

# MGE-201: Formas cuadráticas

**Felipe Osorio**

[felipe.osorio@uv.cl](mailto:felipe.osorio@uv.cl)

### Resultado 1:

Sea  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y sea  $U = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}$ . Entonces  $U \sim \chi^2(p)$ , con función de densidad

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2} \Gamma(p/2)} u^{p/2-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

### Demostración:

Como  $U$  es una función de variables aleatorias normales, entonces su función característica asume la forma

$$\begin{aligned} \varphi_U(t) &= \mathbf{E}\{\exp(itU)\} = \int_{\mathbb{R}^p} \exp(itu) (2\pi)^{-p/2} \exp(-\tfrac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \\ &= (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\tfrac{1}{2} (1 - 2it) \mathbf{z}^\top \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = (1 - 2it)^{-p/2}, \end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una variable aleatoria chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad.

### Definición 1 (Distribución chi-cuadrado no central):

Si  $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ , entonces  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$  tiene **distribución chi-cuadrado no central** con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$ , en cuyo caso anotamos  $U \sim \chi^2(p; \lambda)$ .

### Resultado 2:

Sea  $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$  donde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq \mathbf{0}$  y sea  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$ . Entonces la función característica de  $U$  es dada por

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\right),$$

con  $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$ .

## Chi-cuadrado no central

### *Demostración:*

Como  $Y_1, \dots, Y_p$  son variables aleatorias independientes, tenemos

$$\varphi_U(t) = \prod_{j=1}^p \varphi_{Y_j^2}(t).$$

Ahora, la función característica asociada a la variable aleatoria  $Y_j^2$  es dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_j^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it y_j^2) (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_j - \mu_j)^2\right\} dy_j \\ &= \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2} \left(\frac{1}{1-2it}\right) - \frac{\mu_j^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(1-2it)}{2} \left(y_j - \frac{\mu_j}{1-2it}\right)^2\right\} dy_j\end{aligned}$$

de este modo,

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1-2it)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2} \left(\frac{2it}{1-2it}\right)\right\},$$

y por tanto la función característica de la variable  $U = \sum_{j=1}^p Y_j^2$ , asume la forma

$$\varphi_U(t) = (1-2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1-2it}\right), \quad \lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2.$$

### Observación:

La función característica de la variable  $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$ , puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{\lambda}{1 - 2it} - \lambda\right) \\ &= (1 - 2it)^{-p/2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\lambda/(1 - 2it)\}^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} (1 - 2it)^{-(p+2k)/2}.\end{aligned}$$

Es decir, la función característica de  $U$  es un **promedio ponderado con pesos Poisson** de funciones características de variables aleatorias chi-cuadrado con  $p + 2k$  grados de libertad.

## Chi-cuadrado no central

Usando la relación entre funciones características y sus correspondientes funciones de densidad, sigue que la chi-cuadrado no central tiene la siguiente representación:

$$U|Z \sim \chi^2(p+2z), \quad Z \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad (1)$$

con densidad

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{1}{2^{p/2+k} \Gamma(\frac{p}{2} + k)} u^{p/2+k-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

La representación en (1) es muy útil para obtener los momentos de una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado no central.

El valor esperado de  $U \sim \chi^2(p; \lambda)$  es dado por

$$\begin{aligned} E(U) &= E\{E(U|Z)\} = E(p + 2Z) \\ &= p + 2E(Z) = p + 2\lambda, \end{aligned}$$

mientras que la varianza de  $U$  puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \text{var}(U) &= E\{\text{var}(U|Z)\} + \text{var}\{E(U|Z)\} \\ &= E\{2(p + 2Z)\} + \text{var}(p + 2Z) \\ &= 2p + 4\lambda + 4\lambda = 2p + 8\lambda. \end{aligned}$$

### Resultado 3:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es matriz no singular. Entonces

(a)  $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(p).$

(b)  $\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} \sim \chi^2(p; \lambda),$  donde  $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}.$

### Demostración:

Considere  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  con  $\mathbf{B}$  no singular. Para probar (a), tome

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

luego  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y de este modo

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \sim \chi^2(p; 0).$$

Para probar (b), sea  $Y = B^{-1}X$ , luego

$$Y \sim N_p(B^{-1}\mu, I),$$

y

$$X^\top \Sigma^{-1} X = Y^\top B^\top \Sigma^{-1} B Y = Y^\top Y,$$

que por definición tiene una distribución chi-cuadrado no central, con parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{2}(B^{-1}\mu)^\top (B^{-1}\mu) = \frac{1}{2}\mu^\top \Sigma^{-1} \mu.$$

### Definición 2 (Distribución $F$ no central):

Sea  $X_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$  y  $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$  variables aleatorias independientes. Entonces,

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

es decir  $F$  sigue una **distribución  $F$  no central** con  $\nu_1$  y  $\nu_2$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

### Definición 3 (Distribución Beta no central):

Considere  $U_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$ ,  $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$  tal que  $U_1$  y  $U_2$  son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$G = \frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \text{Beta}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

esto es,  $G$  sigue una **distribución Beta no central** con parámetros de forma y escala  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , respectivamente y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

### Definición 4 (Distribución $t$ de Student no central):

Si  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  y  $U/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$  son independientes, entonces

$$T = \frac{Y}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \lambda), \quad \lambda = \mu/\sigma,$$

es llamada una variable aleatoria con **distribución  $t$  de Student no central** con  $\nu$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

### Observación:

Si  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $U \sim \chi^2(\nu)$ ,  $\delta$  es una constante, y  $Z$  es independiente de  $U$ , entonces

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \delta).$$

Además,

$$t^2(\nu; \lambda) \stackrel{d}{=} F(1, \nu, \lambda^2/2).$$

### Resultado 4:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$  y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es matriz simétrica. Entonces  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$  sólo si  $\mathbf{A}$  es idempotente, en cuyo caso los grados de libertad y el parámetro de no centralidad están dados por

$$k = \text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad \text{y} \quad \theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu},$$

respectivamente.

### Demostración:

Suponga que  $\mathbf{A}$  es idempotente de rango  $k$ . Entonces existe una matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  tal que

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$ , entonces  $\mathbf{Y} \sim N_p(\mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ , y

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^k Y_i^2,$$

que sigue una distribución chi-cuadrado con  $k$  grados de libertad.

## Distribución de formas cuadráticas

Para el parámetro de no centralidad  $\theta$ , note que

$$\begin{aligned} E\{\chi^2(k; \theta)\} &= k + 2\theta = E(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(E(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}((\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\top) \mathbf{A}) = k + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

y de ahí que  $\theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$ .

Ahora, suponga que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$ . Si  $\mathbf{A}$  tiene rango  $r$ , entonces para  $\mathbf{P}$  matriz ortogonal  $p \times p$ ,

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

con  $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son los valores propios no nulos de  $\mathbf{A}$ . Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$ , entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^r \lambda_j Y_j^2 = U.$$

## Distribución de formas cuadráticas

Tenemos que  $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{I})$  con  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}$ , de modo que  $Y_j^2 \sim \chi^2(1, \delta_j^2/2)$  con función característica

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\delta_j^2}{1 - 2it}\right),$$

por la independencia de  $Y_1, \dots, Y_r$  sigue que

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \\ &= \exp\left(it \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j\delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$  tiene función característica

$$\varphi_{\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}}(t) = (1 - 2it)^{-k/2} \exp\left(\frac{2it\theta}{1 - 2it}\right),$$

entonces desde las dos expresiones anteriores debemos tener  $r = k$ ,  $\lambda_j = 1$ ,  $\forall j$  y  $\theta = \sum_j \delta_j^2/2$ . Consecuentemente  $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$  tiene la forma

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

que es idempotente. Luego

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = (\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P})(\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}) = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{P} \implies \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

### Resultado 5:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es no singular y  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  son particionados como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{X}_1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1$  son  $k \times 1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es  $k \times k$ . Entonces

$$U = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) - (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \sim \chi^2(p - k).$$

### *Demostración:*

Considere  $\Sigma = BB^\top$ , donde  $B$  es no singular y particione  $B$  como

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{k \times p}.$$

Luego,

$$\Sigma = BB^\top = \begin{pmatrix} B_1 B_1^\top & B_1 B_2^\top \\ B_2 B_1^\top & B_2 B_2^\top \end{pmatrix},$$

de donde sigue que  $\Sigma_{11} = B_1 B_1^\top$ . Ahora, sea  $Z = B^{-1}(X - \mu) \sim N_p(0, I)$ . De este modo,

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}U &= \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{Z} \\&= \mathbf{Z}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1) \mathbf{Z} \\&= \mathbf{Z}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1) \mathbf{Z},\end{aligned}$$

con  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1$ .

Note que  $\mathbf{H}_1$  es simétrica e idempotente y por tanto también lo es  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{H}_1$ . De donde sigue que  $U \sim \chi^2(\nu)$ , con  $\nu = \text{rg}(\mathbf{C}) = p - k$ .

Suponga que  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Una condición para que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  tenga una distribución chi-cuadrado es:<sup>1</sup>

$$\Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} = \Sigma \mathbf{A},$$

en cuyo caso los grados de libertad son  $k = \text{rg}(\mathbf{A} \Sigma)$ . Si  $\Sigma$  es no singular, la condición resulta  $\mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

### Resultado 6:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$  donde  $\Sigma$  tiene rango  $k$  ( $\leq p$ ) y si  $\mathbf{A}$  es una inversa generalizada de  $\Sigma$  ( $\Sigma \mathbf{A} \Sigma = \Sigma$ ), entonces  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k)$ .

---

<sup>1</sup>Esto representa una generalización del [Resultado 1](#).

### *Demostración:*

Considere  $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$  donde  $\mathbf{B}$  es una matriz no singular  $p \times p$  tal que

$$\mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Particionando  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top)^\top$  donde  $\mathbf{Y}_1$  es un vector  $k \times 1$  sigue que  $\mathbf{Y}_1 \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}$  con probabilidad 1.

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}^\top \\ &= \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, con probabilidad uno,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, 0) \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{Y}_1^\top, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{Y}_1^\top, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{Y}_1 \sim \chi^2(k). \end{aligned}$$

### Resultado 7:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es no singular, y  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica  $p \times p$ . Entonces  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \lambda)$ , donde  $k = \text{rg}(\mathbf{A})$ ,  $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} / 2$  si y sólo si  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  es matriz idempotente.

### Demostración:

Considere  $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{B}$  es una matriz no singular  $p \times p$  tal que  $\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}^\top = \mathbf{I}_p$ . Entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y},$$

donde  $\mathbf{Y} \sim N_p(\mathbf{B} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ . Desde el Resultado 1 sigue que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  tiene distribución chi-cuadrado sólo si  $\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$  es idempotente. Esto es equivalente a mostrar que  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  es idempotente.

Si  $A\Sigma$  es idempotente, tenemos

$$A = A\Sigma A = AB^{-1}B^{-\top}A, \quad (\Sigma = B^{-1}B^{-\top})$$

así, pre- y post-multiplicando por  $B^{-\top}$  y  $B^{-1}$ , obtenemos

$$B^{-\top}AB^{-1} = (B^{-\top}AB^{-1})(B^{-\top}AB^{-1}),$$

y por tanto es idempotente.

Por otro lado, si  $B^{-\top}AB^{-1}$  es idempotente, entonces

$$B^{-\top}AB^{-1} = (B^{-\top}AB^{-1})(B^{-\top}AB^{-1}) = B^{-\top}A\Sigma AB^{-1},$$

es decir  $A = A\Sigma A$  y de ahí que  $A\Sigma$  es idempotente.

### Ejemplo:

Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias IID  $N(\theta, \sigma^2)$ , en este caso podemos definir  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  tal que  $\mathbf{X} \sim N_n(\theta \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I})$ . Considere la forma cuadrática

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X},$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$  y  $\mathbf{A} = \mathbf{C}/\sigma^2$ . De esta manera

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top,$$

que es idempotente. En efecto,

$$\mathbf{C}^2 = \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top + \frac{1}{n^2} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top = \mathbf{C}.$$

Además

$$\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{C}) = \text{tr} \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) = n - 1,$$

y

$$\lambda = \frac{\theta^2}{2} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \mathbf{1}^\top \left( \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) \mathbf{1} = 0.$$

Finalmente,

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

### Resultado 8:

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $Q_1 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  y  $Q_2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{B} \mathbf{X}$ . Entonces  $Q_1$  y  $Q_2$  son independientes si y sólo si  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

### *Demostración:*

Tenemos  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{T} \mathbf{T}^\top$ , y defina  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}$ . Note que si  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , entonces

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 = (\mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}) = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} \mathbf{T} = \mathbf{0}.$$

Debido a la simetría de  $\mathbf{G}_1$  y  $\mathbf{G}_2$ , sigue que

$$\mathbf{0} = (\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)^\top = \mathbf{G}_2^\top \mathbf{G}_1^\top = \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1.$$

## Distribución de formas cuadráticas

Como  $G_1 G_2 = G_2 G_1$  existe una matriz ortogonal  $P$  que simultáneamente diagonaliza  $G_1$  y  $G_2$ , esto es:

$$P^\top G_1 P = P^\top T^\top A T P = D_1,$$

$$P^\top G_2 P = P^\top T^\top B T P = D_2.$$

De este modo,

$$0 = G_1 G_2 = P D_1 P^\top P D_2 P^\top = P D_1 D_2 P^\top$$

lo que es verdad si  $D_1 D_2 = 0$ . Como  $D_1$  y  $D_2$  son diagonales, sus elementos diagonales deben ocurrir en posiciones diferentes. Es decir,

$$D_1 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}$ , entonces

$$Q_1 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_1 \mathbf{Y},$$

$$Q_2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{Y}.$$

Además,

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \text{Cov}(\mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}) = \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} = \mathbf{I}.$$

En efecto,  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ .

Ahora, particionando adecuadamente  $\mathbf{Y}$ , sigue que

$$\mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_1 \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{M}_1 \mathbf{Y}_1,$$

$$\mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_2^\top \mathbf{M}_2 \mathbf{Y}_2,$$

y la independencia entre  $Q_1$  y  $Q_2$  sigue desde la independencia entre  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$ .

### Resultado 9:

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $Q = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$  y  $U = \mathbf{B} \mathbf{X}$ . Entonces  $Q$  y  $U$  son independientes si y sólo si  $\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

### Ejemplo:

Considere  $X_1, \dots, X_n$  muestra aleatoria desde  $N(\theta, \sigma^2)$ , así

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim N_n(\theta \mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Tenemos

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X}.$$

Como  $\mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}$  sigue la independencia entre  $\bar{X}$  y  $S^2$ .