

# MGE-201: Distribuciones de contornos elípticos

**Felipe Osorio**

[felipe.osorio@uv.cl](mailto:felipe.osorio@uv.cl)

## Familia de posición-escala

Considere  $U$  una variable aleatoria con función de distribución  $F$ . De este modo, la variable

$$X = U + a,$$

tiene función de distribución

$$P(X \leq x) = F(x - a),$$

para  $F$  fijo y  $a \in \mathbb{R}$  tenemos que  $X$  corresponde a la familia de posición.

Análogamente la familia de escala es generada por la transformación

$$X = bU, \quad b > 0,$$

en cuyo caso,

$$P(X \leq x) = F(x/b), \quad b > 0.$$

### Definición 1:

Sea  $U$  una variable aleatoria con función de distribución acumulada fija  $F$  y considere la transformación

$$X = a + bU, \quad a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Tenemos

$$P(X \leq x) = F\left(\frac{x - a}{b}\right).$$

De este modo,  $X$  es conocida como **familia de posición-escala**.<sup>1</sup>

### Observación:

Usualmente asociado a  $F$  tenemos una **función de densidad**  $f$ , dada por

$$f(x; a, b) = \frac{d}{dx} F\left(\frac{x - a}{b}\right) = \frac{1}{b} F'\left(\frac{x - a}{b}\right) = \frac{1}{b} f\left(\frac{x - a}{b}\right).$$

---

<sup>1</sup> $a$  es el parámetro de posición, mientras que  $b$  es parámetro de escala.

### *Ejemplo (familias de posición-escala):*

- ▶  $N(a, b^2)$ :

$$f(y; a, b) = \frac{1}{b} (2\pi)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y-a}{b} \right)^2 \right\}.$$

- ▶  $\text{Laplace}(a, b)$ :<sup>2</sup>

$$f(y; a, b) = \frac{1}{2b} \exp \left\{ -\frac{|y-a|}{b} \right\}.$$

- ▶  $\text{Cauchy}(a, b^2)$ :

$$f(y; a, b) = \frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + (y-a)^2}.$$

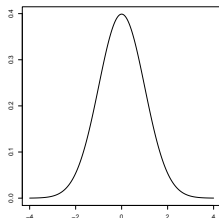
- ▶  $\text{Logística}(a, b)$ :

$$f(y; a, b) = \frac{1}{b} \frac{e^{-(y-a)/b}}{(1 + e^{-(y-a)/b})^2}.$$

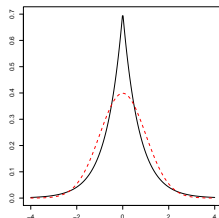
---

<sup>2</sup>También es conocida como **doble exponencial**

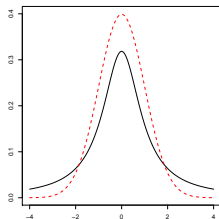
# Familia de posición-escala



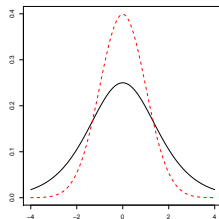
(a) Normal



(b) Laplace



(c) Cauchy



(d) Logística

### Definición 2:

Un vector aleatorio  $p$ -dimensional,  $\mathbf{X}$  tiene **distribución normal** con vector de medias  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y matriz de covarianza  $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$  si y sólo si, para todo vector  $\mathbf{t}$  la variable aleatoria (uni-dimensional)  $\mathbf{t}^\top \mathbf{X}$  es normal y escribimos  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

### Observación:

Note que en la definición anterior **no** se ha hecho supuestos respecto de la independencia de los componentes de  $\mathbf{X}$ .

### Definición 3:

La **función característica** de  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  está dada por

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).$$

En efecto, notando que  $Y = \mathbf{t}^\top \mathbf{X}$  tiene media y varianza dadas por,

$$\lambda = E(Y) = \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}, \quad \sigma^2 = \text{var}(Y) = \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \geq 0,$$

sigue que

$$\varphi_Y(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}(1) = \exp(i\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})$$

## Distribución normal multivariada

Como un caso particular tenemos que la función característica para  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$ , es

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{t}^\top \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^p \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t_i^2) = \prod_{i=1}^p \varphi_{Z_i}(t_i)$$

y de este modo, obtenemos

$$\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_p) \iff Z_1, \dots, Z_p \text{ IID } N(0, \sigma^2).$$

### Resultado 1:

Si  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  es definida positiva, entonces la **densidad** de  $\mathbf{X}$  es

$$f(\mathbf{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$



## Distribución normal multivariada

### *Demostración:*

Sea  $Z_1, \dots, Z_p$  variables aleatorias IID  $N(0, 1)$ . Entonces la densidad conjunta de  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$  es

$$f(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^p (2\pi)^{-1/2} \exp(-z_i^2/2) = (2\pi)^{-p/2} \exp(-\frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2).$$

Considere  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z}$  con  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ , con  $\mathbf{B}$  matriz de rango completo. Entonces, tenemos la transformación inversa

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

y  $d\mathbf{Z} = d\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{X}$ , con matriz jacobiana  $D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^{-1}$ , como

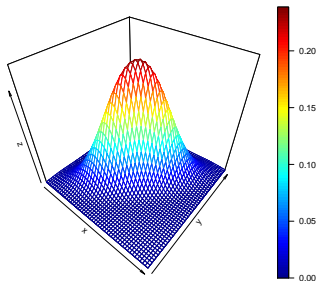
$$|D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X})|_+ = |\mathbf{B}|^{-1} = |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2},$$

obtenemos

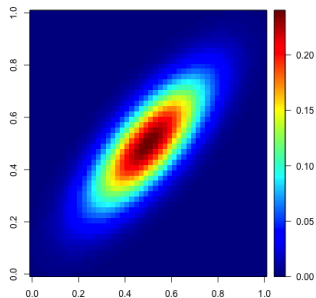
$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= |D\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})|_+ f(\mathbf{z}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}))) \\ &= (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\top|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \end{aligned}$$

notando que  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}$  sigue el resultado deseado.

# Distribución normal multivariada



(a) densidad



(b) contornos

## Definición 4:

Sea  $U$  vector aleatorio  $p \times 1$  con **distribución uniforme** sobre el conjunto

$$\mathcal{S}_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

esto es  $\mathcal{S}_p$  denota la **superficie de la esfera unitaria** en  $\mathbb{R}^p$ . En cuyo caso anotamos  $U \sim U(\mathcal{S}_p)$ .

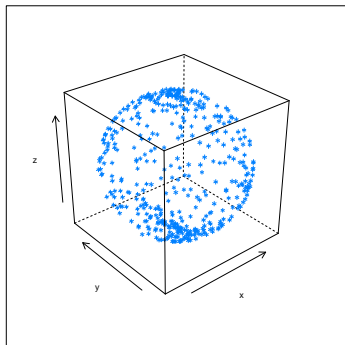
## Resultado 2:

Si  $Z_1, \dots, Z_p$  son variables aleatorias IID con distribución  $N(0, 1)$ , entonces  $U = (U_1, \dots, U_p)^\top$ , definido como:

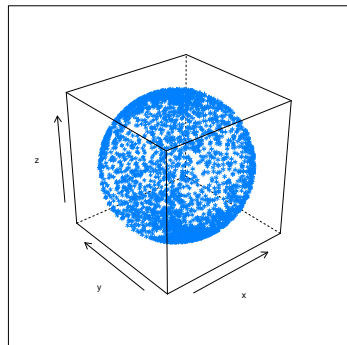
$$U = \frac{Z}{\|Z\|},$$

tiene **distribución uniforme sobre la esfera unitaria**.

## Distribuciones de contornos elípticos



(a)  $n = 750$



(b)  $n = 3000$

## Definition 5:

Un vector aleatorio  $p$ -dimensional tiene **distribución esférica** si y sólo si su función característica satisface:

- a)  $\varphi(\mathbf{Q}^\top \mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t})$ , para todo  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_p$ .
- b) Existe una función  $\phi(\cdot)$  de una variable escalar tal que  $\varphi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$ .

En este caso escribimos  $\mathbf{X} \sim S_p(\phi)$ .

## Ejemplo:

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , tenemos que

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(t_1^2 + \cdots + t_p^2) \right\} = \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \mathbf{t}).$$

### Resultado 3

Suponga que  $\mathbf{X} \sim S_p(\phi)$ . Entonces  $\mathbf{X}$  tiene **representación estocástica**

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{U} \sim U(S_p)$  y  $R \geq 0$  con distribución  $G$ , son independientes.

### Resultado 4

Suponga que  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U} \sim S_p(\phi)$  ( $P(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0$ ), entonces

$$\|\mathbf{X}\| \stackrel{d}{=} R, \quad \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \stackrel{d}{=} \mathbf{U}.$$

Además  $\|\mathbf{X}\|$  y  $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$  son independientes.

## Resultado 5

El vector de medias y la matriz de covarianza de  $U \sim U(\mathcal{S}_p)$  son:

$$E(U) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(U) = \frac{1}{p} \mathbf{I}_p,$$

respectivamente.

### *Demostración:*

Sea  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , tenemos que  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \|\mathbf{X}\|U$ , con  $\|\mathbf{X}\|$  independiente de  $U$ . Sabemos que  $\|\mathbf{X}\|^2 \sim \chi^2(p)$ . Dado que

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad E(\|\mathbf{X}\|) > 0, \quad \text{y} \quad E(\|\mathbf{X}\|^2) = p, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_p,$$

el resultado sigue.

### Definición 6:

Un vector aleatorio  $p \times 1$ ,  $\mathbf{X}$  tiene distribución de **contornos elípticos** con parámetros  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$ , si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} \sim S_k(\phi),$$

donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times k}$  es matriz de rango completo tal que,  $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$  con  $\text{rk}(\boldsymbol{\Sigma}) = k$ . En cuyo caso escribimos  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \phi)$ .

### Observación:

La función característica de  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \phi)$  es de la forma:

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) \phi(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}).$$

Note además que la **representación estocástica** de  $\mathbf{X}$  es dada por

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{U},$$

donde  $R \geq 0$  es independiente de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ .



## Definición 7:

Se dice que el vector  $\mathbf{X}$  tiene distribución de contornos elípticos si su **función de densidad** es de la forma

$$f(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  es función decreciente, llamada **función generadora de densidad**, tal que:

$$\int_0^\infty u^{p/2-1} g(u) \, du < \infty.$$

En cuyo caso escribimos  $\mathbf{X} \sim \text{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$ .

## Distribuciones de contornos elípticos

### *Ejemplo:*

La función generadora de densidad de un vector aleatorio con **distribución  $t$  multivariada** asume la forma

$$g(u) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{p/2}} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+p)/2}, \quad \nu > 0.$$

En cuyo caso escribimos,  $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ .

En este caso, tenemos que  $R^2/p \sim F_{p,\nu}$ . Además, su **función característica** es dada por

$$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{\|\sqrt{\nu}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{t}\|^{\nu/2}}{2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2)} \exp(i\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}) K_{\nu/2}(\|\sqrt{\nu}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{t}\|), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

donde  $K_\nu(x)$  denota la función de Bessel modificada de segundo tipo.

### *Ejemplo:*

Para la **distribución Exponencial Potencia**, la función generadora de densidades es dada por

$$g(u) = \frac{p\Gamma(\frac{p}{2})\pi^{-p/2}}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda})2^{1+\frac{p}{2\lambda}}} \exp(-u^\lambda/2), \quad \lambda > 0.$$

y es usual utilizar la notación  $\mathbf{X} \sim \text{PE}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$ . En este caso tenemos que la variable aleatoria positiva  $R$  tiene densidad

$$h(r) = \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda})2^{\frac{p}{2\lambda}}} r^{p-1} \exp(-r^{2\lambda}/2), \quad r > 0.$$

Note también que  $R^{2\lambda} \sim \text{Gama}(\frac{1}{2}, \frac{p}{2\lambda})$ .

### Definición 8:

Sea  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  matriz  $p \times p$  definida positiva y  $H$  función de distribución de una variable aleatoria positiva,  $W$ . Entonces, se dice que el vector aleatorio  $\mathbf{X}$  sigue una **distribución de mezcla de escala normal** si su función de densidad asume la forma:

$$f(\mathbf{x}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \int_0^\infty \omega^{p/2} \exp(-\omega u/2) dH(\omega),$$

donde  $u = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$  y anotamos  $\mathbf{X} \sim \text{SMN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; H)$ .

### Observación:

Un vector aleatorio  $\mathbf{X} \sim \text{SMN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; H)$  admite la representación:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + W^{-1/2} \mathbf{Z}, \tag{2}$$

donde  $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  y  $W \sim H(\delta)$  son **independientes**.

## Distribuciones de mezcla de escala normal

### Ejemplo:

Un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  tiene distribución **Slash** si su función de densidad es de la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \nu |2\pi \Sigma|^{-1/2} \int_0^1 \omega^{p/2+\nu-1} \exp(-\omega u/2) d\omega.$$

Tenemos que  $h(\omega) = \nu \omega^{\nu-1}$ , para  $\omega \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . Es decir,  $W \sim \text{Beta}(\nu, 1)$ .

### Ejemplo:

Se dice que un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  tiene distribución **Exponencial-Potencia**<sup>3</sup>, si su función de densidad es dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{p \Gamma(\frac{p}{2}) \pi^{-p/2}}{\Gamma(1 + \frac{p}{2\lambda}) 2^{1+\frac{p}{2\lambda}}} |\Sigma|^{-1/2} \exp(-u^\lambda/2), \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

en cuyo caso anotamos  $\mathbf{X} \sim \text{PE}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda)$ . Debemos destacar que la distribución de la **variable mezcladora**  $W$  tiene una **representación en series** y es de poco interés práctico.

---

<sup>3</sup>Esta familia pertenece a la clase SMN cuando  $\lambda \in (0, 1]$ .

### Observación:

La representación estocástica en (2), puede ser escrita de forma equivalente, como:

$$\mathbf{X}|W \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\omega), \quad W \sim H(\boldsymbol{\delta}). \quad (3)$$

Esta representación permite, por ejemplo

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= E(E(\mathbf{X}|W)) = \boldsymbol{\mu} \\ \text{Cov}(\mathbf{X}) &= E(\text{Cov}(\mathbf{X}|W)) + \text{Cov}(E(\mathbf{X}|W)) = E(W^{-1})\boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Además, la formulación condicional en (3) es muy útil para:

- ▶ Generación de dígitos pseudo-aleatorios.
- ▶ Estimación ML usando el algoritmo EM.

## Distribuciones de mezcla de escala normal

### Ejemplo:

Para  $\mathbf{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ , con  $\nu > 0$ , podemos escribir

$$\mathbf{X}|W \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\omega), \quad W \sim \text{Gama}(\nu/2, \nu/2),$$

es decir,

$$h(\omega; \nu) = \frac{(\nu/2)^{\nu/2} \omega^{\nu/2-1}}{\Gamma(\nu/2)} \exp(-\nu\omega/2).$$

### Ejemplo:

Considere  $\mathbf{X} \sim \text{CN}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \epsilon, \gamma)$  donde  $0 \leq \epsilon \leq 1$  denota el **porcentaje de contaminación** y  $0 < \gamma < 1$  corresponde a un **factor de inflación de escala**. En este caso,

$$h(\omega; \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \epsilon, & \omega = \gamma \\ 1 - \epsilon & \omega = 1 \end{cases},$$

con  $\boldsymbol{\delta} = (\epsilon, \gamma)^\top$ .