Programação Linear
Lista de Exercícios - Fundamentos Matemáticos

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Data de entrega: 18 de Abril de 2025.

Questão 01: Considere que B seja uma matriz 4×4 sobre a qual aplicamos as seguintes operações:

1. dobrar os valores da coluna 1
2. dividir os valores da linha 3
3. adicionar linha 3 à linha 1
4. trocar as linhas 1 e 4
5. subtrair a linha 2 de cada uma das outras linhas
6. substituir a coluna 4 pela coluna 3
7. eliminar a coluna 1, de forma que a dimensão da matriz resultante seja uma coluna a menos.

Escreva cada matriz utilizada para aplicar as operações descritas anteriormente.

Questão 2: Encontre as bases e as dimensões para cada um dos quatro espaços fundamentais associados às matrizes A e B:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Questão 03: Considere a matriz A indicada e responda:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Qual o posto de A ? Justifique.
2. Forneça bases para $C(A), C(A^T), N(A)$.
3. Os sistemas lineares $Ax = b$ e $Ax = c$ para $b = (3, 2, 1)^T$ e $c = (2, 2, 1)^T$ admitem solução única, infinitas soluções ou não admitem solução ? Justifique sua resposta, conectando-a com as dimensões dos espaços fundamentais de A.

4. Pré-multiplicar A por uma matriz de permutação altera $C(A)$ e/ou $C(A^T)$? Sim ou não e justifique sua resposta. Caso altere, apresente algum elemento na diferença entre os subespaços antes e depois da permutação.

Questão 04 Considere a matriz simétrica $S = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ e responda.

1. Usando a fatoração $S = LU$, escreva S como uma soma de matrizes de rank-1.
2. Indique as condições necessárias (em a, b, c, d) para que não haja pivot nulo no processo de fatoração e, desta forma, possamos fatorar $S = LU$.

Questão 05 Quais são as matrizes de multiplicadores M e de permutação P tais que $A = P^T M^{-1} \hat{A}$ para as matrizes $A, \hat{A}$ indicadas abaixo ? $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 9/4 \\ 4 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -1/2 \end{bmatrix}$

Questão 6 Para $k = 10$ e A, b dados abaixo, calcule a solução do sistema linear $A^k x = b$, sem explicitamente avaliar A^k. Qual é o problema em se avaliar explicitamente A^k para k grande ?

```
A  =
   0.   8.   8.   6.   4.   3.
   5.   2.   4.   6.   9.   5.
   3.   1.   4.   7.   9.   3.
   4.   7.   9.   9.   3.   5.
   3.   2.   1.   5.   4.   5.
   1.   7.   2.   3.   7.   1.
b  =
   391.
   830.
   588.
   483.
   223.
   840.
```

Questão 7 Considerando a matriz A e o vetor b dados na questão anterior e o vetor d abaixo indicado, calcule o valor de u dado por $u = d^T A^{-1} b$ sem explicitamente calcular a matriz A^{-1}. Dica: use a fatoração $PA = LU$.

```
d  =
   1.
   3.
   9.
   8.
   5.
   10.
```

Questão 8: Suponha que A seja uma matriz simétrica ($A^T = A$). O espaço coluna de A é perpendicular ao espaço nulo de A? Justifique.

Questão 9: Considere o conjunto $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, 2x_1 - x_2 + x_3 = -1\}$. Mostre que P é um conjunto afim, identifique sua dimensão e caracterize P a partir de um espaço vetorial conveniente e um ponto qualquer.
Questão 10: Se $Ax = b$ tem solução e $A^T y = 0$, $(y^T x = 0)$ ou $(y^T b = 0)$? Justifique.

Questão 11: Considere a função, $f(x) = \max\{-x + 1, x - 2, -2x + 3\}$, cujo domínio é $x \in \mathbb{R}$. Ela é convexa ? Em caso positivo demonstre. É diferenciável ? Se não for, caracterize o subdiferencial nos pontos onde não é diferenciável.
Questão 12: Mostre que o conjunto $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ é convexo.
Questão 13: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Uma solução para o sistema $Ax = b$ é o vetor $x = [1 \quad 1 \quad 2]^T$. Responda:

1. Esta solução é única ? Em caso positivo, justifique. Em caso negativo, justifique e apresente uma solução alternativa.

Questão 17: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. $\{(x, y) : y = |x|, x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.
2. $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.
3. $\{(x, y) : x^2 - y^2 = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.
4. $\{(x, y) : x - y = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Questão 18: Sejam W_1, W_2 dois subespaços de um espaço vetorial V e seja

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

a soma de W_1 e W_2.

1. Mostre que $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ são subespaços.
2. Mostre que $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.
3. $W_1 \cup W_2$ é um subespaço ? Justifique.
4. Quando $W_1 \cup W_2$ é um subespaço ?
5. Qual o menor subespaço de V contendo $W_1 \cup W_2$?

Questão 19: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais gerados respectivamente pelos v's e u's abaixo indicados.

- $v^1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $v^2 = (3, 1, 1, 1)^T$ e $v^3 = (-1, 0, 1, -1)^T$
- $u^1 = (2, 5, -6, -5)^T$, $u^2 = (-1, 2, -7, 3)^T$.

Encontre as dimensões e bases para $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

Observação Suponha que $U_1, \ldots, U_m$ sejam subespaços de um espaço vetorial V. Cada elemento de $U_1+U_2+\cdots+U_m$ pode ser escrito como $u_1+u_2+\cdots+u_m$, onde $u_j \in U_j$. Estamos particularmente interessados em casos em que cada vetor em $U_1+U_2+\cdots+U_m$ pode ser representado na forma acima, de uma única forma (os u_j's são únicos). Neste caso, dizemos que o vetor é a soma direta destes m subespaços.
Definição: Suponha que $U_1, \ldots, U_m$ sejam subespaços de V. A soma $U_1+U_2+\cdots+U_m$ é chamada de soma direta, se cada elemento u de $U_1+U_2+\cdots+U_m$ puder ser escrito de uma única forma $u_1+u_2+\cdots+u_m$, onde cada $u_j \in U_j$. Se $U_1+U_2+\cdots+U_m$ é uma soma direta, representamos como $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Alguns resultados adicionais:

1. $U + U^{\perp}$ formam uma soma direta de V, se U é subespaço de V.

2. Se U, W são subespaços de V, então $U+W$ é uma soma direta se e somente se $U \cap W = \{0\}$.

3. Se $U_1, U_2, \ldots, U_m$ são subespaços de V então $U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ é uma soma direta se e somente se a única forma de escrevermos o vetor 0 (zero) como uma soma de $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ é tomando cada um dos u_j's como o próprio vetor 0.

Questão 20: Responda se a soma dos U's abaixo formam somas diretas.

1. $U_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

2. $U_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$.