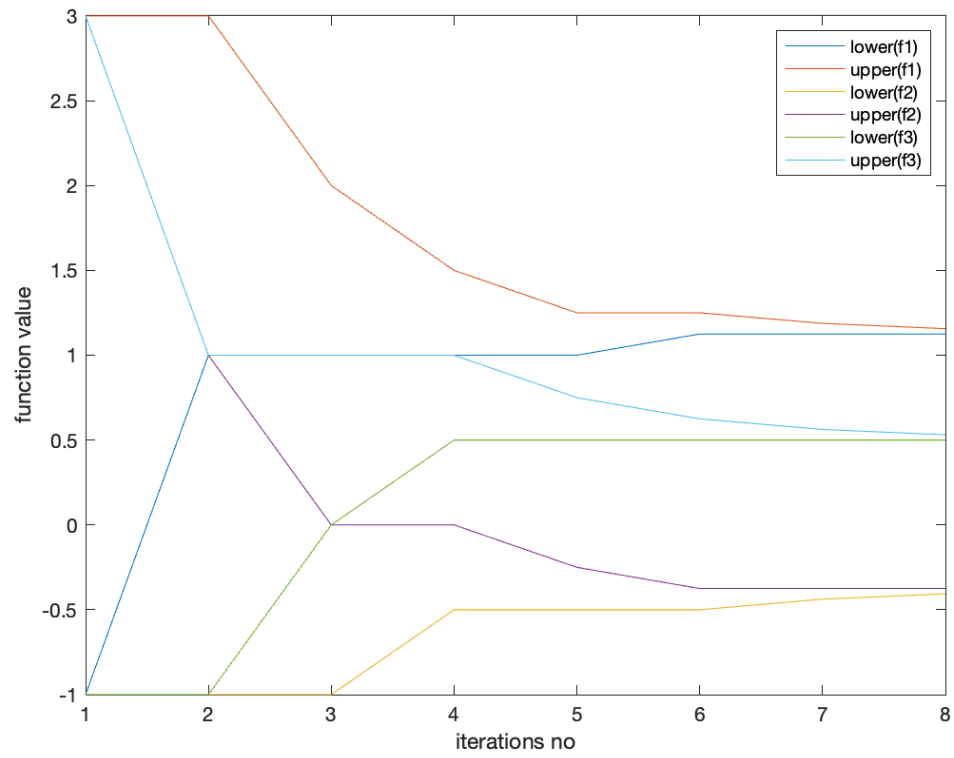
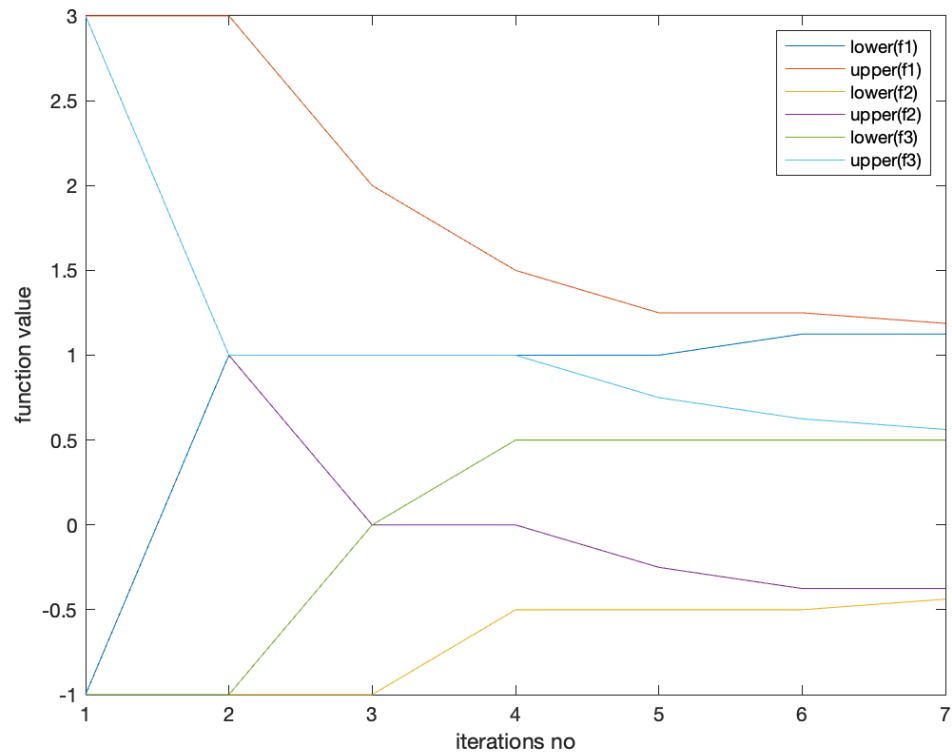
FIGURE 5.3: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.01$ 

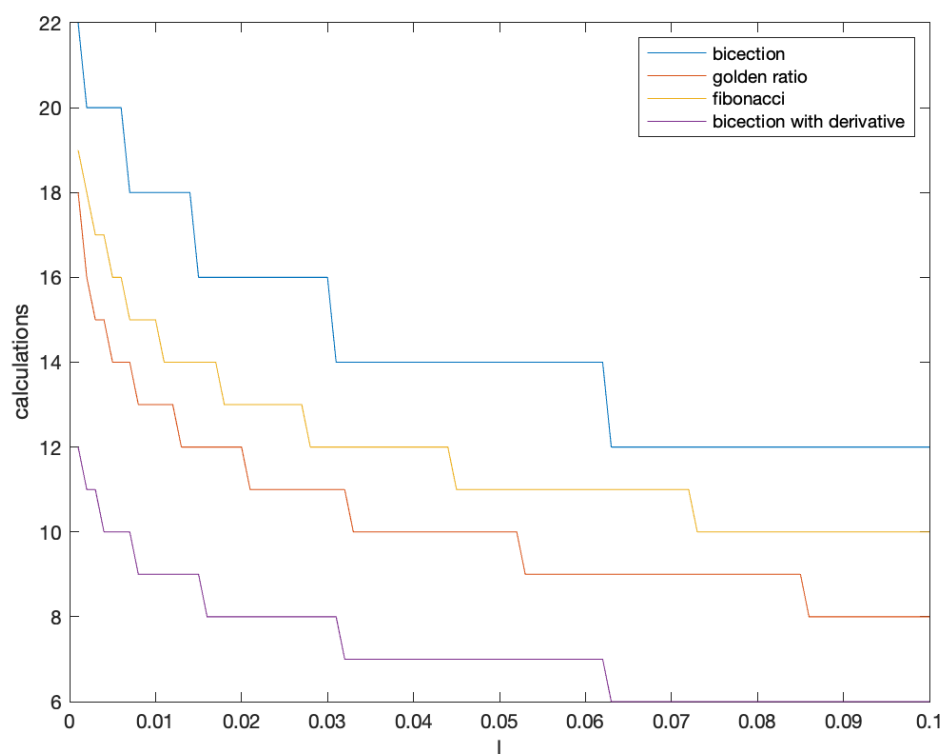
FIGURE 5.4: Graph of lower and upper search limits,  $l = 0.1$ 

## Chapter 6

# Συγκριτικά Αποτελέσματα

Παρατίθεται διάγραμμα που συγκρίνει τον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για καθεμιά από τις τέσσερις μεθόδους που μελετήθηκαν:

FIGURE 6.1: Graph of calculations of the objective function for every method, variable  $l$



Παρατηρούμε ότι η σειρά αποδοτικότητας των μεθόδων χωρίς την χρήση παραγώγων (μέθοδος της διχοτόμου, μέθοδος του χρυσού τομέα και μέθοδος Fibonacci) πειραματικά επιβεβαιώνει

την θεωρία (από την λιγότερο προς περισσότερο αποδοτική: διχοτόμος, χρυσός τομέας, Fibonacci). Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι όσο το  $n$  μεγαλώνει (μικρό  $l$ ), η μέθοδος του χρυσού τομέα τείνει ασυμπτωτικά να ταυτιστεί από πάνω με την μέθοδο Fibonacci, όσον αφορά τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

# Bibliography

- [1] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. *Τεχνικές Βελτιστοποίησης*. Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.