Øving 5
TDAT2002 Matematikk 2

Institutt for informatikk og e-læring
Høgskolen i Sør-Trøndelag

Høsten 2015

Løsningsforslag

1 La b_1, b_2, b_3 være en følge gitt ved

$$b_1 = 4, b_2 = 12, b_k = b_{k-2} + b_{k-1}.$$

Vis at b_n er delelig med 4 for alle heltall $n \geqslant 1$.

Løsning: Bruker sterk induksjon.
Basissteg: $n = 1, n = 2$ Ser at

$$b_1 = 4 = 4 \cdot 1 \text{ og } b_2 = 12 = 4 \cdot 3,$$

så begge er delelig med 4.
Induktivt steg: Antar at b_i er delelig med 4, dvs. at $b_i = 4t_i$ for et heltall t_i, for alle $1 \leqslant i < k$. Må vise at b_k er delelig med 4, dvs. at $b_k = 4t$ for et heltall t:

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k-2} + b_{k-1} = 4t_{k-1} + 4t_{k-1} \\ &= 4(t_{k-2} + t_{k-1}). \end{aligned}$$

Siden både t_{k-2} og t_{k-1} er heltall blir summen et heltall, så vi ser at $4|b_k$. Altså er påstanden sann ved matematisk induksjon.

2 Gitt følgen $g_k = g_{k-1} + 5k$, $g_1 = 5$. Finn de første leddene i følgen og gjett en formel for g_n for en hvilken som helst $n \geqslant 1$ (dvs. gjett en løsning på differensligningen).

Løsning: Regner ut de første leddene i følgen:

$$\begin{aligned} g_1 &= 5 \\ g_2 &= g_1 + 5 \cdot 2 = 5 + 5 \cdot 2 \\ g_3 &= g_2 + 5 \cdot 3 = 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ g_4 &= g_3 + 5 \cdot 4 = 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \end{aligned}$$

Det ser altså ut til at $g_n = 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \ldots + 5 \cdot n = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$. Vi kan da bruke formelen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, og får

$$g_n = 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \cdots + 5 \cdot n = 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5n(n+1)}{2}.$$

3 Bruk iterasjon til å gjette en formel for differensligningen under, og vis at gjetningen din stemmer vha. matematisk induksjon:

(1) $c_k = \frac{c_{k-1}}{2+c_{k-1}}$ for $k \geqslant 2$, og

(2) $c_1 = 1$.

Løsning: Ser at

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= \frac{c_1}{2+c_1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\
c_3 &= \frac{c_2}{2+c_2} = \frac{\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{(2+\frac{1}{3})\cdot 3} = \frac{1}{7} \\
c_4 &= \frac{c_3}{2+c_3} = \frac{\frac{1}{7}}{2+\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}\cdot 7}{(2+\frac{1}{7})\cdot 7} = \frac{1}{15} \\
c_5 &= \frac{c_4}{2+c_4} = \frac{\frac{1}{15}}{2+\frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{15}\cdot 15}{(2+\frac{1}{15})\cdot 15} = \frac{1}{31}
\end{aligned}$$

og foreslår ut fra dette formelen $c_n = \frac{1}{2^n-1}$. Viser den ved induksjon:
Basissteg: $n = 1$

$$\frac{1}{2^1-1} = \frac{1}{2-1} = 1 = c_1,$$

så påstanden holder for $n = 1$.
Induktivt steg: Antar at påstanden holder for t, dvs. at $c_t = \frac{1}{2^t-1}$.
Må vise at påstanden holder for $t+1$, dvs. at $c_{t+1} = \frac{1}{2^{t+1}-1}$.

Ser at

$$\begin{aligned}
c_{t+1} &= \frac{c_t}{2+c_t} = \frac{\frac{1}{2^t-1}}{2+\frac{1}{2^t-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{2^t-1}\cdot(2^t-1)}{(2+\frac{1}{2^t-1})\cdot(2^t-1)} \\
&= \frac{1}{2(2^t-1)+1} = \frac{2}{2^{t+1}-2+1} \\
&= \frac{1}{2^{t+1}-1}
\end{aligned}$$

som ønsket. Altså er påstanden sann ved matematisk induksjon.

4 Bruk iterasjon til å gjette en formel for differensligningen under. Bruk deretter sterk matematisk induksjon til å vise at gjetningen stemmer.

$$\begin{aligned}
&t_k = t_{k-1} + 3k + 1 \text{ for alle heltall } k \geqslant 1, \\
&t_0 = 0.
\end{aligned}$$

Løsning: Regner ut noen t_i'er:

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0 \\
t_1 &= t_0 + 3\cdot 1 + 1 = 0 + 3 + 1 = 4 \\
t_2 &= t_1 + 3\cdot 2 + 1 = 4 + 6 + 1 = 11 \\
t_3 &= t_2 + 3\cdot 3 + 1 = 11 + 9 + 1 = 21 \\
t_4 &= t_3 + 3\cdot 4 + 1 = 21 + 12 + 1 = 34
\end{aligned}$$

Hvis vi “backtracker” litt, ser vi at

$$\begin{aligned} t_4 &= t_3 + 3 \cdot 4 + 1 \\ &= (t_2 + 3 \cdot 3 + 1) + 3 \cdot 4 + 1 \\ &= (t_1 + 3 \cdot 2 + 1) + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + +1 + 1 \\ &= (t_0 + 3 \cdot 1 + 1) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Dette antyder formelen

$$t_k = 3(1 + 2 + \ldots + k) + k = 3 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k = \frac{3k^2 + 5k}{2}.$$

Viser dette vha. (vanlig) induksjon.

Basissteg: Her trenger vi kun å sjekke formelen for $k = 0$:

$$\frac{3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0}{2} = 0,$$

som stemmer.

Induktivt steg: Antar at formelen stemmer for $k \geqslant 0$, dvs. at $t_k = \frac{3k^2+5k}{2}$. Må vise at formelen holder for $k+1$, dvs. at $t_{k+1} = \frac{3(k+1)^2+5(k+1)}{2}$. I følge definisjonen av følgen er $t_{k+1} = t_k + 3k + 1$, så vi ser at

$$\begin{aligned} t_{k+1} = t_k + 3k + 1 &= \frac{3k^2 + 5k}{2} + 3(k+1) + 1 \\ &= \frac{3k^2 + 5k}{2} + \frac{2(3k+4)}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 6k + 8}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5}{2} = \frac{3(k+1)^2 + 5(k+1)}{2} \end{aligned}$$

(litt algebra mangler, men det er lett å sjekke). Det betyr at formelen alltid holder, og påstanden er vist ved induksjon.

5 Finn den karakteristiske ligningen til de andreordens lineære homogene differensligningene med konstante koeffisienter under, og løs dem. Finn også et generelt uttrykk for løsningene av differensligningene på formen $C? + D??$.

a) $a_k = 7a_{k-1} - 10a_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$.

b) $b_k = b_{k-1} + 6b_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$.

c) $c_k = 2c_{k-1} - c_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$.

Løsning:

a) Ser at den karakteristiske ligningen blir

$$t^2 - 7t + 10 = 0.$$

Siden $t^2 - 7t + 10 = (t-2)(t-5)$, blir røttene $t_1 = 2$ og $t_2 = 5$. Det betyr at et generelt uttrykk for løsningene på differensligningen blir

$$a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 5^n.$$

b) Ser at den karakteristiske ligningen blir

$$t^2 - t - 6 = 0$$

Den faktoriserer til $(t+2)(t-3)$, så røttene er $t_1 = -2$ og $t_2 = 3$. Et generelt uttrykk for løsningene på differensligningen blir dermed

$$b_n = C \cdot (-2)^n + D \cdot 3^n.$$

c) Den karakteristiske ligningen blir

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

som har den doble roten $t = 1$. Det betyr at et generelt uttrykk for løsningene blir

$$c_n = C \cdot 1^n + Dn \cdot 1^n = C + Dn.$$

6 Finn eksplisitte løsninger for differensligningene med initialbetingelser under.

a) $e_k = 9e_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$, $e_0 = 0, e_1 = 3$

b) $s_k = -4s_{k-1} - 4s_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$, $s_0 = 0, s_1 = -1$

c) $t_k = 6t_{k-1} - 9t_{k-2}$ for alle heltall $k \geqslant 2$, $t_0 = 1, t_1 = 3$.

Løsning:

a) Differensligningen har karakteristisk ligning

$$t^2 - 9 = (t-3)(t+3) = 0.$$

Det betyr at et generelt uttrykk for løsningene dens er

$$e_n = C \cdot 3^n + D(-3)^n.$$

For å bestemme C og D setter vi opp et ligningssystem basert på e_0 og e_1:

$$e_0 = 0 = C \cdot 3^0 + D(-3)^0 = C + D$$
$$e_1 = 3 = C \cdot 3^1 + D(-3)^1 = 3C - 3D$$

Litt lineæralgebra gir oss her løsningene $C = \frac{1}{2}$ og $D = -\frac{1}{2}$, så løsningen blir

$$e_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-3)^n = \frac{3^n}{2} - \frac{(-3)^n}{2}.$$

b) Differensligningen har karakteristisk ligning

$$t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 = 0.$$

Det betyr at et generelt uttrykk for løsningene dens er

$$s_n = C \cdot (-2)^n + Dn(-2)^n.$$

For å bestemme C og D setter vi opp et ligningssystem basert på s_0 og s_1:

$$s_0 = 0 = C \cdot (-2)^0 + D \cdot 0 \cdot (-2)^0 = C$$
$$s_1 = -1 = C \cdot (-2)^1 + D \cdot 1 \cdot (-2)^1 = -2C - 2D$$

Litt lineæralgebra gir oss her løsningene $C = 0$ og $D = \frac{1}{2}$, så løsningen blir

$$s_n = \frac{n}{2}(-2)^n = \frac{n(-2)^n}{2}.$$

c) Differensligningen har karakteristisk ligning

$$t^2 - 6 + 9 = (t-3)^2 = 0.$$

Det betyr at et generelt uttrykk for løsningene dens er

$$t_n = C \cdot 3^n + Dn \cdot 3^n.$$

For å bestemme C og D setter vi opp et ligningssystem basert på t_0 og t_1:

$$t_0 = 1 = C \cdot 3^0 + D \cdot 0 \cdot 3^0 = C$$
$$t_1 = 3 = C \cdot 3^1 + D \cdot 1 \cdot 3^1 = 3C + 3D$$

Litt lineæralgebra gir oss her løsningene $C = 1$ og $D = 0$. Det betyr at løsningen blir

$$t_n = 3^n.$$

X [*Frivillig ekstraoppgave*] Tidligere har vi vist at tverrsumtesten for delelighet med tre gjelder for heltall på opptil fire siffer. Nå skal vi vise det generelt!

a) Vis at hvis vi antar at 10^n er på formen $3t_n + 1$ (der t_n er et heltall) for alle $n \geqslant 0$, vet vi at hvis tverrsummen til et heltall (denne gang med vilkårlig antall siffer) er delelig med 3, må tallet selv være delelig med tre.

b) Vis at 10^n er på formen $3t_n + 1$ (der t_n er et heltall) for alle $n \geqslant 0$ ved induksjon.

c) Så langt har vi bare vist at hvis tverrsummen er delelig med tre, så er tallet delelig med tre. Vis at dette også gjelder andre veien - dvs. bruk det vi allerede vet til å vise at hvis et tall er delelig med tre, så er tverrsummen til tallet delelig med tre.

Løsning:

a) Skal vise at hvis vi antar at $10^n = 3t_n + 1$ for alle $n \geqslant 0$, så har vi at tverrsumtesten for delelighet med tre gjelder for ethvert heltall.

Bevis. La $m = s_k \cdot 10^k + s_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + s_1 \cdot 10^0 \cdot 10 + s_0$ være et heltall, og anta at $10^n = 3t_n + 1$ for et heltall t_n og alle $n \geqslant 0$. Siden $10^n = 3t_n + 1$, må

$$s_n \cdot 10^n = s_n \cdot (3t_n + 1) = 3(s_n t_n) + s_n$$

for alle $n \geqslant 0$. Så

$$\begin{aligned} m = \; & [3(s_k \cdot t_k) + s_k] + [3(s_{k-1} \cdot t_{k-1}) + s_{k-1}] + \ldots \\ & + [3(s_1 \cdot t_1) + s_1] + [3(s_0 \cdot t_0) + s_0] \\ = \; & 3[s_k t_k + s_{k-1} t_{k-1} + \ldots + s_0 t_0] + s_k + s_{k-1} + \ldots + s_0 \end{aligned}$$

Det betyr at hvis 3 deler tverrsummen til m, altså at $s_k + s_{k-1} + \ldots + s_1 + s_0 = 3t'$ for et heltall t, må

$$m = 3(s_k t_k + s_{k-1} t_{k-1} + \ldots + s_0 t_0 + t'),$$

så $3|m$. Med andre ord, hvis 3 deler hverrsummen, må 3 dele tallet. $\square$

b) Skal vise at $10^n = 3t_n + 1$ (for et heltall t_n) for alle heltall $n \geq 0$ ved induksjon.

Bevis

Basissteg: $10^0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow$ ok!

Induktivt steg:

Antar at $10^k = 3t_k + 1$, må vise $10^{k+1} = 3t_{k+1} + 1$ for heltall t_k, t_{k+1}.

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10^k \cdot 10 = (3t_k + 1) \cdot 10 \\ &= 3 \cdot (t_k \cdot 10) + 10 = 3 \cdot (t_k \cdot 10) + 3^2 + 1 \\ &= 3(t_k \cdot 10 + 3) + 1 \\ &= 3t_{k+1} + 1 \quad (\text{for } t_{k+1} = t_k \cdot 10 + 3) \end{aligned}$$

Så påstanden er sann ved induksjon.

$\square$

c) Skal vise at hvis et tall er delelig med tre, må også tverrsummen til tallet være delelig med tre.

Bevis

Anta at $3 \mid m = s_k \cdot 10^k + s_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + s_1 10 + s_0 10^0$.

Da er $m = 3 \cdot r$ for et heltall r.

Vi vet at

$$\begin{aligned} m &= s_k \cdot 10^k + s_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + s_1 10 + s_0 10^0 \\ &= 3\,[\text{et heltall}] + s_k + s_{k-1} + \ldots + s_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot r = 3\,[\text{et heltall}] + s_k + s_{k-1} + \ldots + s_0$$

$$3\underbrace{(r - [\text{et heltall}])}_{\text{enda et heltall}} = s_k + s_{k-1} + \ldots + s_0$$

Så også tverrsummen er på formen $3 \cdot r'$ for et heltall r', og vi er framme.

$\square$