1. Tenemos
$$\ell_1(\boldsymbol{\theta}) = x\log\theta_1 + y\log\theta_2 + z\log\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \log(x!y!z!).$$
De este modo,
$$\frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\top} = \begin{pmatrix} -x/\theta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -y/\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -z/\theta_3^2 \end{pmatrix}.$$
Así, la matriz de información de Fisher asume la forma $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{diag}(1/\theta_1, 1/\theta_2, 1/\theta_3)$. Notando que la función de log-verosimilitud (para toda la muestra) es dada por:
$$\begin{aligned}\ell_n(\boldsymbol{\theta}) &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\log\theta_1 + \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)\log\theta_2 + \Big(\sum_{i=1}^n z_i\Big)\log\theta_3 \\ &\quad - n(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - \sum_{i=1}^n \log x_i!y_i!z_i!\end{aligned}$$
maximizando $\ell_n(\boldsymbol{\theta})$, obtenemos
$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \overline{Y}, \qquad \widehat{\theta}_3 = \overline{Z}.$$
En nuestro caso, tenemos que la hipótesis $H_0 : \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ puede ser escrita en la forma $H_0 : \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\theta} = 0$ con $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)^\top$. Notando que $\partial\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\theta}/\partial\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}^\top$, sigue:
$$W = \frac{n(\boldsymbol{a}^\top\widehat{\boldsymbol{\theta}})^2}{\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{a}},$$
como $\boldsymbol{a}^\top\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \overline{X} + \overline{Y} - \overline{Z}$, y
$$\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)\begin{pmatrix} \widehat{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_3.$$
De ahí que, rechazamos $H_0 : \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$, si:
$$W > \chi^2_{1-\alpha}(1),$$
con
$$W = \frac{n(\overline{X} + \overline{Y} - \overline{Z})^2}{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}.$$
Bajo $H_0 : \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$, debemos obtener $\widetilde{\theta}_1$ y $\widetilde{\theta}_2$ maximizando
$$\begin{aligned}\ell_n(\theta_1, \theta_2, \theta_1+\theta_2) &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\log\theta_1 + \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)\log\theta_2 + \Big(\sum_{i=1}^n z_i\Big)\log(\theta_1+\theta_2) \\ &\quad - n\theta_1 - n\theta_2 - n(\theta_1+\theta_2) - \sum_{i=1}^n \log x_i!y_i!z_i!\end{aligned}$$

De ahí que

$$\widetilde{\theta}_1 = \frac{\overline{X}}{2}\Big(\frac{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}{\overline{X}+\overline{Y}}\Big), \qquad \widetilde{\theta}_2 = \frac{\overline{Y}}{2}\Big(\frac{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}{\overline{X}+\overline{Y}}\Big), \qquad \widetilde{\theta}_3 = \frac{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}{2}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
2\log\lambda &= 2(\ell_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})) \\
&= 2n\Big\{\overline{X}\log(\widehat{\theta}_1/\widetilde{\theta}_1) + \overline{Y}\log(\widehat{\theta}_2/\widetilde{\theta}_2) + \overline{Z}\log(\widehat{\theta}_3/\widetilde{\theta}_3) \\
&\quad + \widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2 + \widetilde{\theta}_3 - \widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 - \widehat{\theta}_3\Big\}.
\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2 + \widetilde{\theta}_3 = \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_3$, sigue que $LR = 2\log\lambda$ reduce a

$$2\log\lambda = -2n\Big\{(\overline{X}+\overline{Y})\log\Big(\frac{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}{2\overline{X}+2\overline{Y}}\Big) + \overline{Z}\log\Big(\frac{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}{2\overline{Z}}\Big)\Big\}.$$

Es fácil notar que la función score adopta la forma

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \Big(\frac{n\overline{X}}{\theta_1}, \frac{n\overline{Y}}{\theta_2}, \frac{n\overline{Z}}{\theta_3}\Big)^\top,$$

de ahí que

$$\begin{aligned}
R_n &= \boldsymbol{U}^\top(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\{\boldsymbol{\mathcal{F}}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\}^{-1}\boldsymbol{U}^\top(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{n^2\overline{X}^2}{\widetilde{\theta}_1} + \frac{n^2\overline{Y}^2}{\widetilde{\theta}_2} + \frac{n^2\overline{Z}^2}{\widetilde{\theta}_3} \\
&= \frac{2n^2}{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}\Big((\overline{X}+\overline{Y})^2 + \overline{Z}^2\Big).
\end{aligned}$$

2. Sabemos que los estimadores ML de las medias son $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$, respectivamente. Mientras que los estimadores ML de las varianzas son

$$\widehat{\sigma}_{11}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_{i1} - \overline{X}_1)^2, \qquad \widehat{\sigma}_{22}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_{i2} - \overline{X}_2)^2,$$

sin importar si H_0 se satisface o no. El estimador ML de ρ es el coeficiente de correlación R. Bajo $H_0 : \rho = 0$. Usando estos resultados la razón de verosimilitudes es

$$\lambda = (1 - R^2)^{n/2}.$$

De ahí que el test de razón de verosimilitudes rechaza H_0 cuando $|R| > c$ para algún $c > 0$.

La densidad de $LR = -2\log\lambda$ es

$$\frac{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\frac{n-2}{2}\big)}\,(1 - e^{-x})^{-1/2} e^{-(n-2)x/2}\, I_{(0,\infty)}(x).$$

Cuando $\rho \neq 0$ sigue que

$$\sqrt{n}(R - \rho) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}(0, (1-\rho^2)^2/(1+\rho^2)).$$

Por el método delta, obtenemos

$$\sqrt{n}\Big(\frac{-2\log\lambda}{n} - \log(1-\rho^2)\Big) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}\Big(0, \frac{4\rho^2}{1+\rho^2}\Big).$$

3. La función de verosimilitud es

$$L(\mu,\gamma) = (\sqrt{2\pi\gamma}|\mu|)^{-n} \exp\Big\{-\frac{1}{2\gamma\mu^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\Big\}.$$

El estimador ML de (μ,γ) es $(\widehat{\mu},\widehat{\gamma}) = (\overline{X}, \widehat{\sigma}^2/\overline{X})$ donde $\overline{X}$ es la media muestral y $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. Bajo H_0 el estimador ML de μ es:

$$\widetilde{\mu} = \begin{cases} \mu_+ & L(\mu_+,1) > L(\mu_-,1), \\ \mu_- & L(\mu_+,1) \le L(\mu_-,1), \end{cases}$$

donde

$$\mu_\pm = \frac{-\overline{X} \pm \sqrt{5\overline{X}^2 + 4\widehat{\sigma}^2}}{2}$$

La razón de verosimilitudes es

$$\lambda = \frac{L(\widetilde{\mu},1)}{L(\widehat{\mu},\widehat{\lambda})} = \frac{e^{n/2}\widehat{\sigma}^n}{|\widetilde{\mu}|^n} \exp\Big\{-\frac{n\widehat{\sigma}^2 + n(\widetilde{\mu}-\overline{X})^2}{2\widetilde{\mu}^2}\Big\}.$$

Note que λ es una función de $\overline{X}^2/\widehat{\sigma}^2$, de ahí que el test LR puede ser construído con región de rechazo $\lambda < c$.

Para $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\gamma)^\top$, tenemos

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log L(\mu,\gamma)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\mu} + \frac{n(\overline{X}-\mu)}{\gamma\mu^2} + \frac{1}{\gamma\mu^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \\ -\frac{n}{2\gamma} + \frac{1}{2\mu^2\gamma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de información de Fisher con respecto a (μ,γ) es

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n(\mu,\gamma) = \mathsf{E}\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{U}^\top(\boldsymbol{\theta})\} = n\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2\gamma} + \frac{2}{\mu^2} & \frac{1}{\mu\gamma} \\ \frac{1}{\mu\gamma} & \frac{1}{2\gamma^2} \end{pmatrix}.$$

De este modo, el estadístico score es

$$R_n = \boldsymbol{U}^\top(\widetilde{\mu},1)\{\boldsymbol{\mathcal{F}}_n(\widetilde{\mu},1)\}^{-1}\boldsymbol{U}(\widetilde{\mu},1).$$

Sea $S(\mu,\gamma) = \gamma - 1$. Entonces $\partial S/\partial\mu = 0$ y $\partial S/\partial\gamma = 1$. El estadístico de Wald es igual a $\{S(\widehat{\mu},\widehat{\gamma})\}^2$ dividido por el último elemento de la inversa de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n(\mu,\gamma)$. De este modo,

$$W_n = \frac{n(\widehat{\gamma}-1)^2}{2\widehat{\gamma}^2 + 4\widehat{\gamma}^3}.$$