MAT-206: Inferencia Estadística **Nombre:** ____________________
Certamen 1. Septiembre 26, 2022 **Profesor:** Felipe Osorio
Tiempo: 70 minutos

---

1. Las siguientes distribuciones, ¿pertenecen a la familia exponencial?

a. (25 pts) Rayleigh(α), con densidad

$$f(x;\alpha) = \frac{2x}{\alpha}\exp\Big(-\frac{x^2}{\alpha}\Big) I_{[0,\infty)}(x), \qquad \alpha > 0.$$

b. (25 pts) Considere la distribución conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, \dots, X_{2n_2})^\top$ donde X_{ij}, para $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, n_i$ son variables aleatorias independientes cada una con distribución $\mathsf{Exp}(\lambda_i)$, donde $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1, \lambda_2)^\top$.

2. (25 pts) Considere la distribución Geométrica, con función de probabilidad

$$p(x;\theta) = \theta(1-\theta)^x, \qquad x \in \{0, 1, \dots\},$$

Determine los cumulantes tercero y cuarto de la variable aleatoria X.

3. (25 pts) Considere $\boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_p)$. Muestre que

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{Z}^\top \otimes \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top) = \boldsymbol{0}, \quad \mathsf{E}(\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top) = \boldsymbol{0}, \quad \mathsf{E}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top \otimes \boldsymbol{Z}^\top) = \boldsymbol{0}, \quad \mathsf{E}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top \otimes \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{0}.$$

Sugerencia: Recuerde que $\mathsf{E}(Z_i^3) = 0$, para $i = 1, \dots, p$.