Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

1 Matrisene er ortonormale hvis og bare hvis samlingen av deres kolonnevektorer er ortonormale (har lengde 1 og er parvis ortogonale). For matrisen A beregner vi indreproduktet mellom kolonnene for å finne a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ a \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{a}{2}.$$

For at indreproduktet over skal være null, må $0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{a}{2}$, altså $a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Vi sjekker at lengdene til kolonnene er lik 1 med denne a:

$$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\| \sqrt{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Dermed er A ortonormal dersom $a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

For B ser vi at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Så dens kolonner er parvis ortogonale uansett hva b er. Så vi må velge b slik at $1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = b^2$. Derfor kan vi ta $b = -1$ eller $b = 1$; begge valg er gyldige.

2 Vi lar $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og P_v være lineærtransformasjonen gitt ved projeksjon ned på vektoren v. Vi begynner med å finne standardmatrisen til P_v, $[P_v]$. Per definisjon er den gitt ved

$$[P_v] = (P_v(e_1) P_v(e_2) P_v(e_3)),$$

hvor e_i er den i´te standard basisvektor (så feks $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = e_2$), og P_v vet vi er gitt ved $P_v(w) = \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$. Vi har at $v \cdot v = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$,

$$e_1 \cdot v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1,$$

og på samme hvis er $e_2 \cdot v = 1$ og $e_3 \cdot v = 2$. Dermed er $P_v(e_1) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $P_v(e_2) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ og $P_v(e_3) = \frac{2}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$, og vi får at

$$[P_v] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Vi finner så en basis for nullrommet til $[P_v]$ ved å radredusere matrisen til redusert trappeform:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix}\\ &\sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

Dette tilsvarer ligningssytemet $x_1 = -x_2 - 2x_3$. Putter vi $x_2 = t$ og $x_3 = s$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$, får vi at alle vektorer x i nullrommet til $[P_v]$ kan skrives som

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-t-2s\\t\\s\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Det følger fra dette at nullrommet har basis samlingen

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

La så $\mathcal{B}$ være basisen gitt ved

$$\mathcal{B} = \left\{v, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

hvor v var vektoren vi begynte med. Vi vil finne matrisen som representerer $[P_v]$ i denne basisen. Per definisjon er det matrisen $[P_v]_{\mathcal{B}} = ([P_v(v)]_{\mathcal{B}}[P_v(w)]_{\mathcal{B}}[P_v(z)]_{\mathcal{B}})$, hvor z og w er de to andre vektorene i basisen $\mathcal{B}$. Men $P_v(v) = v = 1 \cdot v + 0 \cdot w + 0 \cdot z$, og siden z og w er i nullrommet til P_v, så er $P_v(z) = P_v(w) = 0 \cdot v + 0 \cdot w + 0 \cdot z$. Dermed blir $[P_v(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[P_v(z)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_v(w)$; så

$$[P_v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Husk at den ortogonale projeksjonen av en vektor w ned på en vektor v er vektoren i spannet til v, kall den b, gitt ved $b = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$. Dersom vektorene er komplekse så er indreproduktet ikke symmetrisk. Altså, vi har ikke at $v \cdot w = w \cdot v$ som for reelle vektorer, men heller at $v \cdot w = \overline{w \cdot v}$. Så rekkefølgen på det komplekse indreproduktet er viktig å være obs på i utregningene. Vi beregner

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} &= (2-4i) \cdot \overline{2-4i} + (-3i-4) \cdot \overline{-3i-4} \\ &= (2-4i)(2+4i) + (-3i-4)(3i-4) = 2^2 + 4^2 + 3^2 + 4^2 = 45. \end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{bmatrix} 3i+1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} = (3i+1) \cdot \overline{(2-4i)} + (-4) \cdot \overline{(3i-4)} = -2i + 6.$$

Dermed blir vektoren vi ser etter gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\begin{bmatrix} 3i+1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} &= \frac{-2i+6}{45} \begin{bmatrix} 2-4i \\ -3i-4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{45} \begin{bmatrix} (2-4i)(6-2i) \\ (-3i-4)(6-2i) \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 4-28i \\ -10i-30 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4 Husk at dersom $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ er en ortonormal basis for deres lineære spenn $V = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, og $U = (u_1 \ldots u_n)$ er matrisen med denne basisen som kolonner, så er projeksjonsmatrisen ned på V gitt ved $[P_V] = UU^T$.

Vi lar $\mathcal{S} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. For å finne projeksjonsmatrisen som over, trenger vi å finne en basis for $\mathcal{S}$. Vi benytter Gram-Schmidt metoden for dette. La $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

og $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. La $\tilde{u_1} = v$, og $\tilde{u_2} = w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$. Siden

$$w \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot -2 + -2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -4,$$

og

$$v \cdot v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2)^2 + 1^2 + 1^2 = 6,$$

blir dermed

$$\tilde{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-4}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi har at $\tilde{u_2}$ er ortogonal med $\tilde{u_1}$, og dette holder fortsatt hvis vi redefinerer $\tilde{u_2} := 6\tilde{u_2}$ sånn at $\tilde{u_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vektorene er ortogonale, så vi trenger bare å normalisere de for at de skal være ortonormale:

$$u_1 = \frac{\tilde{u_1}}{\| \tilde{u_1} \|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\| \tilde{u_2} \|} = \frac{1}{\sqrt{84}} \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix},$$

siden $\| \tilde{u_1} \| = \sqrt{\tilde{u_1} \cdot \tilde{u_1}} = \sqrt{6}$ og $\| \tilde{u_2} \| = \sqrt{\tilde{u_2} \cdot \tilde{u_2}} = \sqrt{84}$. Lar vi

$$U = (u_1 u_2) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-8}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{84}} \end{bmatrix},$$

blir projeksjonsmatrisen gitt ved

$$UU^T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-8}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{84}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{84}} & \frac{-8}{\sqrt{84}} & \frac{4}{\sqrt{84}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{84} & \frac{-12}{84} & \frac{-36}{84} \\ \frac{-12}{84} & \frac{78}{84} & \frac{-18}{84} \\ \frac{-36}{84} & \frac{-18}{84} & \frac{30}{84} \end{bmatrix}.$$

For å finne projeksjonen av x ned på $V = \mathcal{S}$, trenger vi nå bare å beregne

$$UU^T x = \begin{bmatrix} \frac{60}{84} & \frac{-12}{84} & \frac{-36}{84} \\ \frac{-12}{84} & \frac{78}{84} & \frac{-18}{84} \\ \frac{-36}{84} & \frac{-18}{84} & \frac{30}{84} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 36 \\ -234 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ La A være matrisen gitt av oppgaven, med kolonnerom $\mathrm{Col}(A)$. Siden $\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$, er det å finne en basis for det ortogonale komplementet til kolonnerommet det samme som å finne en basis for nullrommet til A sin transponert. Vi radreduserer til redusert trappeform:

$$\begin{aligned}
A^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & -9 & 18 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

og derfor er $x_1 = 2x_3 = x_2$, slik at alle vektorer på formen $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, for $x_3 \in \mathbb{R}$, er alle vektorene i nullrommet. En basis er feks da gitt ved vektoren $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$\boxed{6}$ La $b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi anvender Gram-Schmidt metoden for å finne b_2:

$$b_2 = v - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Samlingen $\{b_1, b_2\}$ utgjør da en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{7}$ La $b_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$. Vi bruker Gram-Schmidt for å finne $\tilde{b_2}$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{15}{13} \\ 1 - \frac{10}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/13 \\ 3/13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Da vil $\{b_1, \tilde{b_2}\}$ være ortogonal basis. For å få en ortonormal basis må vektorene ha lengde lik 1. Vi har at $\| \ b_1\| = \sqrt{b_1 \cdot b_1} = 1$, mens $\|b_2\| = \frac{1}{13}\sqrt{4+9} = \frac{1}{\sqrt{13}}$. Da vil

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \right\},$$

være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$

$\boxed{8}$ Denne oppgaven har nøyaktig samme løsningsmetode som oppgaven under, men med betraktellig styggere utregninger. Vi dropper derfor LF til denne.

$\boxed{9}$ La $b_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Merk at $\|b_1\| = \sqrt{b_1 \cdot b_1} = b_1 \cdot b_1 = 1$. Vi bruker Gram-Schmidt som vanlig, men normaliserer vektorene underveis. Altså $\tilde{b}_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = v_2 - (v_2 \cdot b_1)b_1$, og $b_2 := \frac{\tilde{b}_2}{\| \ \tilde{b}_2\|}$, og $\tilde{b}_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2 - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = v_3 - (v_3 \cdot b_2)b_2 - (v_2 \cdot b_1)b_1$. Normaliser igjen: $b_3 := \frac{\tilde{b}_3}{\| \ \tilde{b}_3\|}$ for å til slutt få den ortonormale basisen $\{b_1, b_2, b_3\}$. Vi beregner:

$$\begin{aligned} \tilde{b_2} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2/3 + 2/3) \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Videre er

$$\| \ \tilde{b}_2\| \ = \sqrt{\tilde{b}_2 \cdot \tilde{b}_2} = \sqrt{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{3}.$$

Så $b_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. For b_3:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-2/3 - 1/3 + 4/3) \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} - (1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3} + 2/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -9-2+6 \\ -9-6 \\ -9-1 \\ 18-2-6 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{b_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{25 + 225 + 100 + 100}} \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{450}} \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Så basisen blir

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{450}} \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\boxed{10}$ La $u = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $w = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$. For å finne en ortogonal basis for span(u, v, w) kan vi anvende Gram-Schmidt ummidelbart på de tre vektorene, men vi slipper mye jobb ved å gjøre observasjonen at $w = 2u + 2v$, og derfor er span$(u, v, w) =$ span(u, v). Så vi trenger bare å gjøre Gram-Schmidt på de to vektorene u og v. La

$$b = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{8} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Da utgjør samlingen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

en ortogonal basis for span(u, v, w).