

MAT-206: Sesión 3, Familia exponencial

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Definición 1 (Familia exponencial):

La clase de modelos $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ se dice una **familia exponencial** 1-paramétrica si existen funciones $\eta(\theta)$, $b(\theta)$ y funciones real valuadas T y h tal que su densidad adopta la forma

$$f(x) = \exp[\eta(\theta)T(x) - b(\theta)]h(x), \quad (1)$$

donde $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^q$. Cuando una variable aleatoria tiene la densidad en Ecuación (1), anotamos $X \sim \text{FE}(\theta)$.



Observación:

El parámetro $\eta := \eta(\theta)$ es llamado **parámetro natural**, y

$$b(\eta) = \log \int \exp(\eta T(x)) h(x) dx,$$

corresponde a un factor de normalización. Además, el modelo estadístico puede ser escrito como:

$$\mathcal{P} = \{P_\eta : \eta \in \Gamma\}, \quad \Gamma := \eta(\Theta), \quad (2)$$

donde el conjunto

$$\Gamma = \{\eta : b(\eta) < \infty\},$$

se denomina **espacio paramétrico natural**. Cuando escribimos la familia de densidades $\{P_\eta : \eta \in \Gamma\}$ como en (2), decimos que la familia está escrita en **forma canónica**.



Ejemplo:

Sea $P_\theta \stackrel{d}{=} \text{Poisson}(\theta)$ con parámetro de media desconocido. Entonces $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$, y

$$p(x; \theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \frac{1}{x!} \exp(x \log \theta - \theta), \quad \theta > 0.$$

Es decir, P_θ corresponde a una FE (1-paramétrica) con $q = 1$, $\eta(\theta) = \log \theta$, $T(x) = x$, $b(\theta) = \theta$ y $h(x) = 1/x!$.



Ejemplo:

Sea $P_\theta \stackrel{d}{=} \text{Bin}(n, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$ y $x \in \{0, 1, \dots, n\}$. De este modo,

$$\begin{aligned} p(x; \theta) &= \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \\ &= \binom{n}{x} \exp[x \log \theta + (n - x) \log(1 - \theta)] \\ &= \binom{n}{x} \exp \left[x \log \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + n \log(1 - \theta) \right], \end{aligned}$$

y $\text{Bin}(n, \theta)$ está en FE (1-paramétrica) con $q = 1$, $\eta(\theta) = \log(\theta/(1 - \theta))$, $T(x) = x$, $b(\theta) = -n \log(1 - \theta)$ y $h(x) = \binom{n}{x}$.



Observación:

Note que las funciones η , b y T **no son únicas**. En efecto, una manera alternativa de escribir la densidad de la familia exponencial es, por ejemplo,

$$f(x) = a(\theta) \exp[\eta(\theta)T(x)]h(x),$$

donde $h(x) \geq 0$ y $a(\theta) > 0$, representa un factor de normalización.

Contraejemplo:

Sea \mathcal{P} la clase de distribuciones exponencial de dos parámetros, digamos $\text{Exp}(1, \theta)$, esto es con densidad

$$f(x) = \exp[-(x - \theta)]I_{[\theta, \infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Esta familia **no pertenece** a la clase **FE**.¹

¹El factor $I_{[\theta, \infty)}(x)$ no puede ser escrito en la forma exponencial.



Suponga que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias IID con distribución común P_θ en la FE 1-paramétrica y $\theta \in \Theta$. De este modo,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \exp[\eta(\theta)T(x_i) - b(\theta)]h(x_i) \\ &= \exp\left[\eta(\theta) \sum_{i=1}^n T(x_i) - nb(\theta)\right] \prod_{i=1}^n h(x_i) \\ &= \exp[\eta(\theta)T^{(n)}(\mathbf{x}) - b^{(n)}(\theta)]\tilde{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con

$$T^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n T(x_i), \quad b^{(n)}(\theta) = nb(\theta), \quad \tilde{h}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n h(x_i). \quad (3)$$

Es decir, la distribución conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ también pertenece a la FE 1-paramétrica.



Resultado 1:

Si X está en la FE 1-paramétrica. La **función generadora de momentos** de $T(X)$ es dada por

$$M_T(s) = \exp[b(s + \eta) - b(\eta)],$$

para s en una vecindad de cero.

Demostración:

Para obtener la MGF de $T(X)$, debemos calcular

$$\begin{aligned} M_T(s) &= E\{\exp(sT(x))\} = \int_{\mathcal{X}} \exp(sT(x)) \exp(\eta T(x) - b(\eta)) h(x) \, dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} \exp[(s + \eta)T(x) - b(\eta)] h(x) \, dx \\ &= \exp[b(s + \eta) - b(\eta)] \int_{\mathcal{X}} \exp[(s + \eta)T(x) - b(s + \eta)] h(x) \, dx \\ &= \exp[b(s + \eta) - b(\eta)]. \end{aligned}$$



Resultado 1:

Si X está en la FE 1-paramétrica. La **función generadora de momentos** de $T(X)$ es dada por

$$M_T(s) = \exp[b(s + \eta) - b(\eta)],$$

para s en una vecindad de cero.

Demostración:

Para obtener la MGF de $T(X)$, debemos calcular

$$\begin{aligned} M_T(s) &= E\{\exp(sT(x))\} = \int_{\mathcal{X}} \exp(sT(x)) \exp(\eta T(x) - b(\eta)) h(x) \, dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} \exp[(s + \eta)T(x) - b(\eta)] h(x) \, dx \\ &= \exp[b(s + \eta) - b(\eta)] \int_{\mathcal{X}} \exp[(s + \eta)T(x) - b(s + \eta)] h(x) \, dx \\ &= \exp[b(s + \eta) - b(\eta)]. \end{aligned}$$



La **función generadora de cumulantes** está definida como

$$K_T(s) = \log M_T(s),$$

y permite obtener los cumulantes de T ,

$$\kappa_r = \left. \frac{d^r}{ds^r} K_T(s) \right|_{s=0}.$$

En particular las primeras dos derivadas de $K_T(s)$ asumen la forma,

$$K'_T = M'_T/M_T, \quad K''_T = [M_T M''_T - (M'_T)^2]/M_T^2,$$

y evaluando en $s = 0$, lleva a los primeros cumulantes:

$$\kappa_1 = E(T), \quad \kappa_2 = E(T^2) - (E(T))^2 = \text{var}(T).$$

Para la familia exponencial, sigue que la función generadora de cumulantes para T es dada por:

$$K_T(s) = b(s + \eta) - b(\eta).$$



Resultado 2:

Sea X una variable aleatoria perteneciente a la FE 1-paramétrica. De este modo,

$$E(T) = b'(\eta), \quad \text{var}(T) = b''(\eta).$$

Demostración:

Basta notar que

$$\begin{aligned} E(T) &= \left. \frac{d}{ds} K_T(s) \right|_{s=0} = b'(s + \eta) \Big|_{s=0} = b'(\eta), \\ \text{var}(T) &= \left. \frac{d^2}{ds^2} K_T(s) \right|_{s=0} = b''(s + \eta) \Big|_{s=0} = b''(\eta). \end{aligned}$$



Resultado 2:

Sea X una variable aleatoria perteneciente a la FE 1-paramétrica. De este modo,

$$E(T) = b'(\eta), \quad \text{var}(T) = b''(\eta).$$

Demostración:

Basta notar que

$$\begin{aligned} E(T) &= \left. \frac{d}{ds} K_T(s) \right|_{s=0} = b'(s + \eta) \Big|_{s=0} = b'(\eta), \\ \text{var}(T) &= \left. \frac{d^2}{ds^2} K_T(s) \right|_{s=0} = b''(s + \eta) \Big|_{s=0} = b''(\eta). \end{aligned}$$



Para una muestra IID, X_1, \dots, X_n , y usando el [Resultado 2](#) sigue inmediatamente que:

$$\mathbb{E}(T^{(n)}(\mathbf{X})) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n T(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T(X_i)) = nb'(\theta)$$

$$\text{var}(T^{(n)}(\mathbf{X})) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n T(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(T(X_i)) = nb''(\theta).$$



Familia exponencial

Sea $\mu = E(Y)$, es decir, tenemos una transformación² 1-1 entre θ y el parámetro de media

$$\mu = \mu(\theta) = b'(\theta),$$

pues $\eta = \eta(\theta)$. Además, conforme θ varía en Θ , tenemos que $\mu(\theta)$ es conocida como **función (o superficie) de esperanza**.

Cuando $Y \sim FE(\theta)$ con función generadora de cumulantes $b(\cdot)$, tenemos $\mu(\theta) = b'(\theta)$. Podemos parametrizar la densidad $f(y)$ en términos de μ . De este modo, haciendo $\theta = \theta(\mu)$, sigue que

$$\text{var}(Y) = b''(\theta) = \left. \frac{d\mu}{d\theta} \right|_{\theta=\theta(\mu)} = V(\mu),$$

donde $V(\mu)$ es llamada **función de varianza** de Y .

²suave y estrictamente convexa



Definición 2:

La familia de distribuciones $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ con $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, se dice una **familia exponencial** k -paramétrica si existen funciones $\eta_1(\theta), \dots, \eta_k(\theta)$ y $b(\theta)$ y funciones real-valuadas T_1, \dots, T_k, h tal que la densidad puede ser escrita como

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \exp[\boldsymbol{\eta}^\top(\theta)\mathbf{T}(\mathbf{x}) - b(\theta)]h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p,$$

donde $\boldsymbol{\eta}(\theta) = (\eta_1(\theta), \dots, \eta_k(\theta))^\top$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \dots, T_k(\mathbf{x}))^\top$.



Ejemplo:

Suponga $P_\theta \stackrel{d}{=} N_1(\mu, \sigma^2)$,

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}.$$

La densidad de P_θ puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f(x; \theta) &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \log 2\pi\sigma^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\eta_1(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad \eta_2(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x^2,$$

y $b(\theta) = \frac{1}{2}(\mu^2/\sigma^2 + \log 2\pi\sigma^2)$, $h(x) = 1$. Luego, $N_1(\mu, \sigma)$ corresponde a una **FE 2-paramétrica**.



Ejemplo:

Considere la función de probabilidad

$$p(x; \boldsymbol{\theta}) = \theta_1^{I_1(x)} \theta_2^{I_2(x)} \theta_3^{I_3(x)},$$

con

$$I_j(x) = \begin{cases} 1, & x = j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $j = 1, 2, 3$. Así podemos escribir

$$p(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp[I_1(x) \log \theta_1 + I_2(x) \log \theta_2 + I_3(x) \log \theta_3],$$

es decir X pertenece a la FE. *Sin embargo*,

$$I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) = 1.$$

Por tanto, la familia **no** es estrictamente 3-dimensional.



(continuación)

Considere

$$\begin{aligned} p(x; \boldsymbol{\theta}) &= \exp[I_1(x) \log \theta_1 + I_2(x) \log \theta_2 + (1 - I_1(x) - I_2(x)) \log \theta_3] \\ &= \theta_3 \exp[I_1(x)(\log \theta_1 - \log \theta_3) + I_2(x)(\log \theta_2 - \log \theta_3)]. \end{aligned}$$

Sea $\theta_3 = 1 - \theta_1 - \theta_2$, sigue que

$$p(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left[I_1(x) \log \left(\frac{\theta_1}{1 - \theta_1 - \theta_2} \right) + I_2(x) \log \left(\frac{\theta_2}{1 - \theta_1 - \theta_2} \right) + \log(1 - \theta_1 - \theta_2) \right].$$

Finalmente, tenemos que X pertenece a la FE (2-paramétrica) con

$$T_1(x) = I_1(x), \quad T_2(x) = I_2(x), \quad \eta_r = \log \left(\frac{\theta_r}{1 - \theta_1 - \theta_2} \right), \quad r = 1, 2,$$

$$\text{y } b(\boldsymbol{\theta}) = -\log(1 - \theta_1 - \theta_2), \quad h(x) = 1.$$



Observación:

Evidentemente, resulta fácil extender (Tarea) los **Resultados 1 y 2**. En efecto,

$$M_T(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[\exp(\mathbf{s}^\top \mathbf{T})] = \exp[b(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{s}) - b(\boldsymbol{\eta})],$$

$$K_T(\mathbf{s}) = b(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{s}) - b(\boldsymbol{\eta}),$$

y

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}(\mathbf{X})) = \dot{b}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial b(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad \text{Cov}(\mathbf{T}(\mathbf{X})) = \ddot{b}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}^\top}.$$



Definición 3

Se dice que $P_{\theta, \phi}$ sigue una familia exponencial con parámetro de escala $\phi > 0$, si la función de densidad de un vector aleatorio n -dimensional $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ es dada por:

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) = \exp[\phi \{\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\theta} - b(\boldsymbol{\theta})\} + c(\mathbf{y}, \phi)],$$

donde $b(\cdot)$ y $c(\cdot, \cdot)$ son funciones apropiadas, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^\top$ y denota el parámetro natural ($\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$). En cuyo caso escribimos $\mathbf{Y} \sim \text{FE}(\boldsymbol{\theta}, \phi)$.³

Observación:

Cuando ϕ es desconocido, se suele indicar que el modelo está en la **familia de dispersión exponencial** (Jørgensen, 1997).⁴

³El parámetro de dispersión $\phi > 0$ usualmente es considerado un parámetro molesto.

⁴Jørgensen, B. (1997). *The Theory of Dispersion Models*. Chapman & Hall, London.



Ejemplo:

Suponga $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Tenemos que su función de densidad puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= \exp\left\{\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \log |2\pi \boldsymbol{\Sigma}|\right\}, \end{aligned}$$

de este modo, el parámetro natural es $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ y $b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta}$, mientras que $c(\mathbf{y}, \boldsymbol{\Phi}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y} + \log |2\pi \boldsymbol{\Phi}^{-1}|)$.⁵

Ejemplo:

Usando que

$$\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} = \text{tr } \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top = (\text{vec } \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)^\top \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

podemos escribir \mathbf{Y} como un miembro de la familia exponencial, considerando

$$T_1(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}, \quad T_2(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top, \quad \eta_1(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \quad \eta_2(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$

⁵ $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ es parámetro de dispersión.

Familia exponencial

Ejemplo:

Suponga $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Tenemos que su función de densidad puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= \exp\left\{\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \log |2\pi \boldsymbol{\Sigma}|\right\}, \end{aligned}$$

de este modo, el parámetro natural es $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ y $b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\theta}$, mientras que $c(\mathbf{y}, \boldsymbol{\Phi}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y} + \log |2\pi \boldsymbol{\Phi}^{-1}|)$.⁵

Ejemplo:

Usando que

$$\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} = \text{tr } \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top = (\text{vec } \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)^\top \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

podemos escribir \mathbf{Y} como un miembro de la familia exponencial, considerando

$$T_1(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}, \quad T_2(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top, \quad \eta_1(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \quad \eta_2(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$

⁵ $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ es parámetro de dispersión.

