Felipe Bartelt - 2025690830

1. $\mathbb{R}^{4\times 4} \ni B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]$, $b_i \in \mathbb{R}^4$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_i^T \in \mathbb{R}^4$$

1) dobrar valores de b_1

$$B' = [2b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4] \Rightarrow B' = BA, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & I_{3\times 3} \end{bmatrix}$$

2) dividir os valores da linha 3 (assumindo que se deseja $\mathcal{B}_3' = \mathcal{B}_3/8$):

$$B' = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_3^T \\ \mathcal{B}_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_3^T/8 \\ \mathcal{B}_4^T \end{bmatrix} = AB, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1/8 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

3) adicionar linha 3 à linha 1:

$$B' = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T + \mathcal{B}_3^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_3^T \\ \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = AB, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) trocar as linhas 1 e 4

$$B' = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_4^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_3^T \\ \mathcal{B}_1^T \end{bmatrix} = AB, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Subtrair a linha 2 de cada uma das outras:

$$B' = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T - \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_3^T - \mathcal{B}_2^T \\ \mathcal{B}_4^T - \mathcal{B}_2^T \end{bmatrix} = AB, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) substituir coluna 4 pela coluna 3:

$$B' = [b_1 \ b_2 \ b_4 \ b_3] = BA \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7) eliminar coluna 1:

$$\mathbb{R}^{4\times3} \ni B' = [b_2 \ b_3 \ b_4] = BA \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{4\times3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, Let $\mathcal{C}$ denote the basis for the column space and $\mathcal{R}$ the basis for the row space

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (L_2 + (-2)L_1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \ , \ \mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Let $\mathcal{K}$ denote the basis for $\mathrm{Ker}(A)$ and $\mathcal{U}$ denote the basis for $\mathrm{Ker}(A^T)$:

$$\dim(N(A^T)) = \dim(\mathrm{dom}) - \dim(C(A)) = 1$$

$$\dim(N(A)) = \dim(\mathrm{dom}) - \dim(C(A^T)) = 2$$

$$\therefore \ \mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \ (A^T y = 0)$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \ (Ax = 0);$$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(L_2 + (-2)L_1)$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(C(B)) = 2 \Rightarrow \dim(N(B^T)) = 0$$
$$\dim(C(B^T)) = 2 \Rightarrow \dim(N(B)) = 1$$

$$\therefore \mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3 $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{R} \quad (1)$$

1. A tem duas colunas linearmente independentes, portanto o posto de A $\text{rank}(A) = 2$.

2. Seja $\mathcal{C}$ uma base para $C(A)$, $\mathcal{R}$ uma base para $C(A^T)$ e $\mathcal{K}$ uma base para $N(A)$:

A última igualdade de (1) fornece a decomposição RRQR, ou seja, C contém colunas LI (base de $C(A)$) e R contém linhas LI (base p/ $C(A^T)$):

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$N(A)$: $Ax = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A': \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2 \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \alpha_4 \end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. $Ax = b$, $Ax = c$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

o posto de A é 2, portanto o Kernel tem dimensão 2.

Isso implica que qualquer sol. x p/ o sistema pode ser reescrita por $x' = x + x_0$, $x_0 \in N(A)$ tal que $A(x+x_0) = Y$

Como $c \in C(A)$, existem infinitas sol. p/ $Ax = c$

$b \notin C(A) \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}^4$ tal que $Ax = b$

Dem:

$b = C_1 \cdot \frac{3}{2} + \omega = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega$

$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ que não é múltiplo de algum vetor de C

$\square$

4 - Apesar de não alterar a dimensão, é possível alterar os vetores de $C(A)$. Tome A' como a matriz A com linhas 2 e 3 trocadas:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cujo } C(A') = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Tome $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in C(A)$. Não existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in C(A')$

No entanto, $C(A^T)$ não sofre alterações (note que a base para $C(A^T)$ se mantém igual)

4) $$S = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ & b & b & b \\ * & & c & c \\ & & & d \end{bmatrix}$$

1) $$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 = L_2' \\ L_3 - L_1 = L_3' \\ L_4 - L_1 = L_4' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3' - L_2' = L_3'' \\ L_4' - L_2' = L_4'' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4'' - L_3'' = L_4''' \end{matrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_4^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S=LU$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1^T \\ \lambda_2^T \\ \vdots \\ \lambda_4^T \end{bmatrix}$$

$$S=LU=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \mu_3^T \\ \mu_4^T \end{bmatrix}=\sum_{1}^{4} l_i \mu_i^T$$

$$S=\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b-a & b-a & b-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & c-b & c-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}+$$

$$\Rightarrow S=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

2- $a \neq b \neq c \neq d \neq 0$

5. $A = P^T M^{-1} \hat{A} \Rightarrow MPA = \hat{A}$, $M = ?$, $P = ?$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{array} \end{array}, \quad \hat{A} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 9/4 \\ 4 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -1/2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \hat{a}_1^T \\ \hat{a}_2^T \\ \hat{a}_3^T \end{array} \end{array}$$

by inspection: $\hat{a}_2^T = a_3^T$, $\hat{a}_1^T = a_2^T - \dfrac{a_3^T}{4}$

$\hat{a}_3^T = a_1^T - \dfrac{a_3^T}{2}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ maps $\hat{a}_1^T = a_2^T$, $\hat{a}_2^T = a_3^T$

$\hat{a}_3^T = a_1^T$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$ $\hat{a}_2^T = \hat{a}_2^T$, $\hat{a}_1^T = \hat{a}_1^T - \dfrac{\hat{a}_2^T}{4}$

$\hat{a}_3^T = \hat{a}_3^T - \dfrac{\hat{a}_2^T}{2}$

$\Rightarrow MPA = \hat{A} \quad \therefore A = P^T M^{-1} \hat{A}$

6. Em anexo

7. Em anexo

8. $A = A^T \Rightarrow C(A^T) = C(A)$ (espaço coluna e espaço linha iguais)

Como $N(A) = C(A^T)^\perp$ e $C(A^T) = C(A)$, então

$N(A) = C(A)^\perp$ $\therefore$ espaço coluna de A é perpendicular ao nulo de A

9 $P = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 ,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

rank 2

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$-5x_2 - 5x_3 = -3$$
$$x_2 = +\frac{3}{5} - x_3$$

$$x_1 + \frac{6}{5} - 2x_3 + 3x_3 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{5} - x_3$$

$$P = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja V um espaço vetorial de dimensão 1 dado por:

$$V = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

então $P = \left\{ v + p \mid v \in V ,\ \mathbb{R}^3 \ni p = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, o

que caracteriza um conjunto afim de dimensão 1:

curvas 1D mergulhadas no espaço euclidiano 3D.

(10) (1) $Ax = b$ tem sol. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

e (2) $A^T y = 0$ $b \in \mathbb{R}^m$

$y \in \mathbb{R}^m$

implica $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

Multiplicando (1) por y^T à esquerda:

$$y^T (Ax) = y^T b$$

$$(y^T A) x = y^T b \quad \left[(y^T A)^T = A^T y = 0 \Rightarrow y^T A = 0^T \right]$$

$$0^T x = y^T b$$

$$\Rightarrow y^T b = 0$$

$\square$

Isso também poderia ser justificado pelas dimensões:

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$: $y^T x$ exige que $n = m$

$y^T b$ funciona p/ $n \neq m$

(11) $f = \max\{1 - x, x - 2, 3 - 2x\}$ $x \in \mathbb{R}$

Sim, f é convexa.

Demonstração:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \max(g(x), h(x))$, suponha g e h convexas

Se f é convexa, segue que

$$f(\theta u + (1-\theta) v) \leq \theta f(u) + (1-\theta) f(v), \quad \theta \in [0,1], \; u, v \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(\theta u + (1-\theta) v) = \max(g(\theta u + (1-\theta) v), h(\theta u + (1-\theta) v))$$

Como g e h são convexas:

$$f(\theta u + (1-\theta)v) \leq \max\left(\theta g(u) + (1-\theta)g(v),\ \theta h(u) + (1-\theta)h(v)\right)$$

$$\leq \theta \max\left(g(u), h(u)\right) + (1-\theta)\max\left(g(v), h(v)\right)$$

$$= \theta f(u) + (1-\theta) f(v)$$

$\Rightarrow f$ é convexa se g e h forem convexas. Por indução, segue que $f(x) = \max\left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\right)$ é convexa se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ forem convexas

Como $\begin{cases} f_1(x) = 1-x \\ f_2(x) = x-2 \\ f_3(x) = 3-2x \end{cases}$ são convexas (são retas), então

$f(x)$ é convexa $\square$

$f(x)$ não é diferenciável:

$\frac{df}{dx}$: $\frac{df_1}{dx} = -1$, $\frac{df_2}{dx} = 1$, $\frac{df_3}{dx} = -2$

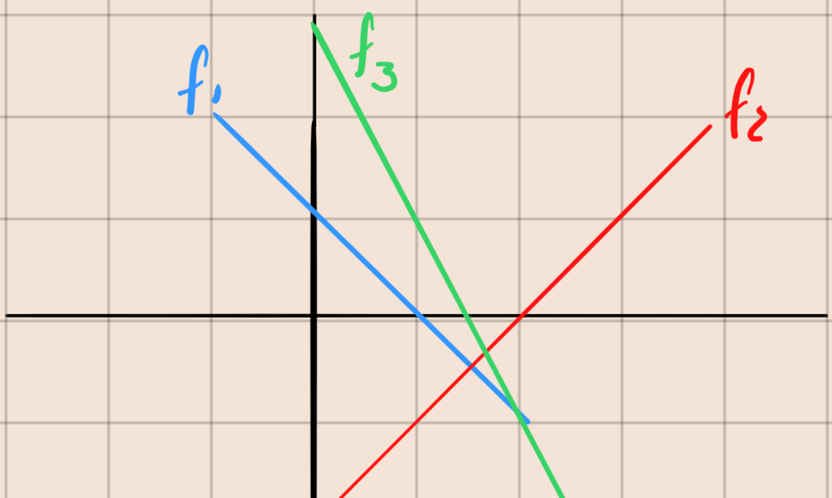
Como não há "transições suaves" entre as derivadas, existem quinas na função $\therefore$ não é diferenciável $\square$

$1-x \geq x-2 \Rightarrow x \leq 3/2$

$1-x \geq 3-2x \Rightarrow x \geq 2$

$x-2 \geq 3-2x \Rightarrow x \geq 5/3$

não diferenciável em $x = 5/3$



$$\partial f(x) = \begin{cases} 1, & x > 5/3 \\ -2, & x < 5/3 \\ ?, & x = 5/3 \end{cases}$$

$$f(z) \geq f(x) + \xi(z-x)$$

$$f(z) \geq f(5/3) + \xi(z-5/3)$$

$$f(z) \geq -\frac{1}{3} + \xi(z-5/3)$$

$$\max(z-2, 3-2z) \geq \xi(z-5/3) - 1/3$$

$$\max(z, -2z) + \max(-2, 3) \geq \xi(z-5/3) - 1/3$$

$$\max(z, -2z) \geq \xi(z-5/3) - 10/3$$

p/ $z \geq 0$:

$$z \geq \xi(z-5/3) - 10/3$$

$$\xi \leq \frac{z+10/3}{z-5/3} \Rightarrow -2 \leq \xi \leq 1$$

p/ $z \leq 0$:

$$-2z \geq \xi(z-5/3) - 10/3$$

$$\frac{-2z+10/3}{z-5/3} \leq \xi$$

$$= \frac{-2(z-5/3)}{z-5/3} \leq \xi \Rightarrow \xi \geq -2$$

$$\Rightarrow \quad \partial f(x) = \begin{cases} 1, & x > 5/3 \\ -2, & x < 5/3 \\ [-2,1], & x = 5/3 \end{cases}$$

(12) $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

P é convexo $\iff$ $\theta x + (1-\theta) y \in P \ \forall \ x, y \in P, \ \theta \in [0,1]$

$$A(\theta x + (1-\theta) y) = \theta A x + (1-\theta) A y$$
$$\leq \theta b + (1-\theta) b$$
$$= b$$

$\Rightarrow A(\theta x + (1-\theta) y) \leq b$, logo P é convexo. $\square$

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$x = [1 \ 1 \ 2]^T$ resolve $Ax = b$

A dimensão de A é 2, então $\dim(C(A)) = 2$ e $\dim(N(A)) = 1$. Portanto $\exists \, x_0 \in N(A)$ tal que $A(x + x_0) = b \Rightarrow$ existem infinitas soluções

Note que $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \in N(A)$, então:

$$A(x + x_0) = A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = b$$

ainda, $A(x + \alpha x_0) = A \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ 1+\alpha \\ 2-2\alpha \end{bmatrix} = (1+\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (1+\alpha) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (2-2\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1+\alpha) - (1+\alpha) \\ 2(1+\alpha) + (2-2\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(17) $\{(x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R}\} = V$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$: para ser um subespaço vetorial, deve-se

F ser fechado por multiplicação escalar e o elemento $(-1,-1)$ não pertence a V

- $V = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 0, x,y \in \mathbb{R}\}$

$V = \{(0,0)\}$ para $\mathbb{R}$. Note que $v+u = [0\ 0]^T \in V, \forall v,u \in V$

V e $\alpha v = [0\ 0]^T \in V\ \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$

- $V = \{(x,y) \mid x^2-y^2 = 0, x,y \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$

F Tome $V \ni v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V \ni u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v+u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V$ (não é fechado na soma)

- $V = \{(x,y) \mid x-y = 1, x,y \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$

$v = \begin{bmatrix} x' \\ x'-1 \end{bmatrix}$, $\alpha v \in V$? $\alpha v = \begin{bmatrix} \alpha x' \\ \alpha(x'-1) \end{bmatrix}$

F

se $x = \alpha x' \Rightarrow y = \alpha x' - 1 \neq \alpha(x'-1)$

Tome por exemplo $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V$

$\hookrightarrow \alpha = 0$

(18) W_1, W_2 subesp. vetoriais de V e

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$$

Mostre que:

1) $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ são subespaços:

- $W_1 + W_2$:

seja $u, v \in W_1 + W_2$:

- $\alpha u = \alpha(w_1 + w_2)$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$= \alpha w_1 + \alpha w_2$

Como W_1 e W_2 são subespaços, $\alpha w_1 \in W_1$ e $\alpha w_2 \in W_2$

portanto $\alpha(w_1 + w_2) \in W_1 + W_2$

- $$u + v = (\overbrace{w_1 + w_2}^{u}) + (\overbrace{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}^{v}), \quad w_1, \bar{w}_1 \in W_1, \quad w_2, \bar{w}_2 \in W_2$$

$$= \underbrace{(w_1 + \bar{w}_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + \bar{w}_2)}_{\in W_2}$$

$\Rightarrow u + v \in W_1 + W_2$

- $0 \in W_1 + W_2$: $0 = 0 + 0$, $0 \in W_1$, $0 \in W_2$

$\therefore W_1 + W_2$ é subespaço

- $W_1 \cap W_2 = \{ w \mid w \in W_1 \text{ e } w \in W_2 \}$

Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- αu: como $u \in W_1 \cap W_2$, $u \in W_1$ e $u \in W_2$

Ambos são espaços vetoriais, portanto $\alpha u \in W_1$, $\alpha u \in W_2$

o que implica $\alpha u \in W_1 \cap W_2$

- $u+v$. Novamente, $u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$. Como ambos são subespaços, $u+v \in W_1$, $u+v \in W_2$. Isso implica que a interseção é não vazia e

$$u+v \in W_1 \cap W_2$$

- $0 \in W_1 \cap W_2$. Como ambos são subespaços, $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$ $\Rightarrow 0 \in W_1 \cap W_2$.

2) $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$:

$W_1 \cup W_2 = \{ w \mid w \in W_1 \} \cup \{ w \in W_2 \}$
contém todos os elementos de W_1 e W_2, inclusive os elementos compartilhados $\left(\{ w \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \} \right)$. Ou seja, $W_1 \cup W_2 \supseteq W_1 \cap W_2$

Note que os elementos de W_1 em $W_1 + W_2$ são descritos por $\{ w_1 + 0 \mid w_1 \in W_1, 0 \in W_2 \}$.
Analogamente $\{ 0 + w_2 \mid 0 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$ descreve os elementos de W_2.

A união desses dois conjuntos forma $W_1 \cup W_2$. Portanto, $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

Ex: seja $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

o conjunto $W_1 \cup W_2$ contém todos os vetores $\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$

o conjunto $W_1 + W_2$ contém todos os vetores $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

o conjunto $W_1 \cap W_2$ só contém o vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $W_1 \cup W_2$ não forma um subespaço

Tome o exemplo anterior:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

Tome $u = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in W_1$ e $v = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \in W_2$.

Consequentemente, $u, v \in W_1 \cup W_2$. Entretanto, $u+v$ não pertence a união: $u+v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$

4) Como $W_1 \cup W_2$ será subespaço se $W_1 \cup W_2 = W_1 \cap W_2$ ou $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$, segue que $W_1 \cup W_2$ será subespaço se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$

5) $W_1 + W_2$ é o menor subespaço que contém a união.

19) W_1 e W_2 subespaços com bases

$$\mathcal{B}_{W_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{W_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Escalonando para facilitar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ -6 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 9/2 \\ 0 & -13 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$4\beta = -8 \Rightarrow \beta = -2$$

$$2\beta - \gamma = 5 \Rightarrow \gamma = -9$$

$$2\alpha + 1(-2) + 0 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$1(2) + 3(-2) - 1(-9) = -1$$

$$2 - 6 + 9 = 5 \neq -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4\beta = -4 \Rightarrow \beta = -1$$

$$2(-1) - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2$$

$$2\alpha + 1(-1) = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$1(3) + 3(-1) - 1(-2) = 2$$

$$3 - 3 + 2 = 2 \quad \checkmark$$

A interseção tem dimensão 1 e sua base é dada por $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} = \{ U^1 \}$

- $W_1 + W_2$

Tomando as bases de W_1 e W_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8/5 & -16/5 & -24/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$W_1 + W_2$ tem dimensão 4 com base:

$$\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \{ v_1, v_2, v_3, U_2 \}$$

20 1) $U_1 = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$U_2 = \{ (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \}$

$U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ soma direta.

Note que os vetores de U_2 são LI em relação aos de $U_1 \Rightarrow \forall \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; \exists \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha v + \beta w$ para vetores $v \in U_1$, $w \in U_2$

Ainda, $0 = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

2) $U_1 = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$U_2 = \{ (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \}$

$U_3 = \{ (0, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \}$

$U_1 + U_2 + U_3$ não é uma soma direta:

teme $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in U_1$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U_2$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \in U_3$

então $0 = u + v + w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ não é soma direta.

Questão 6

Resolve $A^k x = b$ através de um método recursivo:

$$A^k x = A(\underbrace{A^{k-1}x}_{y_1}) = b$$
$$A(\underbrace{A^{k-2}x}_{y_2}) = y_1$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{A\Big(A \dots \underbrace{A(A(\underbrace{Ax}_{y_{k-1}}))}_{y_{k-2}}\Big)}_{y_1} = b$$

Isso é, resolve-se $Ay_1 = b$, e então $Ay_2 = y_1 \dots$ até que se resolva $Ax = y_{k-1}$. As soluções são obtidas por meio de decomposição PALU.

In [1]:
```
import numpy as np
from scipy.linalg import lu

A = np.array([
    [0., 8., 8., 6., 4., 3.],
    [5., 2., 4., 6., 9., 5.],
    [3., 1., 4., 7., 9., 3.],
    [4., 7., 9., 9., 3., 5.],
    [3., 2., 1., 5., 4., 5.],
    [1., 7., 2., 3., 7., 1.]
])

b = np.array([391., 830., 588., 483., 223., 840.]).reshape(-1, 1)

k = 10

def solve_power_lineq(A, b, k):
    """Solve A^k x = b using a recursive PA=LU decomposition:
    A (A^{k-1}) x = b
    """
    A_ = A.copy()
    P_inv, L, U = lu(A_) # A = P_inv @ L @ U
    P = P_inv.T
    b_ = b.copy()

    for _ in range(k):
        y = np.linalg.solve(L, P @ b_)
        x = np.linalg.solve(U, y)
        b_ = x
    return x

x = solve_power_lineq(A, b, k)
print(f'A solução obtida para A^10 x = b foi: {x.ravel()}^T')
```

```
A solução obtida para A^10 x = b foi: [-0.00070265 -0.00208541  0.01872547 -0.021508
62  0.000916    0.01347027]^T
```

Solução obtida utilizando-se $x = (A^{10})^{-1} b$ para comparação

In [2]:
```
exp_sol = np.linalg.inv(np.linalg.matrix_power(A, k)) @ b
print(f"Solução explícita {exp_sol.ravel()}^T")
```

```
Solução explícita [-0.00070265 -0.00208541  0.01872547 -0.02150862  0.000916    0.01
347027]^T
```

Questão 7

Seja $A^{-1}b = x$, o que implica $b = Ax$. Tem-se então $u = d^T x$, que não possui contas implícitas de inversa de matriz:

Computa-se $PA = LU$ e resolve-se $LUx = Pb \rightarrow Ly = Pb, \quad Ux = y$.

Finalmente $u = d^T A^{-1} b = d^T x$.

In [3]:
```
import numpy as np
from scipy.linalg import lu

A = np.array([
    [0., 8., 8., 6., 4., 3.],
    [5., 2., 4., 6., 9., 5.],
    [3., 1., 4., 7., 9., 3.],
    [4., 7., 9., 9., 3., 5.],
    [3., 2., 1., 5., 4., 5.],
    [1., 7., 2., 3., 7., 1.]
])

b = np.array([391., 830., 588., 483., 223., 840.]).reshape(-1, 1)

P_inv, L, U = lu(A) # A = P_inv @ L @ U
P = P_inv.T
y = np.linalg.solve(L, P @ b)
x = np.linalg.solve(U, y)
print(f'A solução obtida para Ax = b foi:\nx={x.ravel()}^T')

d = np.array([1., 3., 9., 8., 5., 10.]).reshape(-1, 1)
u = d.T @ x
print(f'O produto interno u = <d, x> é: {u[0,0]}')
```

```
A solução obtida para Ax = b foi:
x=[120.95694496  56.65531012  19.19568202 -56.26169974  72.75215275
 -56.41544989]^T
O produto interno u = <d, x> é: -186.80331960564075
```

Comparando o valor obtido fazendo-se explicitamente $d^T A^{-1} b$:

In [4]:
```
print((d.T @ (np.linalg.inv(A) @ b))[0,0])
```

```
-186.80331960564087
```