

# MGE-201: Distribución normal multivariada

**Felipe Osorio**

[felipe.osorio@uv.cl](mailto:felipe.osorio@uv.cl)

## Recordatorio 1:

Una variable aleatoria (uni-dimensional)  $Z$  tiene **distribución normal** (univariada) con media cero y varianza uno, si su pdf<sup>1</sup> es de la forma:

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}z^2), \quad z \in \mathbb{R},$$

en cuyo caso escribimos  $Z \sim N(0, 1)$ . Más generalmente,

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \iff Y \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es la media, mientras que  $\sigma^2 \geq 0$  representa la varianza.

## Recordatorio 2:

Si  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces su **función característica** adopta la forma:

$$\varphi(h) = \exp(ih\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 h^2), \quad h \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>1</sup>En ocasiones escribimos  $f(z) = \phi(z)$  para denotar la densidad de  $Z \sim N(0, 1)$ .

## Definición 1 (Distribución normal multivariada):

Sea  $\mathbf{X}$  vector aleatorio  $p$ -dimensional. Se dice que  $\mathbf{X}$  tiene **distribución normal multivariada** con vector de medias  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$  si y sólo si,

$$Y = \mathbf{t}^\top \mathbf{X} \sim N_1(\mu_Y, \sigma_Y^2), \quad \text{para todo } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

y anotamos  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

### Observación:

En la definición anterior **no** se ha hecho supuestos sobre la independencia de las componentes de  $\mathbf{X}$ .

## Resultado 1 (Transformación afín):

Suponga que  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y considere la transformación  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$  donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  con  $\text{rg}(\mathbf{A}) = m$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Entonces

$$\mathbf{Y} \sim N_m(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top).$$

### *Demostración:*

Sea  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$  y note que

$$\mathbf{t}^\top \mathbf{Y} = \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{t})^\top \mathbf{X} + \mathbf{t}^\top \mathbf{b} = \mathbf{h}^\top \mathbf{X} + c,$$

por la Definición 1 tenemos que  $\mathbf{h}^\top \mathbf{X}$  es normal y como  $c$  es una constante, sigue que  $\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}$  tiene distribución normal multivariada.

## Resultado 2 (Función característica):

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces la **función característica** de  $\mathbf{X}$  es dada por

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right).$$

### *Demostración:*

Sea  $\boldsymbol{\Sigma}$  matriz de covarianza  $p \times p$  semidefinida positiva de rango  $r$  y sea  $Z_1, \dots, Z_r$  variables aleatorias IID  $N(0, 1)$ . Entonces el vector  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^\top$  tiene función característica

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{Z})\} = \prod_{j=1}^r \mathbb{E}\{\exp(it_j Z_j)\} \\ &= \prod_{j=1}^r \exp\left(-\frac{1}{2}t_j^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

## Distribución normal multivariada

Considere

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z},$$

donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times r}$  con  $\text{rg}(\mathbf{B}) = r$ , tal que  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  y  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ . Entonces  $\mathbf{X}$  tiene función característica

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X})\} = \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}))\} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{B}\mathbf{Z})\} = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}^\top \mathbf{t} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{B}\mathbf{B}^\top \mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).\end{aligned}$$

*Tarea:*

Mostrar el [Resultado 1](#) usando la función característica.

### Resultado 3:

Si  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Entonces

$$E(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}.$$

### *Demostración:*

Para mostrar el resultado, se obtendrá

$$E(\mathbf{Z}) = i^{-1} \frac{\partial \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) = i^{-2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{t}^\top} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}.$$

Sea  $Z_1, \dots, Z_n$  variables aleatorias IID  $N(0, 1)$ . Entonces por (1), tenemos

$$\varphi_Z(\mathbf{t}) = \exp(-\tfrac{1}{2} \|\mathbf{t}\|^2), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

## Distribución normal multivariada

Tenemos,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}d\varphi_Z(\mathbf{t}) &= \exp(-\tfrac{1}{2}\|\mathbf{t}\|^2) \cdot (-\tfrac{1}{2} d\|\mathbf{t}\|^2) = -\exp(-\tfrac{1}{2}\|\mathbf{t}\|^2)\mathbf{t}^\top d\mathbf{t} \\ &= -\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}^\top d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}d^2\varphi_Z(\mathbf{t}) &= -d\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}^\top d\mathbf{t} - \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top d\mathbf{t} = \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top \mathbf{t}\mathbf{t}^\top d\mathbf{t} - \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top d\mathbf{t} \\ &= \varphi_Z(\mathbf{t})(d\mathbf{t})^\top (\mathbf{t}\mathbf{t}^\top - \mathbf{I}) d\mathbf{t},\end{aligned}$$

de ahí que

$$\frac{\partial\varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial\mathbf{t}} = -\varphi_Z(\mathbf{t})\mathbf{t}, \quad \frac{\partial^2\varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial\mathbf{t}\partial\mathbf{t}^\top} = \varphi_Z(\mathbf{t})(\mathbf{t}\mathbf{t}^\top - \mathbf{I}).$$

Evaluando en  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$  y ponderando de forma apropiada, sigue que

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}) = i^{-1} \frac{\partial\varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial\mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) = i^{-2} \frac{\partial^2\varphi_Z(\mathbf{t})}{\partial\mathbf{t}\partial\mathbf{t}^\top} \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbf{I} = \text{Cov}(\mathbf{Z}).$$

---

<sup>2</sup>Evidentemente  $d\|\mathbf{t}\|^2 = (d\mathbf{t})^\top \mathbf{t} + \mathbf{t}^\top d\mathbf{t} = 2\mathbf{t}^\top d\mathbf{t}$ .



### Observación:

Sea

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}),$$

con  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$  con  $\mathbf{B}$  matriz de rango completo. Por los Resultados 1 y 3, sigue que

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}.$$

Además,

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B} \mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}) = \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{Z}) \mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}.$$

### Resultado 4:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces la distribución marginal de cualquier subconjunto de  $k$  ( $< p$ ) componentes de  $\mathbf{X}$  es normal  $k$ -variada.

### Demostración:

Considere la siguiente partición:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_1$  son vectores  $k \times 1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es  $k \times k$ . Aplicando el [Resultado 1](#) con

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_k, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{k \times p} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

sigue inmediatamente que  $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ .

### Observación:

La inversa del [Resultado 4](#), **no** es verdad en general.

### Resultado 4:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces la distribución marginal de cualquier subconjunto de  $k$  ( $< p$ ) componentes de  $\mathbf{X}$  es normal  $k$ -variada.

### Demostración:

Considere la siguiente partición:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_1$  son vectores  $k \times 1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es  $k \times k$ . Aplicando el [Resultado 1](#) con

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_k, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{k \times p} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

sigue inmediatamente que  $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ .

### Observación:

La inversa del [Resultado 4](#), **no** es verdad en general.

### Resultado 5:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  son particionadas como en la Ecuación (2). Entonces los vectores  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  son independientes sólo si  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ .

### *Demostración:*

Note que  $\text{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$ , así la independencia entre  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  implica que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}.$$

Suponga ahora que  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ . Entonces la función característica

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \\ &= \exp(i\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\mu}_1 + i\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}\mathbf{t}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{t}_2) \\ &= \exp(i\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_1^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}\mathbf{t}_1) \exp(i\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_2^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{t}_2) \\ &= \varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1) \varphi_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2),\end{aligned}$$

es decir,  $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$  es independiente de  $\mathbf{X}_2 \sim N_{p-k}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$ .

### Resultado 6 (Función de densidad):

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  es definida positiva, entonces la densidad de  $\mathbf{X}$  asume la forma

$$f_X(\mathbf{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p.$$

### *Demostración:*

Sea  $Z_1, \dots, Z_p$  variables aleatorias IID  $N(0, 1)$ . Entonces la densidad conjunta de  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$  es

$$f_Z(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^p (2\pi)^{-1/2} \exp(-z_i^2/2) = (2\pi)^{-p/2} \exp(-\frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2).$$

Considere  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}$  con  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ , con  $\mathbf{B}$  matriz de rango completo. Entonces, tenemos la transformación inversa

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

## Distribución normal multivariada

De este modo,

$$d\mathbf{Z} = d\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{X},$$

con matriz Jacobiana  $D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}$ , como

$$|D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X})|_+ = |\mathbf{B}|^{-1} = |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}) &= |D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})|_+ f_Z(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})) \\ &= (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \end{aligned}$$

notando que  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{B}\mathbf{B}^\top) = \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}$  sigue el resultado deseado.

### *Ejemplo:*

Sea  $\mathbf{X} \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$  donde

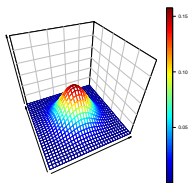
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1.$$

En cuyo caso, la función de densidad es dada por:

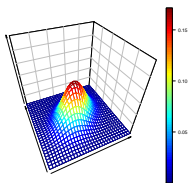
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2) \right\}.$$

A continuación se presenta la función de densidad para los casos  $\rho = 0.0, 0.4$  y  $0.8$ .

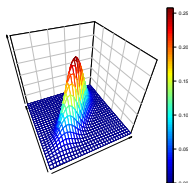
# Distribución normal multivariada



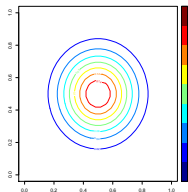
(a)  $\rho = 0.0$



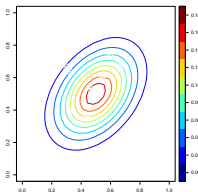
(b)  $\rho = 0.4$



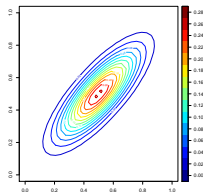
(c)  $\rho = 0.8$



(d) contornos



(e) contornos



(f) contornos



### Observación:

Es fácil notar que la función de densidad es constante sobre el elipsoide

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \lambda,$$

en  $\mathbb{R}^p$  para todo  $\lambda > 0$ . Este elipsoide tiene centro  $\boldsymbol{\mu}$ , mientras que  $\boldsymbol{\Sigma}$  determina su forma y orientación. Además, la variable aleatoria

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^p Z_i^2, \quad (3)$$

sigue una distribución **chi-cuadrado** con  $p$  grados de libertad y la cantidad

$$D = \{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\}^{1/2},$$

se conoce como **distancia de Mahalanobis**<sup>3</sup> de  $\mathbf{X}$  a  $\boldsymbol{\mu}$ .

---

<sup>3</sup>En ocasiones, decimos que  $D^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$  es la 'distancia' de Mahalanobis.

### Resultado 7:

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y particione  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  como:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{X}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_1$  son vectores  $k \times 1$ , mientras que  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$  es matriz  $k \times k$ . Sea  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}^-$  una inversa generalizada de  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ , esto es, una matriz que satisface

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \boldsymbol{\Sigma}_{22},$$

y sea  $\boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\Sigma}_{21}$ . Entonces

- (a)  $\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \mathbf{X}_2 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2})$  y es independiente de  $\mathbf{X}_2$ .
- (b) La distribución condicional

$$(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^- (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}).$$

### *Demostración:*

Considere la transformación lineal

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & -B \\ \mathbf{0} & I_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = CX,$$

sigue que  $Y \sim N_p(C\mu, C\Sigma C^\top)$ , donde

$$\begin{aligned} C\mu &= \begin{pmatrix} I_k & -B \\ \mathbf{0} & I_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - B\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ C\Sigma C^\top &= \begin{pmatrix} I_k & -B \\ \mathbf{0} & I_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ -B^\top & I_{p-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - B\Sigma_{21} - \Sigma_{12}B^\top + B\Sigma_{22}B^\top & \Sigma_{12} - B\Sigma_{22} \\ \Sigma_{21} - \Sigma_{22}B^\top & \Sigma_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo, nuestro interés es escoger  $\Sigma_{12} - B\Sigma_{22} = \mathbf{0}$ . Es decir,  $\Sigma_{12} = B\Sigma_{22}$ .

## Distribución normal multivariada

Por otro lado, notando que

$$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-}\Sigma_{22} = B\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-}\Sigma_{22} = B\Sigma_{22} = \Sigma_{12},$$

sigue que  $\Sigma_{12}B^{\top} = B\Sigma_{22}B^{\top}$  (y análogamente  $B\Sigma_{21} = B\Sigma_{22}B^{\top}$ ).

Esto es, si  $B$  es escogida como  $B = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-}$ , entonces  $Y_1$  y  $Y_2$  son independientes con distribución conjunta

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-}X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_p\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-}\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11\cdot 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Esto muestra la parte (a).

## Distribución normal multivariada

Para notar la parte (b), note que las densidades de  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  están dadas por

$$g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2})\right\}$$
$$f_2(\mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right\},$$

donde  $\boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2$ . La densidad conjunta para  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top)^\top$  adopta la forma

$$f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}) f_2(\mathbf{y}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}).$$

Como

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = f_{1|2}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{x}_2) f_2(\mathbf{x}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}),$$

entonces, la densidad condicional de  $\mathbf{X}_1$  dado  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$  debe ser  $g(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\delta}_{1 \cdot 2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2})$ .

Además, es fácil notar que la forma cuadrática

$$\begin{aligned} q(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\mu}_{1.2}, \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) &= (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\delta}_{1.2}) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\delta}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\delta}_{1.2}) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2}), \end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),$$

lo que muestra el resultado.

## Distribución normal multivariada

### Observación:

La esperanza de la distribución condicional de  $\mathbf{X}_1$  dado  $\mathbf{X}_2$ , es decir

$$E(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),$$

se denomina **función de regresión** de  $\mathbf{X}_1$  sobre  $\mathbf{X}_2$  con coeficientes de regresión  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}$ . Esta es una función lineal de  $\mathbf{X}_2$  y la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_{11 \cdot 2}$  no depende de  $\mathbf{X}_2$ .

### Resultado 8:

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y considere  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{X}$  dos funciones lineales del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ . La covarianza entre  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  es dada por

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \mathbf{A}_1 \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \mathbf{A}_2^\top = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2^\top$$

### Observación:

Por el resultado anterior es evidente que  $\mathbf{Y}_1$  y  $\mathbf{Y}_2$  serán independientes si y sólo si

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}_2^\top = \mathbf{0}.$$

### Ejemplo:

Considere  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria desde  $N(\mu, \sigma^2)$  y sea

$$\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top,$$

el vector de **datos centrados** con  $Z_i = X_i - \bar{X}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Podemos escribir

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{C} \mathbf{X},$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$  la **matriz de centrado**. Tenemos que  $\mathbf{X} \sim N_n(\mu \mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  y  $\bar{X}$  con  $\mathbf{Z}$  son independientes pues  $\mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}$ .



### *Ejemplo:*

Sea  $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$  y considere las transformaciones

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^\top \mathbf{X}.$$

De este modo

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}, (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^\top \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

pues  $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{Y}_1$  con  $\mathbf{Y}_2$  son independientes.