**MAT-206: Inferencia Estadística** | **Nombre:** ______________________
**Certamen 2. Noviembre 17, 2021** | **Profesor:** Felipe Osorio
**Tiempo: 70 minutos** | **Ayudantes:** Nicolás Alfaro, Fabián Ramírez

---

**1.** Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ vectores aleatorios $\mathsf{IID}$ con

$$X_i \sim \mathsf{N}(0,1), \qquad Y_i|X_i = x \sim \mathsf{N}(x\,\theta, 1), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Obtenga el MLE de $\theta$, la información de Fisher basado en una única observación y la distribución asintótica del MLE.

**2.** Sea $X_{ij}$, para $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$, variables aleatorias independientes desde $\mathsf{N}(\mu_i, \sigma^2)$. Determine el MLE de $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \dots, \mu_n, \sigma^2)^\top$. Muestre que el MLE de $\sigma^2$ no es estimador consistente.

**3.** Considere $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ vectores aleatorios $\mathsf{IID}$ desde $\mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$, con

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho \in (-1, 1).$$

Escriba la ecuación de verosimilitud y obtenga la distribución asintótica del MLE para $\rho$.

**4.** Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ vectores aleatorios $\mathsf{IID}$, tal que

$$\mathsf{P}(X_i > x, Y_i > y) = (1 - x)(1 - y)(1 - \max\{x, y\})^\theta,$$

para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ con $\theta \geq 0$.

**a)** Obtenga la función de verosimilitud y ecuación de verosimilitud.

**b)** Determine la distribución asintótica del MLE de $\theta$.