MAT-206/360: Inferencia Estadística **Nombre:** ____________________

Certamen 1. Octubre 12, 2017

Tiempo: 90 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. Considere Y variable aleatoria cuya densidad es dada por:

$$f(y;\theta,\phi) = \exp\{\phi[y\theta - b(\theta)] + c(y,\phi)\},$$

con $\phi > 0$ fijo.

a) Muestre que Y pertenece a la familia exponencial.

b) Obtenga la función generadora de momentos de Y y determine $\mathrm{E}(Y)$[1].

Sugerencia: La función generadora de momentos de Y es dada por $M_Y(t) = \mathrm{E}\{\exp(ty)\}$ para t en una vecindad del cero.

2. Una variable aleatoria discreta X definida en $\{0, 1, \dots\}$ tiene una distribución de *serie de potencias* si su función de probabilidad es de la forma:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots.$$

a) Muestre que X pertenece a la familia exponencial.

b) Obtenga fórmulas para $\mathrm{E}(X)$ y $\operatorname{var}(X)$.

Sugerencia: Fórmulas en **b)** involucran derivadas de C.

3. Sea $\mathcal{P}$ la clase de *distribuciones multinomial* con función de probabilidad

$$p(x_1, \dots, x_m; \boldsymbol{\theta}) = \binom{n}{x_1, \dots, x_m} \pi_1^{x_1} \cdots \pi_m^{x_m},$$

con n conocido, mientras que $\boldsymbol{\theta} = (\pi_1, \dots, \pi_m)^\top$ es el parámetro de interés (desconocido), donde $\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$ y $\pi_j \in (0,1)$. Muestre que $\mathcal{P}$ es una familia exponencial k-paramétrica. Determine k.

4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n desde la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)} \exp(-x/\theta), \qquad x > 0,\ \theta > 0.$$

Defina el modelo estadístico y obtenga la función score así como la información de Fisher para $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$.

Sugerencia: Tenemos que

$$\int_0^\infty z^{a-1} e^{-z/b}\, \mathrm{d}z = b^a\, \Gamma(a),$$

y $\Gamma(k+1) = k!$ para k un entero positivo.

---

[1] Note que $\mathrm{E}(Y^r) = M_Y^{(r)}(t)\big|_{t=0}$.