

1. Tenemos

$$f(x; \lambda, \beta) = \exp(\lambda \log x - \beta x - \log \Gamma(\lambda) + \lambda \log \beta) x^{-1} I_{(0, \infty)}(x).$$

Es decir, X pertenece a la FE 2-paramétrica con $T_1(X) = \log X$, $T_2(X) = -X$,

$$b(\boldsymbol{\theta}) = \log \Gamma(\lambda) - \lambda \log \beta, \quad h(x) = \frac{1}{x} I_{(0, \infty)}(x).$$

Aquí $\eta(\boldsymbol{\theta}) = (\lambda, \beta)^\top$ y $\Theta = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Sabemos que

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \partial b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \lambda \\ \partial b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \partial^2 b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \lambda^2 & \partial^2 b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \lambda \partial \beta \\ \partial^2 b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta \partial \lambda & \partial^2 b(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil notar que

$$\frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} = \frac{\partial \log \Gamma(\lambda)}{\partial \lambda} - \log \beta = \psi(\lambda) - \log \beta, \quad \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} = -\frac{\lambda}{\beta},$$

con $\psi(z) = d \log \Gamma(z) / dz = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ la función digama. Además,

$$\frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda^2} = \psi'(\lambda), \quad \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \lambda} = -\frac{1}{\beta}, \quad \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta^2} = \frac{\lambda}{\beta^2}.$$

Finalmente obtenemos,

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) - \log \beta \\ -\lambda / \beta \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \psi'(\lambda) & -1 / \beta \\ -1 / \beta & \lambda / \beta^2 \end{pmatrix}.$$

2. Es fácil notar que la densidad conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ es dada por:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n) = f(x_{(1)}) \cdot f(x_{(2)}) \cdots f(x_{(n)}),$$

de ahí que $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$ es estadística suficiente.

3. Para que la densidad sea no nula debemos tener $X_i > \theta$ para $i = 1, \dots, n$. Es decir, se debe satisfacer que

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} > \theta,$$

lo que lleva a escribir

$$p(\mathbf{x}; \theta) = c^n(\theta) I\{x_{(1)} > \theta\} \prod_{i=1}^n f(x_i).$$

Usando el teorema de factorización de Fisher-Neyman sigue que $X_{(1)}$ es suficiente.

4. Tenemos

$$\log f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \log g(u),$$

con $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$. De este modo,

$$\mathrm{d}_\mu \log f(\mathbf{x}) = \frac{g'(u)}{g(u)} \mathrm{d}_\mu u = -2 \frac{g'(u)}{g(u)} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathrm{d} \boldsymbol{\mu}.$$

Sea $W_g(u) = -2g'(u)/g(u)$, podemos escribir el vector score (para una única observación) como:

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial \log f(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = W_g(u) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}).$$

Usando la representación estocástica de un vector aleatorio elíptico, podemos escribir:

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} \stackrel{\mathrm{d}}{=} R \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \text{y} \quad W_g(u) \stackrel{\mathrm{d}}{=} W_g(R^2),$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$, R es variable aleatoria positiva y $\mathbf{U} \sim \mathrm{U}(\mathcal{S}_p)$. Es decir,

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = W_g(u) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} R \mathbf{B} \mathbf{U}.$$

Así, la matriz de información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{Cov}(\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})) = \mathrm{E}\{\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) \dot{\ell}^\top(\boldsymbol{\mu})\} = \mathrm{E}\{W_g^2(R^2) R^2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{U}^\top \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\},$$

por la independencia entre R y \mathbf{U} , lleva a escribir

$$\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{E}\{W_g^2(R^2) R^2\} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B} \mathrm{E}(\mathbf{U} \mathbf{U}^\top) \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$

Sabemos que $\mathrm{Cov}(\mathbf{U}) = \frac{1}{p} \mathbf{I}_p$, luego

$$\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{p} \mathrm{E}\{W_g^2(R^2) R^2\} \boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

pues $\mathbf{B} \mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$. Finalmente,

$$\mathcal{F}_n(\boldsymbol{\mu}) = n \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\mu}) = \frac{n}{p} \mathrm{E}\{W_g^2(R^2) R^2\} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$