MAT-206: Inferencia Estadística **Nombre:** ______________________________
Certamen 2. Noviembre 9, 2022 **Profesor:** Felipe Osorio
Tiempo: 70 minutos

1.a. (25 pts) Considere una única observación de una familia de posición, con densidad $g(x;\theta) = f(x-\theta)$. Obtenga la información de Fisher para θ.

1.b. (25 pts) Determine la información de Fisher para la familia Cauchy con densidad $g(x;\theta)$ dada por

$$g(x;\theta) = \frac{1}{\pi[(x-\theta)^2 + 1]}, \qquad x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}.$$

2. (25 pts) Suponga que $X_1, \dots, X_n$ son variables IID con función de probabilidad

$$p(x;\theta) = \begin{cases} \theta, & x = -1, \\ (1-\theta)^2\theta^x, & x = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde $0 < \theta < 1$ y sea

$$T_1(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n I(X_i = -1), \qquad T_2(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i\, I(X_i \geq 0).$$

Muestre que $(T_1(\boldsymbol{X}), T_2(\boldsymbol{X}))$ es suficiente y minimal para θ.

3. (25 pts) Considere una secuencia de variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ tal que la primera variable satisface $X_1 \sim \mathsf{N}(0,1)$, mientras que para $j = 1, \dots, n-1$ la distribución condicional $X_{j+1}|X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j$ es $\mathsf{N}(\rho x_j, 1)$. Determine el estimador máximo verosímil de ρ.