1. Tenemos
$$f(x;\lambda,\beta) = \exp(\lambda \log x - \beta x - \log\Gamma(\lambda) + \lambda\log\beta)x^{-1}I_{(0,\infty)}(x).$$
Es decir, X pertenece a la FE 2-paramétrica con $T_1(X) = \log X$, $T_2(X) = -X$,
$$b(\boldsymbol{\theta}) = \log\Gamma(\lambda) - \lambda\log\beta, \qquad h(x) = \frac{1}{x}I_{(0,\infty)}(x).$$
Aquí $\eta(\boldsymbol{\theta}) = (\lambda,\beta)^\top$ y $\Theta = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Sabemos que
$$\mathsf{E}(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} \partial b(\boldsymbol{\theta})/\partial\lambda \\ \partial b(\boldsymbol{\theta})/\partial\beta \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Cov}(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} \partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial\lambda^2 & \partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial\lambda\partial\beta \\ \partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial\beta\partial\lambda & \partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial\beta^2 \end{pmatrix}.$$
Es fácil notar que
$$\frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda} = \frac{\partial\log\Gamma(\lambda)}{\partial\lambda} - \log\beta = \psi(\lambda) - \log\beta, \qquad \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta} = -\frac{\lambda}{\beta},$$
con $\psi(z) = \mathsf{d}\log\Gamma(z)/\,\mathsf{d}\,z = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ la función digama. Además,
$$\frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda^2} = \psi'(\lambda), \qquad \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta\partial\lambda} = -\frac{1}{\beta}, \qquad \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta^2} = \frac{\lambda}{\beta^2}.$$
Finalmente obtenemos,
$$\mathsf{E}(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) - \log\beta \\ -\lambda/\beta \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Cov}(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} \psi'(\lambda) & -1/\beta \\ -1/\beta & \lambda/\beta^2 \end{pmatrix}.$$

2. Es fácil notar que la densidad conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^\top$ es dada por:
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n) = f(x_{(1)})\cdot f(x_{(2)})\cdots f(x_{(n)}),$$
de ahí que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)},\dots,X_{(n)})^\top$ es estadística suficiente.

3. Para que la densidad sea no nula debemos tener $X_i > \theta$ para $i = 1,\dots,n$. Es decir, se debe satisfacer que
$$X_{(1)} = \min\{X_1,\dots,X_n\} > \theta,$$
lo que lleva a escribir
$$p(\boldsymbol{x};\theta) = c^n(\theta)I\{x_{(1)} > \theta\}\prod_{i=1}^n f(x_i).$$
Usando el teorema de factorización de Fisher-Neyman sigue que $X_{(1)}$ es suficiente.

4. Tenemos

$$\log f(\boldsymbol{x}) = -\tfrac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}| + \log g(u),$$

con $u = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$. De este modo,

$$\mathsf{d}_\mu \log f(\boldsymbol{x}) = \frac{g'(u)}{g(u)}\,\mathsf{d}_\mu\, u = -2\frac{g'(u)}{g(u)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathsf{d}\,\boldsymbol{\mu}.$$

Sea $W_g(u) = -2g'(u)/g(u)$, podemos escribir el vector score (para una única observación) como:

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial \log f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = W_g(u)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}).$$

Usando la representación estocástica de un vector aleatorio elíptico, podemos escribir:

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu} \stackrel{\mathsf{d}}{=} R\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}, \qquad \text{y} \qquad W_g(u) \stackrel{\mathsf{d}}{=} W_g(R^2),$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$, R es variable aleatoria positiva y $\boldsymbol{U} \sim \mathsf{U}(\mathcal{S}_p)$. Es decir,

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu}) = W_g(R^2)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}R\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}.$$

Así, la matriz de información de Fisher (para una única observación) es dada por

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathsf{Cov}(\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})) = \mathsf{E}\{\dot{\ell}(\boldsymbol{\mu})\dot{\ell}^\top(\boldsymbol{\mu})\} = \mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\},$$

por la independencia entre R y $\boldsymbol{U}$, lleva a escribir

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\,\mathsf{E}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$

Sabemos que $\mathsf{Cov}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{p}\boldsymbol{I}_p$, luego

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{p}\,\mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

pues $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$. Finalmente,

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n(\boldsymbol{\mu}) = n\boldsymbol{\mathcal{F}}_1(\boldsymbol{\mu}) = \frac{n}{p}\,\mathsf{E}\{W_g^2(R^2)R^2\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}.$$