1.a. La información de Fisher para la familia de posición adopta la forma:

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathsf{E}\left[\left\{\frac{\partial \log f(x-\theta)}{\partial\theta}\right\}^2\right] = \mathsf{E}\left[\left\{\frac{-f'(x-\theta)}{f(x-\theta)}\right\}^2\right].$$

Evidentemente podemos escribir $X = \theta + \epsilon$, así

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathsf{E}\left[\left\{\frac{-f'(\epsilon)}{f(\epsilon)}\right\}^2\right] = \int \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)}\,\mathsf{d}x.$$

1.b. Para la distribución Cauchy, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(1+x^2)^{-1} = -\frac{2x}{\pi(1+x^2)^2}$$

Es decir, debemos calcular,

$$\mathcal{F}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)}\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}.$$

2. Podemos escribir $p(x;\theta)$ en la familia exponencial 2-paramétrica, como:

$$p(x;\theta) = \exp\{\eta_1(\theta)T_1(\boldsymbol{x}) + \eta_2(\theta)T_2(\boldsymbol{x}) + 2\log(1-\theta)\}$$

con $\eta_1(\theta) = \log\theta - 2\log(1-\theta)$, $\eta_2(\theta) = \log\theta$, y

$$T_1(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n I(X_i = -1), \qquad T_2(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i\, I(X_i \geq 0).$$

Luego por los Teoremas de Fisher-Neyman y de Lehmann-Scheffé, sigue que $(T_1(\boldsymbol{X}), T_2(\boldsymbol{X}))$ es suficiente y minimal.

Observación 1. En efecto, para la familia exponencial k-paramétrica tenemos que:

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})}{f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})} = \frac{\exp\{\boldsymbol{\eta}^\top(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{\theta})\}h(\boldsymbol{x})}{\exp\{\boldsymbol{\eta}^\top(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{\theta})\}h(\boldsymbol{y})} = \exp\{\boldsymbol{\eta}^\top(\boldsymbol{\theta})[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})]\}\frac{h(\boldsymbol{x})}{h(\boldsymbol{y})},$$

que es independiente de $\boldsymbol{\theta}$ para $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})$, lo que permite establecer que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ es estadística suficiente minimal.

3. La función de densidad conjunta es dada por

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n;\rho) &= f(x_1)f(x_2|x_1;\rho)f(x_3|x_1,x_2;\rho)\cdots f(x_n|x_1,x_2,\dots,x_{n-1};\rho)\\
&= f(x_1)\prod_{j=1}^{n-1} f(x_{j+1}|x_1,x_2,\dots,x_j;\rho)\\
&= (2\pi)^{-1/2}\exp(x_1^2/2)\prod_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1/2}\exp\big\{-\tfrac{1}{2}(x_{j+1}-\rho x_j)^2\big\}\\
&= (2\pi)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1}-\rho x_j)^2\Big\}.
\end{aligned}
$$

Tenemos,

$$(x_{j+1}-\rho x_j)^2 = x_{j+1}^2 - 2\rho x_j x_{j+1} + \rho^2 x_j^2.$$

De ahí que la función de log-verosimilitud adopta la forma,

$$\ell_n(\rho) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2\Big) - \rho\sum_{j=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \frac{\rho^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2.$$

Así

$$\frac{\mathsf{d}\,\ell_n(\rho)}{\mathsf{d}\,\rho} = \sum_{j=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \rho\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2,$$

y la condición de primer orden lleva a,

$$\widehat{\rho}_{\mathsf{ML}} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_j x_{j+1}}{\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2}.$$