MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 2. Noviembre 16, 2017
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. Tenemos que
$$f(\boldsymbol{x};\theta)=\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\,I_{[0,\theta]}(x_i)=\frac{1}{\theta^n}\,\prod_{i=1}^n I_{[0,\theta]}(x_i).$$
Ahora, notando que $0\leq x_i\leq\theta$ puede ser escrito como $x_i\leq\theta<\infty$. De este modo,
$$\prod_{i=1}^n I_{[x_i,\infty)}(\theta)=1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad I_{[x_i,\infty)}(\theta)=1,\,\forall i,$$
es decir, $x_i\leq\theta$ para todo i. Sea $x_{(n)}=\max\{x_1,\dots,x_n\}$. Por tanto,
$$x_i\leq\theta,\,\forall i,\quad\Longleftrightarrow\quad x_{(n)}\leq\theta,\quad\Longleftrightarrow\quad I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta)=1$$
De este modo, podemos escribir
$$f(\boldsymbol{x};\theta)=\frac{1}{\theta^n}\,I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta).$$
Luego, por el Teorema de factorización con:
$$h(x)=1,\qquad g(T(\boldsymbol{x}),\theta)=\frac{1}{\theta^n}\,I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta).$$
Obtenemos que $X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$ es estadística suficiente.

2. Primeramente, calculamos el momento k-ésimo,
$$\mu_k=\mathrm{E}(X^k)=\theta\int_\theta^\infty x^{k-2}\,\mathrm{d}x=\theta\Big\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k-1}}{k-1}-\frac{\theta^{k-1}}{k-1}\Big\},$$
así para $k<1$, obtenemos
$$\mu_k=\theta\,\frac{\theta^{k-1}}{1-k}=\frac{\theta^k}{1-k},\qquad k<1.$$
Por tanto, usando $k=\frac{1}{2}$, tenemos que $\mu_{1/2}=2\sqrt{\theta}$. Luego, por el método de los momentos debemos resolver la ecuación $\mu_{1/2}=m_{1/2}$. De ahí que
$$2\sqrt{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^{1/2}\qquad\Longrightarrow\qquad\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}=\frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^{1/2}\Big)^2.$$

3. Tenemos la función de verosimilitud
$$L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x})=a^{-1}(\boldsymbol{\theta})\exp\{\boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\}h(\boldsymbol{x}),$$
donde
$$a(\boldsymbol{\theta})=\int\exp\{\boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\}h(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

es una constante de normalización. En este caso las ecuaciones de verosimilitud están dadas por $\partial \log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$. Así, notando que

$$\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = -\log a(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) + \log h(\boldsymbol{x}),$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log a(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}).$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log a(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{a(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\} h(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{a(\boldsymbol{\theta})} \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\} h(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{a(\boldsymbol{\theta})} \int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\} h(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{E}_\theta\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})\}.\end{aligned}$$

Finalmente, por la ecuación $\partial \log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ sigue el resultado deseado.

4. Para $X \sim \mathsf{U}(0, \theta)$, tenemos que $\mathrm{E}(X) = \theta/2$. De este modo,

$$\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = 2\overline{X}.$$

Sabemos que la función de verosimilitud adopta la forma:*

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\theta^n} I_{[x_{(n)}, \infty)}(\theta).$$

Debido a que $1/\theta^n$ es función monótona decreciente, sigue que

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{x_{(n)}^n},$$

y por tanto $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} = X_{(n)}$. Por otro lado, note que las función de distribución y de densidad del máximo para $Z_1, \dots, Z_n$ variables IID cada una con CDF F y densidad f son dadas, respectivamente, por:

$$F_{\max}(t) = \mathrm{P}(Z_i \leq t, \forall\, i) = F^n(t), \qquad \text{y} \qquad f_{\max}(t) = n f(t) F^{n-1}(t).$$

De este modo, para $X_1, \dots, X_n$ variables IID desde $\mathsf{U}(0, \theta)$, obtenemos:

$$\mathrm{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n \, \mathrm{d}x = \frac{n\theta}{n+1}, \qquad \mathrm{E}(X_{(n)}^2) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} \, \mathrm{d}x = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

a. Note que

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i) = \frac{\theta}{2},$$

de ahí que $\mathrm{E}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \theta$. De este modo,

$$\mathsf{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \mathrm{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \mathrm{var}(2\overline{X}) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i) = \frac{4}{n} \mathrm{var}(X_1) = \frac{4}{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

*Ver detalles en la respuesta de la Pregunta 1.

b. Es sesgo del estimador máximo verosímil para θ es dado por:

$$\mathsf{bias}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}, \theta) = E(X_{(n)}) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = -\frac{\theta}{n+1},$$

mientras que la varianza asume la forma

$$\operatorname{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \mathrm{E}(X_{(n)}^2) - \mathrm{E}^2(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

De ahí que el MSE para el estimador ML puede ser escrito como:

$$\mathsf{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \operatorname{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) + \mathsf{bias}^2(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}, \theta) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

c. Es estimador ML de sesgo-corregido es:

$$\widetilde{\theta}_{\mathsf{ML}} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big) X_{(n)},$$

cuyo MSE es obtenido como:

$$\mathsf{MSE}(\widetilde{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \operatorname{var}(\widetilde{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \operatorname{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

d. Para comparar $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}$ con $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}$, considere:

$$\mathsf{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) - \mathsf{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \frac{\theta^2}{3n} - \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{\theta^2}{3n(n+1)(n+2)}(n^2 - 3n + 2) > 0.$$

De este modo, el estimador ML es mejor que el obtenido por el MM (para cualquier n).