Programação Linear
Lista de Exercícios - Geometria da Programação Linear

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Data de entrega: 16 de Maio de 2025.

Questão 01: Se P e Q são dois poliedros em $\mathbb{R}^n$, então $P + Q := \{x + y : x \in P, y \in Q\}$ é um poliedro ? Prove ou forneça um contra exemplo.
Questão 02: Considere o conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ definido pelas seguintes restrições:

$$\begin{aligned} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) &\leq 1 && \text{para todo } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

C é um poliedro ?
Questão 03: Considere um poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, 0 \leq x \leq u\}$ onde $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de limites superiores para x, com todas entradas positivas. Assuma que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto completo m. Forneça um procedimento para produzir soluções básicas (viáveis e eventualmente não viáveis) para P.
Questão 04: Suponha que $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i^T x \geq h_i, i = 1, \ldots, k\}$ são duas representações distintas para o mesmo poliedro. Suponha que $\mathbb{R}^n = span(\{a_1, a_2, \ldots, a_m\})$. Mostre que $\mathbb{R}^n = span(\{g_1, g_2, \ldots, g_k\})$.
Questão 05: Considere um poliedro na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e assuma que as linhas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são linearmente independentes.

1. Suponha que duas bases distintas sejam associadas à mesma solução básica. Mostre que a solução básica é degenerada.

2. Considere uma solução básica degenerada. É verdade que ela corresponde a duas bases distintas ? Prove ou forneça um contra exemplo.

3. Considere uma solução básica degenerada. É verdade que exisgte uma solução básica adjacente a ela que também é degenerada ? Prove ou apresente um contra exemplo.

Questão 06: Considere um poliedro na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e assuma que as linhas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são linearmente independentes. Para cada afirmativa, responda verdadeiro ou falso. Se verdadeiro, apresente uma demonstração. Se falso, um contra exemplo.

1. Se $n = m + 1$, então P possui no máximo duas soluções básicas viáveis.

2. O conjunto de soluções ótimas é limitado.
3. Em toda solução ótima, não mais de m variáveis podem ser positivas.
4. Se existe mais de uma solução ótima, então existem infinitas soluções ótimas.
5. Se existem muitas soluções ótimas então existem pelo menos duas que são básicas viáveis ótimas.
6. Considere o problema $\max\{c^T x, d^T x\} : x \in P$. Se o problema admite solução ótima, então admite solução ótima em um vértice de P.

Questão 07: Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro limitado, $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor e $b \in \mathbb{R}$ um escalar. Defina $Q = \{x \in P : a^T x = b\}$. Mostre que todo ponto extremo de Q ou é uma solução básica viável de P ou uma combinação convexa de duas soluções básicas adjacentes de P.

Questão 08: Considere $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$. Suponha que $u, v \in \mathbb{R}^n$ sejam duas soluções básicas viáveis distintas de P, que satisfazem $a^T u = a^T v = b_i, i = 1, \ldots, n-1$ e que $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ são linearmente independentes. Seja $L = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0, 1]\}$. Mostre que $L = \{z \in P : a_i^T z = b_i, i = 1, \ldots, n-1\}$.