MAT-206: Inferencia Estadística **Nombre:** ________________________

Certamen 2. Diciembre 2, 2020 **Profesor:** Felipe Osorio

Entrega: Diciembre 3, 2020 (12:00 hrs.)

---

1. (30 pts) Suponga que $X_1, \dots, X_n$ variables IID desde la densidad

$$f(x;\theta) = \frac{\theta \exp(\theta x)}{2\sinh(\theta)}, \qquad x \in (-1,1),$$

y sea $Y_i = I\{X_i > 0\}$.

a) Determine una ecuación para el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\theta}_X$ basado en $X_1, \dots, X_n$.

b) Obtenga el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_Y$ basado en $Y_1, \dots, Y_n$.

2. (35 pts) Considere la familia de posición-escala con densidad

$$f(x;\mu,\phi) = \frac{1}{\phi}\, g\Big(\frac{x-\mu}{\phi}\Big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde g es una función de densidad conocida.

a) Halle la densidad de $(X-\mu)/\phi$, si X tiene densidad $f(x;\mu,\phi)$.

b) Si X_1 y X_2 son variables IID con distribución en esta familia. Muestre que

$$W = \frac{X_1 + X_2 - 2\mu}{|X_1 - X_2|},$$

es un pivote.

c) Obtenga un IC para μ usando el pivote en la parte **b)**.

3. (35 pts) Suponga que W y X tienen densidad conjunta conocida $q(w,x)$, y que

$$Y|(W=w, X=x) \sim \mathsf{N}(\alpha w + \beta x, 1).$$

Sea $(W_1, X_1, Y_1), \dots, (W_n, X_n, Y_n)$ variables IID cada una con la misma densidad conjunta (W, X, Y).

a) Determine los estimadores máximo verosímiles $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$. Obtenga la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\widehat{\alpha} - \alpha)$.

b) Suponga que β es conocido. ¿Cuál es el estimador máximo verosímil, $\widetilde{\alpha}$ de α? Determine la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\widetilde{\alpha} - \alpha)$.