

Felipe Bartelt - 2025690830

(1)

$$\min c^T x \quad \min c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad Bx_B + Nx_N = b$$

$$x \geq 0 \quad \quad \quad x \geq 0$$

Suponha base B tal que $B = [A_{B(1)} \cdots A_{B(m)}]$, onde \mathcal{B} é um conjunto de índices de colunas L ; e $A = [B \ N]$.

Seja x_B variáveis básicas e x_N não básicas:

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (\exists B^{-1} \text{ já que é base})$$

Seja \mathcal{N} o conjunto de índices que não pertencem a \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}(b - Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1} x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\ &= c_B^T B^{-1} x_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - c_B^T B^{-1} A_j) x_j = c_B^T B^{-1} x_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j \end{aligned}$$

O simplex consegue detectar que o PPL é ilimitado quando para uma variável não básica x_K , tem-se $u_i < 0$, onde

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1} A_j x_j = B^{-1}b - \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1} A_K}_{U} x_K \\ &= B^{-1}b - U x_K \end{aligned}$$

Tome \hat{U} o conjunto de índices tais que $u_i > 0$, se $\hat{U} = \emptyset$ então o problema é ilimitado (pode-se crescer x_B o quanto se quiser)

Note que é possível mover na direção U o quanto se queria e x_B continuaria básica. Então U é uma direção básica.

$$\text{Então } A(x+\alpha d) = Bx_B - 2Bu + Nx_N - \alpha Nd_N = b,$$

onde $d = \begin{bmatrix} U \\ d_N \end{bmatrix}$ é direção básica. Note que d_N é tal que só tem um elemento não nulo na K -ésima posição:

$$d = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{referente a } x_K = \begin{bmatrix} -U \\ e_K \end{bmatrix}$$

Ainda, como $A(x+\alpha d) = b$ e $Ax=b$ se x é vértice, então $\alpha Ad=0 \Rightarrow Ad=0$

$$\text{Note que } c^T d = -c_B^T B^{-1} A_K + c_N^T e_K = -c_B^T B^{-1} A_K + c_K,$$

O custo reduzido de x_K é $c_K - c_B^T B^{-1} A_K$,

onde K é um elemento de N .

O simplex seleciona x_K tal que $\bar{c}_K < 0$, então é claro que $c_K - c_B^T B^{-1} A_K < 0 \Rightarrow c^T d < 0$ \square

(2)

$$\min 2x_1 - 8x_2$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 6$$

\curvearrowright Precisa adicionar restrições de sinal e variáveis de folga

$$\min 2(x_1^+ - x_1^-) - 8(x_2^+ - x_2^-)$$

$$(x_2^+ - x_2^-) - x_3 = 1$$

$$(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) - x_4 = 2$$

$$-\frac{1}{2}(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) + x_5 = 8$$

$$-(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) + x_6 = 6, \quad x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Seja $x = [x_1^+ \ x_1^- \ x_2^+ \ x_2^- \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]$,

$$c^T = [2 \ -2 \ -8 \ 8 \ 0 \dots 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [1 \ 2 \ 8]^T$$

O problema é

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \text{na forma padrão}$$

Dado $X_1 = 0, X_2 = 6 \Rightarrow x_1^+ = x_1^- = 0, x_2^+ = 6, x_2^- = 0$

$$6 - x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 5$$

$$6 - x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$6 + x_5 = 8 \Rightarrow x_5 = 2$$

$$6 + x_6 = 6 \Rightarrow x_6 = 0$$

básicas: $\{x_2^+, x_3, x_4, x_5\}$

n base: $\{x_1^+, x_1^-, x_2^-, x_6\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_1^+ - x_1^- + x_2^- - x_6 + 6 - \cancel{x_2^+} - 1 \\ x_4 = x_1^+ - x_1^- + x_1^+ - x_1^- + \cancel{x_2^+} - x_6 + 6 - \cancel{x_2^-} - 2 \\ x_5 = 0.5x_1^+ - 0.5x_1^- - (x_1^+ - x_1^- + x_2^- - x_6 + 6) + \cancel{x_2^+} + 8 \\ x_2^+ = x_1^+ - x_1^- + x_2^- - x_6 + 6 \end{array} \right.$$

Candidatas à base: f. obj. $-6x_1^+ + 6x_1^- + 8x_6 - 48$

$\Rightarrow x_1^+$ é a única que reduz custo

$$x_3 = 5 + x_1^+$$

$$x_1^+ \geq -5$$

$$x_4 = 2x_1^+ + 4 \geq 0$$

$$x_1^+ \geq -2$$

$$x_5 = -0.5x_1^+ + 2$$

$$x_1^+ \leq 4$$

$$x_2^+ = x_1^+ + 6$$

$$x_1^+ \geq -6$$

$$\text{Se } x_2^+ = 4 \Rightarrow x_3 = 9, x_4 = 12, x_5 = 0, x_L^+ = 10$$

básicos: $\{x_2^+, x_3, x_4, x_1^+\}$ $x_5 \nrightarrow x_L^+$ \nexists

não básicos: $\{x_5, x_1^-, x_2^-, x_6\}$

$$\begin{cases} x_2^+ = x_2^- + x_6 + 10 \\ x_3 = x_6 + 9 \\ x_4 = 5x_6 + 12 \\ x_L^+ = x_1^- + 2x_6 + 4 \end{cases}$$

$$\text{f. obj. } -4x_6 - 72$$

$x_6 \nrightarrow$

$$\begin{aligned} x_2^+ &= x_6 + 10 && B^{-1}b \\ x_3 &= x_6 + 9 && \geq 0 \Rightarrow x_6 \geq -9 \\ x_4 &= 5x_6 + 12 && x_6 \geq -12/5 \\ x_1^+ &= 2x_6 + 4 && x_6 \geq -2 \\ \text{e} \\ x_b & \end{aligned}$$

$x_6 \geq -10$

$\therefore x_6 \leq \infty$

problema ilimitado

$$-B^{-1}A_K x_K = -U x_K$$

Então $U = [-1 \ -1 \ -5 \ -2]^T$ tem todos elementos negativos

$$c_K = [0 \dots 0 \ L]^T$$

$$\Rightarrow d = [L \ L \ 5 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ L]^T \text{ é raios extremos}$$

$$\text{Considerando } [x_b^T \ x_N^T] = [x_2^+ \ x_3 \ x_4 \ x_1^+ \ x_5 \ x_1^- \ x_2^- \ x_6]$$

Então a direção d decresce o custo infinitamente

③ Suponha um problema de minimização

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ b \geq 0 \end{array} \quad \text{com base atual } \{1, 2, \dots, i\}$$

$$\text{Tome } c^T x = c_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in J \setminus \{i\}} \underbrace{(c_j - c_B^T B^{-1} A_j)}_{\bar{c}_j} x_j, \quad \begin{array}{l} J: \text{índices de} \\ \text{não básicas} \\ J \setminus \{i\}: \text{índices de} \\ \text{básicas} \end{array}$$

Na iteração K, suponha o seguinte teste da razão

$$x_l = b_l - \alpha_l x_l$$

:

$$x_i = b_i - \alpha_i x_l$$

$\hookrightarrow U$

Seja x_l a variável que entra na base,

$$\text{então } \bar{c}_l = c_l - c_B^T B^{-1} A_l = c_l - c_B^T U < 0$$

Suponha que x_i sai da base, então:

$$i = \underset{j \in M}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{x_{B(j)}}{U(j)} \right) \quad \text{onde } M \text{ contém os índices tais que} \\ U_j > 0 \quad \therefore \alpha_i > 0$$

$$\text{O mínimo deve ser } \frac{x_{B(i)}}{\alpha_i} = \frac{b_i}{\alpha_i}$$

Com a nova base, tem-se:

$$x_l = \frac{b_l}{\alpha_l} - \frac{x_i}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_i} \left(\underbrace{\beta x_{i+1} + \dots}_{\text{não básicas}} \right)$$

Nova base \bar{B}

Note que o vetor de custos básicos foi alterado:

$\bar{c}_B \neq c_B$, trocou-se c_i por c_l em c_B :

$$\bar{c}_B = [c_1 \dots c_l] \neq [c_1 \dots c_i] = c_B$$

Então: $\bar{c}_l = c_l - \bar{c}_B^T \bar{B}^{-1} A_l = 0$ já que x_l é básica

Assuma que x_i entra na base na iteração $K+1$, então:

$$\bar{C}_i = (c_i - \bar{C}_B^T \bar{B}^{-1} A_{i,:}) < 0$$

O teste da razão será expresso por

$$x_1 = b_1 - \alpha_1 \left(\frac{b_i - x_i}{\alpha_i} \right) = \left(\frac{b_1 - \alpha_1 b_i}{\alpha_i} \right) + \alpha_1 \frac{x_i}{\alpha_i}$$

⋮

$$x_l = \frac{b_i}{\alpha_i} - \frac{x_i}{\alpha_i}$$

Agora, note que $-\bar{B}^{-1} A_{i,:} = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdots -\frac{1}{\alpha_i} \right]^T$, então:

$$c_i - \bar{C}_B^T \bar{B}^{-1} A_{i,:} = c_i + \sum_{\substack{j \in \partial \\ j \neq i}} c_j \cdot \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - \frac{c_l}{\alpha_i} = \bar{C}_i^{K+1} \quad *$$

Mas, anteriormente (na iteração K) tinha-se \bar{C}_l igual a

$$c_l - C_B^T B^{-1} A_l = c_l - \sum_{\substack{j \in \partial \\ j \neq i}} c_j \cdot \alpha_j - c_i \cdot \alpha_i = \bar{C}_l^K \quad \Delta$$

Note então, que

$$\alpha_i \bar{C}_i^{K+1} = \alpha_i c_i + \sum_{\substack{j \in \partial \\ j \neq i}} c_j \alpha_j - c_l \quad (\text{de } *)$$

e

$$-c_l = -\sum_{\substack{j \in \partial \\ j \neq l}} c_j \alpha_j - c_i \alpha_i - \bar{C}_l^K \quad (\text{de } \Delta)$$

Substituindo as expressões e notando que ambos os somatórios estão nas mesmas variáveis:

$$\alpha_i \bar{C}_i^{K+1} = -\bar{C}_l^K \Rightarrow \bar{C}_i^{K+1} = -\frac{\bar{C}_l^K}{\alpha_i}$$

Então, para que $\bar{C}_i = \bar{C}_i^{K+1}$ seja negativo:

$\bar{C}_i = -\frac{\bar{C}_e^K}{z_i} < 0$, mas z_i é positivo daí
que x_i havia saído da base, e o custo reduzido
 \bar{C}_e^K deve ser negativo, já que x_e entrou na base.

Portanto, se $z_i > 0$ e $\bar{C}_e^K < 0$, a fração

$-\frac{\bar{C}_e^K}{z_i}$ deve ser positiva

$$\Rightarrow \bar{C}_i = \bar{C}_i^{K+1} > 0$$

Isto é uma contradição, visto que se assumiu que
 x_i iria entrar na base.

Portanto, é impossível que uma variável que saiu da
base na iteração K , retorne à base na iteração
 $K+1$.



④ $\min x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ (Bertrand p. 114)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2$$

$$4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5$$

$$3x_3 + x_4 + x_8 = 1$$

$$x \geq 0$$

Seja a base dada por $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Suponha que x_4
entra na base

$$x_8 = 1 - 3x_3 - x_4$$

$$x_7 = 5 - 4x_2 - 9x_3 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 1$$

$$x_6 = 2 + x_1 - 2x_2 - 6x_3$$

$\therefore x_8$ sai da base

$$x_5 = 3 - x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\mathcal{B} = \{5, 6, 7, 4\}, \quad C^T x = 11 - 8x_2 - 21x_3 - x_8$$

x_3 entra na base:

$$x_4 = 1 - 3x_3 - x_8 \quad x_3 \leq \frac{1}{3}$$

$$x_7 = 5 - 4x_2 - 9x_3 \quad \gamma, 0 \Rightarrow$$

$$x_6 = 2 + x_1 - 2x_2 - 6x_3 \quad x_3 \leq \frac{1}{3}$$

$$x_5 = 3 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \quad x_3 \leq 1$$

Escolha x_4 para sair da base.

Então, é possível que x_i entre na base na iteração k e saia da base na iteração $k+1$.

⑤ $\min c^T x$ Toda solução básica é viável por construtor.

Para ser variável básica, deve atender às restrições de igualdade e ter n restrições justas, onde n é a dimensão de x . Como só há restrições de igualdade, toda solução básica é viável.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Se o posto de A for igual a m , então é possível construir qualquer vetor b a partir de x .

Se o posto de A for menor que m e $b_i \neq 0$, então não existe x tal que $Ax = b$:

Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, se $b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, então existiria

x tal que $Ax = b$.

Portanto, se $\text{rank}(A) < m$ e $b_i \neq 0$, não há solução.

Suponha que $\text{rank}(A) = m$, então $\exists x$ t.g. $Ax = b$.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - m$:

Então, para todo $y \in \text{Ker}(A)$: $A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay =$

$$Ax + 0 = b, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Se c é ortogonal ao kernel de A , então existem infinitas soluções ótimas. Caso contrário, problema é ilimitado \square

⑥ $\min |x_1 + x_2 + 1x_3|$

$$x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 5$$

$$x_1 - 4x_2 \geq 11$$

$$x_1 \geq 0$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow \text{possível separar em } x = x^+ + x^- = |x^+ - x^-|$$

Forma padrão:

$$\min x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3^+ + x_3^-$$

$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + 7(x_3^+ - x_3^-) + x_4 = 5$$

$$x_1 - 4(x_2^+ - x_2^-) - x_5 = 1$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0$$

(F) Se \bar{x} é viável, então $A\bar{x}=b$ e $\bar{x} \geq 0$.

Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rank}(A)=m$.

Então, como \bar{x} é viável, existem ao menos m restrições ($Ax=b$) respeitadas na igualdade. Suponha que K entradas de \bar{x} sejam nulas, tal que $m+K$ restrições são justas.

Se $K=n-m$, \bar{x} é básica viável. Caso contrário, selecione m entradas de \bar{x} e defina $\bar{x} = [x_B^T \ x_a^T]^T$ tal que $x_B \in \mathbb{R}^m$ contém as m entradas selecionadas e $x_a \in \mathbb{R}^{n-m}$ contém as demais. Tome x_B como as variáveis básicas e note que x_a não são as variáveis não básicas, já que há elementos de x_a com valores não nulos.

Então $C^T x = C_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in A} (C_j - C_B^T B^{-1} A_j) x_j$, A índices que não são das básicas x_B

Para as K entradas nulas, o resultado no somatório será zero, mas há $(n-m-K)$ com valor positivo. Suponha que os índices dessas são $A = \{m+K+1, m+K+2, \dots, n\}$, então

$$C^T x = C_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in A} (C_j - C_B^T B^{-1} A_j) x_j + \sum_{\substack{j \in A \\ j \notin B}} (C_j - C_B^T B^{-1} A_j) x_j$$

Agora, note que, se \bar{x} é viável e não básica, então deve ou ser ponto interior ou pertence a uma face do poliedro. Portanto sempre existe um vetor d tal que $x = \bar{x} + \theta d$ é viável para $\theta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno.

Ainda, há duas opções: ou d é ortogonal a C ou ele decrece o custo. Caso $c^T x > 0$, basta tomar $d' = -d$.

Se d é ortogonal a C : $c^T x = c^T(\bar{x} + \Theta d) = c^T \bar{x} + \Theta c^T d$
 $= c^T \bar{x} + 0 = c^T \bar{x}$. Então d não altera o custo, mas "leva" \bar{x} até uma solução básica viável (vértice)

Se d é tal que $c^T x < 0$, então d reduz o custo e caminha na direção de uma solução básica viável, uma vez que todo solução de PL está em um vértice.

Finalmente, seja N o conjunto de índices de variáveis não básicas x_a cujo seu valor é nulo, $x_a(j) = 0 \forall j \in N$.

Seja A o conjunto de índices de variáveis não básicas positivas, $x_a(j) > 0 \forall j \in A$.

O pivoteamento pode ser feito da seguinte maneira:

Selecione $j \in A$ tal que o custo reduzido \bar{c}_j seja menor ou igual a zero. (Note que se \bar{x} for ponto interior, isso sempre é possível)

Caso $A = \emptyset$ ou $\bar{c}_i > 0 \forall i \in A$, então selecione $j \in N$ tal que o custo reduzido \bar{c}_j seja negativo.

Então, x_j entra na base.

Aplique o teste da razão para escolher a variável que sai da base.

Note que $d = \begin{bmatrix} -B^{-1}A_j \\ e_j \end{bmatrix}$ é o vetor que se está seguindo

Eventualmente se converge para uma solução básica viável ótima

Ainda, o pivoteamento foi construído de forma a sempre valer $C^T \hat{x} \leq C^T \bar{x}$ para \hat{x} básica viável, uma vez que a cada iteração ou a variável nova na base reduz o custo (custo reduzido negativo) ou o mantém (custo reduzido nulo), o que implica em caminhar para uma solução básica.

⑧ $\min c^T x \quad U \in \mathbb{R}^n, U > 0$
 $Ax = b$
 $0 \leq x \leq U$

 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rank}(A) = m$

Uma solução básica deve atender m restrições de igualdade e mais $(n-m)$ restrições de desigualdade de forma justa.

Nesse caso tem-se as seguintes restrições:

$$\begin{array}{ll} Ax = b & m \text{ restrições} \\ x \geq 0 & n \text{ restrições} \\ x \leq U & n \text{ restrições} \end{array} \left. \begin{array}{l} m+2n \text{ restrições} \\ \text{no total} \end{array} \right\}$$

Dessa forma as variáveis não básicas x_N serão ou $x_{N(i)} = 0$ ou $x_{N(i)} = U$

variáveis de folga

Seria possível fazer $x \leq U \rightarrow x + \underbrace{x_a}_{m} = U$ e aumentar

a matriz A para utilizar o mesmo método. Mas, suponha que o desejado é considerar o upper bound.

O simplex será modificado da seguinte forma:

quando uma variável se torna não básica, deve-se escolher se se torna U_i ou 0. Além disso, o teste de optimidade também muda.

Seja \mathcal{L} os índices das variáveis não básicas iguais a 0

e \mathcal{U} o índice de não básicas iguais a U_i .

Teste de otimalidade: existe $j \in \mathcal{L}$ tal que $\bar{c}_j < 0$ ou $j \in \mathcal{U}$ tal que $\bar{c}_j > 0$? Se sim, não atingiu o ponto ótimo e deve-se fazer pivoteamento. Caso contrário, x atual é ótimo e não é necessário continuar.

Se não está no ótimo x_j entra na base. Para decidir qual variável sai da base, seja $V = B^{-1}A_j$ a direção para mudança de base.

Então, se $V_{ii} > 0$, a variável se tornará não básica com $x_i = 0$. Caso $V_{ii} < 0$, ela será $x_i = U$.

$$\text{Seja } \Theta_i = \begin{cases} \frac{x_i}{V_{ii}}, & \text{se } V_{ii} > 0 \text{ (} x_i \text{ se torna 0)} \\ \frac{x_i - U_i}{V_{ii}}, & \text{se } V_{ii} < 0 \text{ (} x_i \text{ se torna } U) \end{cases}$$

Tome então o menor Θ_i , $\Theta = \min_{i \in \mathcal{B}} \Theta_i$, onde \mathcal{B} representa os índices de variáveis básicas a variável que sai da base é aquela cujo índice $i = \arg \min_{K \in \mathcal{B}} \Theta_K$.

Então o update $x^{\text{new}} = x + \Theta d$, para $d = \begin{bmatrix} -v \\ e_j \end{bmatrix}$ se $x_j = 0$ e $d = \begin{bmatrix} -v \\ -e_K \end{bmatrix}$ se $x_j = U_j$ é:

Caso $x_j = 0 \Rightarrow V_i > 0$, então

$$\chi_i^{\text{new}} = \chi_i + \left(\frac{\chi_i}{v_i} \right) (-v_i) = 0$$

$$\chi_j^{\text{new}} = \chi_j + \left(\frac{\chi_i}{v_i} \right) (-1) = \frac{\chi_i}{v_i}$$

Case $\chi_j = v_j \Rightarrow v_i < 0$:

$$\chi_i^{\text{new}} = \chi_i + \left(\frac{\chi_i - v_i}{v_i} \right) (-v_i) = v_i$$

$$\chi_j^{\text{new}} = \chi_j + \left(\frac{\chi_i - v_i}{v_i} \right) (-1) = v_j + \frac{v_i}{v_i}$$

Note que $v_j + \frac{v_i}{v_i} < v_j$, já que $v_i > 0$ e $v_i < 0$