

MAT-206/360: Inferencia Estadística
Certamen 2. Noviembre 16, 2017
Tiempo: 90 minutos

Nombre: _____
Profesor: Felipe Osorio
Ayudante: Francisco Alfaro

1. Sea X_1, \dots, X_n variables aleatorias IID desde $U(0, \theta)$. Muestre que $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ es estadística suficiente.
2. Sea X_1, \dots, X_n variables aleatorias IID con densidad

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^2} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

Determine el estimador de momentos de θ .

Sugerencia: Calcule el momento k -ésimo, μ_k y luego considere k racional.

3. Suponga la densidad conjunta

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{S}(\mathbf{x})\} / a(\boldsymbol{\theta}),$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es vector de parámetros $p \times 1$, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ es un vector $p \times 1$ de estadísticas de la muestra aleatoria $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Además

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \int h(\mathbf{x}) \exp\{\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{S}(\mathbf{x})\} d\mathbf{x}.$$

Escriba la función de log-verosimilitud para la densidad conjunta $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$. Asumiendo que el modelo es regular, muestre que el estimador máximo verosímil es solución de la ecuación:

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{S}(\mathbf{X})\} = \mathbf{s},$$

con $\mathbf{s} = \mathbf{S}(\mathbf{x})$.

4. Sea X_1, \dots, X_n variables IID con distribución $U(0, \theta)$.
 - a. Calcule el MSE del estimador de momentos para θ .
 - b. Obtenga el MSE del estimador máximo verosímil para θ .
 - c. Sea $\tilde{\theta}_{\text{ML}}$ el estimador ML de sesgo-correcto. Calcule su MSE.
 - d. Compare $\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MM}})$ y $\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{ML}})$. ¿Cuál estimador prefiere?