

1. La densidad conjunta para (X_i, Y_i) adopta la forma:

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i; \theta) &= f(x_i) \cdot f(y_i | x_i; \theta) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \exp(-x_i^2/2) \cdot (2\pi)^{-1/2} \exp(-(y_i - x_i\theta)^2/2) \\ &= (2\pi)^{-1} \exp(-x_i^2/2 - (y_i - x_i\theta)^2/2). \end{aligned}$$

De este modo, la densidad conjunta es dada por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \exp(-x_i^2/2 - (y_i - x_i\theta)^2/2) \\ &= (2\pi)^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i\theta)^2\right\}, \end{aligned}$$

lo que lleva a la función de log-verosimilitud

$$\ell_n(\theta) = -n \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i\theta)^2,$$

con ecuación de verosimilitud

$$\ell'_n(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i(y_i - x_i\theta) = 0.$$

Que permite obtener el MLE como: $\hat{\theta}_{\text{ML}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$. La información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\mathbb{E}\{-\ell''_1(\theta)\} = \mathbb{E}(X_i^2) = 1.$$

De este modo,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{ML}} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1).$$

2. Tenemos

$$\ell_n(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{nr}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i)^2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_i} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i) \\ \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{nr}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (x_{ij} - \mu_i)^2. \end{aligned}$$

Luego, el MLE de μ_i es $\hat{\mu}_i = \bar{x}_i$, con $\bar{x}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, mientras que el MLE de σ^2 es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (x_{ij} - \bar{x}_i)^2.$$

Notando que

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^r (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right\} = (r-1)\sigma^2,$$

obtenemos

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \frac{r-1}{r} \sigma^2,$$

conforme $n \rightarrow \infty$, y portanto $\hat{\sigma}^2$ no es consistente.

3. Tenemos

$$f(x_i, y_i; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x_i^2 + y_i^2 - 2\rho x_i y_i) \right\}.$$

De este modo,

$$\ell_n(\rho) = (2\pi\sqrt{1-\rho^2})^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (S - 2\rho T) \right\},$$

con $S = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$, y $T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La función score adopta la forma:

$$\frac{d\ell_n(\rho)}{d\rho} = \frac{n\rho}{1-\rho^2} + \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2} T - \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2} S,$$

lo que lleva a la ecuación de estimación $q(\rho) = 0$, con

$$q(\rho) = \rho(1-\rho^2) - \frac{1}{n} S\rho + \frac{1}{n} T(1+\rho^2),$$

que admite al menos una solución en $(-1, 1)$. Podemos escribir la función score como:

$$U_n(\rho) = \frac{d\ell_n(\rho)}{d\rho} = n(1-\rho^2)^2 q(\rho),$$

de ahí que

$$U'_n(\rho) = \frac{nq'(\rho)}{(1-\rho^2)^2} + \frac{4nq(\rho)}{(1-\rho^2)^3}.$$

Como $\mathbb{E}(q(\rho)) = 0$ y $\mathbb{E}(q'(\rho)) = -(1+\rho^2)$, obtenemos

$$\mathcal{F}_1(\rho) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\{-U'_n(\rho)\} = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

Lo anterior permite establecer que

$$\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \mathcal{F}_1^{-1}(\rho)).$$

4.a. Para $x \neq y$ tenemos la densidad

$$f(x, y; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)(1 - x)^\theta, & x > y \\ (\theta + 1)(1 - y)^\theta, & y > x \end{cases}.$$

Mientras que

$$\begin{aligned} P(X > z, Y > z, X \neq Y) &= 2P(X > z, Y > z, X > Y) \\ &= 2(\theta + 1) \int_z^1 \int_z^x (1 - x) \, dy \, dx \\ &= 2(\theta + 1) \int_z^1 (x - z)(1 - x)^\theta \, dx = \frac{2(1 - z)^{\theta+2}}{\theta + 2}. \end{aligned}$$

Notando que $P(X > z, Y > z) = (1 - z)^{\theta+2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > z, X = Y) &= P(X > z, Y > z, X = Y) \\ &= P(X > z, Y > z) - P(X > z, Y > z, X \neq Y) \\ &= \frac{\theta(1 - z)^{\theta+2}}{\theta + 2}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$f(x, y; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)(1 - x)^\theta, & x > y \\ (\theta + 1)(1 - y)^\theta, & y < x \\ \theta(1 - x)^{\theta+1}, & x = y \end{cases}.$$

Sea T el número de (X_i, Y_i) 's con $X_i = Y_i$ y $Z_i = \max\{X_i, Y_i\}$, entonces la función de verosimilitud adopta la forma

$$L_n(\theta) = (\theta + 1)^{n-T} \theta^T \prod_{i=1}^n (1 - Z_i)^\theta \prod_{X_i=Y_i} (1 - Z_i),$$

y la ecuación de verosimilitud es dada por

$$\frac{d \ell_n(\theta)}{d \theta} = \frac{n - T}{\theta + 1} + \frac{T}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(1 - Z_i) = 0,$$

cuya solución es

$$\hat{\theta} = \frac{\sqrt{(n - W)^2 + 4WT} - (n - W)}{2W},$$

donde $W = -\sum_{i=1}^n \log(1 - Z_i)$.

4.b. Notando que

$$\frac{d^2 \ell_n(\theta)}{d \theta^2} = -\frac{n - T}{(\theta + 1)^2} - \frac{T}{\theta^2},$$

y como $E(T) = n\theta/(\theta + 2)$, lleva a

$$\mathcal{F}_1(\theta) = \frac{1}{n} E \left\{ -\frac{d^2 \ell_n(\theta)}{d \theta^2} \right\} = \frac{\theta^2 + 4\theta + 1}{\theta(\theta + 2)(\theta + 1)^2}.$$

De este modo,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta(\theta + 2)(\theta + 1)^2}{\theta^2 + 4\theta + 1}\right).$$