MAT-206: Conceptos preliminares

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Un vector aleatorio k-dimensional $\boldsymbol{X}$ es una función desde el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a $\mathbb{R}^k$, esto es

$$\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Definición 1:

La función de distribución de $\boldsymbol{X}$ es una función $F : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$, tal que

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$$

y denotamos $\boldsymbol{X} \sim F$ o bien, $\boldsymbol{X} \sim F_X$.

La notación anterior debe ser entendida como:

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k),$$

que corresponde a la probabilidad del evento $\bigcap_{r=1}^k \{X_r \leq x_r\}$.

Propiedades:

(a) $F(\boldsymbol{x})$ es función monótona creciente y contínua a la derecha en cada uno de los componentes de $\boldsymbol{X}$,

(b) $0 \leq F(\boldsymbol{x}) \leq 1$,

(c) $F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = \cdots = F(x_1, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$,

(d) $F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$.

Sea F la CDF del vector aleatorio $\boldsymbol{X}$. Entonces, existe una función no-negativa f tal que

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{u}) \, \mathsf{d}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k,$$

en este caso decimos que $\boldsymbol{X}$ es un vector aleatorio contínuo con función de densidad f. Además,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^k F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}.$$

Considere el vector aleatorio k-dimensional $\boldsymbol{X}$ particionado como $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1^\top, \boldsymbol{X}_2^\top)^\top$ donde $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ son vectores $k_1 \times 1$ y $k_2 \times 1$, respectivamente, con $k = k_1 + k_2$.

En este caso $\boldsymbol{X}_i \sim F_i$, $i = 1, 2$, y $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ son llamadas marginales de $\boldsymbol{X}$.

Note que

$$F_1(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}, +\boldsymbol{\infty}), \qquad F_2(\boldsymbol{t}) = F(+\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{t}), \qquad \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{k_1}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^{k_2},$$

o bien

$$f_1(\boldsymbol{s}) = \int_{\mathbb{R}^{k_2}} f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u}, \qquad f_2(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^{k_1}} f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u},$$

para $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{k_1}$ y $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^{k_2}$.

Si $\boldsymbol{X}$ es absolutamente contínuo y $f_1(\boldsymbol{x}_1) > 0$, entonces la densidad condicional de $\boldsymbol{X}_2$ dado $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1$ es dada por

$$f_{X_2|X_1=x_1}(\boldsymbol{u}) = \frac{f_X(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u})}{f_1(\boldsymbol{x}_1)},$$

con función de distribución de $\boldsymbol{X}_2$ condicional a $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1$ dada por

$$F_{X_2|X_1=x_1}(\boldsymbol{u}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{u}} f_{X_2|X_1=x_1}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t},$$

tenemos además que

$$f_{X_2|X_1=x_1}(\boldsymbol{u}) = \frac{f_X(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u})}{\int_{\mathbb{R}^{k_2}} f_X(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}}.$$

Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top$ vector aleatorio k-dimensional con densidad f. Entonces la esperanza de cualquier función $\boldsymbol{g}$ de $\boldsymbol{X}$ está dada por

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})) = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) f(\boldsymbol{t})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t},$$

siempre que la integral (k-dimensional) exista.

Más generalmente, sea $\boldsymbol{Z} = (Z_{ij})$ una matriz aleatoria $m \times n$, entonces

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Z}) = (\mathsf{E}(Z_{ij})).$$

En particular, para $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de constantes, entonces

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}.$$

Resultado 1:

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ matrices de constantes $l \times m$, $n \times p$ y $l \times p$, respectivamente. Entonces

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}.$$

Demostración:

Sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, entonces

$$Y_{ij} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ir} Z_{rs} b_{sj} + c_{ij},$$

de este modo

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\mathsf{E}(Y_{ij})) &= \left(\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ir}\,\mathsf{E}(Z_{rs}) b_{sj} + c_{ij}\right)\\ &= \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

Definición 2:

Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ vectores aleatorios m y n-dimensionales, respectivamente. Se define la matriz de covarianza entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ como la matriz $m \times n$,

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= (\mathsf{Cov}(X_i, Y_j)) \\ &= \mathsf{E}\{(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{Y} - \mathsf{E}(\boldsymbol{Y}))^\top\}.\end{aligned}$$

Además, es fácil mostrar que

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^\top) - \mathsf{E}(\boldsymbol{X})\,\mathsf{E}^\top(\boldsymbol{Y}).$$

En particular,[1]

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}) = \mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top) - \mathsf{E}(\boldsymbol{X})\,\mathsf{E}^\top(\boldsymbol{X}).$$

[1] $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})$ también es conocida como *matriz de dispersión*.

Resultado 2:

Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son vectores aleatorios m y n-dimensionales, respectivamente y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, entonces

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{BY}) = \boldsymbol{A}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}^\top.$$

Demostración:

Sean $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AX}$ y $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BY}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{BY}) &= \mathsf{Cov}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \mathsf{E}\{(\boldsymbol{U} - \mathsf{E}(\boldsymbol{U}))(\boldsymbol{V} - \mathsf{E}(\boldsymbol{V}))^\top\} \\
&= \mathsf{E}\{(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{BY} - \boldsymbol{B}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{Y}))^\top\} \\
&= \mathsf{E}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{Y} - \mathsf{E}(\boldsymbol{Y}))^\top \boldsymbol{B}^\top\} \\
&= \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}\{(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{Y} - \mathsf{E}(\boldsymbol{Y}))^\top\}\boldsymbol{B}^\top \\
&= \boldsymbol{A}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}^\top.
\end{aligned}$$

Observación:

En particular,

$$\mathsf{Cov}(\boldsymbol{AX}) = \mathsf{Cov}(\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{A}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}^\top.$$

Resultado 3:

Toda matriz de dispersión es simétrica y semidefinida positiva.

Demostración:

La simetría es directo. Para mostrar que $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})$ es semidefinida positiva, sea $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X})$, y considere $Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Z}$, para $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^\top \mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}^\top \mathsf{E}(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))^\top \boldsymbol{a} \\
&= \mathsf{E}(\boldsymbol{a}^\top (\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}(\boldsymbol{X}))^\top \boldsymbol{a}) \\
&= \mathsf{E}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top \boldsymbol{a}) = \mathsf{E}(Y^2) \geq 0
\end{aligned}$$

y por tanto, $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})$ es semidefinida positiva.

Suponga que $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X})$ es semidefinida positiva de rango r ($r \leq n$), de ahí que $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$ donde $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ de rango r.

Sea $\boldsymbol{Y}$ vector aleatorio r-dimensional con $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{0}$ y $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{I}$. Haciendo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, sigue que $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ y

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{B}\,\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top.$$

Es decir, corresponde a una matriz de covarianza.

Resultado 4:

Sea $\boldsymbol{X}$ vector aleatorio n-dimensional y considere la transformación lineal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b},$$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de constantes $m \times n$ y $\boldsymbol{b}$ es vector de constantes $m \times 1$. Entonces

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{b}, \qquad \mathsf{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}\,\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}^{\top}.$$

Definición 3:

Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ vector aleatorio con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$. Se define la matriz de correlación como $\boldsymbol{R} = (\rho_{ij})$ donde

$$\rho_{ij} = \frac{\mathsf{Cov}(X_i, X_j)}{\{\mathsf{var}(X_i)\,\mathsf{var}(X_j)\}^{1/2}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}, \qquad i, j = 1, \dots, p.$$

Observación:

En efecto, podemos escribir,[2]

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{D}^{-1/2},$$

donde $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{pp})$.

[2] O análogamente, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}^{1/2}$.

Resultado 5:

Sea $\boldsymbol{X}$ vector aleatorio p-dimensional con $\mathsf{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$ y $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $p \times p$. Entonces

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}.$$

Demostración:

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) &= \mathsf{E}(\operatorname{tr} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = \mathsf{E}(\operatorname{tr} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top) \\
&= \operatorname{tr} \mathsf{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top) \\
&= \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}.
\end{aligned}$$

Ejemplo:

Sea $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ vector n-dimensional cuyos componentes son todos 1. Note que, $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{1}_n = n$. Considere el vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, entonces

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n X_i^2, \qquad \mathbf{1}^\top \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n X_i.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2 = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} - n\Big(\frac{1}{n}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{X}\Big)^2 \\
&= \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} - n\Big(\frac{1}{n}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{X}\Big)\Big(\frac{1}{n}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{X}\Big) = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} - \frac{1}{n}\boldsymbol{X}^\top \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{X}^\top \Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}_n\Big)\boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top
\end{aligned}$$

Llamaremos a $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}_n$ la *matriz de centrado*.

Suponga que $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con media μ y varianza σ^2. Sigue que,

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{X}) = \mu \mathbf{1}_n, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n,$$

pues $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0$ $(i \neq j)$. Por tanto, podemos usar el Resultado 5 para calcular la esperanza de la variable aleatoria,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{X},$$

obteniendo

$$\mathsf{E}(Q) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}) + \mu^2 \mathbf{1}^\top \boldsymbol{C} \mathbf{1}.$$

Es fácil verificar que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}) &= \operatorname{tr}\Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\Big) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathbf{1}\mathbf{1}^\top) = n - \frac{1}{n}\mathbf{1}^\top\mathbf{1} = n - 1, \\
\boldsymbol{C}\mathbf{1} &= \Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\Big)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

de donde sigue que $\mathsf{E}(Q) = \sigma^2(n-1)$.

Definición 4:

La función generadora de momentos de $\boldsymbol{X}$ es dada por:

$$M_X(\boldsymbol{t}) = \mathsf{E}\{\exp(\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X})\}, \qquad \|\boldsymbol{t}\| < h.$$

Observación:

$M_X(\boldsymbol{t})$ permite un método bastante operativo para el cálculo del k-ésimo momento de un vector aleatorio $\boldsymbol{X}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{X}) &= \begin{cases} \mathsf{E}(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}^\top \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}^\top), & k \text{ par}, \\ \mathsf{E}(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}^\top \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}^\top \otimes \boldsymbol{X}), & k \text{ impar}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\partial^k M_X(\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t} \partial \boldsymbol{t}^\top \cdots \partial \boldsymbol{t}^\top}\Big|_{t=0}, & k \text{ par}, \\ \dfrac{\partial^k M_X(\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t} \partial \boldsymbol{t}^\top \cdots \partial \boldsymbol{t}^\top \partial \boldsymbol{t}}\Big|_{t=0}, & k \text{ impar}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sea $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X}^\top, \boldsymbol{Y}^\top)^\top$ con $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ vectores aleatorios n- y q-dimensionales, respectivamente. Entonces, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ se dicen independientes si y sólo si

$$F_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_X(\boldsymbol{x}) H_Y(\boldsymbol{y}),$$

donde $F_Z(\boldsymbol{z})$, $G_X(\boldsymbol{x})$ y $H_Y(\boldsymbol{y})$ son las funciones de distribución de $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente.

Si $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ tienen densidades $f(\boldsymbol{z})$, $g(\boldsymbol{x})$ y $h(\boldsymbol{y})$. Entonces $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son independientes si y sólo si

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}) h(\boldsymbol{y}).$$

Desde esto, sigue que:

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}).$$

Resultado 6 (Transformación de vectores aleatorios):

Sea $\boldsymbol{X}$ vector aleatorio n-dimensional con función de densidad $f_X(\boldsymbol{x})$ y soporte $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} : f_X(\boldsymbol{x}) > 0\}$. Para $\boldsymbol{g} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable e invertible, sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$. Entonces, la densidad de $\boldsymbol{Y}$ está dada por:

$$f_Y(\boldsymbol{y}) = |\mathsf{D}\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y})|_+ \, f_X(\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y})),$$

donde

$$\mathsf{D}\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}^\top} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}^\top},$$

denota la matriz Jacobiana asociada a la transformación $\boldsymbol{g}^{-1}(\cdot)$.