1.a. La familia $\mathsf{Rayleigh}(\alpha)$ pertenece a la FE 1-paramétrica. En efecto,

$$f(x;\alpha) = \frac{2}{\alpha}\exp\Big(-\frac{x^2}{\alpha}\Big)I_{[0,\infty)}(x) = \exp\Big(-\frac{x^2}{\alpha} - \log\alpha\Big)2x\,I_{[0,\infty)}(x).$$

Es decir, $\eta(\alpha) = -1/\alpha$, $T(x) = x^2$, $b(\alpha) = \log\alpha$, y $h(x) = 2x\,I_{[0,\infty)}(x)$.

1.b. La densidad conjunta de $\boldsymbol{X}$ adopta la forma:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\lambda_1,\lambda_2) &= \prod_{i=1}^{n_1}\lambda_1\exp(-\lambda_1 x_{1i})\prod_{j=1}^{n_2}\lambda_2\exp(-\lambda_2 x_{2j})\\
&= \lambda_1^{n_1}\exp\Big(-\lambda_1\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}\Big)\,\lambda_2^{n_2}\exp\Big(-\lambda_2\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}\Big)\\
&= \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\exp(-\lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}) - \lambda_2 T_2(\boldsymbol{x})).
\end{aligned}$$

Tenemos $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1,\lambda_2)^\top$. Luego, $\boldsymbol{X}$ pertenece a la FE 2-paramétrica, con

$$\begin{aligned}
&\eta_1(\boldsymbol{\theta}) = -\lambda_1, && \eta_2(\boldsymbol{\theta}) = -\lambda_2, && b(\boldsymbol{\theta}) = -n_1\log(\lambda_1) - n_2\log(\lambda_2),\\
&T_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}, && T_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}, && h(\boldsymbol{x}) = 1.
\end{aligned}$$

2. Tenemos que

$$p(x;\theta) = \exp\{x\log(1-\theta) + \log\theta\},$$

pertenece a la FE 1-paramétrica con $T(x) = x$ y $\eta = \log(1-\theta)$, de ahí que $\theta = \theta(\eta) = 1 - e^\eta$. Es decir,

$$b(\eta) = -\log(1 - e^\eta).$$

Por tanto la función generadora de cumulantes adopta la forma:

$$K_T(s) = b(s+\eta) - b(\eta) = \log(1-e^\eta) - \log(1 - e^{s+\eta}).$$

Evidentemente, $\theta' = -e^\eta = \theta - 1$. Notando que los primeros 2 cumulantes son dados por:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= b'(\eta) = e^\eta/(1-e^\eta) = (1-\theta)/\theta,\\
\kappa_2 &= b''(\eta) = e^\eta/(1-e^\eta)^2 = (1-\theta)/\theta^2.
\end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= b'''(\eta) = -\frac{2\theta'}{\theta^3} + \frac{\theta'}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^3} - \frac{3}{\theta^2} + \frac{1}{\theta},\\
\kappa_4 &= b''''(\eta) = \frac{6\theta'}{\theta^4} - \frac{6\theta'}{\theta^3} + \frac{\theta'}{\theta^2} = \frac{6}{\theta^4} - \frac{12}{\theta^3} + \frac{7}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

3. Cada elemento de las matrices de esperanzas son de la forma $\mathsf{E}(Z_j Z_k Z_l)$, por la independencia de $\boldsymbol{Z}$, sigue que

$$\mathsf{E}(Z_j Z_k Z_l) = \mathsf{E}(Z_j)\,\mathsf{E}(Z_k)\,\mathsf{E}(Z_l) = 0,$$

para $j \neq k \neq l$. Mientras que cuando $j = k \neq l$ (y análogamente para $j = l \neq k$ y $l = k \neq j$), obtenemos

$$\mathsf{E}(Z_j Z_k Z_l) = \mathsf{E}(Z_j^2)\,\mathsf{E}(Z_l) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Finalmente, para $j = k = l$, sigue que

$$\mathsf{E}(Z_j Z_k Z_l) = \mathsf{E}(Z_j^3) = 0,$$

lo que lleva al resultado.