1.4

Dienstag, 23. April 2024 09:45

Warm-Up-Aufgabe 1.4 [Eigenschaften regulärer Ausdrücke]

a) Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass es für jeden regulären Ausdruck α ohne Wiederholungsoperator die folgende Längenbeschränkung der von ihm erzeugten Wörter gibt: Für alle $w \in L(\alpha)$ gilt $|w| \leq |\alpha|$, falls in α kein Wiederholungsoperator vorkommt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Zu jedem regulären Ausdruck β gibt es einen regulären Ausdruck β' ohne Wiederholungsoperator, sodass $\beta \equiv \beta'$ ist.

a)

IA: "Basisfälle" $\rightarrow$ hier 1. σ (1. Symbol des Alphabets), 2. ε & 3. $\emptyset$

σ: $|\alpha| = 1$ (Der Reguläre Ausdruck ist σ)

$w = \sigma \overset{\text{implies}}{\Longrightarrow} |w| = 1$ (nur ein Symbol (σ), hat eine Mächtigkein von 1)

$\Rightarrow |w| \leq |\alpha|$

ε: $\left(|\alpha| = 0,\ w = \varepsilon \overset{\text{implies}}{\Longrightarrow} |w| = 0\right) \overset{\text{implies}}{\Longrightarrow} |w| \leq |\alpha|$ ← Mathematisch formale schreibweise

$\emptyset$ $L(\emptyset) = \emptyset \overset{\text{implies}}{\Longrightarrow}$ Trivialerweise erfüllt / gilt offensichtlich / immer erfüllt, da es kein Wort gibt, dass die Bedingung verletzen könnte

IS: Seien β, γ zwei beliebige RE von α verschieden. $b \in L(\beta), c \in L(\gamma)$ beliebig

Das ist nicht das α aus dem IA, weil wir hier quasi $\alpha+1$ haben & im IA, haben wir α

$+ = \alpha = \beta + \gamma$ Zu zeigen ist $\forall\, a \in L(\alpha): |a| \leq |\alpha|$

da wir den $+$-Operator verwenden, gilt: $a \in \{b, c\}$, das heißt $|a| = |b|$ oder $|a| = |c|$.

Das heißt $|a| \leq |\beta|$ oder $|a| \leq |\gamma|$.

Da $|\alpha| = |\beta| + |\gamma|$, gilt $|a| \leq |\alpha|$

$\cdot : \alpha = \beta\gamma$, $a \in L(\beta) \cdot L(\gamma)$

Die Längen werden ja bei der Konkatenation angefügt

$|a| = \underbrace{|b|}_{\leq |\beta|} + \underbrace{|c|}_{\leq |\alpha|} \leq |\beta| + |\gamma| = |\alpha|$, daher gilt $|a| \leq |\alpha|$