MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 3. Diciembre 19, 2017
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. Sabemos que

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X})^2,$$
$$\widehat{\mu}_2 = \overline{Y}, \qquad \widehat{\phi}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2,$$

de este modo $\widehat{\delta} = \overline{X} - \overline{Y}$. Además,

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{z}) = \ell(\mu_1, \sigma^2; \boldsymbol{x}) + \ell(\mu_2, \phi^2; \boldsymbol{y}),$$

con $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \sigma^2, \mu_2, \phi^2)^\top$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{y}^\top)^\top$, donde

$$\ell(\mu_1, \sigma^2; \boldsymbol{x}) = -\frac{m}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu_1)^2,$$
$$\ell(\mu_2, \phi^2; \boldsymbol{y}) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\phi^2 - \frac{1}{2\phi^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_2)^2.$$

Por la independencia entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sigue que

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \mathcal{F}_n(\mu_1) + \mathcal{F}_n(\mu_2),$$

(además $\widehat{\mu}_1 \perp \widehat{\sigma}^2$ y $\widehat{\mu}_2 \perp \widehat{\phi}^2$) con $\mathcal{F}_n(\mu_j) = \mathrm{E}\{-U'(\mu_j)\}$, para $j = 1, 2$. Tenemos

$$U(\mu_1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu_1)^2, \qquad U'(\mu_1) = -\frac{m}{\sigma^2},$$
$$U(\mu_2) = \frac{1}{\phi^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_2)^2, \qquad U'(\mu_2) = -\frac{n}{\phi^2},$$

de este modo

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \frac{m}{\sigma^2} + \frac{n}{\phi^2}.$$

De este modo, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para δ es dado por:

$$IC_n(\delta) = \left[\overline{x} - \overline{y} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{(m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2)^{1/2}}, \overline{x} - \overline{y} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{(m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2)^{1/2}}\right]$$

2. Note que

x	2	3	4	5	6	7	8
$p_0(x)/p_1(x)$	5	0.6667	33	0.5556	1	0.5	2

a) El test Neyman-Pearson para $\alpha = 0.02$ es dado por:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{3\}, \\ 0, & \text{si } \{2,4,5,6,7,8\}. \end{cases}$$

b) El test Neyman-Pearson para $\alpha = 0.05$ asume la forma:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{3\}, \\ \gamma, & \text{si } \{7\}, \\ 0, & \text{si } \{2,4,5,6,8\}, \end{cases}$$

con

$$\gamma = \frac{0.05 - p_0(3)}{p_0(7)} = \frac{0.05 - 0.02}{0.1} = 0.3$$

c) Para el test en **a)**, tenemos

$$\beta = 1 - p_1(3) = 1 - 0.3 = 0.7,$$

mientras que para el test en **b)**, sigue que

$$\beta = 1 - p_1(3) - 0.3p_1(7) = 1 - 0.3 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.64.$$

3. Tenemos

$$\ell_1(\boldsymbol{\theta}) = x \log \theta_1 + y \log \theta_2 + z \log \theta_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \log(x!y!z!).$$

De este modo,

$$\frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} = \begin{pmatrix} -x/\theta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -y/\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -z/\theta_3^2 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de información de Fisher asume la forma $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{diag}(1/\theta_1, 1/\theta_2, 1/\theta_3)$. Notando que la función de log-verosimilitud (para toda la muestra) es dada por:

$$\begin{aligned} \ell_n(\boldsymbol{\theta}) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) \log \theta_1 + \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big) \log \theta_2 + \Big(\sum_{i=1}^n z_i\Big) \log \theta_3 \\ - n(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \sum_{i=1}^n \log x_i! y_i! z_i! \end{aligned}$$

maximizando $\ell_n(\boldsymbol{\theta})$, obtenemos

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\theta}_2 = \overline{Y}, \qquad \widehat{\theta}_3 = \overline{Z}.$$

En nuestro caso, tenemos que la hipótesis $H_0 : \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ puede ser escrita en la forma $H_0 : \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\theta} = 0$ con $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)^\top$. Notando que $\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\theta} / \partial \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}^\top$, sigue:

$$W = \frac{n(\boldsymbol{a}^\top \widehat{\boldsymbol{\theta}})^2}{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{a}},$$

como $\boldsymbol{a}^\top \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \overline{X} + \overline{Y} - \overline{Z}$, y

$$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{a} = (1, 1, -1) \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_3.$$

De ahí que, rechazamos $H_0 : \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$, si:

$$W > \chi^2_{1-\alpha}(1),$$

con

$$W = \frac{n(\overline{X} + \overline{Y} - \overline{Z})^2}{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}.$$

4. Sea $f(x)$ y $g(x)$ las densidades de $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente. La densidad de X es $\theta f(x) + (1-\theta) g(x)$. Así, para $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$, sigue que

$$\frac{\theta_2 f(x) + (1-\theta_2) g(x)}{\theta_1 f(x) + (1-\theta_1) g(x)} = \frac{\theta_2 f(x)/g(x) + (1-\theta_2)}{\theta_1 f(x)/g(x) + (1-\theta_1)},$$

es no decreciente en $T(x) = f(x)/g(x)$. De ahí que la familia de densidades de X tiene razón de verosimilitudes monótona en $T(x)$. Por tanto el test UMP asume la forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c, \\ \gamma, & T(x) = c, \\ 0, & T(x) < c, \end{cases}$$

donde c y γ son determinados tal que $\mathrm{E}\{\psi(X)\} = \alpha$ para $\theta = \theta_0$.