

# MGE-201: Ejemplos de estimación

Felipe Osorio

[felipe.osorio@uv.cl](mailto:felipe.osorio@uv.cl)

## Modelo de regresión espacial

Considere el modelo de regresión

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\tau})). \quad (1)$$

Asumiremos una estructura parcialmente lineal para la covarianza

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^r \sigma_j \boldsymbol{\Omega}_j(\boldsymbol{\gamma}),$$

con  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)^\top$  y  $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma}^\top, \boldsymbol{\gamma}^\top)^\top$ . Además es frecuente considerar  $\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{I}$ .

Por ejemplo, un modelo de regresión bastante usado es:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I} + \phi^2 \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}),$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}) = (\omega_{ij}(\boldsymbol{\gamma}))$ , con

$$\omega_{ij}(\boldsymbol{\gamma}) = \exp(-\tau d_{ij}), \quad d_{ij} = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|,$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ .

## Modelo de regresión espacial

De este modo, tenemos la log-verosimilitud

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\tau})| - \frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{Z} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

con  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\sigma}^\top, \boldsymbol{\gamma}^\top)^\top$ .

- ▶ Este tipo de problemas es habitual en [modelos lineales con efectos mixtos](#).
- ▶ El procedimiento de estimación descrito a continuación es basado en método propuesto por Anderson (1973)<sup>1</sup>.
- ▶ Acosta, Osorio y Vallejos (2016)<sup>2</sup> utilizaron este método para ajustar un [modelo de regresión espacial](#) para datos medidos sobre transectas.

---

<sup>1</sup>The Annals of Statistics **1**, 135-141.

<sup>2</sup>Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics **21**, 407-425.

## Modelo de regresión espacial

Evidentemente, para  $\tau$  fijo tenemos:

$$\hat{\beta}(\tau) = (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\tau) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\tau) \mathbf{Z}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \tau_j} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\tau) \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\tau)}{\partial \tau_j} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\tau) \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\tau)}{\partial \tau_j} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\tau) \mathbf{Q}(\beta) \right),$$

para  $j = 1, \dots, r+k$ , donde

$$\mathbf{Q}(\beta) = (\mathbf{Z} - \mathbf{X}\beta)(\mathbf{Z} - \mathbf{X}\beta)^\top.$$

## Modelo de regresión espacial

Además, es fácil notar que

$$\frac{\partial \Sigma(\tau)}{\partial \sigma_j} = \Omega_j(\gamma), \quad j = 1, \dots, r.$$

De este modo, la función **score** respecto de  $\sigma$ , asume la forma:

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma_j} = -\frac{1}{2} \text{tr} (\Sigma^{-1}(\tau) \Omega_j(\gamma)) + \frac{1}{2} \text{tr} (\Sigma^{-1}(\tau) \Omega_j(\gamma) \Sigma^{-1}(\tau) e e^\top),$$

donde  $e = Z - X\beta$  y  $j = 1, \dots, r$ .

Para  $\beta$  y  $\gamma$  conocidos, podemos estimar  $\sigma$  resolviendo el **sistema de ecuaciones**:

$$\text{tr} (\Sigma^{-1} \Omega_j) = \text{tr} (\Sigma^{-1} \Omega_j \Sigma^{-1} e e^\top), \quad j = 1, \dots, r. \quad (2)$$

## Modelo de regresión espacial

Asumiendo que el sistema en (2) admite una solución  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_r$ , es decir

$$\hat{\Sigma} = \sum_{j=1}^r \hat{\sigma}_j \Omega_j(\gamma).$$

Podemos escribir (2) como:

$$\text{tr}(\hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Sigma}) = e^\top \hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} e, \quad j = 1, \dots, r,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^r \hat{\sigma}_k \text{tr}(\hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} \Omega_k) = e^\top \hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} e, \quad j = 1, \dots, r.$$

Sea

$$p_{jk} = \text{tr}(\hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} \Omega_k), \quad q_j = e^\top \hat{\Sigma}^{-1} \Omega_j \hat{\Sigma}^{-1} e.$$

De este modo, obtenemos  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_r)^\top$  como solución del sistema lineal

$$P\hat{\sigma} = q,$$

con  $P = (p_{jk})$  y  $q = (q_1, \dots, q_r)^\top$ .

## Modelo de regresión espacial

Para la estimación de los parámetros no lineales en la covarianza, note que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_j} &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \gamma_j} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \gamma_j} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \gamma_j} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \gamma_j} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \gamma_j},\end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, k$ .

Sea

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}) = (\operatorname{vec}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1), \dots, \operatorname{vec}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_k)),$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_j = \partial \boldsymbol{\Sigma} / \partial \gamma_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ . De este modo,

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{F}^\top (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{u},$$

con  $\mathbf{u} = \operatorname{vec}(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top)$ .

# Algoritmo de estimación

## Algoritmo PLC

Los estimadores de parámetros para el [modelo parcialmente lineal en la covarianza](#) definido en [\(9\)](#) se obtienen desde el esquema iterativo:

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(t+1)} = \mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\tau}^{(t)}) \mathbf{q}(\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\tau}^{(t)}) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(t+1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(t)} + \lambda_t \boldsymbol{\delta}^{(t)}, \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\tau}^{(t)})$  y  $\boldsymbol{\delta}^{(t)}$  es solución del problema:

$$\mathbf{B}_t \boldsymbol{\delta}^{(t)} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\gamma}^{(t)}),$$

con  $\mathbf{B}_t$  una aproximación secante de la matriz Hessiana (Nash, 1990).<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Compact Numerical Methods for Computers, Adam Hilger, Bristol.

## Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)



## Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

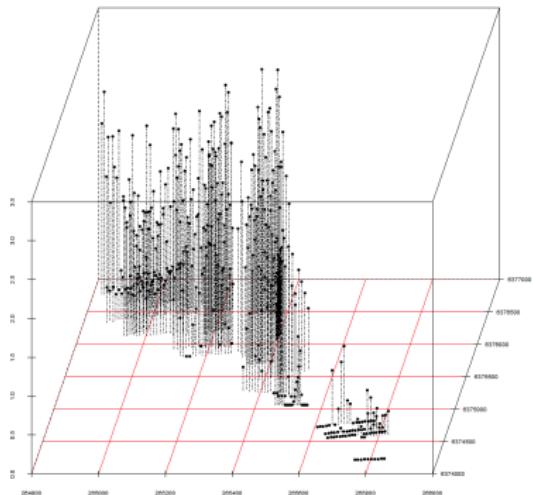
- ▶ Datos desde una área de protección en Punta Lunes, Chile.
- ▶ Observaciones recolectadas sobre 26 transectas.
- ▶ Cada transecta tiene largo de 100 o 200 m separadas por 100 m.
- ▶ Buzos obtienen información sobre la densidad de macroalgas<sup>4</sup> cada 10 m.
- ▶ 427 observaciones fueron recolectadas en orden cronológico.



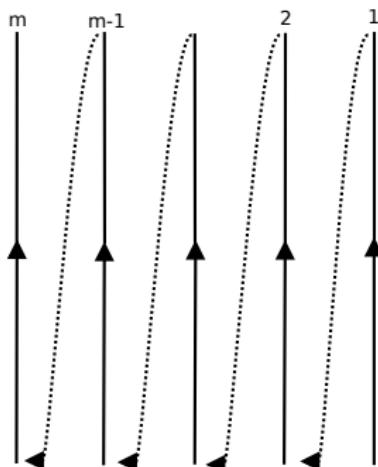
<sup>4</sup> *Lessonia trabeculata*

## Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

Densidad de macroalgas



Esquema de muestreo<sup>5</sup>



<sup>5</sup>Transectas desconectadas.

## Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

### Objetivos:

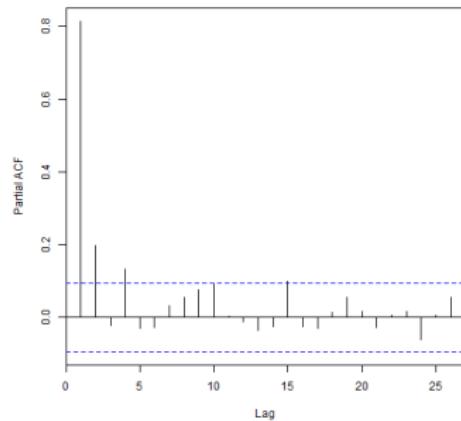
- ▶ Definir el tamaño muestral efectivo (ESS) en el contexto de muestro por transectas.
- ▶ Proponer un algoritmo eficiente para estimación en modelos parcialmente lineales en la covarianza.
- ▶ Debido a la presencia de correlación serial, considerar un modelo de regresión espacial con una estructura muy específica para la matriz de covarianza.

### Observación:

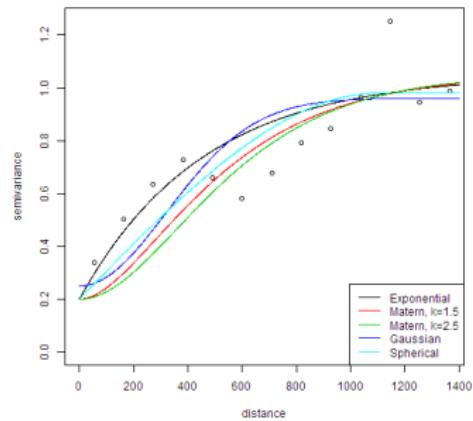
Un resultado lateral interesante es una aproximación para el ESS luego de aplicar una transformación Box-Cox.

# Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

Función de autocorrelación parcial



Variogramas empíricos y teóricos



## Datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

Para el análisis de los [datos de macroalgas](#) se consideró el siguiente modelo:

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mu \mathbf{1}, \Sigma(\sigma, \gamma)), \quad (6)$$

con

$$\Sigma(\sigma, \gamma) = \sigma_1 \mathbf{I} + \sigma_2 \mathbf{Q}_1(\gamma_1) + \sigma_3 \mathbf{Q}_2(\gamma_2),$$

donde  $\sigma_1$  representa el [efecto nugget](#),  $\sigma_2$  es la [varianza del proceso](#), mientras que  $\gamma_1$  está relacionado al [rango](#) de la dependencia del proceso espacial.

Para modelar  $\mathbf{Q}_1(\phi)$  y  $\mathbf{Q}_2(\rho)$  consideramos el [modelo de Matérn](#) y una [estructura AR\(1\)](#), respectivamente

$$C(h, \phi) = \frac{(h/\phi)^\kappa K_\kappa(h/\phi)}{2^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)}, \quad \mathbf{Q}_2(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  y  $K_\kappa(\cdot)$  son la función gamma y Bessel modificado de segundo tipo, respectivamente.

## Análisis de datos de macroalgas (Acosta, Osorio y Vallejos, 2016)

- ▶ Con fines comparativos, también se llevó a cabo el análisis **desconsiderando** la componente de correlación serial, es decir

$$\mathbf{Y} \sim N_n(\mu \mathbf{1}, \sigma_1 \mathbf{I} + \sigma_2 \mathbf{Q}_1(\gamma_1)). \quad (7)$$

- ▶ Para los modelos en Ecuaciones (6) y (7) se consideró la **estructura de Matérn** con  $\kappa = 0.5$  (exponencial),  $\kappa = 1.5$ ,  $2.5$  y  $\kappa \rightarrow \infty$  (Gaussiano).
- ▶ Se consideró, además, los siguientes procedimientos de estimación:<sup>6</sup>
  - ▶ método parcialmente lineal en la covarianza (PLC),
  - ▶ máxima verosimilitud (ML),
  - ▶ máxima verosimilitud restricta (REML),
  - ▶ mínimos cuadrados ordinarios (OLS) y
  - ▶ mínimos cuadrados ponderados (WLS).

---

<sup>6</sup>Estimaciones ML, REML, OLS y WLS obtenidas usando **geoR**.

## Resultados: Estimación en el modelo con $\Sigma = \sigma_1 I + \sigma_2 Q_1(\gamma_1)$

Modelo	Método	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\gamma}_1$	ESS <sup>7</sup>
Exponencial	PLC	1.293	0.005	0.043	64.64	29.18
	ML	1.293	0.005	0.043	64.64	29.21
	REML	1.292	0.005	0.045	69.24	26.99
	OLS	1.288	0.000	0.050	82.40	20.45
	WLS	1.286	0.003	0.047	91.87	19.14
Matérn $\kappa = 1.5$	PLC	1.296	0.009	0.037	23.78	46.43
	ML	1.296	0.009	0.037	23.78	46.46
	REML	1.296	0.009	0.038	24.29	45.36
	OLS	1.292	0.012	0.038	50.00	22.95
	WLS	1.292	0.012	0.038	50.01	22.92
Matérn $\kappa = 2.5$	PLC	1.295	0.010	0.040	19.57	43.50
	ML	1.298	0.009	0.035	15.89	53.23
	REML	1.297	0.009	0.036	16.13	52.36
	OLS	1.292	0.019	0.032	50.00	19.71
	WLS	1.294	0.019	0.032	50.00	26.81
Gaussian	PLC	1.300	0.010	0.033	38.95	66.14
	ML	1.300	0.010	0.033	38.95	66.13
	REML	1.300	0.010	0.033	39.43	65.31
	OLS	1.289	0.000	0.049	60.28	43.02
	WLS	1.248	0.000	0.049	63.60	41.09

<sup>7</sup>ESS =  $\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\hat{\tau}) \mathbf{1}$  (Vallejos y Osorio, 2014. Spatial Statistics 9, 66-92).

## Resultados: Estimación en el modelo con $\Sigma = \sigma_1 I + \sigma_2 Q_1(\gamma_1) + \sigma_3 Q_2(\gamma_2)$

Modelo	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	ESS
Exponential	1.307	0.004	0.017	0.025	86.87	0.860	24.84
Matérn $\kappa = 1.5$	1.308	0.004	0.016	0.026	48.13	0.828	27.34
Matérn $\kappa = 2.5$	1.308	0.004	0.016	0.026	34.15	0.822	29.03
Gaussian	1.308	0.004	0.016	0.026	102.05	0.814	30.09

### Observación:

A la fecha, en paquetes como [geoR](#) no es disponible la estimación ML para modelos con estructuras de covarianza de este tipo.

## Estimación del coeficiente de similaridad SSIM

- ▶ Existe diversos enfoques para estudiar la **similaridad** entre dos **señales, imágenes o procesos** (Vallejos, Osorio y Bevilacqua, 2020).<sup>8</sup>
- ▶ Evaluar la calidad de imágenes tiene por objeto representar cuantitativamente la **percepción de la calidad del ojo humano**.
- ▶ Estos índices han sido diseñados para estudiar el desempeño de algoritmos para problemas como **compresión** y **restauración** de imágenes, entre otros.
- ▶ El procedimiento está basado en un **coeficiente** que combina la **luminancia**, el **contraste** y **estructura** (correlación) entre imágenes. Este coeficiente es llamado **índice de Similaridad Estructural (SSIM)**.

---

<sup>8</sup> Spatial Relationships Between Two Georeferenced Variables. Springer, Cham.

## Lenna y algunas distorsiones de Lenna



(a) Imagen original



(b) 8 looks



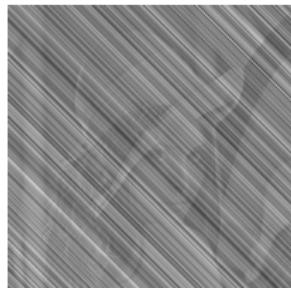
(c) 32 looks



(d) Speckle noise



(e) Salt-pepper noise



(f) dirección  $\mathbf{h} = (1, 1)$

## Error cuadrático medio (MSE)

Sea  $\mathbb{R}_+$  la recta real no-negativa y sea  $\mathbb{R}_+^N$  el primer ortante. Una imagen es considerada un elemento  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$ .

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^N$  son dos imágenes, el **error cuadrático medio (MSE)** entre dos imágenes  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  es

$$\text{MSE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2.$$

### Desventajas:

- ▶ El MSE **depende** fuertemente del **escalado de la imagen**.
- ▶ El MSE **no representa** el Sistema de Visión Humano (HVS).
- ▶ El rango del MSE es el intervalo  $[0, \infty)$ .

## Distorsiones de Lenna con igual MSE<sup>9</sup>



(a) Imagen original



(b) Salt-pepper noise



(c) Gaussian noise



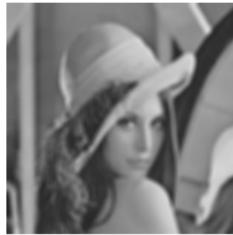
(d) Speckle noise



(e) Mean shift



(f) Contrasting



(g) Blurring



(h) Compression

---

<sup>9</sup>(a)  $MSE = 0$ , (b)-(g)  $MSE = 225$ , y (h)  $MSE = 215$ .

# Índice de Similaridad Estructural (SSIM)

**Definición** (Wang et al., 2004):<sup>4</sup>

Sea  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  dos imágenes. El índice SSIM es definido como

$$\text{SSIM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha \cdot c(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\beta \cdot s(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\gamma,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son **parámetros no-negativos**,

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\bar{x}\bar{y} + c_1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + c_1}, \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2s_x s_y + c_2}{s_x^2 + s_y^2 + c_2},$$

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{s_{xy} + c_3}{s_x s_y + c_3},$$

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_x^2$ ,  $s_y^2$  y  $s_{xy}$  representan las medias muestrales, varianzas y covarianza de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .

Las constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  garantizan la estabilidad cuando denominadores son cercanos a cero.

---

<sup>4</sup>IEEE Transactions on Image Processing 13, 600-612.

# Índice de Similaridad Estructural (SSIM)

*Propiedades:*

- ▶  $\text{SSIM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
- ▶  $\text{SSIM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{SSIM}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- ▶ SSIM **no es una métrica**, sino una pseudo-métrica (Brunet et al., 2012).<sup>5</sup>
- ▶  $-1 \leq \text{SSIM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1$ .
- ▶ Si  $c_1 = c_2 = 0$ , recuperamos el **Índice de Calidad Universal (UQI)** definida por Wang y Bovik (2002).<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>IEEE Transactions on Image Processing 21, 1488-1499.

<sup>6</sup>IEEE Signal Processing Letters 9, 81-84.

## Estimación del SSIM

- En Osorio et al. (2022)<sup>7</sup> consideramos un modelo no-lineal con ruido multiplicativo para explicar la **raíz del error cuadrático medio (RMSE)**. De este modo, asumimos la **variable de respuesta**

$$Z = 1/\text{RMSE}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

- El **modelo no-lineal multiplicativo** adopta la forma

$$Z = l(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha \cdot c(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\beta \cdot s(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\gamma \cdot e^u, \quad (8)$$

donde  $u$  es una variable aleatoria normal  $N(0, \sigma^2)$ .

- Dividimos las **imágenes  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$**  en  **$n$  sub-imágenes no-superpuestas** denotadas como  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, calculamos el MSE y SSIM para cada par de sub-imágenes  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ .

---

<sup>7</sup> Signal, Image and Video Processing 16, 1035-1042.

## Estimación del SSIM

- ▶ La media y función de varianza para el modelo (8) son, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= l(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha \cdot c(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\beta \cdot s(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\gamma e^{\sigma^2/2} \\ \text{var}(Z) &= [l(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\alpha \cdot c(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\beta \cdot s(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\gamma e^{\sigma^2/2}]^2 (e^{\sigma^2} - 1).\end{aligned}$$

- ▶ Sea  $\phi = e^{\sigma^2/2}$  y defina

$$f_i(\boldsymbol{\theta}) = \text{SSIM}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Estimamos  $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\theta}^\top, \phi)$  usando el modelo

$$Z_i \sim N(\phi f_i(\boldsymbol{\theta}), f_i^2(\boldsymbol{\theta}) g^2(\phi)), \tag{9}$$

donde  $g^2(\phi) = \phi^2(\phi^2 - 1)$ .

- ▶ Modelos como (9) surgen frecuentemente en estimación de funciones de varianza (Davidian y Carroll, 1987).<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> Journal of the American Statistical Association 82, 1079-1091.

## Estimación del SSIM

- ▶ La estimación de parámetros del **modelo no-lineal heteroscedástico** en Ecuación (9) es abordada alternando el método **quasi-Newton** con un procedimiento de **pseudo-verosimilitud**.
- ▶ Para el modelo heteroscedástico la función de log-verosimilitud adopta la forma

$$\begin{aligned}\ell(\psi) = & -\frac{n}{2} \log 2\pi g^2(\phi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{W}(\theta)| \\ & - \frac{1}{2g^2(\phi)} (\mathbf{Z} - \phi \mathbf{f}(\theta))^\top \mathbf{W}^{-1}(\theta) (\mathbf{Z} - \phi \mathbf{f}(\theta)),\end{aligned}$$

con  $\mathbf{W}(\theta) = \text{diag}(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta))$ .

- ▶ Sea  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_*$  una estimación actual para  $\boldsymbol{\theta}$ . El estimador de pseudo-verosimilitud  $\widehat{\phi}_{PL}$  maximiza la función

$$\ell_{LP}(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{r_i^2(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_*, \phi)}{f_i^2(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_*) g^2(\phi)} + \log f_i^2(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_*) g^2(\phi) \right],$$

donde  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \mathbf{Z} - \phi \mathbf{f}(\theta)$ .

## Estimación del SSIM

- ▶ Para reducir el esfuerzo computacional asociado al algoritmo quasi-Newton proveemos información de primer-orden relacionado al modelo de regresión no-lineal heteroscedástico definido en (9).
- ▶ La función **score** puede ser escrita como  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}_1(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{U}_2(\boldsymbol{\theta})$ , con:

$$\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\phi}{g^2(\phi)} \mathbf{F}^\top(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Z} - \phi \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))$$

$$\mathbf{U}_2(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^\top(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \text{vec} \left( \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) - \frac{\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}^\top(\boldsymbol{\theta})}{g^2(\phi)} \right),$$

donde  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = (\text{vec}(\partial \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_1), \dots, \text{vec}(\partial \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_p))$  y  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})$ .

## Estimación del SSIM

El  $j$ -ésimo elemento de  $\mathbf{U}_2(\boldsymbol{\theta})$  adopta la forma

$$-\operatorname{tr} \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_j(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{g^2(\phi)} \mathbf{r}^\top(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_j(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}), \quad (10)$$

para  $j = 1, \dots, p$ , con  $\mathbf{W}_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \partial \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j$ .

El primer término de (10) es dado por

$$\operatorname{tr} \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_j(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j}{f_i(\boldsymbol{\theta})}$$

lo que es equivalente a sumar todos los elementos de la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{W}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ .

Además, el segundo término de (10) asume la forma:

$$\frac{1}{g^2(\phi)} \{ \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) \}^\top \mathbf{W}_j(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{g^2(\phi)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{r_i(\boldsymbol{\theta})}{f_i^2(\boldsymbol{\theta})} \right)^2 \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}.$$

# Estimación del SSIM

---

**Algoritmo 1:** Estimación de los parámetros del SSIM

---

**Entrada:** Imágenes  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^N$ , tamaño de la ventana  $k$ .

**Salida :** Estimaciones  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  y  $\hat{\phi}$ .

- 1 begin
- 2     /\* Etapa de Preprocesamiento \*/
- 3     Subdividir las imágenes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  en  $n$  ventanas  $k \times k$ , obteniendo el conjunto de datos:  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ .
- 4     /\* Etapa de Estimación \*/
- 5     Usando  $\hat{\theta}_*$ , calcular  $f_i(\hat{\theta}_*)$  y  $r_i(\hat{\theta}_*, \phi)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- 6     Actualizar  $\hat{\phi}_{PL}$  maximizando  $\ell_{PL}(\phi)$  con relación a  $\phi$ .
- 7     Actualizar  $\hat{\theta}$  usando el método BFGS (para  $\phi = \hat{\phi}_{PL}$  fijado):

$$\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(t)} + \lambda_t \mathbf{p}_t, \quad t = 0, 1, \dots$$

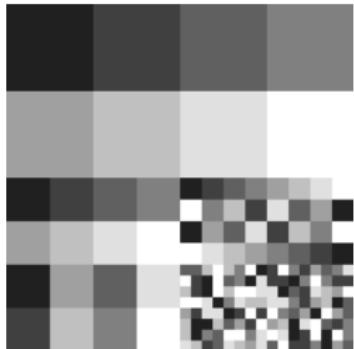
donde  $\lambda_t$  denota el largo de paso y  $\mathbf{p}_t$  es la dirección de búsqueda.

- 6     Chequear la convergencia del algoritmo.<sup>a</sup>

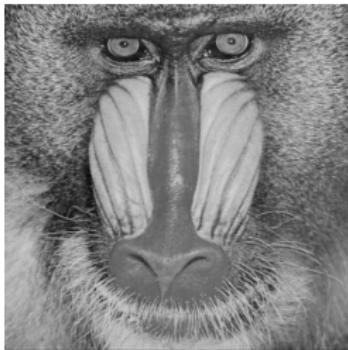
- 7 end
- 

<sup>a</sup>Por ejemplo, Bates, D.M., Watts, D.G. (1981). Technometrics 23, 179-183.

## Estimación del SSIM: estudio de simulación Monte Carlo<sup>11</sup>



(a) texmos2.S512



(b) Baboon



(c) Lenna

Imágenes de referencia<sup>9</sup> ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$ ) fueron contaminadas con ruido multiplicativo<sup>10</sup> usando una distribución  $\text{Gamma}(L, L)$ , es decir,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}, \quad w_t \sim \text{Gamma}(L, L), \quad t = 1, \dots, N,$$

para  $L = 1, 2, 4, 8, 16$  y  $32$  looks. Para cada look 1,000 imágenes fueron construidas.

<sup>9</sup> Extraídas desde la base de imágenes USC-SIPI, URL: <http://sipi.usc.edu/database>

<sup>10</sup> Disponible en la función `imnoise` desde el paquete R `SpatialPack`.

<sup>11</sup> Se ajustaron 144 000 modelos (tiempo: 34 hrs, 40 min, 16 seg).

## Estimación del SSIM: contaminación de Lenna



(a)  $L = 1$



(b)  $L = 2$



(c)  $L = 4$



(d)  $L = 8$

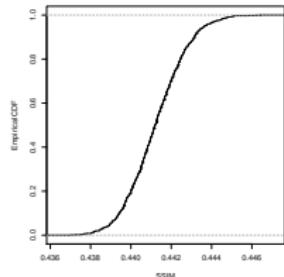


(e)  $L = 16$

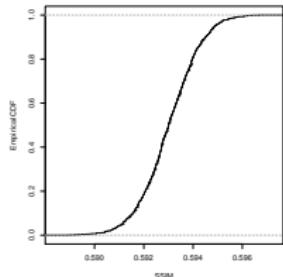


(f)  $L = 32$

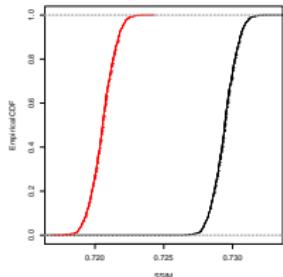
## Estimación del SSIM: CDF empírica del SSIM para texmos2<sup>12</sup>



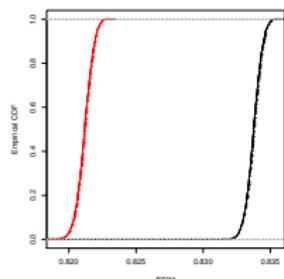
(a)  $L = 1$



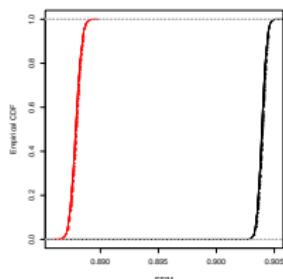
(b)  $L = 2$



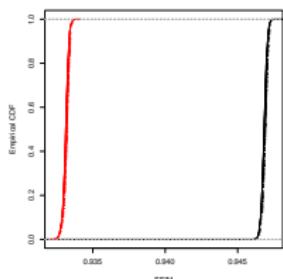
(c)  $L = 4$



(d)  $L = 8$



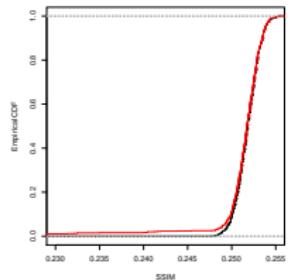
(e)  $L = 16$



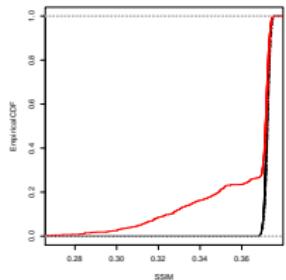
(f)  $L = 32$

<sup>12</sup>CDF empírica del SSIM bajo  $H_0$  (negro) y  $H_1$  (rojo).

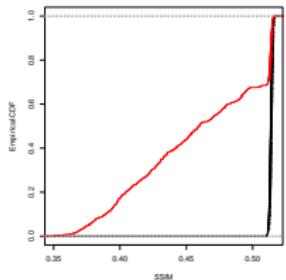
## Estimación del SSIM: CDF empírica del SSIM para Baboon<sup>13</sup>



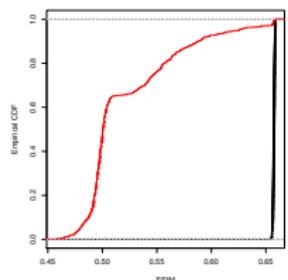
(a)  $L = 1$



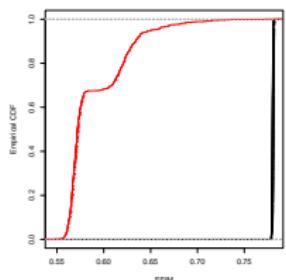
(b)  $L = 2$



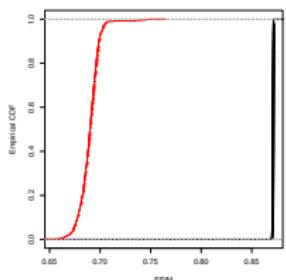
(c)  $L = 4$



(d)  $L = 8$



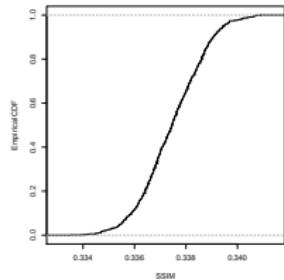
(e)  $L = 16$



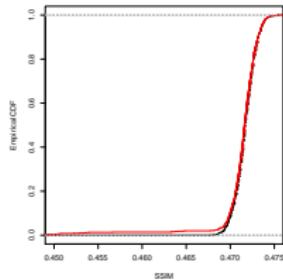
(f)  $L = 32$

<sup>13</sup>CDF empírica del SSIM bajo  $H_0$  (negro) y  $H_1$  (rojo).

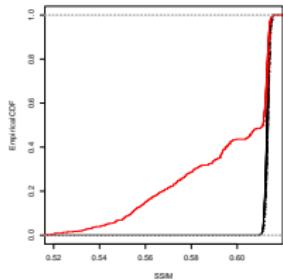
## Estimación del SSIM: CDF empírica del SSIM para Lenna<sup>14</sup>



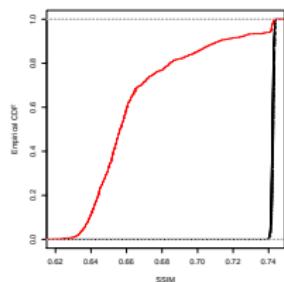
(a)  $L = 1$



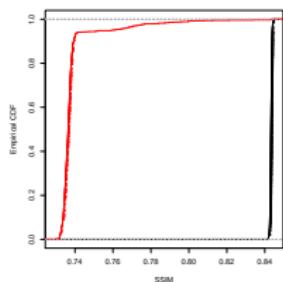
(b)  $L = 2$



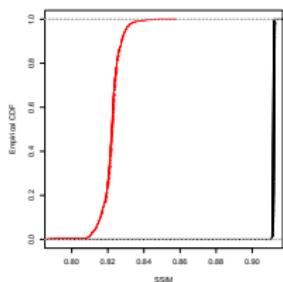
(c)  $L = 4$



(d)  $L = 8$



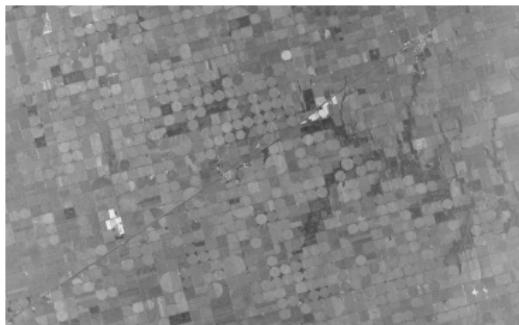
(e)  $L = 16$



(f)  $L = 32$

<sup>14</sup>CDF empírica del SSIM bajo  $H_0$  (negro) y  $H_1$  (rojo).

## Estimación del SSIM: imágenes de Radar de Apertura Sintética (SAR)<sup>15</sup>



(a) Copeland



(b) Dam



(c) Corpus Christi



(d) Mississippi

<sup>15</sup> Constelación de satélites ICEYE SAR: <https://www.iceye.com/downloads/datasets>

## Estimación del SSIM: resultados con imágenes SAR

Copeland (4096 × 2560)				Corpus Christi (4096 × 2560)		
Filter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Lee	1.891	1.932	3.136	1.610	1.639	2.705
Enhanced Lee	1.691	1.722	2.987	1.600	1.626	2.512
Kuan	1.691	1.722	2.987	1.600	1.626	2.512

Dam (1200 × 1200)				Mississippi (4096 × 4096)		
Filter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Lee	1.000	1.000	1.000	1.591	1.623	2.670
Enhanced Lee	1.000	1.000	1.000	1.468	1.491	2.553
Kuan	1.000	1.000	1.000	1.468	1.491	2.553

## Estimación del SSIM: resultados con imágenes SAR<sup>16</sup>

Copeland (4096 × 2560)		Corpus Christi (4096 × 2560)		
Filter	SSIM		SSIM	
	Under $H_0$	Under $H_1$	Under $H_0$	Under $H_1$
Lee	0.680	0.326	0.828	0.614
Enhanced Lee	0.652	0.306	0.818	0.615
Kuan	0.652	0.306	0.818	0.615

Dam (1200 × 1200)		Mississippi (4096 × 4096)		
Filter	SSIM		SSIM	
	Under $H_0$	Under $H_1$	Under $H_0$	Under $H_1$
Lee	0.999	0.999	0.890	0.740
Enhanced Lee	0.999	0.999	0.884	0.737
Kuan	0.999	0.999	0.884	0.737

<sup>16</sup>Recuerde que  $H_0 : \alpha = \beta = \gamma = 1$ .

## Observaciones

- ▶ Se propuso la estimación de parámetros del índice SSIM usando el Algoritmo 1 y se proporcionó un mecanismo para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \alpha = \beta = \gamma = 1.$$

- ▶ El desempeño del método fue examinado considerando un estudio de simulación Monte Carlo.
- ▶ Usar el supuesto de trabajo  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  por defecto, puede llevar a una idea errada sobre la similaridad entre dos imágenes.
- ▶ Procedimientos de estimación y test de hipótesis han sido implementados en R y C.<sup>17</sup>
- ▶ Se aplicó, los filtros de Lee, Lee mejorado y de Kuan en el estudio de simulación (resultados no presentados aquí).

---

<sup>17</sup> Disponible en github: <https://github.com/faosorios/SSIM>

## Referencias

-  Brunet, D., Vrscay, E.R., Wang, Z. (2012).  
On the mathematical properties of the structural similarity index.  
*IEEE Transactions on Image Processing* 21, 1488-1499.
-  Goldfeld, S.M., Quandt, R.E. (1972).  
*Nonlinear Methods in Econometrics*.  
North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
-  Osorio, F., Vallejos, R., Barraza, W., Ojeda, S.M., Landi, M.A. (2022).  
Statistical estimation of the structural similarity index for image quality assessment.  
*Signal, Image and Video Processing* 16, 1035-1042.
-  Vallejos, R., Osorio, F., Bevilacqua, M. (2020).  
*Spatial Relationships Between Two Georeferenced Variables: With Applications in R*.  
Springer, Cham.
-  Wang, Z., Bovik, A.C. (2002).  
A universal image quality index.  
*IEEE Signal Processing Letters* 9, 81-84.
-  Wang, Z., Bovik, A.C., Sheikh, H.R., Simoncelli, E.P. (2004).  
Image quality assessment: From error visibility to structural similarity.  
*IEEE Transactions on Image Processing* 13, 600-612.