

Warm-Up-Aufgabe 9.1 [Wiederverwendung von Algorithmen]

Wir betrachten einige Paare (A, B) von Entscheidungsproblemen. Nehmen Sie an, Ihnen steht ein Algorithmus zur Verfügung, um B zu entscheiden. Wie können Sie diesen Algorithmus als Unterprogramm verwenden, um A zu entscheiden?

A	B
<p><i>Problem:</i> DPDANOTEMPTY <i>Gegeben:</i> Deterministischer Kellerautomat \mathcal{A} <i>Frage:</i> Gibt es ein Wort w, das von \mathcal{A} akzeptiert wird?</p>	<p><i>Problem:</i> DPDAUNIVERSAL <i>Gegeben:</i> Deterministischer Kellerautomat \mathcal{A} <i>Frage:</i> Wird jedes Wort $w \in \Sigma^*$ von \mathcal{A} akzeptiert?</p>
<p><i>Problem:</i> CONNECTEDNESS <i>Gegeben:</i> Ungerichteter Graph G <i>Frage:</i> Ist G zusammenhängend?</p>	<p><i>Problem:</i> TWOCONNECTEDCOMPONENTS <i>Gegeben:</i> Ungerichteter Graph G <i>Frage:</i> Hat G genau zwei Zusammenhangskomponenten?</p>
<p><i>Problem:</i> REGLANGUAGEINFINITE <i>Gegeben:</i> DFA \mathcal{A} <i>Frage:</i> Ist $L(\mathcal{A})$ unendlich?</p>	<p><i>Problem:</i> REACH <i>Gegeben:</i> Graph G und Knoten s, t <i>Frage:</i> Gibt es einen Weg von s nach t in G?</p>

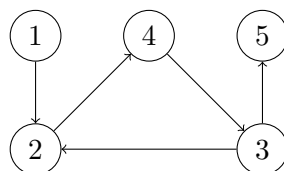
- Formulieren Sie jeweils einen Algorithmus in Pseudocode, der zu einer gegebenen Instanz I für Problem A entscheidet, ob $I \in A$ gilt, so dass dieser Algorithmus Aufrufe eines Unterprogramms für das Problem B enthält.
- Wie verhalten sich die von Ihnen angegebenen Algorithmen zum Reduktionsbegriff der Vorlesung?

Warm-Up-Aufgabe 9.2 [Überprüfen von Reduktionen]

Wir betrachten das von Warm-Up-Aufgabe 9.1 und der Vorlesung bekannte Problem REACH und das folgende Entscheidungsproblem.

Problem: CFGNONEMPTY
Gegeben: Kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$
Frage: Gilt $L(G) \neq \emptyset$?

Weiterhin sei der folgende Graph G_1 gegeben.



Für den Graphen G_1 und die Knoten 1 und 5 gilt $(G_1, 1, 5) \in \text{REACH}$.

- a) Gegeben sei die folgende Funktion g mit $g((G, s, t)) = (V', \{a\}, X_s, P)$, die Instanzen für REACH auf Instanzen für CFGNONEMPTY abbildet, wobei $V' = \{X_v \mid v \in V\}$ und

$$P = \{X_v \rightarrow X_w \mid (v, w) \in E\} \cup \{X_t \rightarrow a\}$$

für alle Graphen $G = (V, E)$ mit Knoten $s, t \in V$ gilt. Berechnen Sie $g((G_1, 1, 5))$ für den oben stehenden Graphen G_1 und die Knoten 1 und 5 und entscheiden Sie begründet, ob $g((G_1, 1, 5)) \in \text{CFGNONEMPTY}$ gilt.

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion g eine Reduktion von REACH auf CFGNONEMPTY ist.

Warm-Up-Aufgabe 9.3 [Diagonalisierung]

Für unseren ersten Unentscheidbarkeitsbeweis in der Vorlesung (Satz 14.1) haben wir die Methode der *Diagonalisierung* verwendet. Wir wollen ein anschauliches Beispiel für diese Methode betrachten:

In einem Dorf gibt es einen Barbier, der genau die Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Beschreiben Sie, wie diese Aussage zu der Illustration in der linken Spalte auf Folie 18 aus Kapitel 14 passt (wo findet sich beispielsweise der Barbier in der Illustration?). Leiten Sie anschließend aus der obigen Aussage einen Widerspruch her.