Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Αναφορά 2ης εργαστηριακής άσκησης

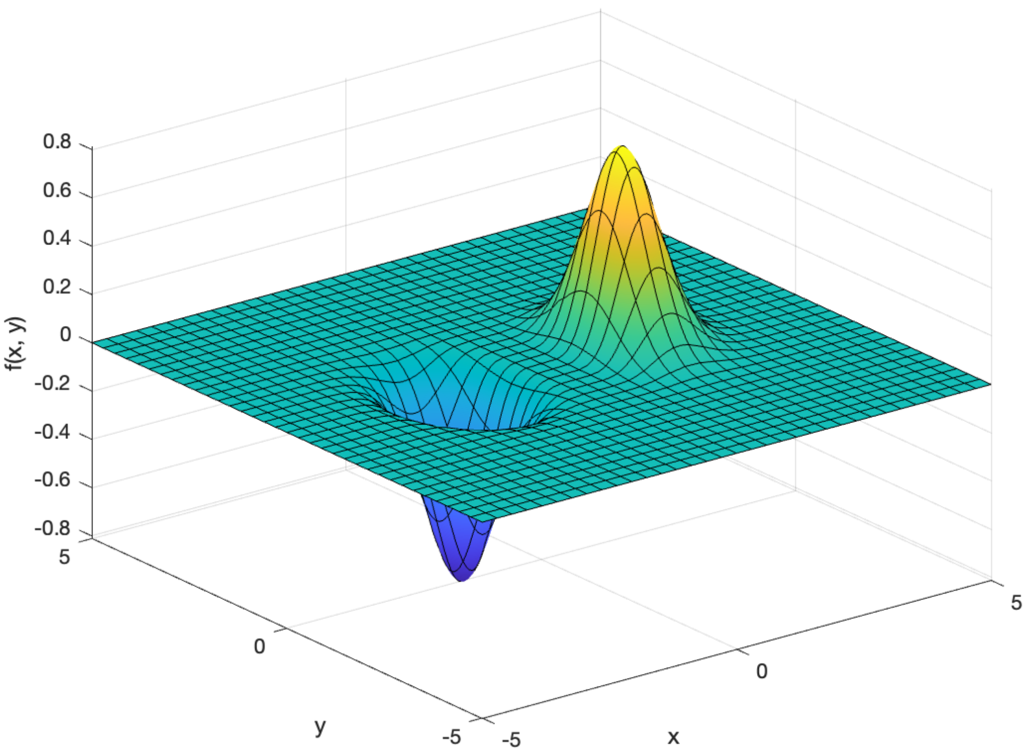
Fotis Alexandridis, AEM: 9953

9 December 2022

Γενικές Πληροφορίες

Ο σκοπός της αναφοράς αυτής είναι να παρουσιάσει τα αποτελέσματα και τα σχόλια πάνω στην μελέτη ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x, y) = x^5 e^{-x^2-y^2}$ χρησιμοποιώντας 3 μεθόδους: την μέθοδο steepest descend, την μέθοδο newton και την μέθοδο levenberg-marquardt.

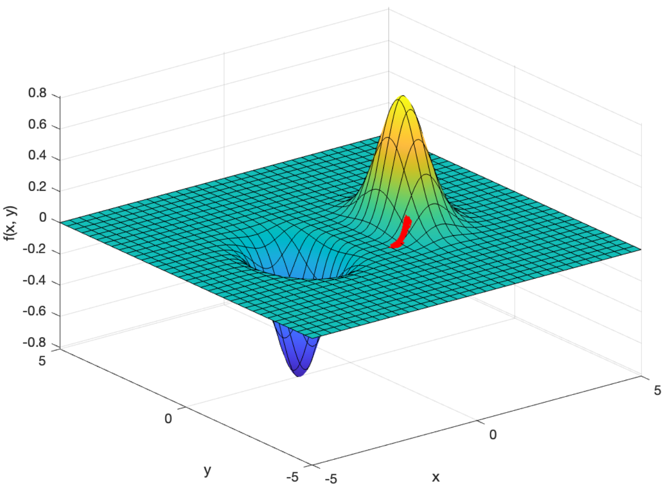
Σημείωση: για έναρξη του αλγορίθμου από το (0, 0), παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση πως ο αλγόριθμος τερματίζει ακαριαία. Αυτό βγάζει νόημα αν σκεφτούμε την συνθήκη τερματισμού, $|\nabla f| < \epsilon, \epsilon > 0$. Ισχύει όμως: $\nabla f = [5x^4 e^{-x^2-y^2} - 2x^6 e^{-x^2-y^2}, -2x^5 y e^{-x^2-y^2}]$, και για το σημείο (0, 0) προφανώς έχουμε το μηδενικό διάνυσμα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σημείο αυτό είναι σημείο εγκλωβισμού.



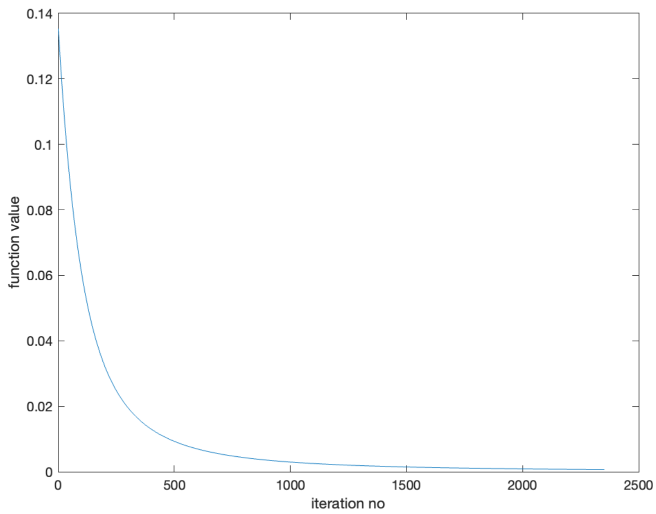
Function plot

Η μέθοδος steepest descend

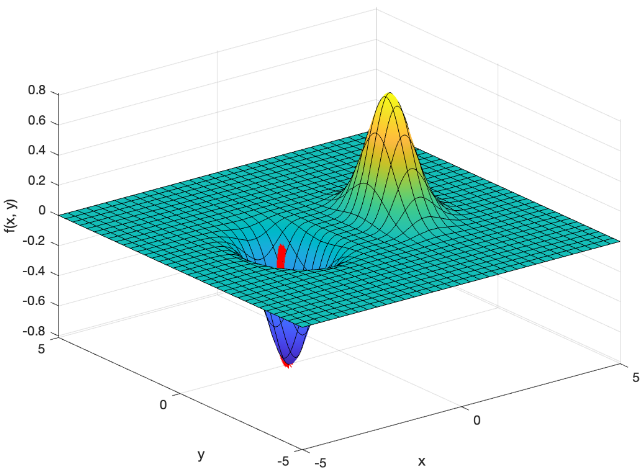
Τόσο τα αποτελέσματα της μεθόδου όσο και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε iteration για κάθε μέθοδο φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



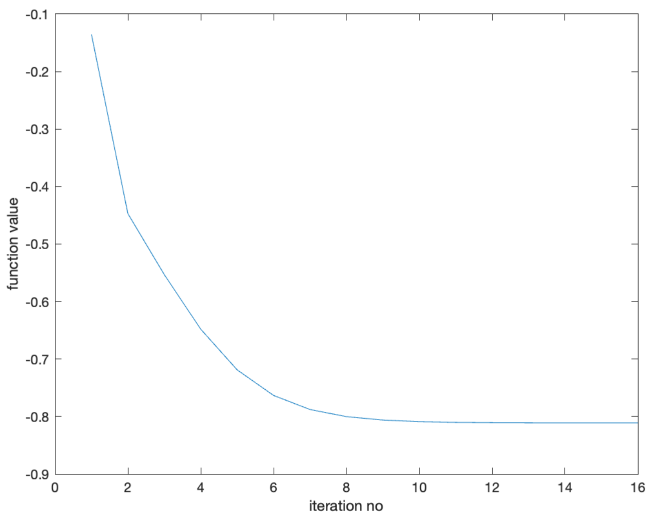
Steepest Descend, constant step = 0.005, starting point = (1, -1)



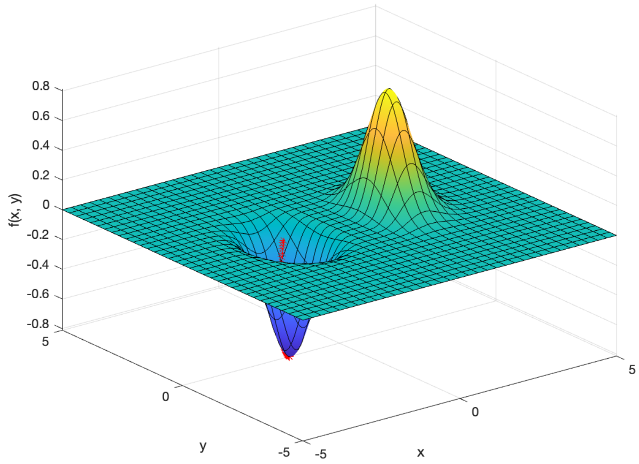
Steepest Descend, constant step = 0.005, starting point = (1, -1)



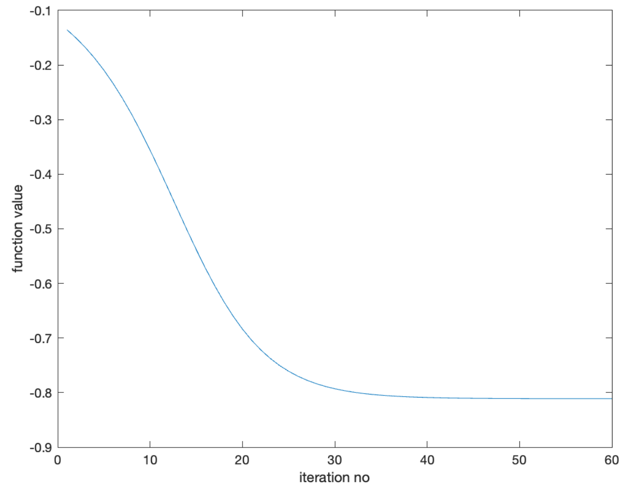
Steepest Descend, constant step = 0.005, starting point = (-1, 1)



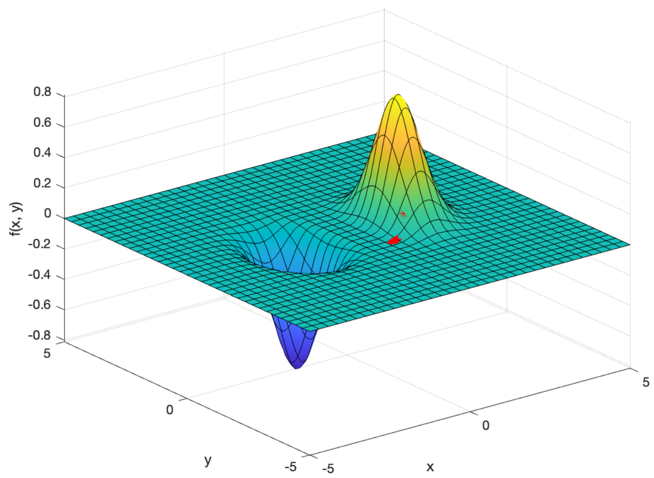
Steepest Descend, constant step = 0.005, starting point = (-1, 1)



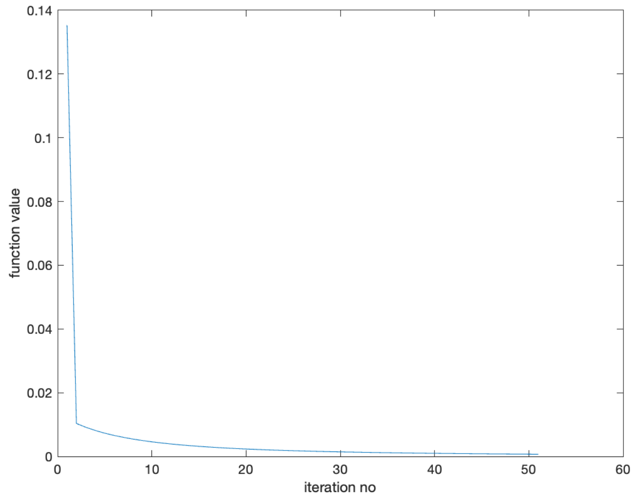
Steepest Descend, minimising step, starting point = (-1, 1)



Steepest Descend, minimising step, starting point = (-1, 1)

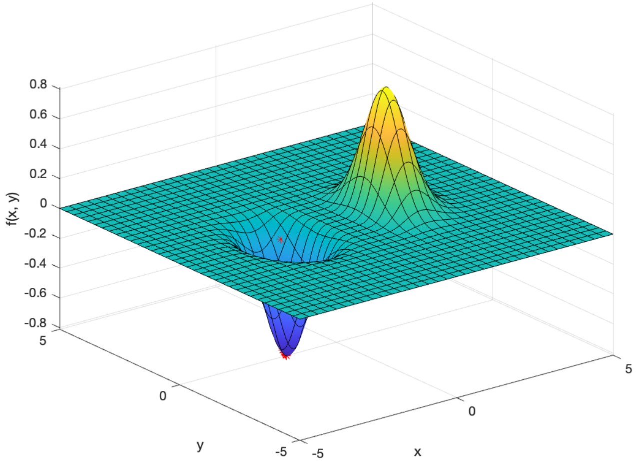


Steepest Descend, armijo's rule step, starting point = (1, -1)

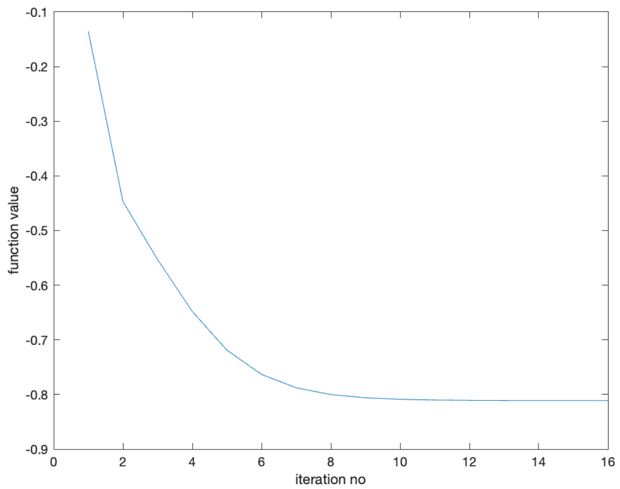


Steepest Descend, armijo's rule step, starting point = (1, -1)

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος που ελαχιστοποιεί το βήμα σύμφωνα με την συνάρτηση απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει σε σχέση με την μέθοδο με σταθερό βήμα, και η μέθοδος στην οποία το βήμα ορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του armijo ακόμα λιγότερες επαναλήψεις. Ακόμα, βλέπουμε πως οι μέθοδοι που ξεκινούν από το σημείο (1, -1)



Steepest Descend, armijo's rule step, starting point = (-1, 1)

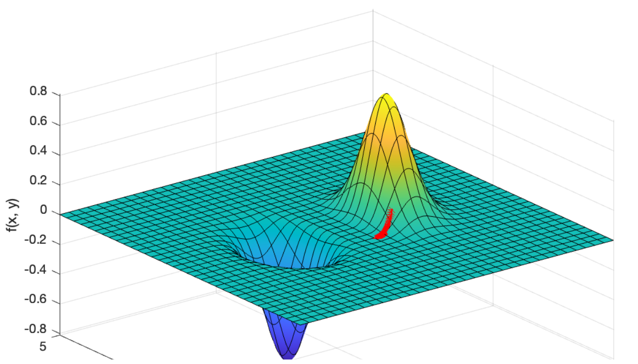


Steepest Descend, armijo's rule step, starting point = (-1, 1)

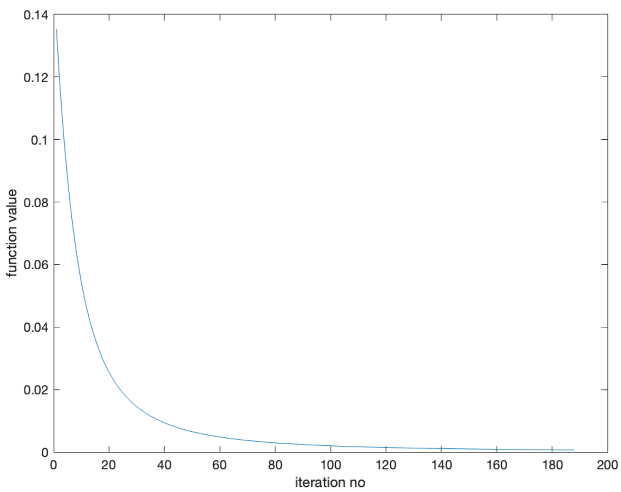
εγκλωβίζονται σε σημεία της μορφής (0, y), που είναι λογικό καθώς σε αυτά τα σημεία ισχύει ότι $|\nabla f| = 0$

Η μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton εξ ορισμού δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την συγκεκριμένη συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει διότι για να έχει η συγκεκριμένη μέθοδος την ιδιότητα της επαναληπτικής καθόδου, και για να μπορεί η μέθοδος να συγκλίνει, πρέπει ο Εσσιανός πίνακας της f, δηλαδή ο $\nabla^2 f$, να



Steepest Descend, minimising step, starting point = (1, -1)



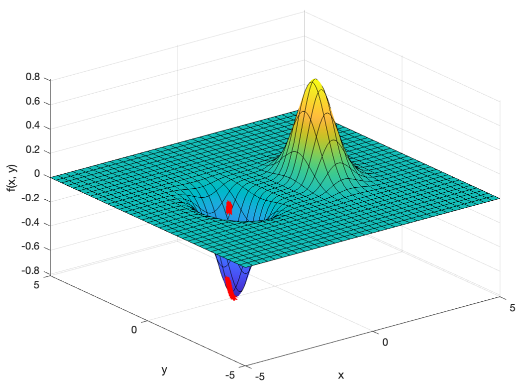
Steepest Descend, minimising step, starting point = (1, -1)

είναι θετικά ορισμένος. Όμως, για καθένα από τα 3 αρχικά σημεία (0, 0), (-1, 1) και (1, -1) ο πίνακα δεν είναι θετικά ορισμένος. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τον μηδενικό πίνακα, ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $[4e^{-2}, -8e^{-2}]$ και $[-4e^{-2}, 8e^{-2}]$, άρα προφανώς ο πίνακας δεν είναι θετικά ορισμένος και η μέθοδος ξεκινάει κακώς ορισμένη από τα πρώτα κιόλας σημεία.

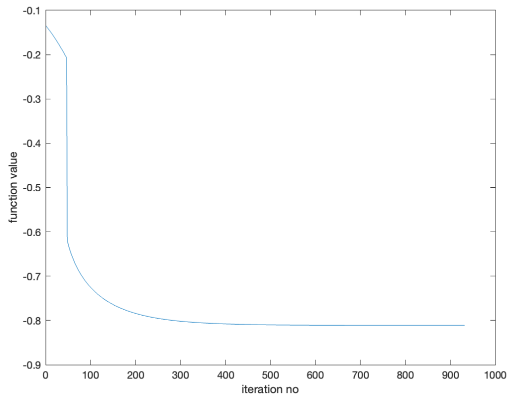
Παρόλα αυτά, ο κώδικας δίνεται για λόγους πληρότητας στο αρχείο newton.m.

Η μέθοδος Levenberg - Marquardt

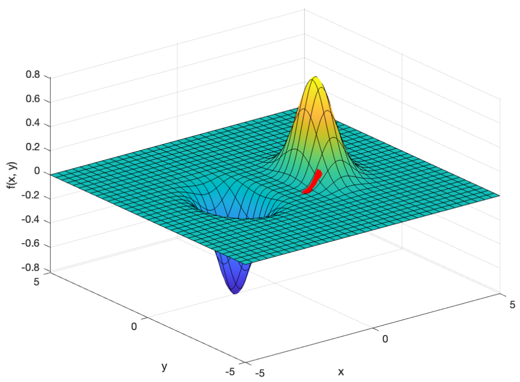
Τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνονται στα επόμενα διαγράμματα. Κάνουμε τις ίδιες παρατηρήσεις που κάναμε και για την μέθοδο Steepest descend.



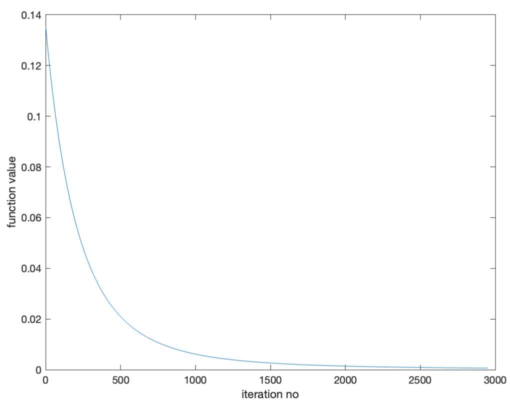
Levenberg-Marquardt, constant step = 0.005, starting point = (-1, 1)



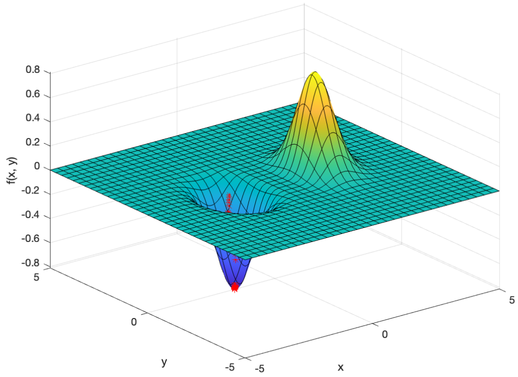
Levenberg-Marquardt, constant step = 0.005, starting point = (-1, 1)

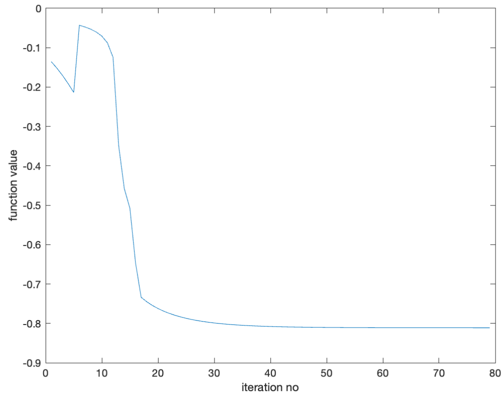


Levenberg-Marquardt, constant step = 0.005, starting point = (1, -1)



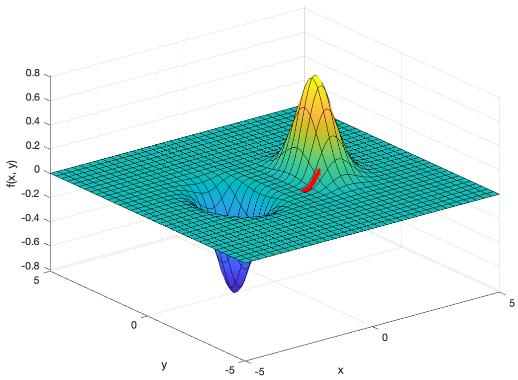
Levenberg-Marquardt, constant step = 0.005, starting point = (1, -1)

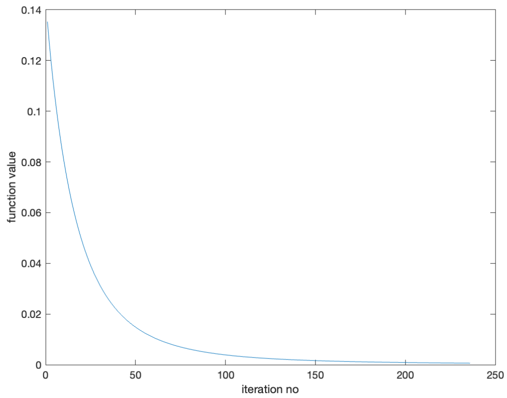




Levenberg-Marquardt, minimizing step, starting point = (-1, 1)

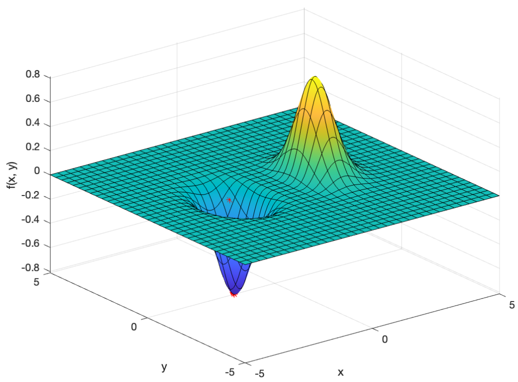
Levenberg-Marquardt, minimizing step, starting point = (-1, 1)

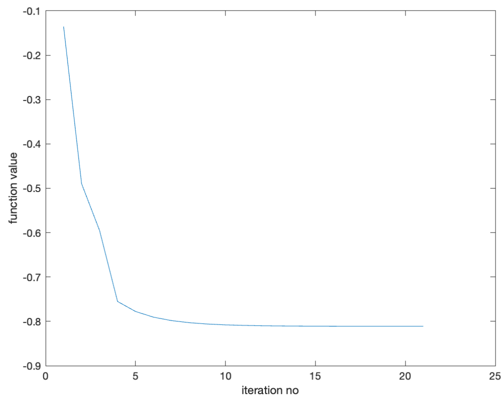




Levenberg-Marquardt, minimizing step, starting point = (1, -1)

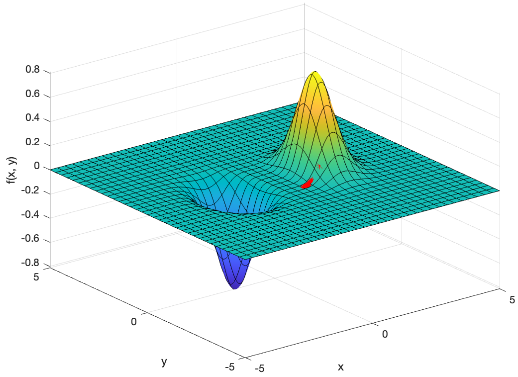
Levenberg-Marquardt, minimizing step, starting point = (1, -1)

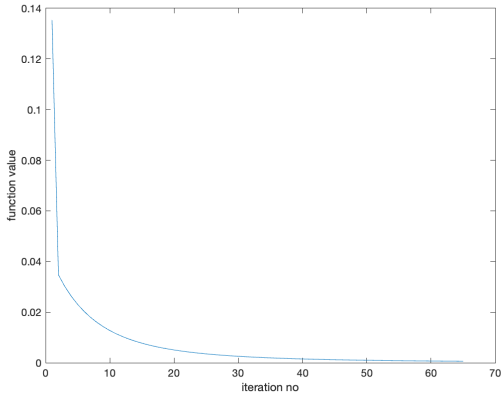




Levenberg-Marquardt, armijo's rule step, starting point = (-1, 1)

Levenberg-Marquardt, armijo's rule step, starting point = (-1, 1)



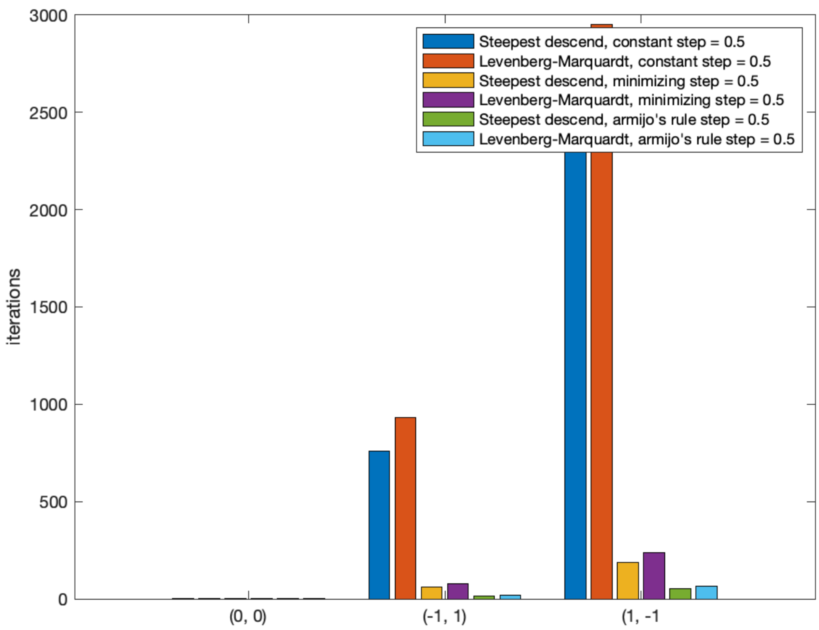


Levenberg-Marquardt, armijo's rule step, starting point = (1, -1)

Levenberg-Marquardt, armijo's rule step, starting point = (1, -1)

Συμπεράσματα

Οι παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι δυο. Η μια είναι ότι



Iterations no

δύναται κατά την εύρεση του ελαχίστου η συνάρτηση να εγκλωβιστεί σε κάποιο κρίσιμο σημείο/τοπικό ακρότατο, όπως στις περιπτώσεις που ξεκινάμε από το σημείο (1, -1) και εγκλωβιζόμαστε σε σημεία με $x = 0$. Η δεύτερη είναι ότι μέθοδοι υπολογισμού του κατάλληλου βήματος, όπως η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης ή ο κανόνας του Armijo μπορούν να μειώσουν αισθητά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να συγκλίνει ο εκάστοτε αλγόριθμος. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται οι συνολικές επαναλήψεις για κάθε μέθοδο για κάθε αρχικό σημείο.