Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

IMAx2150 Matematiske metoder 3 for dataingeniører Høst 2023

Løsningsforslag — Øving 7

$\boxed{1}$ Regn ut nullrommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer til redusert trappeform:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dette betyr at en løsning $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$ av $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ må tilfredstille

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2x_4 - x_5 - 1/2x_6 \\ 2x_4 - 2x_5 - x_6 \\ -3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så samlingen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

utgjør en basis for nullrommet.

$\boxed{2}$ Finn radrom, kolonnerom og nullromm til matrisen

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer til redusert trappeform; med den formen kan vi så og si bestemme alle tre rommene.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Basis for kolonnerommet er gitt ved de kolonnene i matrisen som tilsvarer kolonner med pivot-element radredusert matrise. Her har første og andre kolonne pivotelement, så basis for kolonnerommet blir

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Basis for radrom er gitt ved samlingen av ikke-nullrader i redusert trappeform. Derfor blir basis for radrom i vårt tilfelle gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

For å finne basis for nullromm, kan vi gå frem som i forrige oppgave for å finne at basisen er gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\boxed{3}$ Finn basis for kolonnerom til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2i & 2i+2 & 9i-2 \\ 2i+1 & 2 & 5i+2 \\ 1 & 1 & 3i+2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan finne en slik basis ved å radredusere til trappeform (redusert er unødvendig). Basisvektorene vil være de kolonnevektorene i opprinnelig matrise med samme kolonneposisjon som pivotelementene i matrisen på trappeform.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2i+1 & 2i+2 & 9i-2 \\ 2i+1 & 2 & 5i+2 \\ 1 & 1 & 3i+2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 2i+1 & 2 & 5i+2 \\ 2i+1 & 2i+2 & 9i-2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 2i+1 & 2 & 5i+2 \\ 0 & 2i & 4i-4 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 0 & -2i+1 & 4-7i \\ 0 & 2i & 4i-4 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 0 & 2i & 4i-4 \\ 0 & -2i+1 & 4-7i \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 0 & 2i & 4i-4 \\ 0 & 1 & -3i \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3i+2 \\ 0 & 1 & -3i \\ 0 & 0 & 4i-10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Her ser vi det er pivot-element i første og andre kolonne; dermed blir basis for kolonnerommet samlingen

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 2i+1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i+2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

4 Bestem hvilke av funksjonene som er lineærtransformasjoner.

Dersom lineærtransformasjonen T er gitt ved

$$
T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix},
$$

for noen fikserte konstanter a, b, c og d, så er lineærtransformasjonen lineær: For det første så er

$$
T\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda ax+\lambda by \\ \lambda cx+\lambda dy \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \lambda T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).
$$

Det er også lett (men tidkrevende) å vise at

$$
T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right),
$$

(prøv selv for hånd!). Da følger det at første og fjerde alternativ er lineært. Resten er ikke en lineærtransformasjon: Ta $x = y = 1$ og $\lambda = 2$ i andre alternativ for å få at

$$
\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2^2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1^2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Tredje alternative sender ikke null-vektor til null-vektor, så den kan ikke være lineærtransformasjon. For den femte,

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

og $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Vi har at $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, men vi har jo også at $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, så den bevarer ikke addisjon.

$\boxed{5}$ Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix},$$

regn ut determinanten til A og forklar deretter hvorfor utgjør dens kolonner en basis. Finn koordinatene til vektoren

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen

$$\left\{ \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \right\}.$$

Vi beregner determinanten langs første kolonne

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\right) &= -1\cdot\det\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right)\\ &= -1\cdot(-1-1) + 1\cdot(1-1) = 2.\end{aligned}$$

Siden $2 = \det(A) \neq 0$, er A inverterbar og dermed må kolonnene til A utgjøre en basis for $\mathbb{R}^3$. For å finne koordinatene til vektoren $\boldsymbol{v}$ med hensyn på basisen gitt ved kolonnene til A, trenger vi bare å løse systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$. Dette er fordi koordinatene til $\boldsymbol{v}$ med hensyn på basisen gitt ved kolonnene til $A = (\boldsymbol{a_1 a_2 a_3})$ er nøyaktig vektoren $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, slik at

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3\boldsymbol{a_3} = A[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Vi reduserer til trappeform (uten å gjøre detalgjene) og får:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right].$$

Dermed er $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}$, hvor $\mathcal{B}$ er basisen bestående av kolonnene til A.

6 La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, hvor A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La $\mathcal{B}$ være basisen gitt ved

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Finn matrisen som representerer T (A) med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Vi beregner

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi vil nå finne matrisen $A_{\mathcal{B}}$ slik at $[A\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, for alle $\boldsymbol{x}$. Siden $\mathcal{B}$ er en basis, kan vi skrive enhver $\boldsymbol{x}$ som $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{b_1} + a_2\boldsymbol{b_2}$ for noen konstanter a_1, a_2. Dermed vil $A\boldsymbol{x} = a_1A\boldsymbol{b_1} + a_2A\boldsymbol{b_2}$. Som nevnt i ekstranotatet om basis og basisskifte, er det å ta koordinater en lineær transformasjon; så vi har at

$$[A\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = a_1[A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} + a_2[A\boldsymbol{b_2}]_{\mathcal{B}} = ([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}}[A\boldsymbol{b_2}]_{\mathcal{B}}) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = ([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}}[A\boldsymbol{b_2}]_{\mathcal{B}})[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Så vi ser at matrisen $A_{\mathcal{B}}$ er gitt ved $A_{\mathcal{B}} = ([A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}}[A\boldsymbol{b_2}]_{\mathcal{B}})$. Det neste vi gjør nå er å finne dens kolonner: Vi vet hva $A\boldsymbol{b_1}$ og $A\boldsymbol{b_2}$ er, fordi $A(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2})$ er matriseproduktet vi regnet ut i første del av oppgaven. Der fant vi at

$$A(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2}) = (A\boldsymbol{b_1}A\boldsymbol{b_2}) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

og dermed må $A\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $A\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$. For å finne koordinatene til disse vektorene i basisen $\mathcal{B}$, må vi finne de ukjente $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ i ligningene $(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2})\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{b_1}$ og $(\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2})\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{b_2}$. Altså må vi løse de augmenterte systemene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

og

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Gjør man utregningene her så får man til slutt at løsningen blir

$$\boldsymbol{c} = [A\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

og

$$\boldsymbol{d} = [A\boldsymbol{b_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

og matrisen $A_{\mathcal{B}}$ blir dermed

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oppgaven hadde en til deloppgave som er av samme type som den over. Vi gjør ikke den her; metoden er den samme som over (prøv selv hvis du ikke har klart den!).

7 La $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ være gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (2-i)x + (1-i)y \\ (-i-2)x + (i-2)y \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T.

Standardmatrisen er gitt ved

$$\left(T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} (2-i) & (1-i) \\ (-i-2) & (i-2) \end{bmatrix}.$$

8 La $\mathcal{B}$ være basisen gitt ved

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Finn vektoren $\boldsymbol{u}$ har koordinatene $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, finn koordinatene til $\boldsymbol{u}$ med hensyn på standardbasisen.

Finn koordinatene til vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Koordinatene $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ er nettopp vektoren $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, slik at

$$\boldsymbol{u} = a\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi er gitt at $a = 1$, $b = -2$ og $c = -3$, så da får vi

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + -2\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + -3\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -10 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

For å gjøre andre del av oppgaven, må vi finne koeffisienter a, b, c slik at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Løser vi denne ligningen, finner vi at $a = 1$, $b = 2$ og $c = 2$; altså at

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{9}$ Finn en basis for vektorrommet, $\mathcal{P}_3$, bestående av alle polynomer av grad mindre eller lik 3. Finn så en basis for underrommet spent ut av polynomene $\{-x^3 - x, x^3 - x^2 + 1, -2x^2 - 4x + 4\}$.

Siden alle polynomer p i $\mathcal{P}_3$ kan skrives unikt som en lineærkombinasjon av polynomene i mengden $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, vil $\mathcal{B}$ danne en basis.

La $p_1 = -x^3 - x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 1$ og $p_3 = -2x^2 - 4x + 4$. Underrommet utspent av $\{p_1, p_2, p_3\}$ er det samme some underommet utspent av $\{p_1, p_2 + p_1, p_3\} = \{-x^3 - x, -x^2 - x + 1, -2x^2 - 4x + 4\}$. La $q = p_2 + p_1 = -x^2 - x + 1$. Igjen er underommet utspent av $\{p_1, q, p_3\}$, det samme som rommet utspent av

$$\{p_1, q, -2q + p_3\} = \{x^3 - x^2 + 1, -x^2 - x + 1, -2x + 2\}.$$

Vi ser at alle de tre polynomene i den siste mengden har forskjellig grad, så disse må være lineært uavhengige og vi vet allerede at de spenner ut samme underom som $\{-x^3 - x, x^3 - x^2 + 1, -2x^2 - 4x + 4\}$, så de er en basis for dette underrommet.

$\boxed{10}$ La $T_n \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ være gitt ved $T_n(p(x)) = (xp(x))'$. Beregn $T_2(x^2 + x - 1)$. Finn matrisen som representerer T_1 med hensyn på basisen $\{1, x\}$. Finn matrisen som representerer T_2 med hensyn på basisen $\mathcal{B} = \{-x, x - x^2, x + 1\}$.

$T_2(x^2 + x - 1) = (x(x^2 + x - 1))' = (x^3 + x^2 - x)' = 3x^2 + 2x - 1$.

Vi har at $T_1(1) = (x \cdot 1)' = 1$, og at $T_1(x) = (x^2)' = 2x$; derfor må matrisen være gitt ved $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

La $\boldsymbol{b_1} = -x$, $\boldsymbol{b_2} = x - x^2$ og $\boldsymbol{b_3} = x + 1$. Vi har at

$$T_2(\boldsymbol{b_1}) = T_2(-x) = (-x^2)' = -2x = 2\boldsymbol{b_1}.$$

$$T_2(\boldsymbol{b_2}) = T_2(x - x^2) = (x^2 - x^3)' = 2x - 3x^2 = -x + (3x - 3x^2) = \boldsymbol{b_1} + 3\boldsymbol{b_2}.$$

$$T_2(\boldsymbol{b_3}) = T_2(x + 1) = (x^2 + x)' = 2x + 1 = x + 1 - (-x) = \boldsymbol{b_3} - \boldsymbol{b_1}.$$

Dette betyr at $[T_2(\boldsymbol{b_1})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[T_2(\boldsymbol{b_1})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, og $[T_2(\boldsymbol{b_1})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dermed er matrisen som representerer T_2 med hensyn på bisesn $\mathcal{B}$ gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$