

MGE-201: Formas cuadráticas

Felipe Osorio

felipe.osorio@uv.cl

Chi-cuadrado no central

Resultado 1:

Sea $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ y sea $U = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}$. Entonces $U \sim \chi^2(p)$, con función de densidad

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} u^{p/2-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

Demostración:

Como U es una función de variables aleatorias normales, entonces su función característica asume la forma

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= E\{\exp(itU)\} = \int_{\mathbb{R}^p} \exp(itu)(2\pi)^{-p/2} \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} \exp(-\frac{1}{2}(1-2it)\mathbf{z}^\top \mathbf{z}) d\mathbf{z} = (1-2it)^{-p/2},\end{aligned}$$

que corresponde a la función característica de una variable aleatoria chi-cuadrado con p grados de libertad.

Chi-cuadrado no central

Definición 1 (Distribución chi-cuadrado no central):

Si $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, I)$, entonces $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$ tiene distribución chi-cuadrado no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$, en cuyo caso anotamos $U \sim \chi^2(p; \lambda)$.

Resultado 2:

Sea $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, I)$ donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq \mathbf{0}$ y sea $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$. Entonces la función característica de U es dada por

$$\varphi_U(t) = (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1 - 2it}\right),$$

con $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2$.

Chi-cuadrado no central

Demostración:

Como Y_1, \dots, Y_p son variables aleatorias independientes, tenemos

$$\varphi_U(t) = \prod_{j=1}^p \varphi_{Y_j^2}(t).$$

Ahora, la función característica asociada a la variable aleatoria Y_j^2 es dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_j^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itY_j^2)(2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_j - \mu_j)^2\right\} dy_j \\ &= \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2}\left(\frac{1}{1-2it}\right) - \frac{\mu_j^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(1-2it)}{2}\left(y_j - \frac{\mu_j}{1-2it}\right)^2\right\} dy_j\end{aligned}$$

de este modo,

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1-2it)^{-1/2} \exp\left\{\frac{\mu_j^2}{2}\left(\frac{2it}{1-2it}\right)\right\},$$

y por tanto la función característica de la variable $U = \sum_{j=1}^p Y_j^2$, asume la forma

$$\varphi_U(t) = (1-2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{2it\lambda}{1-2it}\right), \quad \lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}/2.$$

Chi-cuadrado no central

Observación:

La función característica de la variable $U = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}$, puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= (1 - 2it)^{-p/2} \exp\left(\frac{\lambda}{1 - 2it} - \lambda\right) \\ &= (1 - 2it)^{-p/2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\lambda/(1 - 2it)\}^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} (1 - 2it)^{-(p+2k)/2}.\end{aligned}$$

Es decir, la función característica de U es un [promedio ponderado con pesos Poisson](#) de funciones características de variables aleatorias chi-cuadrado con $p + 2k$ grados de libertad.

Chi-cuadrado no central

Usando la relación entre funciones características y sus correspondientes funciones de densidad, sigue que la chi-cuadrado no central tiene la siguiente representación:

$$U|Z \sim \chi^2(p+2z), \quad Z \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad (1)$$

con densidad

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{1}{2^{p/2+k} \Gamma(\frac{p}{2} + k)} u^{p/2+k-1} \exp(-u/2), \quad u > 0.$$

La representación en (1) es muy útil para obtener los momentos de una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado no central.

Chi-cuadrado no central

El valor esperado de $U \sim \chi^2(p; \lambda)$ es dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(U|Z)\} = \mathbb{E}(p + 2Z) \\ &= p + 2\mathbb{E}(Z) = p + 2\lambda,\end{aligned}$$

mientras que la varianza de U puede ser calculada como

$$\begin{aligned}\text{var}(U) &= \mathbb{E}\{\text{var}(U|Z)\} + \text{var}\{\mathbb{E}(U|Z)\} \\ &= \mathbb{E}\{2(p + 2Z)\} + \text{var}(p + 2Z) \\ &= 2p + 4\lambda + 4\lambda = 2p + 8\lambda.\end{aligned}$$

Chi-cuadrado no central

Resultado 3:

Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es matriz no singular. Entonces

- (a) $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(p)$.
- (b) $\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} \sim \chi^2(p; \lambda)$, donde $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$.

Demostración:

Considere $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ con \mathbf{B} no singular. Para probar (a), tome

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

luego $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ y de este modo

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \sim \chi^2(p; 0).$$

Chi-cuadrado no central

Para probar (b), sea $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}$, luego

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}),$$

y

$$\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y},$$

que por definición tiene una distribución chi-cuadrado no central, con parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\mu})^\top (\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

F y Beta no central

Definición 2 (Distribución F no central):

Sea $X_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$ y $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ variables aleatorias independientes. Entonces,

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

es decir F sigue una **distribución F no central** con ν_1 y ν_2 grados de libertad y parámetro de no centralidad λ .

Definición 3 (Distribución Beta no central):

Considere $U_1 \sim \chi^2(\nu_1; \lambda)$, $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ tal que U_1 y U_2 son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$G = \frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \text{Beta}(\nu_1, \nu_2, \lambda),$$

esto es, G sigue una **distribución Beta no central** con parámetros de forma y escala ν_1 y ν_2 , respectivamente y parámetro de no centralidad λ .

t de Student no central

Definición 4 (Distribución *t de Student no central*):

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $U/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$ son independientes, entonces

$$T = \frac{Y}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \lambda), \quad \lambda = \mu/\sigma,$$

es llamada una variable aleatoria con **distribución *t de Student no central*** con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad λ .

Observación:

Si $Z \sim N(0, 1)$, $U \sim \chi^2(\nu)$, δ es una constante, y Z es independiente de U , entonces

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu; \delta).$$

Además,

$$t^2(\nu; \lambda) \stackrel{d}{=} F(1, \nu, \lambda^2/2).$$

Distribución de formas cuadráticas

Resultado 4:

Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es matriz simétrica. Entonces $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$ sólo si \mathbf{A} es idempotente, en cuyo caso los grados de libertad y el parámetro de no centralidad están dados por

$$k = \text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad \text{y} \quad \theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu},$$

respectivamente.

Demostración:

Suponga que \mathbf{A} es idempotente de rango k . Entonces existe una matriz ortogonal \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$, entonces $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, y

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^k Y_i^2,$$

que sigue una distribución chi-cuadrado con k grados de libertad.

Distribución de formas cuadráticas

Para el parámetro de no centralidad θ , note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\chi^2(k; \theta)\} &= k + 2\theta = \mathbb{E}(\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbb{E}(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}((\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\top) \mathbf{A}) = k + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu},\end{aligned}$$

y de ahí que $\theta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$.

Ahora, suponga que $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$. Si \mathbf{A} tiene rango r , entonces para \mathbf{P} matriz ortogonal $p \times p$,

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

con $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios no nulos de \mathbf{A} . Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$, entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^r \lambda_j Y_j^2 = U.$$

Distribución de formas cuadráticas

Tenemos que $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{I})$ con $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}$, de modo que $Y_j^2 \sim \chi^2(1, \delta_j^2/2)$ con función característica

$$\varphi_{Y_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\delta_j^2}{1 - 2it}\right),$$

por la independencia de Y_1, \dots, Y_r sigue que

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2} \exp\left(\frac{it\lambda_j \delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \\ &= \exp\left(it \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j \delta_j^2}{1 - 2it\lambda_j}\right) \prod_{j=1}^r (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Distribución de formas cuadráticas

Como $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \theta)$ tiene función característica

$$\varphi_{\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}}(t) = (1 - 2it)^{-k/2} \exp\left(\frac{2it\theta}{1 - 2it}\right),$$

entonces desde las dos expresiones anteriores debemos tener $r = k$, $\lambda_j = 1$, $\forall j$ y $\theta = \sum_j \delta_j^2 / 2$. Consecuentemente $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ tiene la forma

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

que es idempotente. Luego

$$\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P} = (\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P})(\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}) = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}^2 \mathbf{P} \implies \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

Distribución de formas cuadráticas

Resultado 5:

Si $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es no singular y \mathbf{X} , $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son particionados como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{X}_1 , $\boldsymbol{\mu}_1$ son $k \times 1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ es $k \times k$. Entonces

$$U = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) - (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \sim \chi^2(p - k).$$

Distribución de formas cuadráticas

Demostración:

Considere $\Sigma = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$, donde \mathbf{B} es no singular y particione \mathbf{B} como

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{k \times p}.$$

Luego,

$$\Sigma = \mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^\top \\ \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1^\top & \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^\top \end{pmatrix},$$

de donde sigue que $\Sigma_{11} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top$. Ahora, sea $\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. De este modo,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}.$$

Distribución de formas cuadráticas

Entonces

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1) \mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1) \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top)^{-1} \mathbf{B}_1$.

Note que \mathbf{H}_1 es simétrica e idempotente y por tanto también lo es $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{H}_1$. De donde sigue que $U \sim \chi^2(\nu)$, con $\nu = \text{rg}(\mathbf{C}) = p - k$.

Distribución de formas cuadráticas

Suponga que $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Una condición para que $\mathbf{X}^\top A \mathbf{X}$ tenga una distribución chi-cuadrado es:¹

$$\Sigma A \Sigma A = \Sigma A,$$

en cuyo caso los grados de libertad son $k = \text{rg}(A\Sigma)$. Si Σ es no singular, la condición resulta $A\Sigma A = A$.

Resultado 6:

Si $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ donde Σ tiene rango k ($\leq p$) y si A es una inversa generalizada de Σ ($\Sigma A \Sigma = \Sigma$), entonces $\mathbf{X}^\top A \mathbf{X} \sim \chi^2(k)$.

¹ Esto representa una generalización del [Resultado 1](#).

Distribución de formas cuadráticas

Demostración:

Considere $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ donde \mathbf{B} es una matriz no singular $p \times p$ tal que

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Particionando $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top)^\top$ donde \mathbf{Y}_1 es un vector $k \times 1$ sigue que $\mathbf{Y}_1 \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ y $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}$ con probabilidad 1.

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top \\ &= \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Distribución de formas cuadráticas

Luego, con probabilidad uno,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{0}) \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{Y}_1 \sim \chi^2(k).\end{aligned}$$

Distribución de formas cuadráticas

Resultado 7:

Si $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es no singular, y \mathbf{A} es una matriz simétrica $p \times p$. Entonces $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} \sim \chi^2(k; \lambda)$, donde $k = \text{rg}(\mathbf{A})$, $\lambda = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} / 2$ si y sólo si $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ es matriz idempotente.

Demostración:

Considere $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$, donde \mathbf{B} es una matriz no singular $p \times p$ tal que $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top = \mathbf{I}_p$. Entonces

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y},$$

donde $\mathbf{Y} \sim N_p(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$. Desde el [Resultado 1](#) sigue que $\mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$ tiene distribución chi-cuadrado sólo si $\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$ es idempotente. Esto es equivalente a mostrar que $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ es idempotente.

Distribución de formas cuadráticas

Si $\mathbf{A}\Sigma$ es idempotente, tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}, \quad (\Sigma = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-\top})$$

así, pre- y post-multiplicando por $\mathbf{B}^{-\top}$ y \mathbf{B}^{-1} , obtenemos

$$\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}),$$

y por tanto es idempotente.

Por otro lado, si $\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ es idempotente, entonces

$$\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{B}^{-\top}\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1},$$

es decir $\mathbf{A} = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}$ y de ahí que $\mathbf{A}\Sigma$ es idempotente.

Distribución de formas cuadráticas

Ejemplo:

Sea X_1, \dots, X_n variables aleatorias IID $N(\theta, \sigma^2)$, en este caso podemos definir $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ tal que $\mathbf{X} \sim N_n(\theta\mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I})$. Considere la forma cuadrática

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X},$$

con $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$ y $\mathbf{A} = \mathbf{C}/\sigma^2$. De esta manera

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top,$$

que es idempotente. En efecto,

$$\mathbf{C}^2 = \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top + \frac{1}{n^2} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top = \mathbf{C}.$$

Distribución de formas cuadráticas

Además

$$\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{C}) = \operatorname{tr} \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) = n - 1,$$

y

$$\lambda = \frac{\theta^2}{2} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \mathbf{1}^\top \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \right) \mathbf{1} = 0.$$

Finalmente,

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Distribución de formas cuadráticas

Resultado 8:

Sea $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $Q_1 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$ y $Q_2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{B} \mathbf{X}$. Entonces Q_1 y Q_2 son independientes si y sólo si $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Demostración:

Tenemos $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{T} \mathbf{T}^\top$, y defina $\mathbf{G}_1 = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T}$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}$. Note que si $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 = (\mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}) = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B} \mathbf{T} = \mathbf{0}.$$

Debido a la simetría de \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 , sigue que

$$\mathbf{0} = (\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)^\top = \mathbf{G}_2^\top \mathbf{G}_1^\top = \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1.$$

Distribución de formas cuadráticas

Como $G_1 G_2 = G_2 G_1$ existe una matriz ortogonal P que simultáneamente diagonaliza G_1 y G_2 , esto es:

$$P^\top G_1 P = P^\top T^\top A T P = D_1,$$

$$P^\top G_2 P = P^\top T^\top B T P = D_2.$$

De este modo,

$$\mathbf{0} = G_1 G_2 = P D_1 P^\top P D_2 P^\top = P D_1 D_2 P^\top$$

lo que es verdad si $D_1 D_2 = \mathbf{0}$. Como D_1 y D_2 son diagonales, sus elementos diagonales deben ocurrir en posiciones diferentes. Es decir,

$$D_1 = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix}.$$

Distribución de formas cuadráticas

Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}$, entonces

$$Q_1 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_1 \mathbf{Y},$$

$$Q_2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{Y}.$$

Además,

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \text{Cov}(\mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}) = \mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{P} = \mathbf{I}.$$

En efecto, $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{P}^\top \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$.

Distribución de formas cuadráticas

Ahora, particionando adecuadamente \mathbf{Y} , sigue que

$$\mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_1 \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_1^\top \mathbf{M}_1 \mathbf{Y}_1,$$

$$\mathbf{Y}^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_2^\top \mathbf{M}_2 \mathbf{Y}_2,$$

y la independencia entre Q_1 y Q_2 sigue desde la independencia entre \mathbf{Y}_1 y \mathbf{Y}_2 .

Distribución de formas cuadráticas

Resultado 9:

Sea $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $Q = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X}$ y $\mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{X}$. Entonces Q y \mathbf{U} son independientes si y sólo si $\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Ejemplo:

Considere X_1, \dots, X_n muestra aleatoria desde $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, así

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}_n(\theta \mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Tenemos

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{X}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X}.$$

Como $\mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}$ sigue la independencia entre \bar{X} y S^2 .