Multi-carrier signals

Federico Casu

Novembre 21, 2023

OFDM

Andiamo a studiare come far fronte ai problemi che abbiamo introdotto quando abbiamo parlato del modello di canale *multipath*. Prendiamo in considerazione il seguente modello di canale:

$$h(t) = A_{LS} \sum_{i=0}^{N_c-1} a_i e^{j\phi_i} \delta(t - \tau_i)$$

Come abbiamo studiato in precedenza, le varie repliche del segnale generate da fenomeni come *riflessione*, *riffrazione* e *scattering* introducono **interferenza intersimbolica**.

In particolare, se la banda del segnale B_s è comparabile o maggiore della *coherence bandwidth* B_c, il segnale ricevuto sarà affetto da ISI. Allo stesso modo, se il *delay spread* σ_s è comparabile o maggiore del tempo di simbolo T_s, il segnale ricevuto sarà affetto da ISI poiché varie repliche del segnale, che trasportano il simbolo inviato all'istante kT_s, arriveranno in ritardo sovrapponendosi con gli altri simboli inviati.

L'idea alla base dei sistemi di comunicazione che andremo a studiare è di *dividere* la banda (quindi il canale) a disposizione del servizio in sottobande più piccole e trasmettere non più un solo segnale ma utilizzare i sottocanali per trasmettere diversi segnali in parallelo. In particolare, nei multi-carrier modulation system la banda allocata al servizio è suddivisa nel seguente modo:

$$B_s' = \frac{B_s}{N},\ N \text{ tale che } B_s' < B_c$$

Seppur la banda originariamente allocata al servizio era maggiore della *coherence bandwidth* del canale, ora ogni sottocanale può essere considerato *flat fading*.

Vediamo come funzione la trasmissione:

1. Consideriamo un modello equivalente di canale. In particolare, se il sistema di comunicazione in esame trasmette un segnale (continuo, generato mediante interpolazione) cui tempo di simbolo è T_s, possiamo rappresentare il

canale mediante il seguente modello equivalente:

$$\mathsf{h_{eq}(t)} = \sum_{\mathsf{k=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(t)}\delta(\mathsf{t - kT_s})$$

Si noti la seguente uguaglianza:

$$\mathsf{h_{eq}(t)} = \sum_{\mathsf{k=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(t)}\delta(\mathsf{t - kT_s}) = \mathsf{h(t)} = \mathsf{A_{LS}} \sum_{\mathsf{i=0}}^{\mathsf{N_c-1}} \mathsf{a_i e^{j\phi_i}}\delta(\mathsf{t} - \tau_\mathsf{i})$$

2. Supponiamo di voler trasmettere un blocco di N simboli $[\mathsf{s(0)}, ..., \mathsf{s(N-1)}]$. Studiamo il segnale $\mathsf{y(t)}$ all'entrata del ricevitore (per semplicità omettiamo il rumore):

$$\mathsf{y(t)} = \sum_{\mathsf{k=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(t)}\delta(\mathsf{t - kT_s}) * \mathsf{s(t)} = \sum_{\mathsf{k=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(t)s(t - kT_s)}$$

I campioni così ottenuti in seguito all'azione del campionatore sono i seguenti:

$$\mathsf{y(k)} = \mathsf{y(t)}|_{\mathsf{t=kT_s}} = \sum_{\mathsf{h=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(kT_s)s(kT_s - hT_s)} = \sum_{\mathsf{h=0}}^{\mathsf{L-1}} \mathsf{h(k)s(k-h)}$$

3. Possiamo rappresentare il vettore composto dai campioni $\mathsf{y(k)}$ mediante un prodotto tra matrice-vettore:

$$\mathsf{y} = \mathcal{H}\mathsf{s}$$

dove

$$\mathsf{y^T} = [\mathsf{y(0)}, \mathsf{y(1)}, ..., \mathsf{y(N-1)}]$$

$$\mathsf{s^T} = [\mathsf{s(0)}, \mathsf{s(1)}, ..., \mathsf{s(N-1)}]$$

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} \mathsf{h(0)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \mathsf{h(1)} & \mathsf{h(0)} & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{h(L-1)} & \mathsf{h(L-2)} & ... & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & \mathsf{h(L-1)} & ... & \mathsf{h(0)} \end{vmatrix}$$

4. Seppur la matrice $\mathcal{H}$ abbia una proprietà interessante (è una matrice di *Toepliz*), non abbiamo ancora risolto il problema dell'ISI. Supponiamo di

voler espandere il blocco $[\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(1), ..., \mathsf{s}(\mathsf{N}-1)]$ con un prefisso composto da $\mathsf{N_{CP}} > \mathsf{L}$ simboli:

$$\begin{aligned}\bar{\mathsf{s}}^\mathsf{T} &= [\mathsf{s_{CP}}, \mathsf{s}] \\ &= [\mathsf{s}(\mathsf{N}-\mathsf{N_{CP}}-1), \mathsf{s}(\mathsf{N}-\mathsf{N_{CP}}-2), ..., \mathsf{s}(\mathsf{N}-1), \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(1), ..., \mathsf{s}(\mathsf{N}-1)]\end{aligned}$$

Come visto sopra, i simboli sono gli ultimi $\mathsf{N_{CP}}$ elementi del vettore s. Per questo motivo, l'espansione applicata al vettore dei simboli è detta *estensione ciclica*.

5. Ora, in seguito all'introduzione del prefisso, la matrice $\bar{\mathcal{H}}$ che rappresenta il canale è la seguente:

$$\mathsf{y}^\mathsf{T} = [\mathsf{y}(0), \mathsf{y}(1), ..., \mathsf{y}(\mathsf{N}-1)]$$

$$\mathsf{s}^\mathsf{T} = [\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(1), ..., \mathsf{s}(\mathsf{N}-1)]$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \begin{vmatrix} \mathsf{h}(0) & 0 & ... & \mathsf{h}(2) & \mathsf{h}(1) \\ \mathsf{h}(1) & \mathsf{h}(0) & ... & \mathsf{h}(3) & \mathsf{h}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{h}(\mathsf{L}-1) & \mathsf{h}(\mathsf{L}-2) & ... & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & \mathsf{h}(\mathsf{L}-1) & ... & \mathsf{h}(0) \end{vmatrix}$$

Ora $\bar{\mathcal{H}}$ è una matrice *circolare*! Le matrici circolari hanno una proprietà molto interessante: sono *diagonalizzabili*.

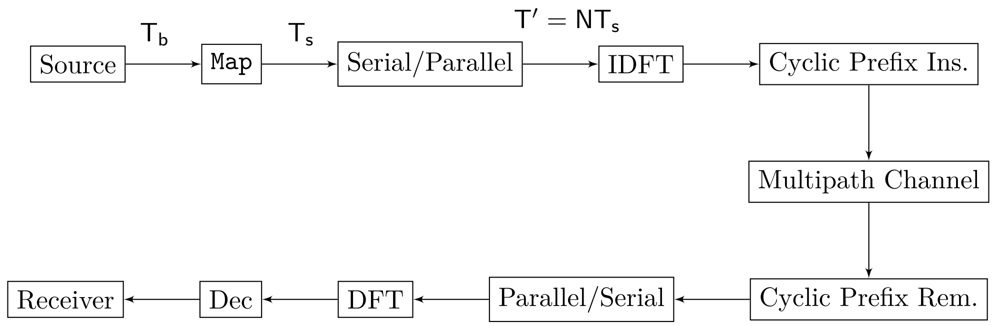
$$\bar{\mathcal{H}} = \mathsf{F^H H F}$$

dove $\mathsf{F^H F} = \mathsf{F F^H} = \mathsf{I}$ e $\mathsf{H} = \mathsf{diag}(\mathsf{h}_0, ..., \mathsf{h}_{\mathsf{N}-1})$. Siano $\mathsf{Y} = \mathsf{Fy}$ e $\mathsf{S} = \mathsf{Fs}$ le traformate discrete di Fourier dei vettori y e s. Premoltiplichiamo ambo i membri di $\mathsf{y} = \bar{\mathcal{H}}\mathsf{s}$ per la matrice F:

$$\begin{aligned}\mathsf{Fy} &= \mathsf{F}\bar{\mathcal{H}}\mathsf{s} \\ \mathsf{Y} &= \mathsf{F F^H H F s} \\ \mathsf{Y} &= \mathsf{IHS} \\ \mathsf{Y} &= \mathsf{HS}\end{aligned}$$

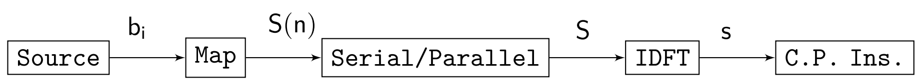
Visto che H è diagonale, abbiamo eliminato l'interferenza intersimbolica in frequenza!

Ora ragioniamo su come è implementato un sistema di comunicazione OFDM. In particolare vogliamo studiare quali sono i blocchi logici che compongono la catena $\mathsf{Tx}-\mathsf{Rx}$:



OFDM bandwidth

Per studiare la banda occupata dal segnale OFDM è interessante studiare l'aspetto dei segnali (discreti o analogici) all'uscita di ciascun blocco che compone il trasmettitore.



Si noti che i simboli $S(n)$ sono rappresentati nel dominio della frequenza. Ricorda: grazie al prefisso circolare, possiamo garantire che, in frequenza, il campione $Y(n)$ dipende solo dal simbolo $S(n)$!

Studiamo il blocco di simboli s:

$$s^T = [s(0), s(1), ..., s(N-1)] = F^H S$$

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right), \; n = 0, ..., N-1$$

Vogliamo studiare un singolo addendo della somma:

$$S(k) \cdot \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

Proviamo a moltiplicare l'esponente di Fourier per $B_s T_s = 1$:

$$S(k) \cdot \exp\left(\frac{j2\pi kn B_s T_s}{N}\right) = S(k) \cdot \exp\left(j2\pi \frac{B_s}{N} kn T_s\right) = S(k) \cdot \exp(j2\pi \Delta f k t)|_{t=nT_s}$$

Ogni simbolo $S(k)$ è moltiplicato per un esponenziale complesso che oscilla alla frequenza Δfk. Qual'è la durata del simbolo? In un sistema OFDM il tempo di simbolo è dato dalla somma $T_s(N + N_{CP})$: N campioni da trasmettere più il prefisso ciclico (N_{CP}).

In altre parole, ogni simbolo $S(k)$ viene trasmesso ad una frequenza Δfk (effetto della moltiplicazione per l'esponenziale complesso) e il segnale trasmesso alla frequenza Δfk rimane costante per NT_s: questo è equivalente a moltiplicare l'esponenziale complesso per una rect di durata NT_s secondi.

Il segnale trasmesso sulla k-esima *sub-carrier* è il seguente:

$$s_k(t) = \frac{S(k)}{\sqrt{N}} \cdot \exp(j2\pi\Delta fkt) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{NT_s}\right)$$

> The power spectral density of the OFDM signal is the sum of N sinc functions, one for each subcarrier. All the sinc functions are orthogonal by construction and they do not interfere with each other. The overall signal bandwidth can be approximated as:
>
> $$B_{OFDM} \approx N \cdot \frac{1}{NT_S} = \frac{1}{T_S}$$