1.a. Sea $\mu_j = \mathsf{E}(X^j)$, $m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^j$, para $j = 1, 2$. Note que

$$\mu_1 = \frac{1}{\theta_1+\theta_2}\Big(\int_{-\infty}^0 x e^{x/\theta_2}\,\mathsf{d}\,x + \int_0^\infty x e^{-x/\theta_1}\,\mathsf{d}\,x\Big) = \theta_1 - \theta_2 \tag{1}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\theta_1+\theta_2}\Big(\int_{-\infty}^0 x^2 e^{x/\theta_2}\,\mathsf{d}\,x + \int_0^\infty x^2 e^{-x/\theta_1}\,\mathsf{d}\,x\Big) = 2(\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_1\theta_2) \tag{2}$$

De este modo, $\mu_2 - \mu_1^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$. Además, desde **(1)** tenemos $\theta_1 = \mu_1 + \theta_2$. De ahí que

$$\mu_2 - \mu_1^2 = (\mu_1 + \theta_2)^2 + \theta_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2\theta_2^2 + 2\mu_1\theta_2 + 2\mu_1^2 - \mu_2 = 0,$$

que tiene soluciones

$$\frac{-\mu_1 \pm \sqrt{2\mu_2 - 3\mu_1^2}}{2}.$$

Dado que $\theta_2 > 0$, los estimadores de momentos son:

$$\widehat{\theta}_2 = \frac{-m_1 + \sqrt{2m_2 - 3m_1^2}}{2}$$

and

$$\widehat{\theta}_1 = m_1 + \widehat{\theta}_2 = \frac{m_1 + \sqrt{2m_2 - 3m_1^2}}{2}.$$

1.b. Sea $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i\, I_{(0,\infty)}(X_i)$ y $T_2 = -\sum_{i=1}^n X_i\, I_{(-\infty,0]}(X_i)$. Entonces, la función de log-verosimilitud adopta la forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -n\log(\theta_1+\theta_2) - \frac{T_1}{\theta_1} - \frac{T_2}{\theta_2}, \qquad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top.$$

De este modo,

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -n/(\theta_1+\theta_2) + T_1/\theta_1^2 \\ -n/(\theta_1+\theta_2) + T_2/\theta_2^2 \end{pmatrix},$$

y

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\top} = \begin{pmatrix} \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2} - \frac{2T_1}{\theta_1^3} & \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2} \\ \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2} & \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2} - \frac{2T_2}{\theta_2^3} \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de verosimilitud $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{0}$, tienen solución única dada por

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathsf{ML}} = \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_1 \\ \widehat{\theta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} T_1 + \sqrt{T_1T_2} \\ T_2 + \sqrt{T_1T_2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Sabemos que $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathsf{ML}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\mathcal{F}}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$, donde

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\,\mathsf{E}\Big\{-\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\top}\Big\} = \frac{1}{(\theta_1+\theta_2)^2}\begin{pmatrix} 1 + 2\theta_2/\theta_1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\theta_1/\theta_2 \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{(1+2\theta_2/\theta_1)(1+2\theta_1/\theta_2) - 1}\begin{pmatrix} 1 + 2\theta_1/\theta_2 & 1 \\ 1 & 1 + 2\theta_2/\theta_1 \end{pmatrix}.$$

2.a. Desde la solución de la Pregunta 1.b., tenemos que el estimador ML de $(\theta_1, \theta_2)^\top$ es dado en Ecuación **(3)**. Por otro lado, bajo $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ tenemos que la distribución de X_i corresponde a la distribución Laplace (o doble exponencial) con posición 0 y escala $\theta_1 = \theta_2$. De ahí que el estimador ML (restringido) de $\theta_1 = \theta_2$ es

$$\widetilde{\theta}_1 = \widetilde{\theta}_2 = \frac{T_1 + T_2}{n}.$$

La función de verosimilitud es dada por:

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^n} \exp\Big(- \frac{T_1}{\theta_1} - \frac{T_2}{\theta_2}\Big),$$

esto lleva a la razón de verosimilitudes

$$\lambda = \frac{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^{2n}}{2^n (T_1 + T_2)^n}.$$

Un test LR de tamaño α rechaza $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ cuando $\lambda < c$, donde c es el cuantíl $(1 - \alpha)$ de la distribución de λ bajo H_0.

2.b. Tenemos que

$$\mathsf{E}(T_i) = \frac{n\theta_i^2}{\theta_1 + \theta_2}, \qquad \mathsf{var}(T_i) = \frac{n(2\theta_i^3(\theta_1 + \theta_2) - \theta_i^4)}{(\theta_1 + \theta_2)}. \qquad i = 1, 2,$$

y

$$\operatorname{cov}(T_1, T_2) = -\frac{n^2\theta_1^2\theta_2^2}{(\theta_1 + \theta_2)^2}.$$

De ahí que por el Teorema central de límite,

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} T_1/n \\ T_2/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_1^2/(\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_2^2/(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\theta_1^3(\theta_1 + 2\theta_2)}{(\theta_1+\theta_2)^2} & -\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{(\theta_1+\theta_2)^2} \\ -\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{(\theta_1+\theta_2)^2} & \frac{\theta_2^3(\theta_2 + 2\theta_1)}{(\theta_1+\theta_2)^2} \end{pmatrix}\right).$$

Sea $g(x, y) = 2\log(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \log(x + y) - \log 2$. Entonces $\frac{1}{n}\log\lambda = g(T_1/n, T_2/n)$. Tenemos las derivadas

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{xy}} - \frac{1}{x + y}, \qquad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{xy}} - \frac{1}{x + y},$$

evaluadas en $x = \mathsf{E}(T_1)$ y $y = \mathsf{E}(T_2)$ son:

$$\frac{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1(\theta_1^2 + \theta_2^2)}, \qquad \frac{\theta_1(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2(\theta_1^2 + \theta_2^2)},$$

respectivamente. De ahí que, por el método-delta, obtenemos

$$\sqrt{n}\Big[\frac{\log\lambda}{n} - \log\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{2(\theta_1^2 + \theta_2^2)}\Big] \xrightarrow{\mathsf{D}} \mathsf{N}(0, \tau^2),$$

donde

$$\tau^2 = \frac{[\theta_1\theta_2^2(\theta_1 + 2\theta_2) + \theta_2\theta_1^2(\theta_2 + 2\theta_1) + 2\theta_1^2\theta_2^2](\theta_1 - \theta_2)^2}{(\theta_1 + \theta_2)^2(\theta_1^2 + \theta_2^2)^2}.$$