MAT-206: Inferencia Estadística **Pauta de corrección**
Certamen 2. Diciembre 2, 2020 Prof. Felipe Osorio

---

1. a. La densidad conjunta para $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ puede ser escrita como:

$$f(\boldsymbol{x}) = \exp\{\theta\, T(\boldsymbol{x}) - n\log((2\sinh\theta)/\theta)\},$$

donde $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Es decir, $\boldsymbol{X}$ pertenece a la familia exponencial, y el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_X$ es solución de la ecuación:

$$\frac{T(\boldsymbol{x})}{n} = \frac{b'(\theta)}{n} = \coth\theta - \frac{1}{\theta}.$$

1. b. Los datos $Y_1, \dots, Y_n$ son variables IID con distribución Bernoulli y probabilidad de exito,

$$p = \mathsf{P}(X_i > 0) = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

Además, podemos notar que

$$1 - p = \frac{1 - e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = \frac{p}{e^\theta},$$

es decir, $\theta = \log(p/(1-p))$. Así, el estimador máximo verosímil de p, basado en $Y_1, \dots, Y_n$ es

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

y por tanto, $\widehat{\theta}_Y = \log(\widehat{p}/(1-\widehat{p}))$.

2. a. La CDF de $Y = (X-\mu)/\phi$ es

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}\Big(\frac{X-\mu}{\phi} \le y\Big) = \mathsf{P}(X \le \mu + \phi y) \\ &= \int_{-\infty}^{\mu+\phi y} g\Big(\frac{x-\mu}{\phi}\Big)\frac{\mathsf{d}\,x}{\phi} = \int_{-\infty}^{y} g(u)\,\mathsf{d}\,u. \end{aligned}$$

Es decir, Y tiene densidad g.

2. b. Sea $Y_i = (X_i - \mu)/\phi$, para $i = 1, 2$. Luego, $X_i = \mu + \phi Y_i$, y

$$W = \frac{Y_1 + Y_2}{|Y_1 - Y_2|},$$

como Y_1 y Y_2 son independientes con densidad conjunta $g(y_1)g(y_2)$ que no dependen de μ y ϕ. Como W es función de Y_1 y Y_2 su distribución no depende de μ y ϕ.

2. c. Sea $q_{\alpha/2}$ y $q_{1-\alpha/2}$ los cuantiles $\alpha/2$ superior e inferior de la distribución de W, respectivamente. Entonces

$$\mathsf{P}\Big(q_{1-\alpha/2} < \frac{X_1 + X_2 - 2\mu}{|X_1 - X_2|} < q_{\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha.$$

Es decir,

$$IC(\mu) = \big\{\mu : \mu \in [\overline{X} - \tfrac{1}{2}|X_1 - X_2|q_{\alpha/2}, \overline{X} + \tfrac{1}{2}|X_1 - X_2|q_{1-\alpha/2}]\big\}.$$

3. a. La densidad conjunta de W, X, Y es

$$f(w, x, y; \alpha, \beta) = q(w, x)(2\pi)^{-1/2} \exp\big\{ - \tfrac{1}{2}(y - \alpha w - \beta x)^2\big\}.$$

El gradiente de la log-verosimilitud conjunta es

$$\frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n W_i(Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) \\ \sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo $\partial \ell_n(\alpha, \beta)/\partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\widehat{\alpha} = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n W_i X_i) - (\sum_{i=1}^n W_i X_i)(\sum_{i=1}^n X_i Y_i)}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n W_i^2) - (\sum_{i=1}^n W_i X_i)^2},$$
$$\widehat{\beta} = \frac{(\sum_{i=1}^n W_i^2)(\sum_{i=1}^n X_i Y_i) - (\sum_{i=1}^n W_i X_i)(\sum_{i=1}^n W_i Y_i)}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n W_i^2) - (\sum_{i=1}^n W_i X_i)^2}.$$

La información de Fisher (para una única observación) es:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\alpha, \beta) = \mathsf{E}\Big\{ - \frac{\partial^2 \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top}\Big\} = \mathsf{E}\begin{pmatrix} W^2 & WX \\ WX & X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}(W^2) & \mathsf{E}(WX) \\ \mathsf{E}(WX) & \mathsf{E}(X^2) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_2\big(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\alpha, \beta)\big).$$

Así,

$$\sqrt{n}(\widehat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_1(0, K_{11}(\alpha, \beta)),$$

con $\boldsymbol{K}(\alpha, \beta) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\alpha, \beta)$. De ahí que

$$K_{11}(\alpha, \beta) = \frac{\mathsf{E}(X^2)}{\mathsf{E}(X^2)\,\mathsf{E}(W^2) - \mathsf{E}^2(XW)}.$$

3. b. Para β conocido, $\widetilde{\alpha}$ corresponde a la solución de:

$$\ell_n'(\alpha) = \sum_{i=1}^n W_i(Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) = 0,$$

es decir,

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n W_i}\Big(\sum_{i=1}^n W_i Y_i - \beta \sum_{i=1}^n W_i X_i\Big),$$

y la información de Fisher es $\mathsf{E}(W^2)$. De este modo,

$$\sqrt{n}(\widetilde{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_1(0, 1/\,\mathsf{E}(W^2)).$$