1. La densidad conjunta para (X_i, Y_i) adopta la forma:

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i; \theta) &= f(x_i) \cdot f(y_i|x_i; \theta) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-x_i^2/2) \cdot (2\pi)^{-1/2} \exp(-(y_i - x_i\theta)^2/2) \\ &= (2\pi)^{-1} \exp(-x_i^2/2 - (y_i - x_i\theta)^2/2). \end{aligned}$$

De este modo, la densidad conjunta es dada por

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \exp(-x_i^2/2 - -(y_i - x_i\theta)^2/2) \\ &= (2\pi)^{-n} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - x_i\theta)^2 \Big\}, \end{aligned}$$

lo que lleva a la función de log-verosimilitud

$$\ell_n(\theta) = -n \log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - x_i\theta)^2,$$

con ecuación de verosimilitud

$$\ell_n'(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i(y_i - x_i\theta) = 0.$$

Que permite obtener el MLE como: $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$. La información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\mathsf{E}\{-\ell_1''(\theta)\} = \mathsf{E}(X_i^2) = 1.$$

De este modo,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} - \theta) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}(0, 1).$$

2. Tenemos

$$\ell_n(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{nr}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i)^2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_i} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i) \\ \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{nr}{2\sigma^2}\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i)^2. \end{aligned}$$

Luego, el MLE de μ_i es $\widehat{\mu}_i = \overline{x}_i$, con $\overline{x}_i = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^r x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, mientras que el MLE de σ^2 es

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^r (x_{ij} - \overline{x}_i)^2.$$

Notando que

$$\mathsf{E}\Big\{\sum_{j=1}^r (X_{ij} - \overline{X}_i)^2\Big\} = (r-1)\sigma^2,$$

obtenemos

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow{\ \mathsf{P}\ } \frac{r-1}{r}\,\sigma^2,$$

conforme $n \to \infty$, y portanto $\widehat{\sigma}^2$ no es consistente.

3. Tenemos

$$f(x_i, y_i; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_i^2 + y_i^2 - 2\rho x_i y_i)\Big\}.$$

De este modo,

$$\ell_n(\rho) = (2\pi\sqrt{1-\rho^2})^{-n} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(S - 2\rho T)\Big\},$$

con $S = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$, y $T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La función score adopta la forma:

$$\frac{\mathsf{d}\,\ell_n(\rho)}{\mathsf{d}\,\rho} = \frac{n\rho}{1-\rho^2} + \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}T - \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}S,$$

lo que lleva a la ecuación de estimación $q(\rho) = 0$, con

$$q(\rho) = \rho(1-\rho^2) - \frac{1}{n}S\rho + \frac{1}{n}T(1+\rho^2),$$

que admite al menos una solución en $(-1, 1)$. Podemos escribir la función score como:

$$U_n(\rho) = \frac{\mathsf{d}\,\ell_n(\rho)}{\mathsf{d}\,\rho} = n(1-\rho^2)^2 q(\rho),$$

de ahí que

$$U_n'(\rho) = \frac{nq'(\rho)}{(1-\rho^2)^2} + \frac{4nq(\rho)}{(1-\rho^2)^3}.$$

Como $\mathsf{E}(q(\rho)) = 0$ y $\mathsf{E}(q'(\rho)) = -(1+\rho^2)$, obtenemos

$$\mathcal{F}_1(\rho) = \frac{1}{n}\,\mathsf{E}\{-U_n'(\rho)\} = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

Lo anterior permite establecer que

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho} - \rho) \xrightarrow{\ \mathsf{D}\ } \mathsf{N}(0, \mathcal{F}_1^{-1}(\rho)).$$

4.a. Para $x \neq y$ tenemos la densidad

$$f(x,y;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)(1-x)^{\theta}, & x > y \\ (\theta+1)(1-y)^{\theta}, & y > x \end{cases}.$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X > z, Y > z, X \neq Y) &= 2\,\mathsf{P}(X > z, Y > z, X > Y) \\ &= 2(\theta+1)\int_z^1 \int_z^x (1-x)\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,x \\ &= 2(\theta+1)\int_z^1 (x-z)(1-x)^{\theta}\,\mathsf{d}\,x = \frac{2(1-z)^{\theta+2}}{\theta+2}. \end{aligned}$$

Notando que $\mathsf{P}(X > z, Y > z) = (1-z)^{\theta+2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X > z, X = Y) &= \mathsf{P}(X > z, Y > z, X = Y) \\ &= \mathsf{P}(X > z, Y > z) - \mathsf{P}(X > z, Y > z, X \neq Y) \\ &= \frac{\theta(1-z)^{\theta+2}}{\theta+2}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$f(x,y;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)(1-x)^{\theta}, & x > y \\ (\theta+1)(1-y)^{\theta}, & y < x \\ \theta(1-x)^{\theta+1}, & x = y \end{cases}.$$

Sea T el número de (X_i, Y_i)'s con $X_i = Y_i$ y $Z_i = \max\{X_i, Y_i\}$, entonces la función de verosimilitud adopta la forma

$$L_n(\theta) = (\theta+1)^{n-T}\theta^T \prod_{i=1}^n (1-Z_i)^{\theta} \prod_{X_i=Y_i} (1-Z_i),$$

y la ecuación de verosimilitud es dada por

$$\frac{\mathsf{d}\,\ell_n(\theta)}{\mathsf{d}\,\theta} = \frac{n-T}{\theta+1} + \frac{T}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(1-Z_i) = 0,$$

cuya solución es

$$\widehat{\theta} = \frac{\sqrt{(n-W)^2 + 4WT} - (n-W)}{2W},$$

donde $W = -\sum_{i=1}^n \log(1-Z_i)$.

4.b. Notando que

$$\frac{\mathsf{d}^2\,\ell_n(\theta)}{\mathsf{d}\,\theta^2} = -\frac{n-T}{(\theta+1)^2} - \frac{T}{\theta^2},$$

y como $\mathsf{E}(T) = n\theta/(\theta+2)$, lleva a

$$\mathcal{F}_1(\theta) = \frac{1}{n}\,\mathsf{E}\Big\{-\frac{\mathsf{d}^2\,\ell_n(\theta)}{\mathsf{d}\,\theta^2}\Big\} = \frac{\theta^2 + 4\theta + 1}{\theta(\theta+2)(\theta+1)^2}.$$

De este modo,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}\Big(0, \frac{\theta(\theta+2)(\theta+1)^2}{\theta^2 + 4\theta + 1}\Big).$$