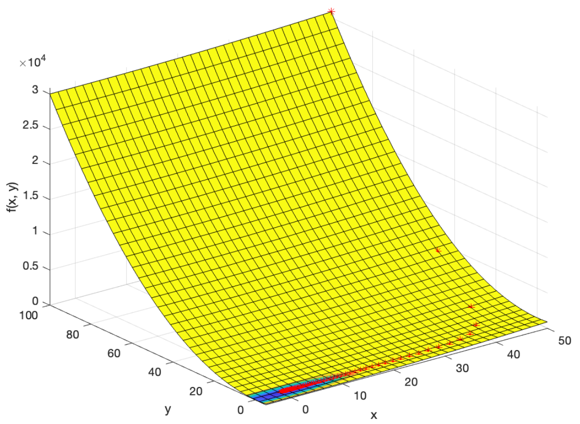
Τεχνικές Βελτιστοποίησης, Εργασία 3

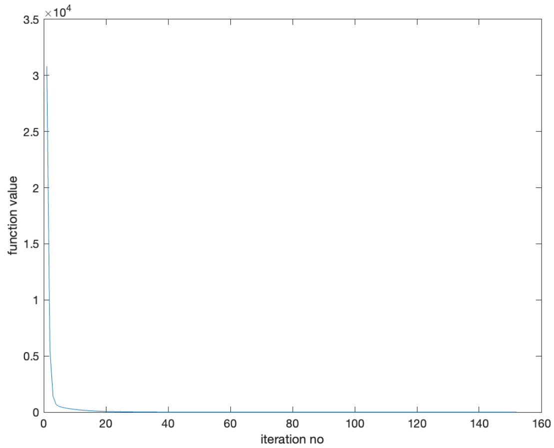
Ονοματεπώνυμο: Αλεξανδρίδης Φώτιος
ΑΕΜ: 9953

Ερώτημα 1

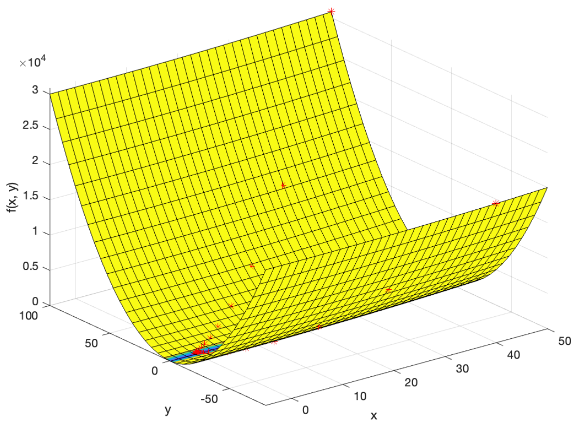
Σε αυτό το ερώτημα εκτελέστηκε η μέθοδος της μέγιστης καθόδου με τις δοσμένες παραμέτρους για κάθε περίπτωση και αρχικό σημείο το (50, 100). Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

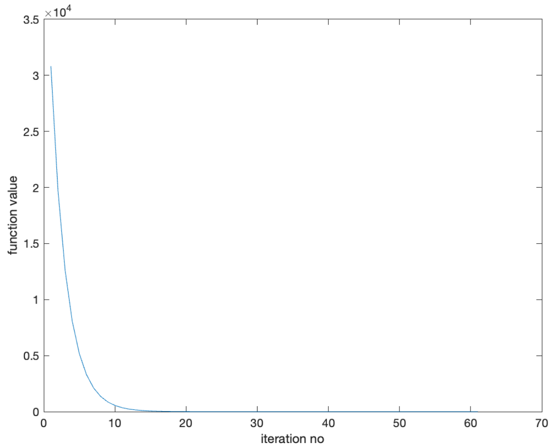
Για γ = 0.1:



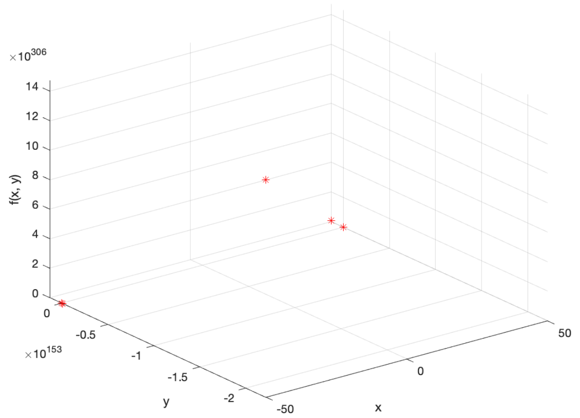


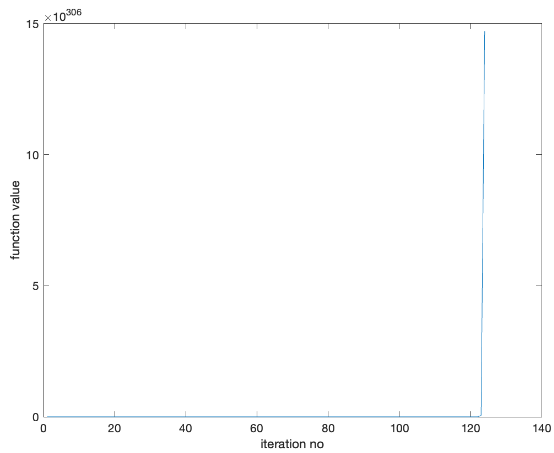
Για γ = 0.3:



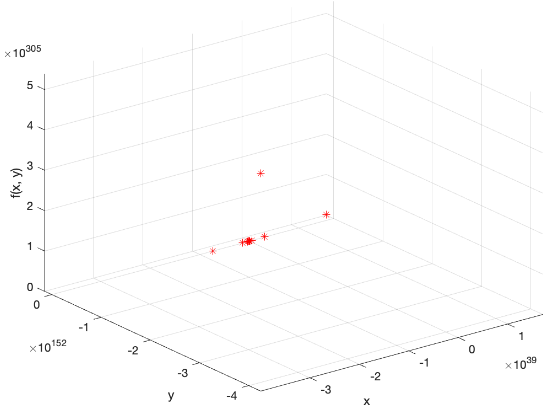


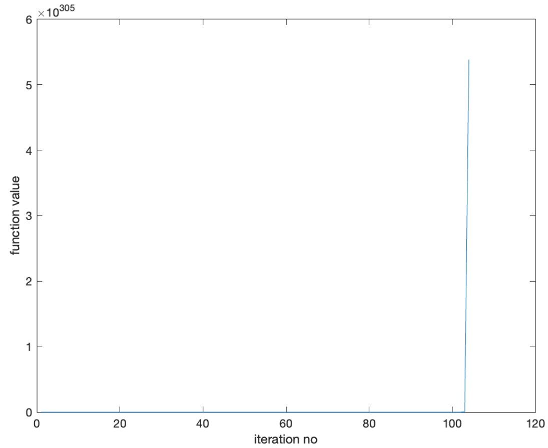
Για γ = 3:





Και τέλος, για γ = 5:



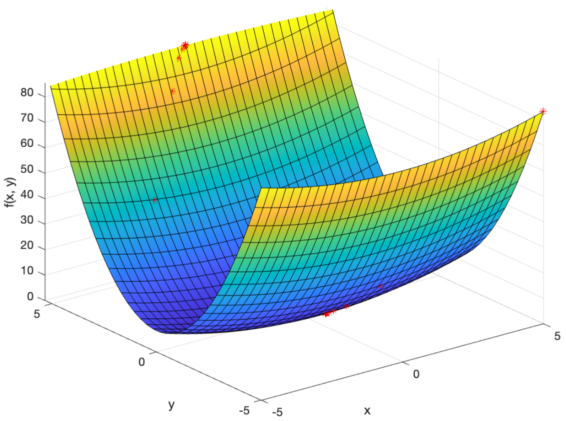


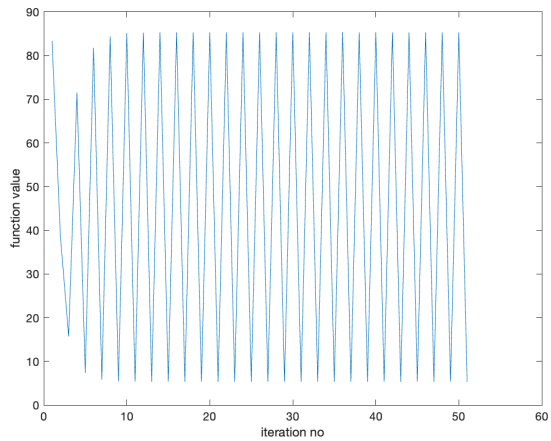
Παρατηρούμε πως για γ > 1, ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, που είναι κάτι που μας το λέει και η παρατήρηση 6.1.6. Μπορούμε να αποδείξουμε πότε συγκλίνει ο αλγόριθμος:

Ουσιαστικά για να συγκλίνει ο αλγόριθμος πρέπει να ισχύει $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$, για να συγκλίνει δηλαδή η ακολουθία θέλουμε κάθε τιμή επόμενου βήματος να είναι μικρότερη από την προηγούμενη, ώστε να συγκλίνουμε στο ελάχιστο που είναι το (0, 0) με μέτρο 0, κάτι το οποίο μπορούμε να πάρουμε ως δεδομένο καθώς η αντικειμενική μας συνάρτηση είναι ένα τετραγωνικό άθροισμα των μεταβλητών μας (λυμένη άσκηση 5.5.2, σελίδα 169). Ισχύει όμως: $x_{k+1} = x_k - \gamma_k * \nabla f$, με $\nabla f = [\frac{2}{3} * x_1, 6 * x_2]^T$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ελάχιστο είναι το (0, 0) θέλουμε τόσο η ακολουθία για το χ1 όσο και η ακολουθία για το χ2 να συγκλίνουν στο 0 ταυτόχρονα. Κάνοντας τις πράξεις και δημιουργώντας ακολουθίες τόσο για το χ1 όσο και για το χ2, και με βάση την γενική σχέση που βγάλαμε παραπάνω, μία συνθήκη που μας το προσφέρει αυτό είναι η $|1 - \frac{2}{3} * \gamma_k| < 1$ και $|1 - 6 * \gamma_k| < 1$. Επιλύοντας βρίσκουμε ότι (και σε συνδυασμό με ότι εξ ορισμού γ > 0) ότι 0 < γ < 1/3, κάτι το οποίο εξηγεί γιατί συγκλίνει ο αλγόριθμος στις πρώτες δύο περιπτώσεις (0,1 , 0.3 < 1/3) και γιατί δεν συγκλίνει στις τελευταίες δύο περιπτώσεις (3, 5 > 1/3).

Ερώτημα 2

Με τους περιορισμούς και τις συνθήκες που μας δίνονται σαν δεδομένα, τα σχετικά γραφήματα φαίνονται παρακάτω:



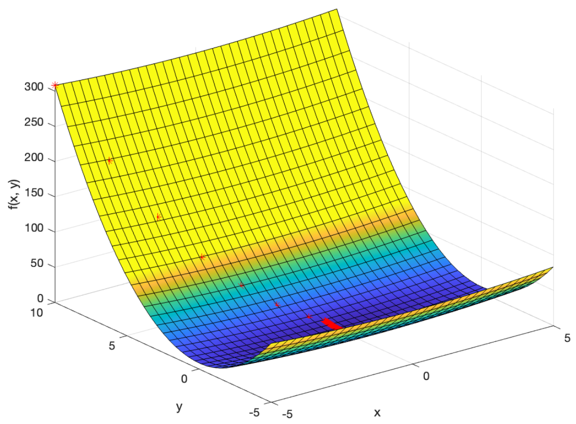


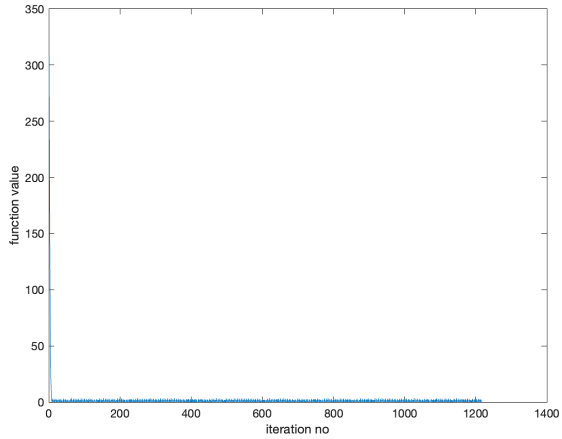
Παρατηρούμε ότι, το βήμα μας εδώ, καθώς μένουμε μέσα στην περιοχή των εφικτών σημείων, είναι ίσο με sk * γk = 2.5 > 1/3, άρα σύμφωνα με την ανάλυση παραπάνω ο αλγόριθμός μας θα αποκλίνει. Επιπρόσθετα, βλέπουμε πως υπάρχει ταλάντωση μεταξύ δύο σημείων.

Για να κάνουμε τον αλγόριθμο να συγκρίνει θα έπρεπε να μην έχουμε σταθερό βήμα, αλλά σε κάθε επανάληψη το βήμα μας να υπολογίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του armijo.

Ερώτημα 3

Όπως και στο ερώτημα 2, τα σχετικά γραφήματα δίνονται παρακάτω:

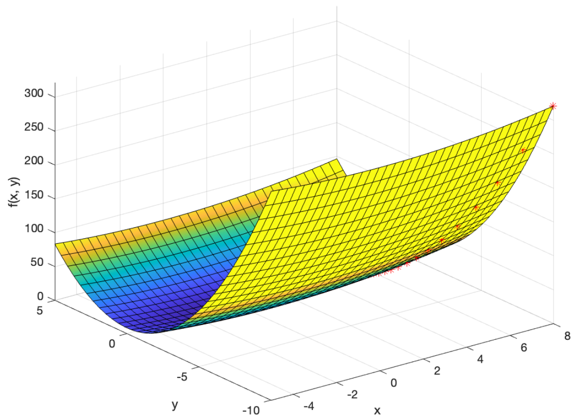


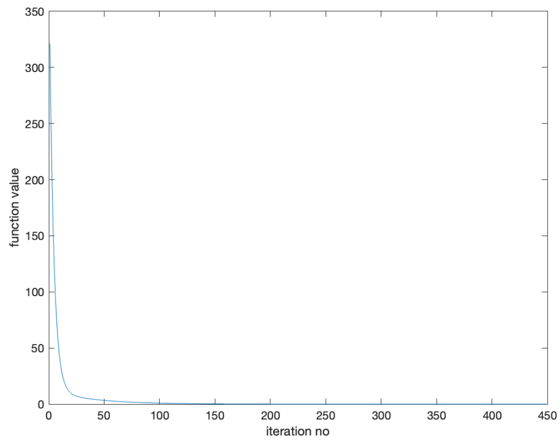


Σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς, και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε βήμα ίσο με 1.5 > 1/3, παρόλα αυτά βλέπουμε πως ο αλγόριθμος πολύ γρήγορα πλησιάζει σε μια περιοχή κοντά στο ολικό ελάχιστο, και έπειτα ταλαντώνεται γύρω από αυτή, και εν τέλει συγκλίνει (τερματίζει από μόνος του)

Ερώτημα 4

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα:





Κάνουμε τις εξής δύο παρατηρήσεις:

1. Ξεκινάμε τον αλγόριθμο από μη εφικτό σημείο, οπότε η προβολή μας επαναφέρει στον χώρο των εφικτών σημείων, παρόλα αυτά απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων για να συγκλίνει ο αλγόριθμος μας.
2. Το βήμα μας είναι αρκετά μικρό (0.03) από την στιγμή που θα βρεθούμε στον χώρο των εφικτών σημείων, ώστε να πούμε με σιγουριά ότι ο αλγόριθμος θα συγκλίνει με βάση την ανάλυση μας στο πρώτο ερώτημα (και δεδομένου ότι μπορεί το αρχικό σημείο μας να προβληθεί μέσα στην εφικτή περιοχή, κάτι που ισχύει καθώς η εφικτή μας περιοχή είναι ένα ορθογώνιο).