MAT-206: Inferencia Estadística		**Nombre:**	________________________
Certamen 1. Octubre 6, 2021		**Profesor:**	Felipe Osorio
Tiempo: 70 minutos		**Ayudantes:**	Nicolás Alfaro, Fabián Ramírez

---

1. Considere $X \sim \mathsf{Gama}(\lambda, \beta)$ con densidad

$$f(x; \lambda, \beta) = \frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1} \exp(-\beta x) I_{(0,\infty)}(x), \qquad \lambda, \beta > 0.$$

Obtenga una estadística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \beta)^\top$ y calcule su vector de medias y matriz de covarianza.

2. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria IID de variables aleatorias con distribución $P \in \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es la familia de distribuciones en $\mathbb{R}$ con densidad $f(\cdot)$. Verifique que la estadística de orden $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ es suficiente para $P \in \mathcal{P}$.

3. Sea g función positiva, integrable en el intervalo $(0, +\infty)$. Defina,

$$c(\theta) = \Big\{ \int_\theta^\infty g(x)\, \mathrm{d}\, x \Big\}^{-1},$$

y considere

$$p(x; \theta) = \begin{cases} c(\theta) g(x), & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables IID desde la densidad $p(x; \theta)$. Muestre que $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ es suficiente.

4. Considere $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ una muestra aleatoria desde $\mathsf{EC}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; g)$ con $\boldsymbol{\Sigma}$ matriz conocida. Obtenga la matriz de información de Fisher asociada a $\boldsymbol{\mu}$.