Felipe Bartelt - 2025690830

---

① $\min \; c^T x$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\min \; c_B^T x_B + c_N^T x_N$

$Ax = b$ $\qquad\qquad$ $Bx_B + Nx_N = b$

$x \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \geq 0$

Suponha base B tal que $B = [A_{\mathcal{B}(1)} \cdots A_{\mathcal{B}(m)}]$, onde $\mathcal{B}$ é um conjunto de índices de colunas LI; e $A = [B \;\; N]$.

Seja x_B variáveis básicas e x_N não básicas:

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (\exists B^{-1} \text{ já que é base})$$

Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de índices que não pertencem a $\mathcal{B}$:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}(b - Nx_N) + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} x_B + \sum_{i \in \mathcal{N}} (c_j - c_B^T B^{-1} A_j) x_j = c_B^T B^{-1} x_B + \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

O simplex consegue detectar que o PPL é ilimitado quando para uma variável não básica x_K, tem-se $u_i < 0$, onde

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}A_j x_j = B^{-1}b - \underbrace{B^{-1}A_K}_{u} x_K$$

$$= B^{-1}b - u x_K$$

Tome $\hat{U}$ o conjunto de índices tais que $u_i > 0$, se $\hat{U} = \emptyset$ então o problema é ilimitado (pode-se crescer x_B o quanto se queira)

Note que é possível mover na direção U o quanto se queira e x_B continuará básico. Então U é uma direção básica.

Então $A(x+\alpha d) = Bx_B - \alpha BU + Nx_N - \alpha N d_N = b$,

onde $d = \begin{bmatrix} -U \\ d_N \end{bmatrix}$ é direção básica. Note que d_N é tal que só tem um elemento não nulo na k-ésima posição:

$$d = \begin{bmatrix} -U \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{— referente a } x_k = \begin{bmatrix} -U \\ e_k \end{bmatrix}$$

Ainda, como $A(x+\alpha d) = b$ e $Ax = b$ se x é vértice, então $\alpha A d = 0 \Rightarrow Ad = 0$

Note que $c^T d = -c_B^T B^{-1} A_k + c_N^T e_k = -c_B^T B^{-1} A_k + c_k$,

O custo reduzido de x_k é $c_k - c_B^T B^{-1} A_k$,

onde k é um elemento de $\mathcal{N}$.

O simplex seleciona x_k tal que $\bar{c}_k < 0$, então é claro que $c_k - c_B^T B^{-1} A_k < 0 \Rightarrow c^T d < 0$ $\square$

(2) $\min \; 2x_1 - 8x_2$

$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 8$$
$$-x_1 + x_2 \leq 6$$

Precisa adicionar restrição de sinal e variáveis de folga

$$\min \; 2(x_1^+ - x_1^-) - 8(x_2^+ - x_2^-)$$
$$(x_2^+ - x_2^-) - x_3 = 1$$
$$(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) - x_4 = 2$$
$$-\tfrac{1}{2}(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) + x_5 = 8$$
$$-(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) + x_6 = 6, \quad x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Seja $x = [x_1^+ \;\; x_1^- \;\; x_2^+ \;\; x_2^- \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6]$,

$$c^T = [2 \;\; -2 \;\; -8 \;\; 8 \;\; 0 \cdots 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [1 \;\; 2 \;\; 8]^T$$

O problema é $\begin{array}{l} \min \; c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$ na forma padrão

Dado $x_1 = 0$, $x_2 = 6 \Rightarrow x_1^+ = x_1^- = 0$, $x_2^+ = 6$, $x_2^- = 0$

$$6 - x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 5$$
$$6 - x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4$$
$$6 + x_5 = 8 \Rightarrow x_5 = 2$$
$$6 + x_6 = 6 \Rightarrow x_6 = 0$$

básicas: $\{x_2^+, x_3, x_4, x_5\}$

ñ bas: $\{x_1^+, x_1^-, x_2^-, x_6\}$

$$\begin{cases} x_3 = \overbrace{x_1^+ - x_1^- + \cancel{x_2^-} - x_6 + 6}^{x_2^+} - \cancel{x_2^-} - 1 \\ x_4 = x_1^+ - x_1^- + x_1^+ - x_1^- + \cancel{x_2^-} - x_6 + 6 - \cancel{x_2^-} - 2 \\ x_5 = 0.5x_1^+ - 0.5x_1^- - (x_1^+ - x_1^- + \cancel{x_2^-} - x_6 + 6) + \cancel{x_2^-} + 8 \\ x_2^+ = x_1^+ - x_1^- + x_2^- - x_6 + 6 \end{cases}$$

Candidatas à base: f.obj. $-6x_1^+ + 6x_1^- + 8x_6 - 48$

$\Rightarrow x_1^+$ é a única que reduz custo

$$\begin{array}{lll} x_3 = 5 + x_1^+ & & x_1^+ \geq -5 \\ x_4 = 2x_1^+ + 4 & \geq 0 & x_1^+ \geq -2 \\ x_5 = -0.5x_1^+ + 2 & & x_1^+ \leq 4 \\ x_2^+ = x_1^+ + 6 & & x_1^+ \geq -6 \end{array}$$

Se $x_1^+ = 4 \Rightarrow x_3 = 9,\ x_4 = 12,\ x_5 = 0,\ x_2^+ = 10$

básicas: $\{x_2^+, x_3, x_4, x_1^+\}$ $\quad x_5 \downarrow\downarrow\ x_1^+ \uparrow\uparrow$

ñ básicas: $\{x_5, x_1^-, x_2^-, x_6\}$

$$\begin{cases} x_2^+ = x_2^- + x_6 + 10 \\ x_3 = x_6 + 9 \\ x_4 = 5x_6 + 12 \\ x_1^+ = x_1^- + 2x_6 + 4 \end{cases}$$

f. obj. $-4x_6 - 72$

$x_6 \uparrow\uparrow$

$$\underbrace{\begin{matrix} x_2^+ \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1^+ \end{matrix}}_{x_b} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{matrix} x_6 \\ x_6 \\ 5x_6 \\ 2x_6 \end{matrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 10 \\ 9 \\ 12 \\ 4 \end{matrix}}^{B^{-1}b} \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_6 \geq -10 \\ x_6 \geq -9 \\ x_6 \geq -12/5 \\ x_6 \geq -2 \end{matrix}$$

$\therefore x_6 \leq \infty$

problema ilimitado

$-BA_k x_k = -U x_k$

Então $U = [-1\ -1\ -5\ -2]^T$ tem todo elemento negativo

$e_k = [0 \cdots 0\ 1]^T$

$\Rightarrow d = [1\ 1\ 5\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$ é raio extremo

Considerando $[x_b^T\ x_N^T] = [x_2^+\ x_3\ x_4\ x_1^+\ x_5\ x_1^-\ x_2^-\ x_6]$

Então a direção d decresce o custo infinitamente

③ Suponha um problema de minimização

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & b \geq 0 \end{aligned}$$

com base atual $\{1, 2, \dots, i\}$

Tome $c^T x = c_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in \mathcal{N}} \underbrace{(c_j - c_B^T B^{-1} A_j)}_{\bar{c}_j} x_j$, $\mathcal{N}$: índices de não básicas

$\mathcal{B}$: índices de básicas

Na iteração K, suponha o seguinte teste da razão

$$x_1 = b_1 - \alpha_1 x_\ell$$
$$\vdots$$
$$x_i = b_i - \alpha_i x_\ell$$

$\hookrightarrow U$

Suponha que x_ℓ entra na base, então $\bar{c}_\ell = c_\ell - c_B^T B^{-1} A_\ell = c_\ell - c_B^T U < 0$

Suponha que x_i entra na base, então:

$i = \underset{j \in \hat{M}}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{x_B(j)}{U(j)} \right)$ onde $\hat{M}$ contém os índices tais que

$U_j > 0 \quad \therefore \alpha_i > 0$

O mínimo deve ser $\frac{x_B(i)}{\alpha_i} = \frac{b_i}{\alpha_i}$

Com a nova base, tem-se:

$$x_\ell = \frac{b_i}{\alpha_i} - \frac{x_i}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_i} \Big(\underbrace{\beta x_{i+1} + \cdots}_{\text{não básicas}} \Big)$$

Nova base $\bar{B}$

Note que o vetor de custos básicos foi alterado:

$\bar{c}_B \neq c_B$, trocou-se c_i por c_ℓ em c_B:

$\bar{c}_B = [c_1 \cdots c_\ell] \neq [c_1 \cdots c_i] = c_B$

Então: $\bar{c}_\ell = c_\ell - \bar{c}_B^T \bar{B}^{-1} A_\ell = 0$ já que x_ℓ é básica

Suponha que x_i entra na base na iteração $K+1$, então:

$$\bar{c}_i = \left(c_i - \bar{c}_B^T \bar{B}^{-1} A_i \right) < 0$$

O teste da razão será expresso por

$$x_1 = b_1 - \alpha_1 \left(\frac{b_i - x_i}{\alpha_i} \right) = \left(b_1 - \frac{\alpha_1 b_i}{\alpha_i} \right) + \alpha_1 \frac{x_i}{\alpha_i}$$

$$\vdots$$

$$x_l = \frac{b_i}{\alpha_i} - \frac{x_i}{\alpha_i}$$

Agora, note que $-\bar{B}^{-1} A_i = \left[\alpha_1/\alpha_i \; \cdots \; -1/\alpha_i \right]^T$, então:

$$c_i - \bar{c}_B^T \bar{B}^{-1} A_i = c_i + \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \neq i}} c_j \cdot \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - \frac{c_l}{\alpha_i} = \bar{c}_i^{K+1} \quad \star$$

Mas, anteriormente (na iteração K) tinha-se $\bar{c}_l$ igual a

$$c_l - c_B^T B^{-1} A_l = c_l - \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \neq i}} c_j \cdot \alpha_j - c_i \cdot \alpha_i = \bar{c}_l^K \quad \triangle$$

Note então, que

$$\alpha_i \bar{c}_i^{K+1} = \alpha_i c_i + \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \neq i}} c_j \alpha_j - c_l \quad (\text{de } \star)$$

e

$$-c_l = -\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \neq l}} c_j \alpha_j - c_i \alpha_i - \bar{c}_l^K \quad (\text{de } \triangle)$$

Substituindo as expressões e notando que ambos os somatórios estão na mesmas variáveis:

$$\alpha_i \bar{c}_i^{K+1} = -\bar{c}_l^K \Rightarrow \bar{c}_i^{K+1} = -\frac{\bar{c}_l^K}{\alpha_i}$$

Então, para que $\bar{c}_i = \bar{c}_i^{K+1}$ seja negativo:

$\bar{c}_i = -\dfrac{\bar{c}_\ell^{\,K}}{\alpha_i} < 0$, mas α_i é positivo dado que x_i havia saído da base, e o custo reduzido $\bar{c}_\ell^{\,K}$ deve ser negativo, já que x_ℓ entrou na base.

Portanto, se $\alpha_i > 0$ e $\bar{c}_\ell^{\,K} < 0$, a fração $-\dfrac{\bar{c}_\ell^{\,K}}{\alpha_i}$ deve ser positiva

$$\Rightarrow \bar{c}_i = \bar{c}_i^{\,K+1} > 0$$

Isso é uma contradição, visto que se assumiu que x_i iria entrar na base.

Portanto, é impossível que uma variável que saiu da base na iteração K, retorne à base na iteração $K+1$.

$\square$

4 $\quad \min \; x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ (Bertsimas p. 114)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 3 \\
-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 &= 2 \\
4x_2 + 9x_3 + x_7 &= 5 \\
3x_3 + x_4 + x_8 &= 1 \\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

Seja a base dada por $\mathcal{B} = \{5, 6, 7, 8\}$. Suponha que x_4 entra na base

$$\begin{aligned}
x_8 &= 1 - \cancel{3x_3} - x_4 \\
x_7 &= 5 - \cancel{4x_2} - \cancel{9x_3} \\
x_6 &= 2 + \cancel{x_1} - \cancel{2x_2} - \cancel{6x_3} \\
x_5 &= 3 - \cancel{x_1} - 2x_2 - \cancel{3x_3}
\end{aligned}
\quad \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 1$$

$\therefore x_8$ sai da base

$\mathcal{B} = \{5, 6, 7, 4\}$, $c^T x = 11 - 8x_2 - 21x_3 - x_8$

x_3 entra na base:

$x_4 = 1 - 3x_3 - \cancel{x_8}$ $\qquad x_3 \leq 1/3$

$x_7 = 5 - 4\cancel{x_2} - 9\cancel{x_3}$ $\qquad \geq 0 \Rightarrow$

$x_6 = 2 + \cancel{x_1} - 2\cancel{x_2} - 6x_3$ $\qquad x_3 \leq 1/3$

$x_5 = 3 - \cancel{x_1} - 2\cancel{x_2} - 3x_3$ $\qquad x_3 \leq 1$

Escolha x_4 para sair da base.

Então, é possível que x_i entre na base na iteração K e saia da base na iteração $K+1$.

5 min $c^T x$ $\quad$ Toda solução básica é viável por construção.
$Ax = b$

Para ser variável básica, deve atender às restrições de igualdade e ter n restrições justas, onde n é a dimensão de x. Como só há restrições de igualdade, toda solução básica é viável.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Se o posto de A for igual a m, então é possível construir qualquer vetor b a partir de x.

Se o posto de A for menor que m e $b_i \neq 0$, então não existe x tal que $Ax = b$:

Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, se $b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, então existiria

x tal que $Ax = b$.

Portanto, se $\text{rank}(A) < m$ e $b_i \neq 0$, não há solução

Suponha que $\text{rank}(A) = m$, então $\exists x$ t.q. $Ax = b$.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - m$:

Então, para todo $y \in \text{Ker}(A)$: $A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay =$

$Ax + 0 = b$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Se c é ortogonal ao kernel de A, então existem infinitas soluções ótimas. Caso contrário, problema é ilimitado $\square$

6 min $x_1 + x_2 + |x_3|$

$$x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 5$$
$$x_1 - 4x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow$$ possível separar em $x = x^+ + x^- = |x^+ - x^-|$

Forma padrão:

$$\min \; x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3^+ + x_3^-$$

$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + 7(x_3^+ - x_3^-) + x_4 = 5$$

$$x_1 - 4(x_2^+ - x_2^-) - x_5 = 1$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0$$

7) Se $\bar{x}$ é viável, então $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$.

Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rank}(A) = m$.

Então, como $\bar{x}$ é viável, existem ao menos m restrições $(Ax = b)$ respeitadas na igualdade. Suponha que K entradas de $\bar{x}$ sejam nulas, tal que $m+K$ restrições são justas.

Se $K = n-m$, $\bar{x}$ é básica viável. Caso contrário, selecione m entradas de $\bar{x}$ e defina $\bar{x} = [x_B^T \ \ x_a^T]^T$ tal que $x_B \in \mathbb{R}^m$ contém as m entradas selecionadas e $x_a \in \mathbb{R}^{n-m}$ contém as demais. Tome x_B como as variáveis básicas e note que x_a não são as variáveis não básicas, já que há elementos de x_a com valores não nulos.

Então $c^T x = c_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - c_B^T B^{-1} A_j) x_j$, $\mathcal{N}$ índices que não são das básicas x_B

Para as K entradas nulas, o resultado no somatório será nulo, mas há $(n-m-K)$ com valor positivo. Suponha que os índices dessas são $\mathcal{A} = \{m+K+1, m+K+2, \cdots, n\}$, então

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in \mathcal{A}} (c_j - c_B^T B^{-1} A_j) x_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ j \notin \mathcal{A}}} (c_j - c_B^T B^{-1} A_j) x_j$$

Agora, note que, se $\bar{x}$ é viável e não básica, então deve ou ser ponto interior ou pertence a uma face do poliedro. Portanto sempre existe um vetor d tal que $x = \bar{x} + \theta d$ é viável para $\theta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno.

Ainda, há duas opções: ou d é ortogonal a c ou ele decresce o custo. Caso $c^T x > 0$, basta tomar $d' = -d$.

Se d é ortogonal a c: $c^T x = c^T(\bar{x} + \theta d) = c^T x + \theta c^T d$ $= c^T x + 0 = c^T x$. Então d não altera o custo, mas "leva" $\bar{x}$ até uma solução básica viável (vértice)

Se d é tal que $c^T x < 0$, então d reduz o custo e caminha na direção de uma solução básica viável, uma vez que toda solução de PL está em um vértice.

Finalmente, seja $\mathcal{V}$ o conjunto de índices de variáveis não básicas x_a cujo seu valor é nulo, $x_a(j) = 0 \ \forall j \in \mathcal{V}$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de índices de variáveis não básicas positivas, $x_a(j) > 0 \ \forall j \in \mathcal{A}$.

O pivoteamento pode ser feito da seguinte maneira:

Selecione $j \in \mathcal{A}$ tal que o custo reduzido $\bar{c}_j$ seja menor ou igual a zero. (Note que se $\bar{x}$ for ponto interior, isso sempre é possível)

Caso $\mathcal{A} = \emptyset$ ou $\bar{c}_i > 0 \ \forall i \in \mathcal{A}$, então selecione $j \in \mathcal{V}$ tal que o custo reduzido $\bar{c}_j$ seja negativo.

Então, x_j entra na base.

Aplique o teste da razão para escolher a variável que sai da base.

Note que $d = \begin{bmatrix} -B^{-1}A_j \\ e_j \end{bmatrix}$ é o vetor que se está seguindo

Eventualmente se converge para uma solução básica viável ótima

Ainda, o pivoteamento foi construído de forma a sempre valer $c^T\hat{x} \leq c^T\bar{x}$ para $\hat{x}$ básica viável, uma vez que a cada iteração ou a variável nova na base reduz o custo (custo reduzido negativo) ou o mantém (custo reduzido nulo), o que implica em caminhar para uma solução básica.

8 $\min \; c^T x$ $\quad U \in \mathbb{R}^n, \; U > 0$

$Ax = b$

$0 \leq x \leq U$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; \text{rank}(A) = m$

Uma solução básica deve atender m restrições de igualdade e mais (n−m) restrições de desigualdade de forma justa.

Nesse caso tem-se as seguintes restrições:

$$\left.\begin{array}{lll} Ax = b & m & \text{restrições} \\ x \geq 0 & n & \text{restrições} \\ x \leq U & n & \text{restrições} \end{array}\right\} \; m + 2n \text{ restrições no total}$$

Dessa forma as variáveis não básicas x_N serão ou $x_N(i) = 0$ ou $x_N(i) = U$

Seria possível fazer $x \leq U \rightarrow x + \underbrace{x_a}_{\text{variáveis de folga}} = U$ e aumentar a matriz A para utilizar o mesmo método. Mas, suponha que o desejado é considerar o upper bound.

O simplex será modificado da seguinte forma: quando uma variável se torna não básica, deve-se escolher se se torna U_i ou 0. Além disso, o teste de otimalidade também muda.

Seja $\mathcal{L}$ os índices das variáveis não basicas iguais a 0 e $\mathcal{U}$ o índice de não básicas iguais a U_i.

Teste de otimalidade: existe $j \in \mathcal{L}$ tal que $\bar{c}_j < 0$ ou $j \in \mathcal{U}$ tal que $\bar{c}_j > 0$? Se sim, não atingiu o ponto ótimo e deve-se fazer pivoteamento. Caso contrário, x atual é ótimo e não é necessário continuar.

Se não está no ótimo x_j entra na base. Para decidir qual variável sai da base, seja $V = B^{-1}A_j$ a direção para mudança de base.

Então, se $V_i > 0$, a variável se tornará não básica com $x_i = 0$. Caso $V_i < 0$, ela será $x_i = U$.

$$\text{Seja} \quad \Theta_i = \begin{cases} \dfrac{x_i}{V_i}, & \text{se } V_i > 0 \quad (x_i \text{ se torna } 0) \\ \dfrac{x_i - U_i}{V_i}, & \text{se } V_i < 0 \quad (x_i \text{ se torna } U) \end{cases}$$

Tome então o menor Θ_i, $\Theta = \min\limits_{i \in \mathcal{B}} \Theta_i$, onde $\mathcal{B}$ representa os índices de variáveis básicas a variável que sai da base é aquela cujo índice $i = \underset{k \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmin}}\, \Theta_k$.

Então o update $x^{new} = x + \Theta d$, para $d = \begin{bmatrix} -V \\ e_j \end{bmatrix}$ se $x_j = 0$ e $d = \begin{bmatrix} -V \\ -e_k \end{bmatrix}$ se $x_j = U_j$ é:

Caso $x_j = 0 \Rightarrow V_i > 0$, então

$$x_i^{new} = x_i + \left(\frac{x_i}{v_i}\right)(-v_i) = 0$$

$$x_j^{new} = x_j + \left(\frac{x_i}{v_i}\right)(1) = \frac{x_i}{v_i}$$

Caso $x_j = u_j \Rightarrow v_i < 0$:

$$x_i^{new} = x_i + \left(\frac{x_i - u_i}{v_i}\right)(-v_i) = u_i$$

$$x_j^{new} = x_j + \left(\frac{x_i - u_i}{v_i}\right)(-1) = u_j + \frac{u_i}{v_i}$$

Note que $u_j + \frac{u_i}{v_i} < u_j$, já que $u_i > 0$ e $v_i < 0$