Programação Linear
Lista de Exercícios - Dualidade

Prof. Alexandre Salles da Cunha

Data de entrega: 27 de Maio de 2025.

Questão 01: Considere o problema primal $\min c^T x, Ax = b, x \geq 0$. Suponha que ele admita soluções viáveis, sendo p um vetor dual ótimo. Responda:

- Se a k-ésima equação do primal é multiplicada por $\mu \neq 0$, encontre uma solução w ótima para o novo dual.
- Suponha que, no problema primal original, adicionemos à $r-$ésima equação μ vezes a $k-$ésima linha. Qual é a nova solução dual w ótima ?
- Suponha que, no problema primal original, adicionemos μ vezes a $k-$ésima linha de A ao vetor de custos c. Qual é a solução dual ótima para o novo dual ?

Questão 02 Considere o problema primal $\min q^T z, Mz \geq -q, z \geq 0$, e que M seja *anti-simétrica* ($M = -M^T$).

1. Mostre que o primal e o dual são o mesmo. Um problema com esta propriedade é chamado de *auto-dual*.
2. Mostre que um problema de programação linear auto-dual possui uma solução ótima se e somente se for viável.
3. Um exemplo de auto-dual ocorre, por exemplo, quando: $A = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$, $q = [c, -b]^T$ e $z = [x, y]^T$. Interprete o problema.

Questão 03 Considere $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$, um PPL na forma padrão. A tem posto completo igual ao número de suas linhas m. Responda oferecendo uma demonstração ou um contra-exemplo.

1. Seja x^* uma solução básica viável. Suponha que para cada base associada a x^*, a solução dual correspondente seja inviável. Então, o custo ótimo deve ser inferior a $c^T x^*$.
2. O dual do problema auxiliar na fase I do Simplex é sempre viável.

3. Seja p_i a variável dual associada à i-ésima linha de A. Eliminar a linha $a_i^T x = b_i$ no primal é equivalente a impor $p_i = 0$ no dual.
4. Se o critério de PPL ilimitado for atendido em alguma iteração do Simplex, então o dual é inviável.

Questão 04 Considere o problema de otimização $\max_{i=1,\ldots,m}(a_i^T x - b_i)$ sobre $x \in \mathbb{R}^n$. Assuma que o valor ótimo do programa seja v. Seja A a matriz cujas linhas são $a_i^T \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m$ e b o vetor $(b_1, \ldots, b_m)^T$.

1. Considere o vetor $p \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz $p^T A = 0$, $p \geq 0$, e $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Mostre que $-p^T b \leq v$.
2. De forma a obter o melhor limite inferior indicado acima, formulamos o PPL

$$\begin{aligned} \max - p^T b \\ 0 = p^T A \\ 1 = p^T e \\ p \geq 0 \end{aligned}$$

onde e é um vetor de 1s. Mostre que o programa acima admite função objetivo ótima igual a v.

Questão 05 Consdiere o problema $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$ e defina a Lagrangeana $L(x, p) = c^T x + p^T (b - Ax)$. Considere o seguinte jogo:

- o jogador 1 escolhe algum $x \geq 0$ e o jogador 2 escolhe p.
- Na sequência, o jogador 1 paga a quantidade $L(x, p)$ ao jogador 2. O jogador 1 gostaria de minimizar $L(x, p)$ enquanto que o jogador 2 gostaria de maximizá-la.

O ponto (x^*, p^*) é chamado ponto de equilíbrio (saddle point, ou ponto de equilíbrio de Nash) se $L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*)$ para qualquer $x \geq 0, \forall p$. Mostre que (x^*, p^*) é um ponto de equilíbrio se e somente se forem soluções ótimas para o PPL primal (na forma padrão) e seu dual, respectivamente.

Questão 06 Dizemos que uma matriz $P : n \times n$ com entradas p_{ij} é estocástica se todas as suas entradas são não negativas e $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ para todo i. Utilize seus conhecimentos de Programação Linear para mostrar que se P é estocástica, então o sistema $y^T P = y^T, y \geq 0$ possui uma solução não nula. O mesmo resultado pode ser obtido investigando-se os auto-espaços de P^T.

Questão 07 Uma matriz de *Leontief* é uma matriz A, $m \times n$, em que cada coluna possui no máximo um elemento positivo. A título de ilustração, considere a coluna A_j à qual é associada um processo produtivo. Se $a_{ij} < 0$, $|a_{ij}|$ representa o consumo de produto do tipo i no processo. Se $a_{ij} > 0$, a grandeza representa a quantidade de produto i resultante do processo de produção. Se x_j é o nível de atividade do processo, então Ax representa a saída líquida dos distintos processos empregados. A matriz A é chamada produtiva se existe algum $x \geq 0$, tal que $Ax > 0$. Responda:

1. Seja A uma matriz de Leontief quadrada, $m = n$. Mostre que todo vetor z que sartisfaz $Az \geq 0$ deve ser não negativo.

2. Mostre que toda matriz de Leontief produtiva e quadrada admite inversa e que todas as entradas da inversa são não negativas. Para tanto, use o resultado da resposta anterior.

3. Consideramos agora o caso em que $n \geq m$ e introduzimos uma restrição $e^T x \leq 1$, onde e é um vetor de 1s. Uma restrição deste tipo representa, por exemplo, um gargalo de produção em virtude de algum recurso escasso, mão de obra, energia, etc. Um vetor y é chamado de realizável se $y \geq 0$ e existe algum $x \geq 0$, tal que $Ax = y$ e $e^T y \leq 1$. Um vetor realizável é chamado de eficiente se não existe um vetor realizável z tal que $z \geq y$ e $z \neq y$. Suponha que A seja produtiva. Mostre que existe y positivo e eficiente. Dica: dado um vetor realizável y, considere maximizar $\sum_i y_i$ sobre todos os vetores alcançáveis y que excedem y^*.

4. Assuma que A seja produtiva. Mostre que existe um conjunto de m processos que são capazes de gerar todos os vetores de saída y eficientes. Isto é, existem $B(1), \ldots, B(m)$ tais que todo vetor y pode ser escrito como $y = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)}$ para quantidades $x_{B(i)} \geq 0$, cuja soma é limitada superiormente por 1.

Questão 08

1. Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^n$ dois poliedros descritos em termos de restrições lineares. Produza um algoritmo que decida se $P \subseteq Q$.

2. Repita a questão acima se os poliedros forem descritos em termos de seus pontos extremos e raios extremos.