MAT-206: Inferencia Estadística **Pauta de corrección**
Certamen 1. Octubre 12, 2020 Prof. Felipe Osorio

---

1. Como
$$\mathsf{P}(X_i = x_i) = \frac{\exp((\alpha + \beta t_i)x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta t_i)},$$
así la densidad conjunta adopta la forma,
$$\prod_{i=1}^n \frac{\exp(\alpha x_i + \beta t_i x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta t_i)} = \frac{\exp(\alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n t_i x_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + \exp(\alpha + \beta t_i))}.$$
Es decir, corresponde a una FE 2-paramétrica con $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, $T_2 = \sum_{i=1}^n t_i X_i$.

2. Por independencia, la densidad conjunta adopta la forma,
$$p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_1^{n_1(x)} p_2^{n_2(x)} p_3^{n_3(x)},$$
donde $p_i = \mathsf{P}(\{i\})$, $i = 1, 2, 3$ y $n_i(\boldsymbol{x}) = \#\{j : x_j = i\}$. Como
$$n_1(\boldsymbol{x}) + n_2(\boldsymbol{x}) + n_3(\boldsymbol{x}) = n,$$
podemos escribir
$$p(\boldsymbol{x}) = p_1^{n_1(x)} p_2^{n_2(x)} p_3^{n - n_1(x) - n_2(x)}.$$
Es decir, por el Teorema de factorización $\boldsymbol{T} = (n_1, n_2)$ es estadística suficiente.

3. Sea $Z_i = \log X_i \sim \mathsf{N}(\theta, \theta)$, así
$$f(z_i; \theta) = (2\pi\theta)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2\theta}(z_i - \theta)^2\Big) = (2\pi\theta)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{z_i^2}{2\theta} + 1 - \frac{\theta}{2}\Big).$$
De este modo,
$$\log f(z_i; \theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\theta) - \frac{z_i^2}{2\theta} - \frac{\theta}{2} + 1,$$
es fácil notar que
$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,\theta} \log f(z_i; \theta) &= -\frac{1}{2\theta} + \frac{z_i^2}{2\theta^2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}\,\theta^2} \log f(z_i; \theta) &= \frac{1}{2\theta^2} - \frac{z_i^2}{\theta^3}. \end{aligned}$$
Por el supuesto de independencia, tenemos
$$\begin{aligned} \ell_n(\theta) &= \sum_{i=1}^n \log f(z_i; \theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\theta) - n\Big(\frac{\theta}{2} + 1\Big) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n z_i^2 \\ U_n(\theta) &= -\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{\theta} + 1\Big) + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n z_i^2 \\ \mathcal{F}_n(\theta) &= n\mathcal{F}_1(\theta) = n\,\mathsf{E}\Big(\frac{Z_i^2}{\theta^3} - \frac{1}{2\theta^2}\Big) = n\Big\{\frac{\mathsf{E}(Z_i^2)}{\theta^3} - \frac{1}{2\theta^2}\Big\}, \end{aligned}$$

como $\mathsf{E}(Z_i^2) = \mathsf{var}(Z_i) + \mathsf{E}^2(Z_i) = \theta + \theta^2$, obtenemos

$$\mathcal{F}_n(\theta) = n\Big\{\frac{\theta(\theta+1)}{\theta^3} - \frac{1}{2\theta^2}\Big\} = \frac{n}{2\theta^2}(2\theta+1).$$

4. Tenemos

$$\mathsf{E}(X) = \int_1^\infty \theta x^{-\theta}\, \mathsf{d}\, x,$$

para $\theta \in (0,1]$ la media no existe y por tanto tampoco existe el estimador de momentos. Para $\theta > 1$,

$$\mathsf{E}(X) = \frac{\theta}{1-\theta}\Big[\lim_{u\to\infty} u^{1-\theta} - 1\Big] = \frac{\theta}{\theta - 1}.$$

Es decir,

$$\overline{x} = \frac{\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}}{\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x} - 1}.$$

Se debe decir $x_i > 1$, para todo i, así $\overline{x} > 1$. Evidentemente esto lleva a que $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} > 1$, mientras que $\theta \in (0, \infty)$, el decir el MME *no* es válido para todo el espacio paramétrico.