MAT-206: Sesión 15, Test de hipótesis II

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Resultado 1 (test UMP unilateral para la familia exponencial):

Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ variables IID desde una FE(θ) 1-paramétrica con densidad

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - b(\theta)\}h(x), \qquad x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta,$$

donde Θ es un conjunto abierto, y $\eta(\cdot)$ es estrictamente creciente y continuamente diferenciable. Si $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n T(X_i)$ es una variable aleatoria continua, entonces:

1. Para $\alpha \in (0,1)$, el test $\delta = I\{S > q_{1-\alpha}\}$ es uniformemente más poderoso para probar:
$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta > \theta_0,$$
donde $q_{1-\alpha}$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de $G_0(t) = \mathsf{P}_{\theta_0}(S \leq t)$.

2. Para $\alpha \in (0,1)$, el test $\delta = I\{S \leq q_\alpha\}$ es uniformemente más poderoso para probar:
$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta < \theta_0,$$
donde q_α es el cuantil α de $G_0(t) = \mathsf{P}_{\theta_0}(S \leq t)$.

Observación:

Si $\eta(\cdot)$ es estrictamente decreciente, entonces defina $\eta_*(\cdot) = -\eta(\cdot)$ y $T_* = -T$. Entonces, obtenemos la familia exponencial,

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta_*(\theta)T_*(x) - b(\theta)\}h(x), \qquad x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta,$$

con $\eta_*(\cdot)$ estrictamente creciente.

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim$ FE(θ) 1-paramétrica. Tenemos la siguiente tabla:

η	$H_0 : \theta \leq \theta_0; H_1 : \theta > \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0; H_1 : \theta < \theta_0$
creciente	$I\{S(X_1, \ldots, X_n) > q_{1-\alpha}\}$	$I\{S(X_1, \ldots, X_n) \leq q_\alpha\}$
decreciente	$I\{S(X_1, \ldots, X_n) \leq q_\alpha\}$	$I\{S(X_1, \ldots, X_n) > q_{1-\alpha}\}$

Test de hipótesis

Suponga que $X_1, \dots, X_n \sim \mathsf{FE}(\theta)$ y considere $\phi = \eta(\theta)$. De este modo,

$$f(x; \phi) = \exp\{\phi T(x) - \gamma(\phi)\} h(x), \qquad x \in \mathcal{X}, \phi \in \Phi.$$

Sea,

$$\overline{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n} T_n(\boldsymbol{X}).$$

Tenemos que (¿por qué?)

$$\sqrt{n}(\overline{T}_n - \gamma'(\phi)) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_1(0, \gamma''(\phi)).$$

Es decir, para n suficientemente grande[1]

$$T_n(X_1, \dots, X_n) \sim \mathsf{AN}_1(n\gamma'(\phi), n\gamma''(\phi)),$$

o bien

$$\frac{T_n - n\gamma'(\phi)}{\sqrt{n\gamma''(\phi)}} \sim \mathsf{AN}_1(0, 1).$$

[1] $Z \sim \mathsf{AN}_1(\mu, \sigma^2)$ indica que Z sigue una distribución aproximadamente normal.

Observación (Caso bilateral):

Para hipótesis de la forma:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

no existe test UMP. En lugar de esto, el objetivo es obtener test de hipótesis con propiedades razonables. Esto lleva a métodos basados en la verosimilitud, a saber:

- Test de razón de verosimilitudes.
- Test de Wald.
- Test score (de Rao, de multiplicadores de Lagrange).
- Test gradiente (de forma bilineal).

(ver, por ejemplo, Muggeo y Lovison, 2004)[2]

[2] The American Statistician **68**, 302-306.

Test de hipótesis

Definición 1 (test de razón de verosimilitudes):

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias IID desde $f(x;\theta)$, obteniendo la verosimilitud

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta),$$

y considere las hipótesis,

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

Defina la razón de verosimilitudes como

$$\Lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}.$$

El test de razón de verosimilitudes (LRT) de nivel $\alpha \in (0,1)$ es definido como la función:

$$\delta(X_1, \dots, X_n) = I\{\Lambda(X_1, \dots, X_n) > Q\},$$

donde $Q > 0$ es tal que

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathsf{P}_{\theta_0}[\Lambda(X_1, \dots, X_n) > Q] = \alpha,$$

siempre que Q exista.

Observación (LRT para hipótesis bilaterales):

Note que, para la hipótesis,

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

tenemos $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ y $\Theta_1 = \mathbb{R} \backslash \{\theta_0\}$. De modo que, si L es función continua de θ y alcanza su supremo,

$$\begin{aligned} \Lambda(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)} = \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R} \backslash \{\theta\}} L(\theta)}{L(\theta_0)} = \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(\theta)}{L(\theta_0)} \\ &= \frac{L(\widehat{\theta})}{L(\theta_0)}. \end{aligned}$$

donde $\widehat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil de θ.

Ejemplo:

Sea $X_1,\dots,X_n$ variables IID $\mathsf{N}(\mu,\sigma^2)$ y asuma que σ^2 es conocido. Considere que deseamos probar las hipótesis

$$H_0:\mu=\mu_0,\qquad \text{versus}\qquad H_1:\mu\neq\mu_0.$$

Dado que el MLE de μ es $\overline{X}$, tenemos

$$L(\widehat{\mu})=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2\Big\}$$

$$L(\mu_0)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\Big\}.$$

De ahí que

$$\Lambda(\boldsymbol{X})=\frac{L(\widehat{\mu})}{L(\mu_0)}=\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2-\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\Big]\Big\}.$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_0)^2,$$

de este modo, la razón de verosimilitudes, adopta la forma

$$\Lambda(\boldsymbol{X})=\exp\Big\{\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{X}-\mu_0)^2\Big\}.$$

Así, $\Lambda(\boldsymbol{X})$ es una función monótona creciente de

$$S(X_1,\dots,X_n)=\Big(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)^2.$$

Además, bajo H_0 tenemos que $S\sim\chi^2(1)$. De este manera el LRT rechaza la hipótesis nula si

$$S(X_1,\dots,X_n)>\chi^2_{1-\alpha}(1).$$

o equivalentemente, se rechaza H_0, si:

$$\Big|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big|>z_{1-\alpha/2},$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantíl $(1-\alpha/2)$ de la distribución $\mathsf{N}(0,1)$.

Test de hipótesis

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias IID desde $f(x; \theta, \psi)$ y suponga que deseamos probar la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

para un nivel $\alpha > 0$, para algún $\theta_0 \in \mathbb{R}$, sin hacer cualquier referencia al parámetros ψ (conocido como **parámetro molesto**). En este caso la razón de verosimilitudes es dada por:

$$\begin{aligned}\Lambda(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\theta_0\}, \psi \in \mathbb{R}^p} L(\theta, \psi)}{\sup_{\theta \in \{\theta_0\}, \psi \in \mathbb{R}^p} L(\theta, \psi)} = \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{R}^p} L(\theta, \psi)}{\sup_{\psi \in \mathbb{R}^p} L(\theta_0, \psi)} \\ &= \frac{L(\widehat{\theta}, \widehat{\psi})}{\sup_{\psi \in \mathbb{R}^p} L(\theta_0, \psi)},\end{aligned}$$

donde $(\widehat{\theta}, \widehat{\psi})$ es el MLE de (θ, ψ). El LRT de nivel $\alpha \in (0, 1)$ se define por la función

$$\delta(X_1, \dots, X_n) = I\{\Lambda(X_1, \dots, X_n) > Q\}, \qquad Q > 0,$$

tal que

$$\sup_{\psi \in \mathbb{R}^p} \mathsf{P}_{\theta_0, \psi}[\Lambda(X_1, \dots, X_n) > Q] = \alpha,$$

siempre que Q exista.

Ejemplo:

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables IID $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ donde μ y σ^2 son desconocido. Suponga que deseamos probar las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

De este modo, la razón de verosimilitudes, resulta

$$\Lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)}{\sup_{\sigma^2 > 0} L(\mu_0, \sigma^2)},$$

donde $(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)$ es el MLE de (μ, σ^2). Note que

$$\frac{\partial \ell(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2,$$

de ahí que

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2 = \operatorname*{arg\,max}_{\sigma^2 > 0} L(\mu_0, \sigma^2).$$

De ahí que

$$\sup_{\sigma^2 > 0} L(\mu_0, \sigma^2) = L(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2).$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
L(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2) &= (2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \Big\} \\
&= \Big\{ \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \Big\}^{-n/2} \exp(-n/2).
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2) &= (2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \Big\} \\
&= \Big\{ \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \Big\}^{-n/2} \exp(-n/2).
\end{aligned}
$$

Esto lleva a la estadística LRT,

$$
\Lambda(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1} (X_i - \overline{X})^2} \right]^{n/2}
$$

Notando que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_0)^2,$$

sigue que

$$\Lambda(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}(X_i-\overline{X})^2}\right]^{n/2}=\left[1+\frac{n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}(X_i-\overline{X})^2}\right]^{n/2}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\Lambda>Q\quad&\iff\quad 1+\frac{n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}>Q^{2/n}\\&\iff\quad\frac{n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/(n-1)}>(n-1)Q^{2/n}-1\\&\iff\quad\frac{n(\overline{X}-\mu_0)^2}{S^2}>C.\end{aligned}$$

Test de hipótesis

Sea

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

tenemos

$$\Lambda > Q \quad \iff \quad T^2 > C \quad \iff \quad |T| > \sqrt{C}.$$

Es decir, el LRT es dado por

$$\delta(X_1, \dots, X_n) = I\{\Lambda > Q\} = I\Big\{\Big|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > \sqrt{C}\Big\},$$

con $\sqrt{C}$ escogido tal que

$$\mathsf{P}_{H_0}\Big(\Big|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\Big| > \sqrt{C}\Big) = \alpha.$$

Cuando H_0 es verdadera, tenemos $T \sim t(n-1)$, luego el LRT asume la forma:

$$\delta = I\Big\{|\overline{X} - \mu_0| > t_{1-\alpha/2}(n-1)\,\frac{S}{\sqrt{n}}\Big\}.$$

Test de hipótesis

Resultado 2:

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias IID desde FE(θ) 1-paramétrica, con densidad

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - b(\theta)\}h(x), \qquad x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta.$$

Asuma que:

1. El espacio paramétrico $\Theta \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
2. La función $\eta(\cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable.

Sea $\widehat{\theta}_n$ el MLE de θ, y $\theta_0 \in \Theta$ tal que $\eta'(\theta_0) \neq 0$. Si $\Lambda(\boldsymbol{X}) = L(\widehat{\theta}_n)/L(\theta_0)$ es el estadístico de razón de verosimilitudes, entonces

$$2 \log \Lambda(\boldsymbol{X}) = 2(\ell(\widehat{\theta}) - \ell(\theta_0)) \xrightarrow{\mathsf{D}} \chi^2(1),$$

cuando $H_0 : \theta = \theta_0$ es verdadera.