Felipe Bartelt - 2025690830

---

1) P min $c^T x$ $\quad$ D max $p^T b$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} p^T A &\leq c^T \\ p &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$p = p^*$ é a sol. ótima dual

- $a_k^T x = b_k \longrightarrow \mu a_k^T x = \mu b_k$

$c^T x^*$ se mantém $\Rightarrow$ $p^{*T} b$ se mantém

mas $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \mu b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, então $w = \begin{bmatrix} p_1^* \\ \vdots \\ p_k^*/\mu \\ \vdots \\ p_m^* \end{bmatrix}$

a k-ésima componente do antigo p é dividida por μ

Note que $w^T \bar{A} = p^T A \leq c^T$

- $a_r^T x = b_r \longrightarrow (a_r^T + \mu a_k^T) x = b_r + \mu b_k$

$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_r^T + \mu a_k^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r + \mu b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

A modificação irá implicar:

$a_r^T x + \mu a_k^T x = b_r + \mu b_k$, mas $a_k^T x = b_k$. Então

$a_r^T x = b_r + \mu b_k - \mu b_k \Rightarrow a_r^T x = b_r$

Então o x^* continua o mesmo e $c^T x^*$ se mantém.

Por dualidade forte, $c^T x^* = w^T \bar{b}$, então

$c^T x^* = p^T b = w^T \bar{b} = w^T b + \mu b_k (w^T e_r)$

Então $w = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & & k & & r & & m \end{array} \\ [\,P_1 \;\; P_2 \cdots P_k - \mu P_r \cdots P_r \cdots P_m\,]^T \end{array}$ resolve

$= P - \mu P_r \cdot e_k$

$$\bar{A}^T w = \bar{A}^T p - \mu P_r \bar{A}^T e_K = (A^T p + \mu P_r a_K) - \mu P_r a_K$$
$$= A^T p \leqslant C^T \quad \text{pela otimalidade anterior}$$

- $C^T \to \bar{C}^T = C^T + \mu a_K^T$, o que altera tanto os custos básicos quanto não básicos

A condição de otimalidade é $c^T - c_B^T B^{-1} A \geqslant 0$

$$\Rightarrow \bar{C}^T - \bar{C}_B^T B^{-1} A = C^T - C_B B^{-1} A + \mu a_K^T - \xi B^{-1} A \geqslant 0,$$

onde ξ é a parcela de μa_K^T correspondente às básicas.

Suponha, sem perda de generalidade, $\xi = \mu [a_{K1} \ a_{K2} \cdots a_{Km}]^T$, e que a condição vale, tal que x^* ainda é ótimo:

$$\bar{C}^T x^* = C^T x^* + \mu \underbrace{a_K^T x^*}_{b_K} = w^T b$$

$$\Rightarrow w^T b = c^T x^* + \mu b_K = \underbrace{p^T}_{\text{antigo ótimo dual}} b + \mu b_K$$

$$\therefore \ w = p + \mu e_K \Rightarrow w = [p_1 \cdots p_K + \mu \cdots p_m]^T$$

$$w^T A = p^T A + \mu e_K^T A = p^T A + \mu a_K^T \overset{?}{\leqslant} \bar{C}^T$$

$$p^T A + \mu a_K^T \leqslant C^T + \mu a_K^T$$

$$p^T A \leqslant C^T,$$ que é garantido pela solução antiga

Portanto, supondo que a mudança no custo não afetou a solução do primal, a solução dual ótima é:

$$w = p + \mu e_K = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_K + \mu \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix},$$ onde p é a solução dual ótima antiga

② 1) $\min \ q^T z$

$$Mz \geq -q \quad , \quad M \text{ antissimétrica}$$
$$z \geq 0$$

O dual será:

$\max \ -p^T q$, mas $(\max -\gamma = \min \gamma)$, então

$$M^T p \leq q$$
$$p \geq 0$$

$\min \ p^T q$

$$M^T p \leq q$$
$$p \geq 0$$

Como M é antissimétrica, $M^T = -M$, então $M^T p = -Mp$:

$$-M^T p \leq q \sim M^T p \geq -q$$

$\min \ p^T q$

$$Mp \geq -q$$
$$p \geq 0$$

Note que $z \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Como ambos são variáveis de otimização, a única diferença entre o primal e o dual é a escolha de símbolos para a variável.

$\Rightarrow$ O dual é exatamente o problema primal.

2) Note que, por dualidade fraca, $-p^T q \leq q^T z$

Seja L o limite superior do primal:

$$-p^T q \leq q^T z \leq L$$

Assuma que o primal é ilimitado, então $q^T z \leq -\infty$ e portanto o dual é inviável. Porém, o dual é o primal, que também seria inviável.

Assuma dual ilimitado, então $-p^Tq = +\infty$ e $\infty \leq q^Tz$, portanto o primal é inviável. Como consequência, o dual também é.

Se ambos são inviáveis: $-p^Tq = \infty$ e $q^Tz \leq -\infty$, o que implica $\infty \leq -\infty$. Portanto, o problema não pode ser ilimitado. Como o primal só tem solução ótima se o dual tiver (para o caso de PL), então, como o problema é auto-dual, só há solução se for viável. ($\Leftrightarrow$)

3) $M = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$q = [\underbrace{c^T}_{} \; \underbrace{-b^T}_{\mathbb{R}^m}]^T \in \mathbb{R}^{2m}$, $z = [\overbrace{x^T}^{} \; \overbrace{y^T}^{\mathbb{R}^n}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{array}{lll} \min\ q^Tz & \min\ c^Tx - b^Ty & \min\ c^Tx - b^Ty \\ Mz \geq -q \longrightarrow & 0x - A^Ty \geq -c \longrightarrow & -A^Ty \geq -c \\ z \geq 0 & Ax + 0y \geq b & Ax \geq b \\ & x, y \geq 0 & x, y \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{lll} \max\ -p^Tq & \max\ -p_1^Tc + p_2^Tb & \max\ -c^Tp_1 + b^Tp_2 \\ M^Tp \leq q \longrightarrow & A^Tp_2 \leq c \longrightarrow & A^Ty \geq -c \\ p \geq 0 & -Ap_1 \leq -b & Ap_1 \geq b \\ & p_1, p_2 \geq 0 & p_1, p_2 \geq 0 \end{array}$$

Se z_i for a quantidade de um produto i, p_j seria preço por unidade de recurso j. Nesse caso, onde ambos são iguais, o produto e recurso são a mesma coisa e o preço por produto é exatamente a quantidade do mesmo.

3 $\min c^T x$ $\quad \text{rank}(A)=m, \; A\in \mathbb{R}^{m\times n}, \; x\in \mathbb{R}^n$

$Ax=b$

$x \geq 0$

1) √ Dual: $\quad \max p^T b$ $\qquad p^T A = c^T$

$A^T p \leq c$ $\qquad p^T A x = p^T b$

$p \in \mathbb{R}^m$

Dualidade fraca: $p^T b \leq c^T x$

Assuma que o custo ótimo é dado por $c^T x^*$ finito.

Então $p^T b \leq c^T x^*$. Como o dual é inviável, então

$$p^T A > c^T \quad \forall p \in \mathbb{R}^m$$

Considere o método Simplex e note que:

$A = [B \;\; N]$, onde B é a base. Então

$p^T [B \;\; N] = [p^T B \;\; p^T N]$

e $c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \Rightarrow [p^T B \;\; p^T N] > [c_B^T \;\; c_N^T]$

Assim, para o dual ser inviável $p^T B > c_B^T$ ou $p^T N > c_N^T$.

Note que, para uma base ótima B, tem-se $p^T = c_B^T B^{-1}$.

Então $p^T B = c_B^T B^{-1} B = c_B^T$. Portanto, para o dual ser inviável, $p^T N > c_N^T \Rightarrow c_B^T B^{-1} N > c_N^T \Rightarrow c_N^T - c_B^T B^{-1} N < 0$

Isso pode ser reescrito como $\sum_{j \notin \mathcal{B}} c_j - c_B^T B^{-1} A_j$ para $\mathcal{B}$ um conjunto de índices da base. Mas essa expressão é justamente a soma dos custos reduzidos das variáveis não básicas. Então, Se $c_N^T - c_B^T B^{-1} N < 0$, a base B não é ótima já que existe ao menos uma variável não básica x_K que permite reduzir o custo ao entrar na base. Portanto o custo mínimo é menor que $c^T x^*$. Note que, como isso vale para todo x^*, o primal é ilimitado.

2) ✓ A fase I do método simplex envolve encontrar uma solução básica viável. Para o problema assumido, a fase I é computada por:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{1}^{m} y_i \\ & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

sem perda de generalidade, tome $b \geq 0$

Tome a solução inicial desse problema como $x = 0, y = b$.

Para este problema, $\tilde{c} = [1 \ 1 \cdots 1]^T$. O dual será:

$$\begin{aligned} \max \ & p^T b \\ & p^T[\underbrace{A}_{m \times n} \ \overbrace{I}^{m \times m}] \leq [\underbrace{0^T}_{\mathbb{R}^{1 \times n}} \ \underbrace{1^T}_{\mathbb{R}^{1 \times m}}] \\ & p \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Há três opções para o dual: há solução, o problema é ilimitado ou ele é inviável.

Note que o dual nesse caso não pode ser ilimitado, já que, se o fosse, ter-se-ia o primal inviável. Porém, o primal é viável por construção ($x = 0$, $y = b$ será uma solução válida sempre).

Para o dual ser inviável, então ou $p^T A > 0^T$ ou $p^T A > 1^T$ p/ todo p. Note que $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e o $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = m$. Portanto, existem m colunas linearmente independentes em A^T e $A^T p = 0$ não tem solução e $A^T p = z$ tem solução única. Então $\exists p$ tal que $A^T p \leq 0$, basta tomar então $\bar{p} = p/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tal que $A^T \bar{p} \leq 0$ e $p \leq 1$. Portanto o dual é sempre viável.

Além disso, note que o primal é limitado com o melhor caso de custo 0, então o dual não poderia ser inviável.

3) √ Por relaxação Lagrangeana:

$$L = c^T x + p^T (b - Ax)$$

$$\min_{x \geq 0} L = p^T b + \min_{x \geq 0} \overbrace{(c^T - p^T A)}^{\text{custo reduzido}} x$$

$$\hookrightarrow = \begin{cases} 0, & c^T - p^T A \geq 0 \\ -\infty, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\max \; p^T b \\ &p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Suponha que a linha $a_i^T x = b_i$ é eliminada, o que implica $\bar{A} x = \bar{b}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m-1 \times n}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^{m-1}$ ou forçar $a_i^T = 0^T$, $b_i = 0$

Tomar $b_i = 0$ e $a_i^T = 0^T$ implica em:

$$p^T b = \sum_{j=1}^{m} p_j b_j = \sum_{j \neq i} p_j b_j + p_i b_i$$

e

$$p^T A = \sum_{j=1}^{m} p_j a_j^T = \sum_{j \neq i} p_j a_j^T + p_i a_i$$

Ambos são equivalentes a tomar $p_i = 0$

4) V Se o simplex acusa "ilimitado" em alguma iteração, então $c^T x \to -\infty$

Por dualidade fraca, vale $p^T b \leq c^T x$, o que implica $p^T b \leq -\infty$, mas o problema dual é de maximização, então, se houvesse solução:

$$\max p^T b = p^{*T} b \leq -\infty$$, mas é impossível que o máximo de uma otimização seja $-\infty$. Portanto, o dual é inviável.

④ $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\max_{i=1,\dots,m} (a_i^T x - b) \right) = V, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Equivalentemente:

$$\min z$$
$$z \geq a_i^T x - b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$
$$z, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\min \begin{bmatrix} 0_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = V$$
$$\begin{bmatrix} -A & 1_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq -b$$
$$x, z \in \mathbb{R}^n$$

1) Formule o dual:

$$\max -p^T b$$
$$p^T \begin{bmatrix} -A & 1_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$p \geq 0$$

$\sim$

$$\max -p^T b$$
$$-p^T A = 0$$
$$\sum p_i = 1$$
$$p \geq 0$$

Por dualidade fraca: $-p^T b \leq z^* \Rightarrow -p^T b \leq V$ $\square$

2) Como são problemas de PL, então vale a dualidade forte. Portanto $-p^{*T} b = V$ (utilizando resultados anteriores)

1*) Resolvendo de outra forma:

Note que $\max_i (a_i^T x - b_i) \leq V \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad a_j^T x - b_j \leq V \qquad \forall j, x \in \mathbb{R}^n$$

multiplicando por p_j e somando de $j=1$ até m:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j (a_j^T x - b_j) \leq \sum_{j=1}^{m} p_j V,$$

Como $p^T A = 0$, então:

$$\sum_{j=1}^{m} -p_j b_j \leq V \sum_{j=1}^{m} p_j ,$$

mas $\sum p_j = 1$, logo

$$\sum_{j=1}^{m} -p_j b_j \leq V \Rightarrow p^T b \leq V \qquad \square$$

5

$$\min \; c^T x \qquad\qquad L(x,p) = c^T x + p^T (b - Ax)$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Player 1: $\min_{x} L(x,p) = \min c^T x$
$x \geq 0 \qquad\qquad Ax = b$
$\qquad\qquad\qquad x \geq 0$

Player 2: $\max_p L(x,p) = \max_p \; \underbrace{p^T b + (\underbrace{c^T - p^T A}_{\geq 0 \text{ p/ custo reduzido}}) \overbrace{x}^{\geq 0}}_{\min = 0}$

$\Rightarrow \max \quad p^T b$

$p^T A \leq c^T \longrightarrow$ Dual do problema original

$p \in \mathbb{R}^n$ (restrição de igualdade no primal)

//

Se x^* é ótimo, então $Ax^* = b$ e

$$L(x^*, p) = c^T x^* = L(x^*, p^*)$$

Se p^* é ótimo

$$L(x, p^*) = c^T x + p^{*T}(b - Ax)$$

custo reduzido

$$= p^{*T} b + (c^T - p^{*T} A) x = p^{*T} b$$

Por dualidade forte: $p^{*T} b = c^T x^*$

$$L(x^*, p) = c^T x^* + p^T (b - Ax^*)$$
$$\leq L(x^*, p^*) = c^T x^* + p^{*T}(b - Ax^*)$$

$$\Rightarrow c^T x^* - c^T x^* + p^T(b - Ax^*) - p^{*T}(b - Ax^*) \leq 0$$
$$0 \leq 0$$

$$L(x^*, p^*) = c^T x^* + p^{*T}(b - Ax^*)$$
$$\leq L(x, p^*) = c^T x + p^{*T}(b - Ax)$$

$$\Rightarrow c^T x^* + p^{*T}(b - Ax^*) - c^T x - p^{*T}(b - Ax) \leq 0$$
$$p^{*T} b - p^{*T} b + (c^T - p^{*T} A) x^* - (c^T - p^{*T} A) x \leq 0$$
$$0 \leq 0$$

⑥ $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad \forall i$

$$y^T P = y^T \rightarrow P^T y = y \quad , y \geq 0$$

$$\hookrightarrow (P^T - I) y = 0$$

$$0 - \underbrace{(P^T - I)}$$

P $\max \ \mathbb{1}^T y = z^*$
$(P^T - I) y = 0$
$y \geq 0$

$$\rightarrow L(y,q) = \mathbb{1}^T y + q^T (I - P^T) y$$

$$\max_{y \geq 0} L(y,q) \leq z^*$$

$$\underbrace{q^T 0 + \max_{y \geq 0} (\mathbb{1}^T + q^T (I - P^T)) y}$$

$$\max = \begin{cases} 0, & \mathbb{1}^T + \overbrace{q^T (I - P^T)}^{\text{custo reduzido}} \leq 0 \\ \infty, & \text{e.c.} \end{cases}$$

D $\downarrow$

$\min \ q^T 0$
$q^T (I - P^T) \geq \mathbb{1}^T \Rightarrow (P - I) q \geq \mathbb{1}$
$q \in \mathbb{R}^n$

$$Pq - q \geq \mathbb{1}$$

Note que, como $P_{ij} \geq 0$ e $\sum P_{ij} = 1$, então

$$Pq \leq \begin{bmatrix} q_{max} \\ \vdots \\ q_{max} \end{bmatrix}, \quad q_{max} = \max_i q_i$$

mas, $\begin{bmatrix} q_{max} \\ \vdots \\ q_{max} \end{bmatrix} < q + \mathbb{1}$, portanto:

$Pq \leq \begin{bmatrix} q_{max} \\ \vdots \\ q_{max} \end{bmatrix} < q + \mathbb{1}$, logo a restrição do dual não pode ser satisfeita e o dual é inviável.

Como $y = 0$ é solução do Primal, ele não é inviável. Então, como o dual é inviável, o primal deve ser ilimitado. Isso implica $\max \mathbb{1}^T y = +\infty$ com solução viável y.

Logo $\exists y$, tal que $y^T P = y$ (sol. viável)
com $y \neq 0$ (problema ilimitado)

7 Leontief $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow$ cada coluna A_j tem no máximo um valor positivo

1) Se $A \in \mathbb{R}^{m \times m} \Rightarrow z \geq 0$ se $Az \geq 0$

Se $\text{rank}(A) = m$ então $Az = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Note que: $Az = \sum_{j=1}^{n} A_j z_j = \begin{bmatrix} \sum A_{1j} z_j \\ \vdots \\ \sum A_{nj} z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T z \\ a_2^T z \\ \vdots \\ a_n^T z \end{bmatrix}$

Então para toda i-ésima linha de Az vale:

$$(Az)_i = a_i^T z = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_j = A_{i1} z_1 + \cdots + A_{in} z_n$$

Como A tem no máximo 1 elemento positivo por coluna, tome uma matriz com elementos negativos, então $Az \geq 0$ se e somente se z é negativo $\Rightarrow$ falta alguma informação na questão.

Supondo A produtiva, então $Ax > 0$ para algum $x \geq 0$

Tome z com entrada negativa z_k e $Az \geq 0$. Então:

$$A(x + \theta z) = Ax + \theta Az > 0, \quad \mathbb{R} \ni \theta > 0$$

$\hookrightarrow$ Como $Az \geq 0$, então $\theta Az \geq 0$ $\forall \theta$ não negativo. Como $Ax > 0$ e $\theta Az \geq 0$, então a soma dever ser estritamente positiva.

Tome o menor Θ não negativo possível tal que o K-ésimo elemento de $x + \Theta z$ seja nulo. Isso sempre é possível, já que x é não negativo e z_K é estritamente negativo. Então

$$\{A(x+\Theta z)\}_K = \sum_{j=1}^{n} A_{Kj}(x+\Theta z)_j = \sum_{j \neq K} A_{Kj} x_j + \Theta A_{Kj} z_j + 0$$

Como esse elemento é estritamente positivo:

$$\sum_{j \neq K} A_{Kj} x_j + \sum \Theta A_{Kj} z_j > 0$$

Então, A_{KK} não pode ser positivo. Deve existir então

$A_{Kj} > 0$ e $(x_j + \Theta z_j) > 0$.

Note que somente um elemento por coluna deve ser não negativo. Então, como $A_{KK} < 0$, existe ao menos uma linha com $A_{iK} > 0$, porém isso implica

$$\underbrace{\sum_{j \neq K} A_{ij} x_j}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{j \neq K} \Theta A_{ij} z_j}_{\leq 0} + \underbrace{A_{iK}(x_K - \Theta z_K)}_{0},$$

que é menor ou igual a 0, contradizendo a hipótese inicial. Logo z deve ser não negativo.

Nota: é claro que se a matriz é produtiva, cada linha deve ter ao menos 1 valor positivo.

2) Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Leontief, tome um valor z tal que $Az = 0$, se existir z não nulo que resolve, então não existe inversa de A.

De 1), tem-se $Az \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$. Então pode existir $z > 0$ tal que $Az \geq 0$ ~ $Az = 0$.

Suponha que $z > 0$ e $Az = 0$, então:

$A(-z) = -(Az) = -0 = 0$, mas $-z < 0$, então contradiz a prova em 1). Portanto, não existe $z > 0$ tal que $Az = 0$, logo A é invertível.

Tome agora $Az = b \Rightarrow z = A^{-1}b$

note que b é não negativo, assim como z. Como z é não negativo, $A^{-1}b$ também é.

Tome $b = e_k$, então $A^{-1}b = A^{-1}_k \geq 0$.

Como isso vale para todo b, cada coluna de A^{-1} deve ser não negativa $\Rightarrow$ todo elemento A^{-1}_{ij} é não negativo.

3) Y realizável:

$Ax \geq 0$, $x \geq 0$. Tome $Ax = Y^*$, se $\mathbb{1}^T Y^* > 1$ basta tomar $\alpha > 0$ tal que $\mathbb{1}^T(Y^*/\alpha) \leq 1$. Note que:

$$Ax = Y^*/\alpha \Rightarrow \alpha Ax = Y^* \Rightarrow A(\alpha x) = Y^* \text{ é solução.}$$

Como existe Y^* realizável, basta encontrar o maior tal que $Y \geq Y^*$ seja eficiente: $\max \sum Y_i$

$$Y \geq Y^*$$
$$Y \in \mathcal{Y},$$

Onde $\mathcal{Y}$ contém todos os vetores realizáveis.

Como existe ao menos um Y que satisfaz, então o problema tem solução e a solução é justamente Y eficiente.

4) Note que rank(A) = m $\Rightarrow$ kernel de dimensão n−m. Então é óbvio que $Ax = y$ pode ser descrito por m vetores LI

$$\min \mathbb{1}^T x \quad Ax = y \quad x \geq 0$$

Uma solução pelo simplex é:

$$x = [x_B^T \ \ x_N^T]$$

Com $x_B = B^{-1} y$, $x_N = 0$

Suponha que $B(1) \dots B(m)$ indique as m primeiras colunas de A, sem perda de generalidade. Então:

$$Ax = [B \ \ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B x_B + N x_N = y$$

$$\Rightarrow B x_B + 0 = y \quad \therefore x_B = B^{-1} y$$

já que x_N são as variáveis não básicas, que devem ser nulas.

Note que $\mathbb{1}^T y \leq 1$ é governado por $\mathbb{1}^T (Ax) \leq 1$. Como não se tem controle sobre A, é claro que $x' = \alpha x$ pode garantir $\mathbb{1}^T (A(\alpha x)) = \alpha \mathbb{1}^T (Ax) \leq 1$ ...

8) P, Q $\in \mathbb{R}^n$ poliedros

1) $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$

Se $P \subseteq Q$, todo ponto de P é viável em Q. Como todo ponto de um poliedro pode ser descrito pela combinação convexa de seus vértices, basta checar se todo vértice de P é viável em Q.

Pode-se então checar se, dado $\bar{x} \in P$, existe alguma restrição de Q violada?

Faça p/ toda linha c_i^T de C:

$$\max \ c_i^T x$$
$$Ax \leq b$$

Para todo $c_i^T x^*$ ótimo encontrado, verifique se $c_i^T x^* > d_i$. Se sim, então $P \not\subseteq Q$. Isso também vale se algum problema for ilimitado

Se todas forem satisfeitas, $P \subseteq Q$.

Nessa PL, busca-se pontos em P que maximizem cada restrição de Q. Idealmente, checa-se se há $x \in P$, $x \notin Q$.

2)

$$P = \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i^{4}}_{\text{pontos extremos}} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j \underbrace{w_j}_{\text{raios extremos}} \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \theta_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1 \right\}$$

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j \;\middle|\; \rho_i \geq 0,\ \xi_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1 \right\}$$

P/ todo ponto $P_i \in P$, encontre $\rho_i \geq 0$, $\xi_j \geq 0$ tal que

$$P_i = \sum_{i=1}^{n} \rho_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j, \quad \sum \rho_i = 1$$

Se não existir solução, então $P \subseteq Q$

P/ todo raio extremo $r_i \in P$, encontre $\xi_j \geq 0$ tal que

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j$$

Se não existir solução, então $P \subseteq Q$

Se ambos tiverem solução, $P \subseteq Q$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min\ & 0 \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j = p_i \\ & \sum_{j=1}^{m} \omega_j z_j = r_j \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i, \xi_j, \omega_j \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

$\forall\, p_i$ vértice de P

r_j raio extremo de P