Felipe Bartelt - 2025690830

1) P e Q poliedros:

$P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} x \leq \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}^m} \}$, $Q = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{C}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} y \leq \underbrace{d}_{\in \mathbb{R}^m} \}$

$P + Q = \{ x + y \mid x \in P, y \in Q \}$

↳ se $x \in P$, então x satisfaz $Ax \leq b$

se $y \in Q$, então y satisfaz $Cy \leq d$

Seja $z = x + y$, então $P+Q$ pode ser descrito por:

$P+Q = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = x+y, Ax \leq b, Cy \leq d \}$, que

é a projeção em z de $\{ (z, x, y) \mid z = x+y, Ax \leq b, Cy \leq d \}$

Note ainda que se $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, as restrições poderiam ser escritas como $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \bar{x} \leq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, que forma um poliedro

2) $C \subset \mathbb{R}^2$: $\quad x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \leq 1 \quad \forall \theta \in [0, \pi/2]$

$x \geq 0$

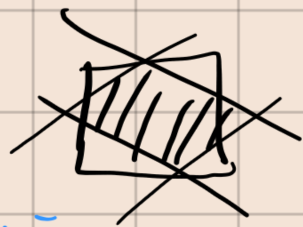
$y \geq 0$

Não. Um poliedro deve ser representável pela interseção finita de semiespaços. Para representar um quadrante do círculo unitário, seria necessário utilizar infinitos semiespaços.

Além disso, ter-se-ia um "lado" curvo do poliedro.

③ $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ 0 \leq x \leq u\}$ $u \in \mathbb{R}^n,\ u_i > 0$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(A) = m$



$$\begin{cases} Ax = b & \text{m restrições} \\ x \geq 0 & \text{n restrições} \\ -x \geq -u \rightarrow x_i \leq u_i & \text{n restrições} \end{cases}$$

1) Selecione m colunas linearmente independentes de A. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de índices dessas colunas, tal que

$B = [A_{\mathcal{B}(1)}\ A_{\mathcal{B}(2)}\ \cdots\ A_{\mathcal{B}(m)}]$

Sem perda de generalidade, suponha que B é composta pelas m primeiras colunas de A:

$$A = [B\ N], \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$
$$= \sum_{i=1}^{m} B_i x_{B_i} + \sum_{i=1}^{n-m} N_i x_{N_i} = b$$

2) Escolha $x_{N_i} = 0\ \forall i$ t.q $Ax = \sum_{i=1}^{m} B_i x_{B_i} = Bx_B = b$

Como $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e tem inversa (é composta de vetores LI), uma solução básica pode ser encontrada por:

3) $$x_B = B^{-1}b \Rightarrow x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \in \mathbb{R}^m \\ \rightarrow \in \mathbb{R}^{n-m} \end{matrix}$$

Por definição, uma sol. básica tem todas as restrições de igualdade ativas e há (n−m) outras satisfeitas na igualdade $x_i = 0$, $i \notin \mathcal{B}$

4) Então $\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ é sol. básica

Note que basta encontrar $\mathcal{B}$, tomar $x_i = 0 \ \forall i \notin \mathcal{B}$ e resolver $[A_{\mathcal{B}(1)} \ A_{\mathcal{B}(2)} \cdots A_{\mathcal{B}(m)}] x_B = b$ para obter uma sol. básica $\bar{x}$, onde $\bar{x}_i = 0 \ \forall i \notin \mathcal{B}$ e $\bar{x}_i = x_{B_i} \ \forall i \in \mathcal{B}$

4 Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i, \ i = 1, \cdots, m\}$

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i^T x \geq h_i, \ i = 1, \cdots, K\}$$

tal que $P = Q$ e $\mathbb{R}^n = \text{span}(\{a_1, a_2, \cdots, a_m\})$

Suponha que $\text{span}(\{g_1, \cdots, g_K\}) \neq \mathbb{R}^n$, então existe $v \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a todos esses vetores, tal que

$$g_i^T v = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, K\}.$$

Seja $x \in Q$, então vale que $\bar{x} \in Q$, onde

$$\bar{x} = x + \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$, já que

$$g_i^T(x + \lambda v) = g_i^T x + \lambda \underbrace{g_i^T v}_{0} = g_i^T x \geq b_i$$

Como P e Q são o mesmo poliedro, $\bar{x}$ deve pertencer a P.

Porém, $\text{span}(\{a_1, \cdots, a_m\}) = \mathbb{R}^n$, ou seja, existe ao menos um a_j tal que $a_j^T \bar{x} \neq 0$, onde $j \in \{1, \cdots, m\}$

Então, $a_j^T \bar{x} = a_j^T(x + \lambda v) = a_j^T x + \lambda a_j^T v$.

Assuma, sem perda de generalidade, que $a_j^T v < 0$.

Então, existe λ suficientemente grande tal que

$$a_j^T(x + \lambda v) < b_j$$

Portanto $\bar{x} \notin P$, o que contradiz o fato de $P = Q$. Logo, $\text{span}(\{g_1, \cdots, g_K\}) = \mathbb{R}^n$

5 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com linhas LI

linhas LI $\Rightarrow$ rank$(A) = m \Rightarrow n \geq m$

1) Se é sol. básica, todas as restrições de igualdade são ativas e existem n LI ativas

$\Rightarrow (n-m)$ x_i estão em 0.

Suponha que os conjuntos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ contenham índices distintos e formam bases distintas, então

$$Ax = \sum_1^n A_i x_i = \sum_{i=1}^m A_{\mathcal{B}(i)} x_i = b$$
$$= \sum_{i=1}^m A_{\mathcal{C}(i)} x_i = b$$

Suponha, sem perda de generalidade que há somente um índice diferente:

$\mathcal{B} = \{1, \dots, m-1, m\}$ e $\mathcal{C} = \{1, \dots, m-1, K\}$, onde $K \notin \{1, \dots, m\}$. Note que

$A = [A_1\ A_2\ \cdots\ A_m\ \cdots\ A_K\ \cdots\ A_n]$, então

$$Ax = \sum_{i=1}^n A_i x_i = \sum_{i=1}^{m-1} A_i x_i + A_m x_m + A_K x_K + \sum_{i\in Z} A_i x_i = b \ ^*$$

onde $Z = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$

Como $\mathcal{B}$ é base, deve determinar unicamente uma solução, então $\sum_{i=}^m A_{\mathcal{B}(i)} x_i = b$. Ainda, $x_i = 0\ \forall i \notin \mathcal{B}$

Entretanto, $\mathcal{C}$ também é base e leva à mesma solução x:

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\mathcal{C}(i)} x_i = \sum_{i=1}^{m-1} A_i x_i + A_K x_K = b$$

$\triangle$ Isso implica $x_m = 0$ e o resultado anterior implica $x_K = 0$

Se $\sum_{i=1}^{m} A_{\mathcal{B}(i)} x_i = b$, então $A_i x_i = b_i \ \forall i \in \mathcal{B}$, que contém m elementos, portanto m restrições estão ativas.

Também tinha-se que $x_i = 0 \ \forall i \notin \mathcal{B}$, que formam $n-m$ restrições ativas. Ao todo, tem-se n restrições ativas.

Porém $\triangle$ indica $x_m = 0$, sendo m pertencente a $\mathcal{B}$. Dessa forma, há uma restrição adicional ativa, tendo-se $n+1$ no total. Como há mais que n restrições, a solução é degenerada.

2) Não necessariamente, tome o seguinte poliedro P

necessita de α independência linear na troca de variável anterior

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad x \geq 0$$

A solução $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é degenerada, já que existem 4 restrições ativas.

Possíveis bases:

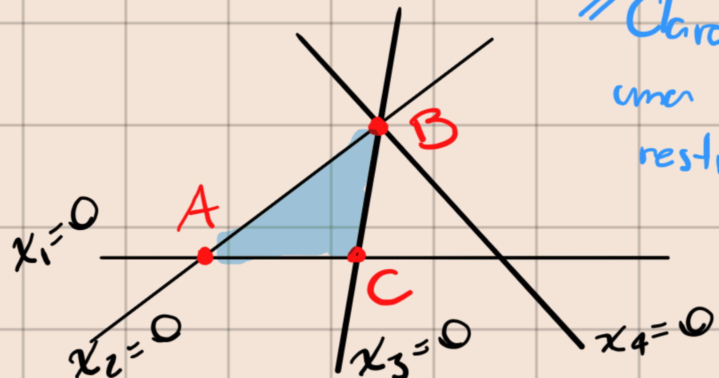
se $\{x_1, x_2\}$ básicas: $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$\{x_1, x_3\}$ básicas: $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \ (\bar{x})$

$\{x_2, x_3\}$ básicas: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não invertível $\Rightarrow$ não é base

Note então que $\bar{x}$ é degenerada e só existe uma base p/ esse caso.

3) Não necessariamente. Mover para uma solução básica adjacente envolverá trocar uma variável básica x_{B_i} nula por uma outra não básica. Dado que essa última pode se tornar positiva. Tome o seguinte poliedro:



//Claramente é possível obter uma descrição desse poliedro por restrições//

Note que B é degenerado e não há soluções básicas adjacentes degeneradas

⑥ $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = m$

1) V P está contido na interseção de m hiperplanos, como $n = m+1$, só há um grau de liberdade para a combinação convexa dos vértices, portanto P é uma reta em $\mathbb{R}^{m+1}$, que tem no máximo 2 pontos extremos (segmento de reta, reta e semirreta).

2) F Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}, \quad c^T = [-1 \ \ 1], \quad A = [-1 \ \ 1] \quad b = 0$$

então todo ponto de P é sol. ótima.

3) F Tomando o problema anterior, note que $n=2$ e $m=1$

$x^* = [1 \quad 1]$ é sol. ótima com 2 variáveis positivas

4) V Seja c^* o custo ótimo e x_1^*, x_2^* soluções

ótimas distintas $\Rightarrow$ $c^* = c^T x_1^* = c^T x_2^*$

$$\Rightarrow c^T(x_1^* - x_2^*) = 0$$

Tome $\bar{x} = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$, $\lambda \in [0,1]$:

$$c^T \bar{x} = c^T(\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*) = \lambda c^T x_1^* - \lambda c^T x_2^* + c^T x_2^*$$

$$= \lambda c^* - \lambda c^* + c^*$$

$$\Rightarrow c^T \bar{x} = c^*$$

Portanto $\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$ é ótimo $\forall \lambda \in [0,1]$

5) F Tomando o exemplo de 2), há infinitas soluções

ótimas, porém a solução básica é:

tem-se $m=1$ restrições satisfeitas na igualdade

$n-m = 2-1 = 1$ variáveis não básicas $x_i = 0$

Tome $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ pela restrição de igualdade

Assim, apenas $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é solução básica (viável)

As soluções ótimas estão no raio extremo e P só tem um

ponto extremo

6) V Assumindo que o problema é maximizar os máximos:

$$\max_{x \in P} [\max(c^T x, d^T x)]$$

pode-se pensar por partes:

$\max\limits_{x \in P} c^T x$ tem solução em um vértice de P

$\max\limits_{x \in P} d^T x$ também tem solução em um vértice

suponha que x_c^* maximize $c^T x$ e x_d^* maximize $d^T x$

então $\max(c^T x_c^*, d^T x_d^*)$ tem ou x_c^* ou x_d^* como solução $\Rightarrow$ a solução está em um vértice

7 $P \subset \mathbb{R}^n$ poliedro limitado, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

$Q = \{x \in P : a^T x = b\}$

Note que Q é o poliedro P com uma restrição adicional.

Seja P dado no formato padrão $Cx \leq d$, $x \geq 0$ e suponha que C tem m linhas LI, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Dessa forma, Q é definido por:

$$\begin{cases} Cx = d \\ a^T x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ a^T \end{bmatrix}}_{\bar{A}} x = \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ b \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

$$x \geq 0$$

Suponha que $\text{rank}(\bar{A}) = m+1$, para que $P \neq Q$ (o caso $P = Q$ é trivial).

Suponha $\bar{x} \in Q$ um $\overbrace{\text{vértice}}^{\text{solução básica viável}}$ de P, mas não um vértice de Q. Então $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ sendo $x_1, x_2 \in Q$ vértices. Porém todo $x \in Q$ pertence a P. Isso implicaria em que $\bar{x}$ não é vértice de P, contradizendo a hipótese.

Portanto, $\bar{x}$ é vértice de Q.

Agora, suponha $\hat{x} \in Q$ vértice de Q, mas não um vértice de P. Então, existem $x_1, x_2 \in P$ tal que $\hat{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,1)$. Ainda, todo ponto numa face de P pode ser escrito como uma combinação convexa de dois vértices. Portanto, pode-se assumir x_1 e x_2 como vértices de P.

Como $\hat{x} \in Q$, então $a^T\hat{x} = b$ é satisfeito. Segue que

$$a^T(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda a^T x_1 + (1-\lambda) a^T x_2 = b$$

Se $a^T x_1 \neq a^T x_2$, então $\bar{x}$ pertence a um segmento que liga dois vértices de P (x_1 e x_2), que são soluções básicas adjacentes. Se $a^T x_1 = a^T x_2$, $\bar{x}$ não poderia ser ponto extremo. Portanto, $\bar{x}$ é combinação convexa de duas soluções básicas adjacentes.

8) $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i,\ i = 1, \cdots, m \}$. Suponha $u, v \in \mathbb{R}^n$ duas soluções básicas viáveis distintas de P, que satisfazem $a^T u = a^T v = b_i$, $i = 1, \cdots, n-1$ e $a_1, \cdots, a_{n-1}$ são LI. Seja $L = \{ \lambda u + (1-\lambda) v : \lambda \in [0,1] \}$, mostre que $L = \{ z \in P : a_i^T z = b_i,\ i = 1, \cdots, n-1 \}$

Tome $\bar{z} = \lambda u + (1-\lambda) v$, $\lambda \in [0,1]$, então

$$a^T \bar{z} = a^T(\lambda u + (1-\lambda) v) = \lambda a^T u + (1-\lambda) a^T v$$
$$= \lambda b_i + (1-\lambda) b_i, \quad i = 1, \cdots, n-1$$
$$= b_i$$

Como u e v são soluções básicas viáveis de P e todo ponto de P pode ser escrito como combinação convexa de vértices, então $\bar{z} \in P$. Portanto, $\{\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda \in [0,1]\} \subseteq \{z \in P : a_i^T z = b_i, i = 1, \cdots, n-1\}$

Agora, tome $\hat{z} \in P$ tal que $a_i^T \hat{z} = b_i$, $i = 1, \cdots, n-1$
Como $\hat{z} \in P$, então também vale $a_i^T \hat{z} \geq b_i$, $i = 1, \cdots, m$
Mas $a_i^T v = a_i^T u = b_i$, então $a_i^T \hat{z} = a_i^T v = a_i^T u$. Note que $a_i^T \hat{z} = b_i$ define uma reta, então os pontos extremos dessa reta devem ser u e v, já que esses são vértices de P. Portanto, a combinação convexa desses vértices pertence ao conjunto, ou seja $\{z \in P : a_i^T z = b_i, i = 1, \cdots, n-1\} \subseteq \{\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda \in [0,1]\}$

$$\Rightarrow \{z \in P : a_i^T z = b_i, i = 1, \cdots, n-1\} = \{\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda \in [0,1]\}$$