MAT-206: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 1. Septiembre 11, 2024 Felipe Osorio

---

1. Considere $A = \{(x, y) : x = 0, 1, \dots, y; y = 0, 1, \dots, N\}$. La densidad conjunta para (X, Y) es dada por

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x) f_Y(y) &= \binom{N}{y} \theta^y (1-\theta)^{N-y} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x}\, I_A(x,y) \\ &= \exp\left\{ x \log\left(\frac{p}{1-p}\right) + y \log\left(\frac{\theta(1-p)}{1-\theta}\right) + N \log(1-\theta) \right\} \binom{N}{y} \binom{y}{x}\, I_A(x,y). \end{aligned}$$

Por el Teorema de factorización de Fisher-Neyman, sigue que (X, Y) es suficiente para (p, θ).

2. Para $X_1, \dots, X_n$ sigue que la densidad conjunta adopta la forma

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \exp(1 - x_i/\theta) I_{(\theta,\infty)}(x_i) = \left(\frac{e}{\theta}\right)^n \exp\Big(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i\Big) I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \\ &= \left(\frac{e}{\theta}\right)^n \exp(-T_1(\boldsymbol{x})/\theta) I_{(\theta,\infty)}(T_2(\boldsymbol{x})), \end{aligned}$$

donde $T_1(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ y $T_2(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Ahora, para $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$, sigue que

$$\frac{f(\boldsymbol{x}, \theta)}{f(\boldsymbol{y}, \theta)} = \exp\{(T_1(\boldsymbol{y}) - T_1(\boldsymbol{x}))/\theta\} \frac{I_{(\theta,\infty)}(T_2(\boldsymbol{x}))}{I_{(\theta,\infty)}(T_2(\boldsymbol{y}))}.$$

Que no depende de θ para $T_1(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{y})$ y $T_2(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{y})$. Por tanto, $(T_1(\boldsymbol{X}), T_2(\boldsymbol{X}))$ es estadística suficiente y minimal.

3. Es fácil notar que $\mathsf{Exp}(\lambda)$ pertenece a la familia exponencial 1-paramétrica. En efecto,

$$f(x; \lambda) = \exp(-\lambda x + \log \lambda),$$

de ahí que $b(\lambda) = -\log \lambda$. Por tanto,

$$\mathcal{F}(\lambda) = b''(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Considere $\psi = h(\lambda)$, sabemos que

$$\mathcal{F}(\lambda) = \{h'(\lambda)\}^2 \mathcal{F}(h(\lambda)) = \{h'(\lambda)\}^2 \mathcal{F}(\psi),$$

lo que lleva a,

$$\mathcal{F}(\psi) = \frac{\mathcal{F}(\lambda)}{\{h'(\lambda)\}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\{h'(\lambda)\}^2}.$$

Es decir, $\mathcal{F}(\psi)$ es constante para $h(\lambda) = \log \lambda$.