Algoritmos - Aula 11

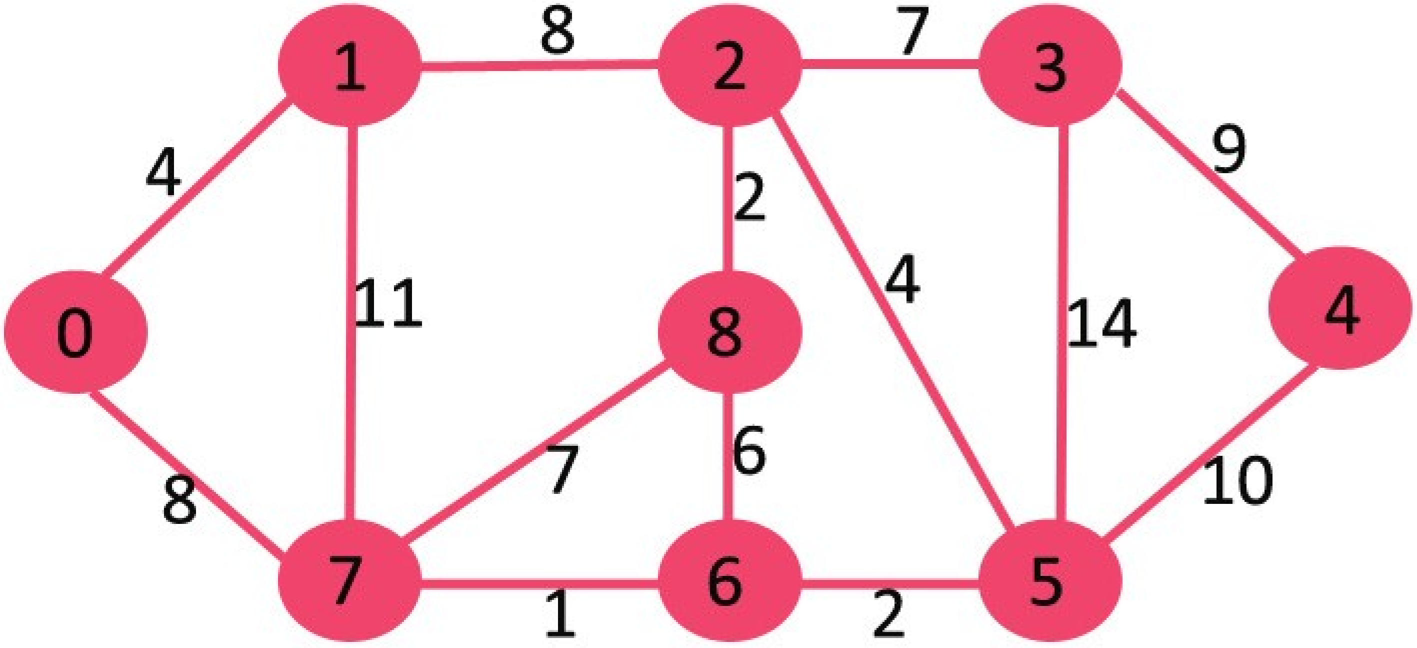
Fernando Raposo

Vamos ver

- Árvore do Menor Caminho
- Árvore de Extensão Mínima (Minimum Spanning Tree)
- O Problema do Caixeiro Viajante
- Complexidade dos Algoritmos Estudados

Árvore do Menor Caminho

- Vamos nos lembrar do Grafo visto na aula passada...



Árvore do Menor Caminho

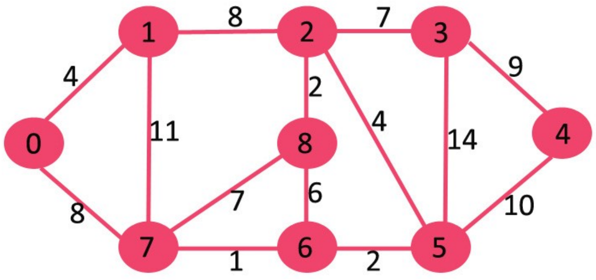
- Calculamos o menor caminho do vértice “**0**” aos demais utilizando o algoritmo de Dijkstra.

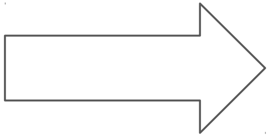
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visitado	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Dist.	0	4	12	19	21	11	9	8	14

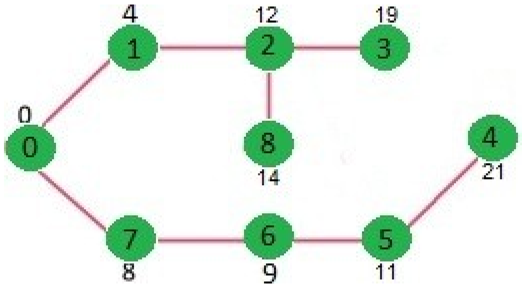
- A árvore do menor caminho é a árvore construída após removermos as arestas em que os pesos **NÃO** fazem parte do menor caminho a partir do vértice original.

Árvore do Menor Caminho

- Portanto...





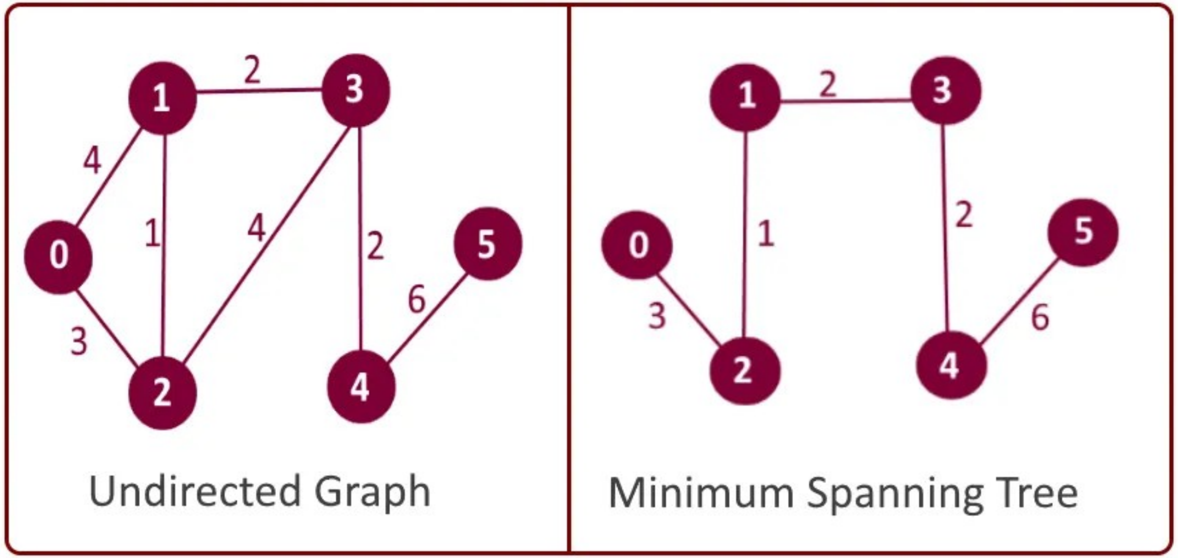


	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visitado	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Dist.	0	4	12	19	21	11	9	8	14

Árvore de Peso Mínimo

- Ou em inglês… ***Minimum Spanning Tree***
- Achar a árvore de peso mínimo significa que: Em um dado Grafo ***G***, com arestas e pesos positivos, achar um conjunto de arestas que somadas tem peso mínimo e permitem a ligação de todos os vértices.
- Aplicações:
    - Telefonia
    - Redes de Computadores
    - Hidráulica
    - Engenharia de Estradas de Rodagem
- Em todas estas situações precisamos conectar todos os vértices com um custo mínimo.

Árvore de Peso Mínimo



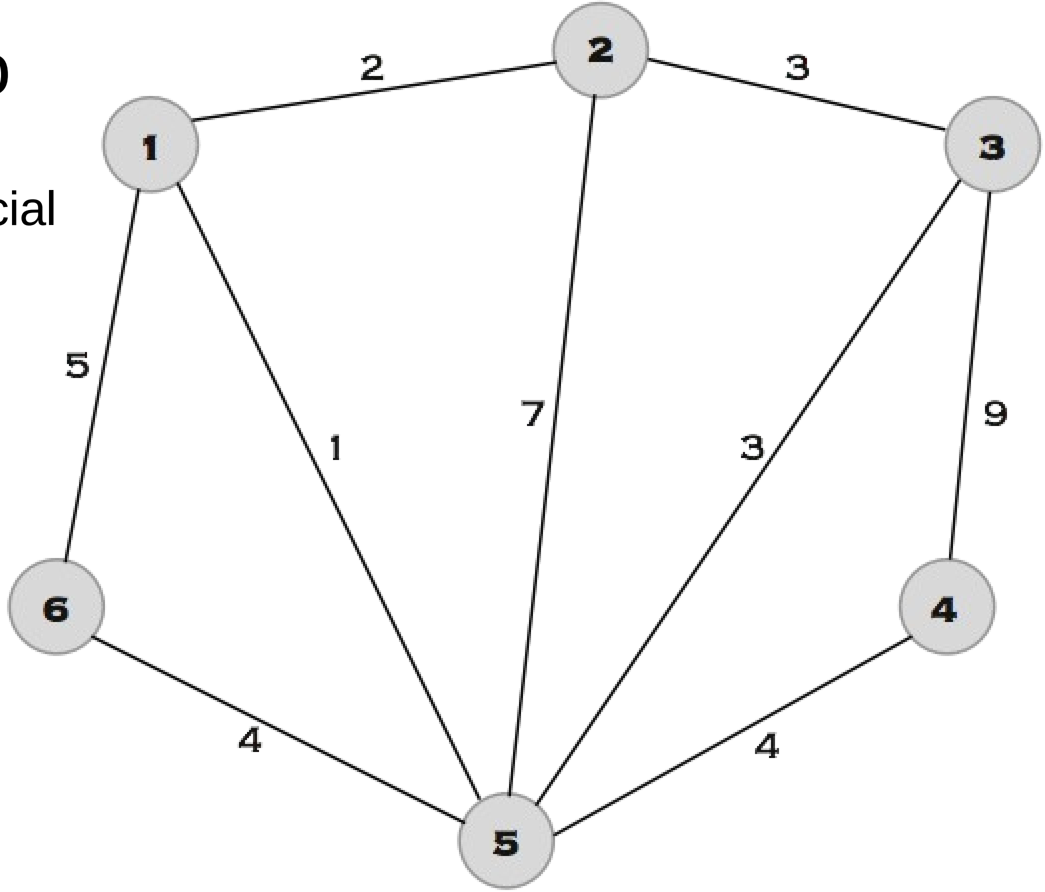
Árvore de Peso Mínimo

- Existem dois algoritmos clássicos: Prim e Kruskal (1956);
- Ambos os algoritmos utilizam a estratégia gulosa;
- Ambos os algoritmos podem trazer árvores de peso mínimo diferentes, mas sempre com o mesmo peso (pode haver mais de uma solução).
- Algoritmo:

1. Ordene as arestas do grafo com vértices ***V*** de acordo com o seu peso;
2. Escolha a menor aresta, verificando se este gera um ciclo com a árvore construída até o momento;
3. Repita o passo 2 enquanto a árvore não tiver ***V - 1*** arestas;

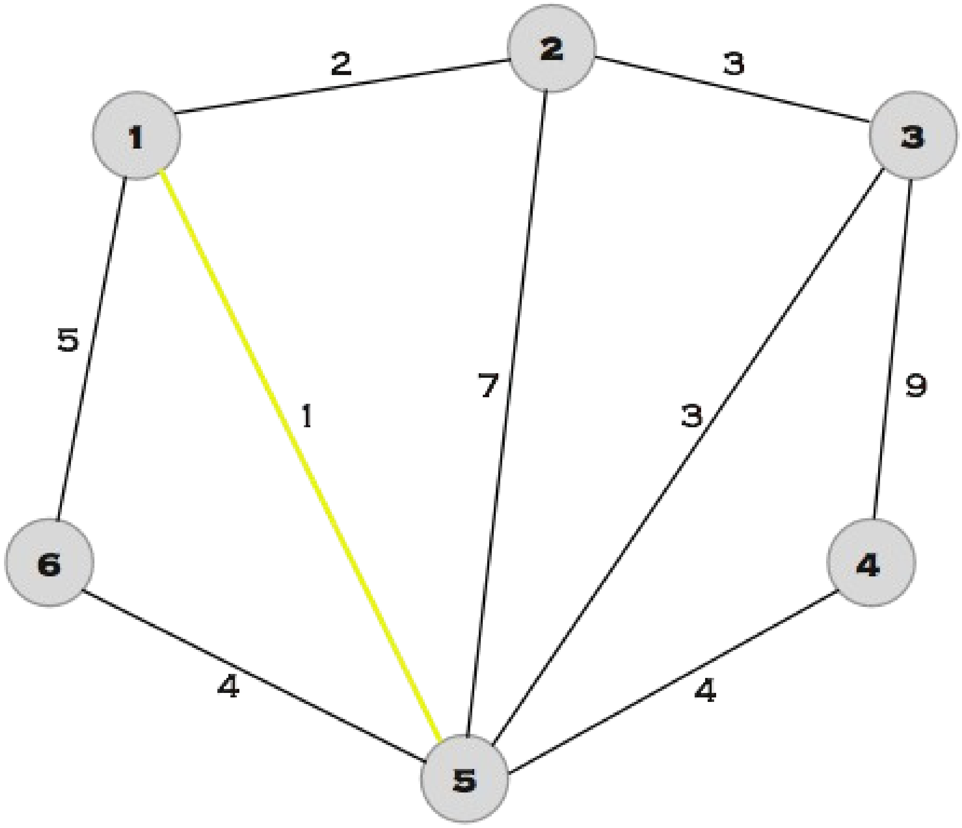
Árvore de Peso Mínimo

- Nosso Grafo em seu estado inicial
  - Número de Vértices = 6
  - Número de Arestas = 9
- Sabemos pelo algoritmo que a árvore de peso mínimo terá: Número de Vértices -1, ou seja = 5



Árvore de Peso Mínimo

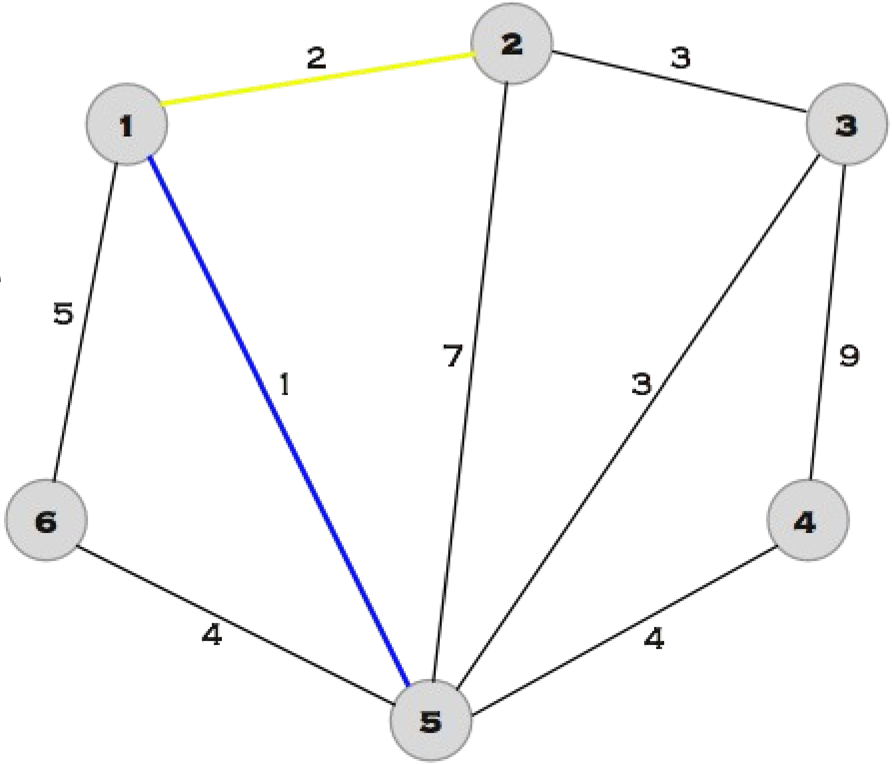
- Começamos rodando o algoritmo pegando a menor aresta, ou seja 1-5, e verificamos se com esta adição formamos um ciclo com o que temos até aqui;
- Como não temos árvore nenhuma por estarmos no início, seguimos adiante...



Árvore Mínima: (1-5)

Árvore de Peso Mínimo

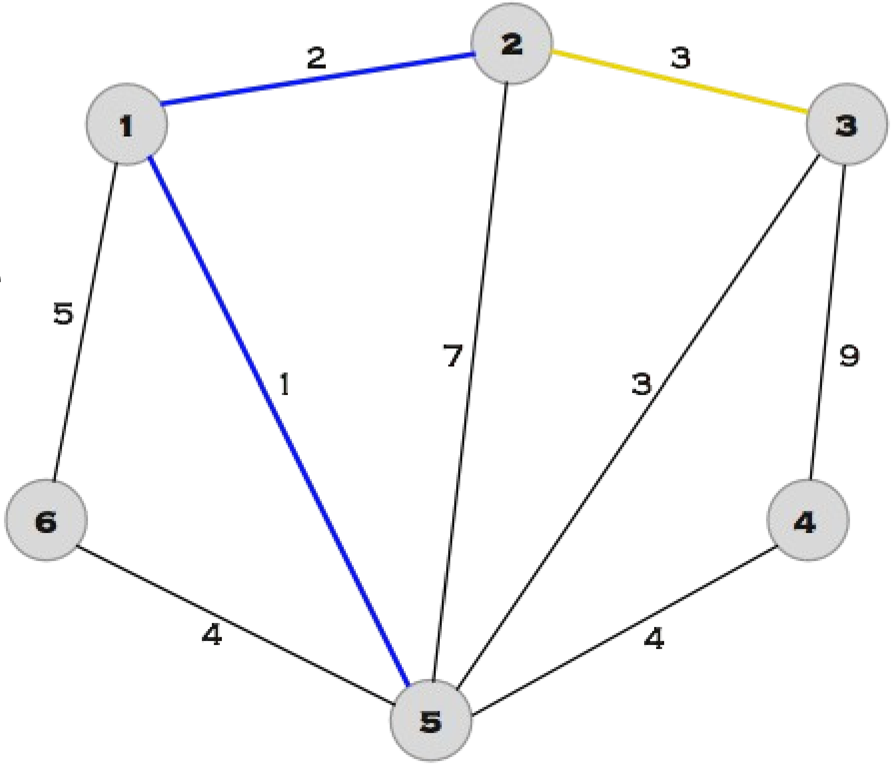
- A próxima aresta de menor peso que não gera um ciclo é 1-2 então a adicionamos no conjunto de árvore mínima.
- Nosso conjunto árvore mínima ainda só tem 2 arestas, então continuaremos…



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)

Árvore de Peso Mínimo

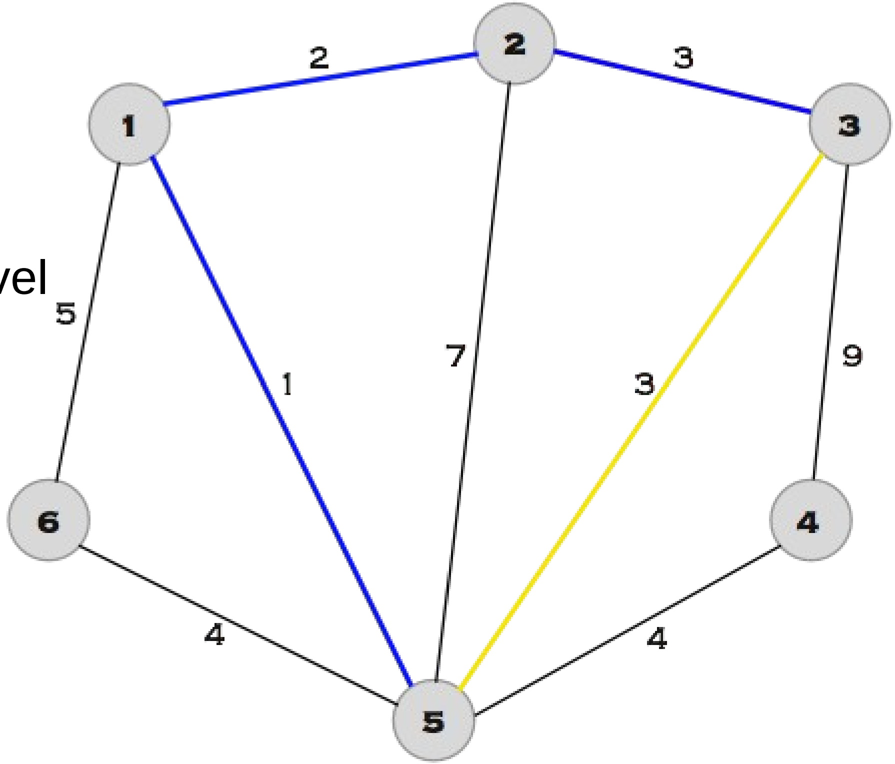
- A próxima aresta de menor peso que não gera um ciclo é 2-3 então a adicionamos no conjunto de árvore mínima.
- Nosso conjunto árvore mínima ainda só tem 3 arestas, então continuaremos…



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)(2-3)

Árvore de Peso Mínimo

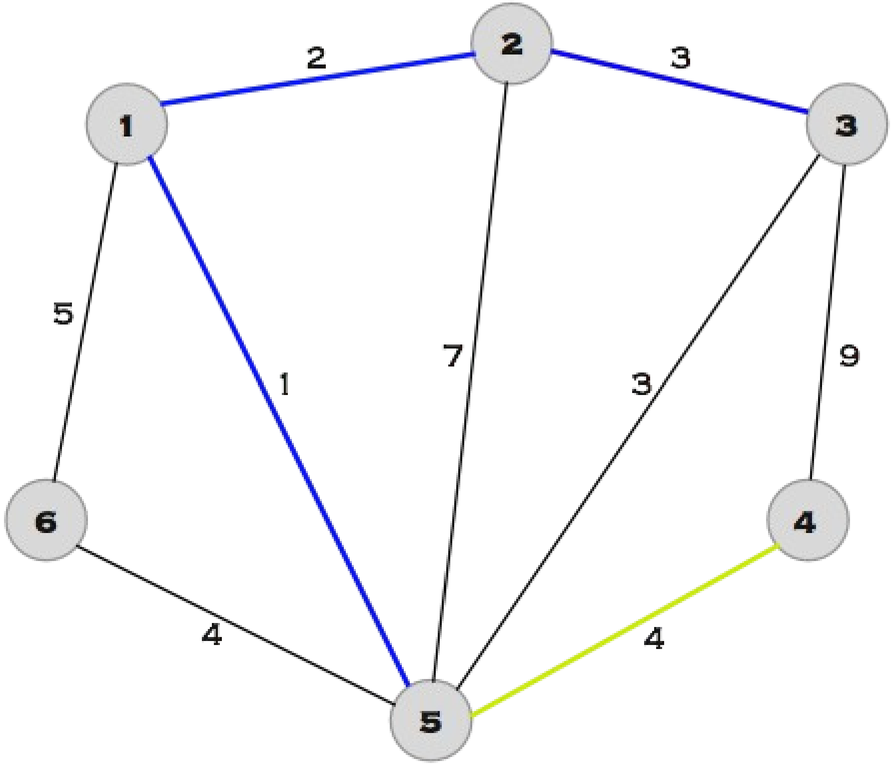
- A próxima aresta de menor peso é 3-5, mas observe que ela gera um ciclo (1-5-3-2-1), logo ela não é elegível de escolha para a árvore mínima.
- Seguimos adiante em busca da próxima menor aresta...



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)(2-3)

Árvore de Peso Mínimo

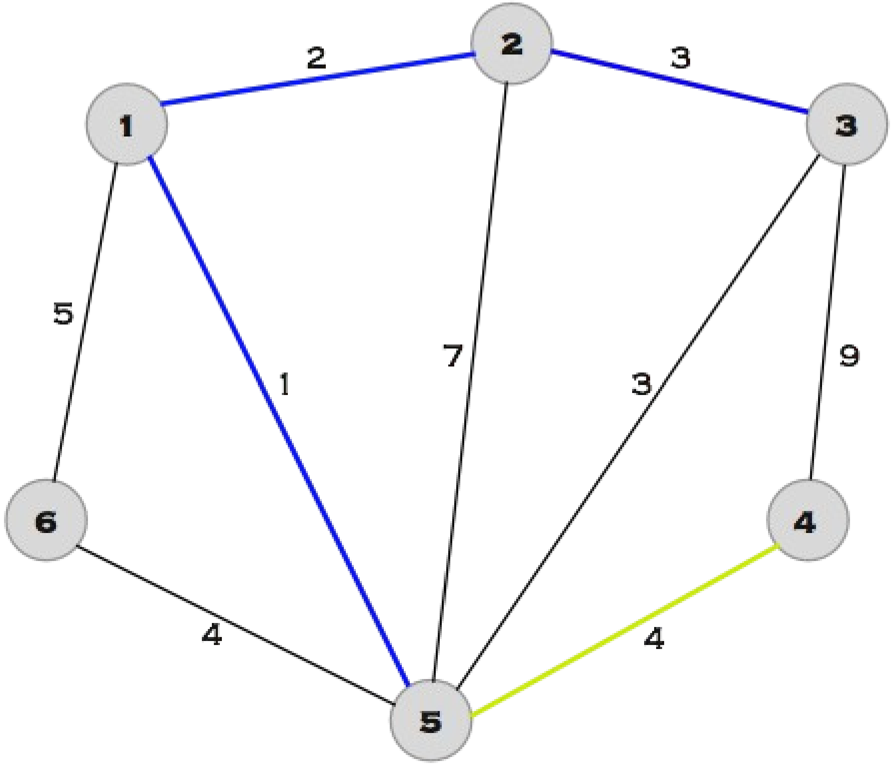
- A próxima aresta de menor peso que não gera um ciclo é 5-4 ou 5-6 então a adicionamos um destes no conjunto de árvore mínima.
- A escolha da aresta é arbitrária.
- Seguimos adiante em busca da próxima menor aresta...



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)(2-3)(5-4)

Árvore de Peso Mínimo

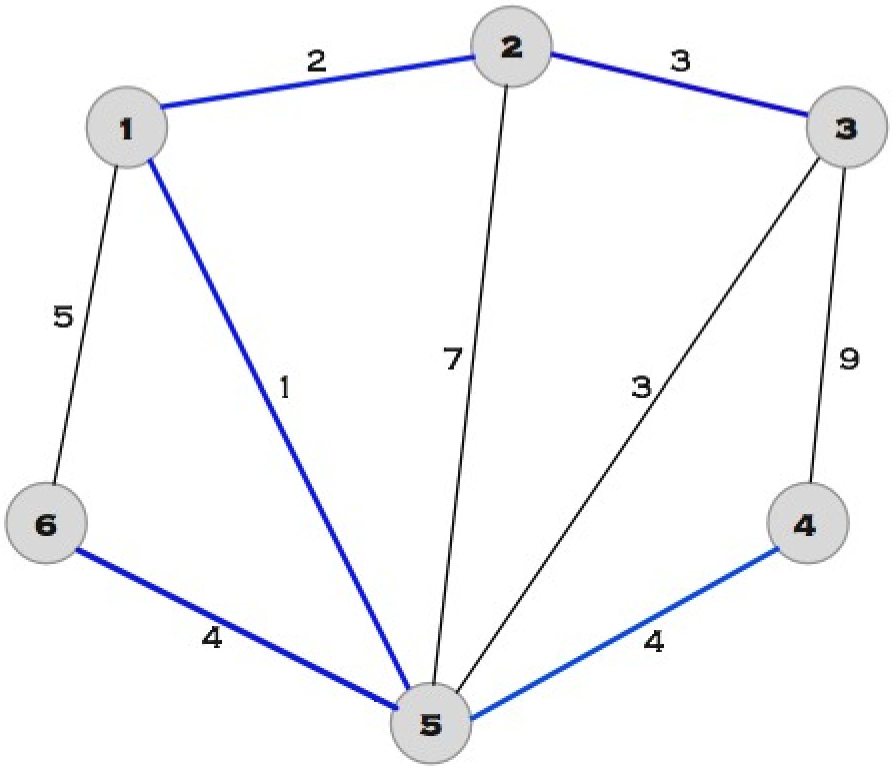
- A próxima aresta de menor peso que não gera um ciclo é 5-6 no conjunto de árvore mínima.
- Seguimos adiante em busca da próxima menor aresta...



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)(2-3)(5-4)(5-6)

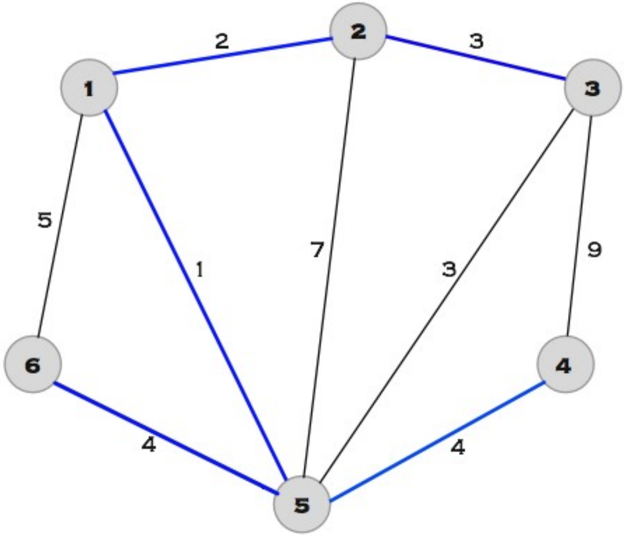
Árvore de Peso Mínimo

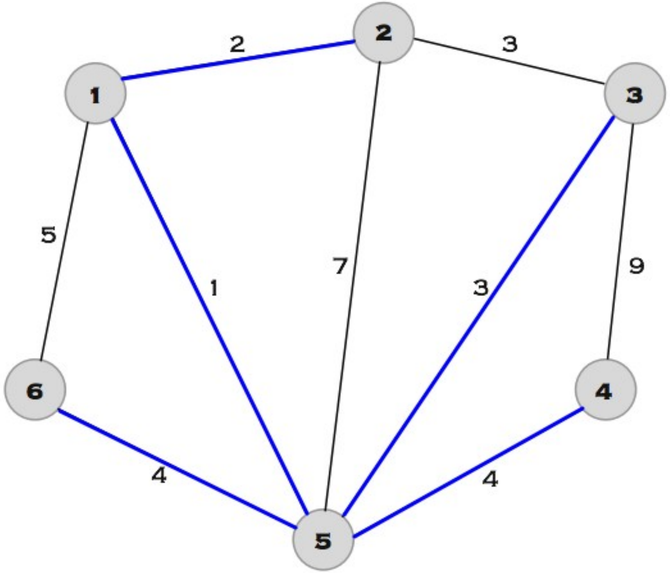
- Opa! No conjunto de árvore mínima temos Qte. Vértices -1, isso significa que achamos a Árvore de Peso Mínimo!
- Fim do Algoritmo



Árvore Mínima: (1-5)(1-2)(2-3)(5-4)(5-6)

Árvore de Peso Mínimo: **Atenção**

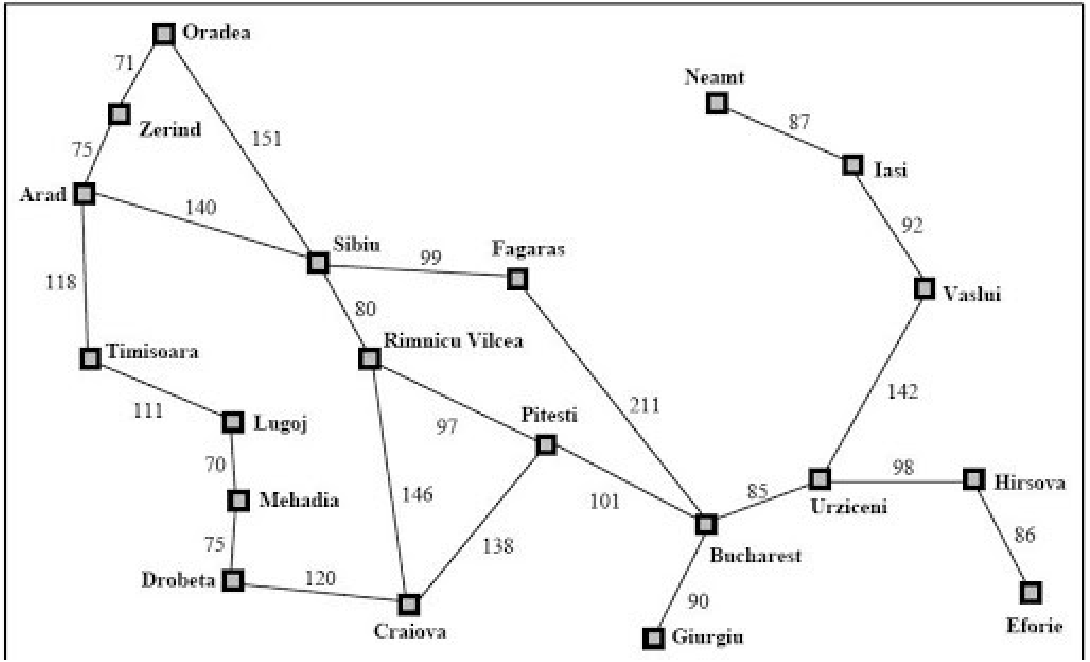




Árvores diferentes, mesmo peso mínimo (14), podem ser geradas por escolhas arbitrárias diferentes ou por algoritmos diferentes. Ambas as respostas estão CERTAS.

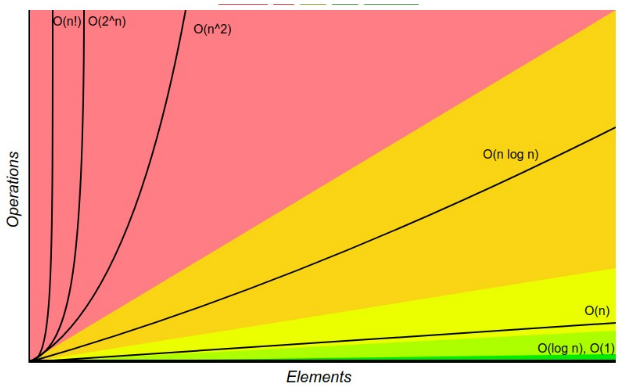
Caixeiro Viajante

- Dado um conjunto de cidades e a distância entre cada par de cidades, achar a menor rota possível que passa por cada cidade uma única vez e retorna.
- Romênia
- Saída de Bucareste
- Rota:
  - Pitesti
  - Craiova
  - Mehadia
  - Lugoj
  - Timisoara
  - Sibiu
- Como fazer?????

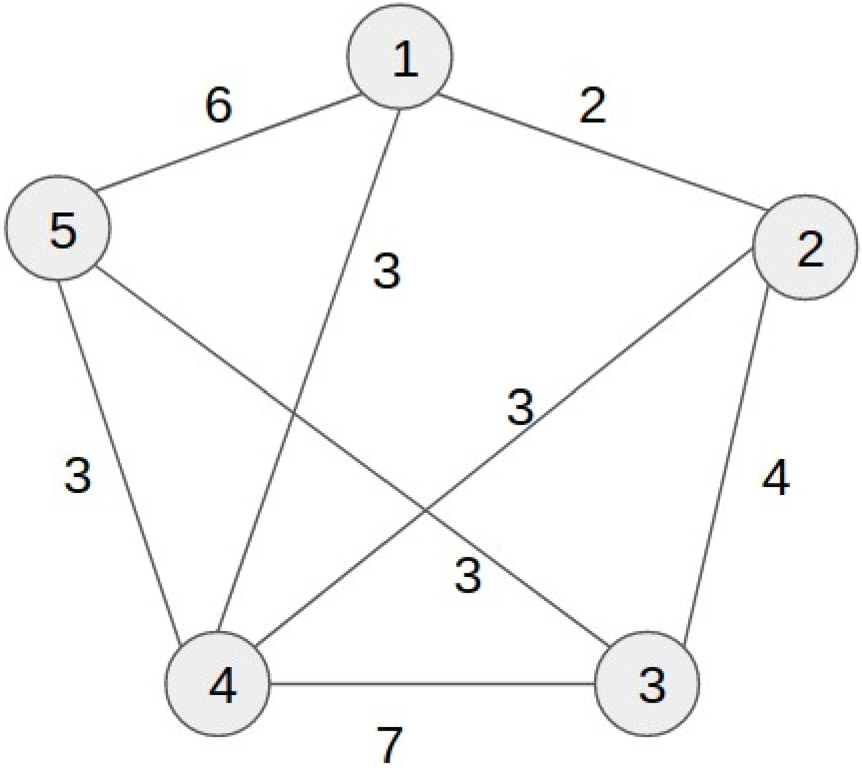


Caixeiro Viajante

- O tipo de problema do caixeiro viajante é considerado **NP** **$$$$$**;
- Veremos mais sobre problemas do tipo NP na próxima aula;
- Considere apenas que isso significa que este problema é MUITO DIFÍCIL de ser resolvido mesmo nos dias de hoje com os recursos computacionais existentes, e para mapas não muito grandes;
- Estamos falando de algoritmos O(n!)
- Resolução:
  - Achar um trajeto;
  - Provar não existe trajeto melhor que este;

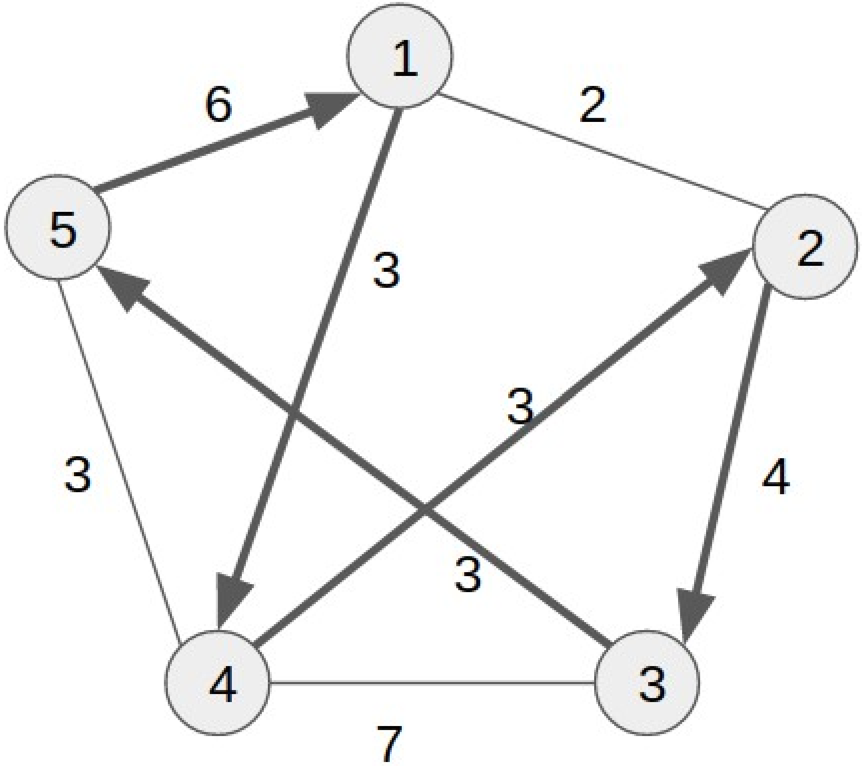


Caixeiro Viajante



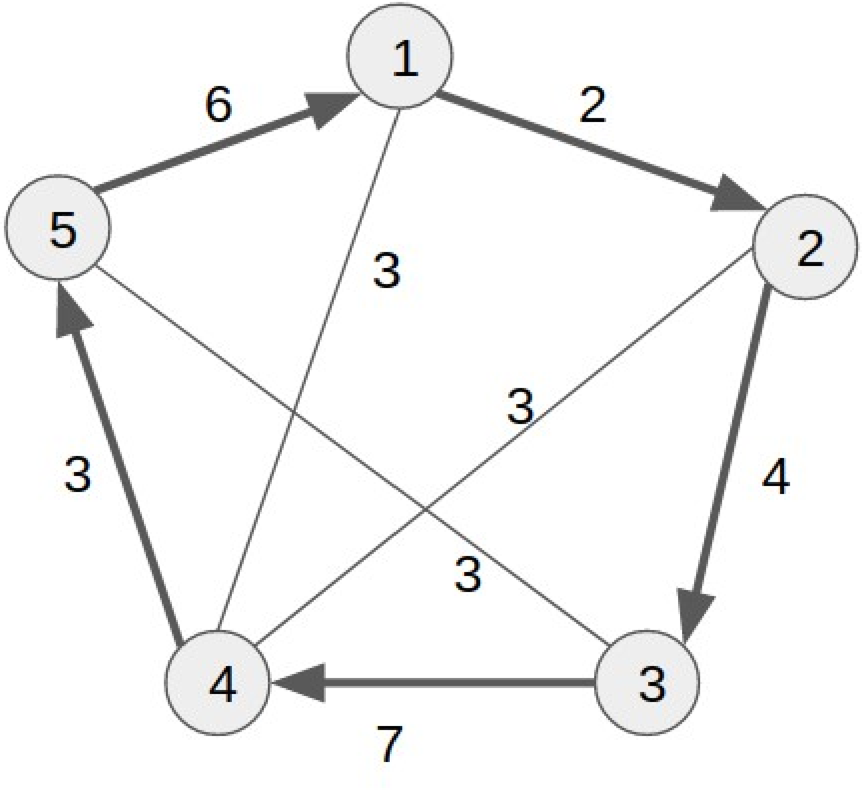
Como saber o melhor caminho partindo de 1, e voltando com o menor custo?

Caixeiro Viajante



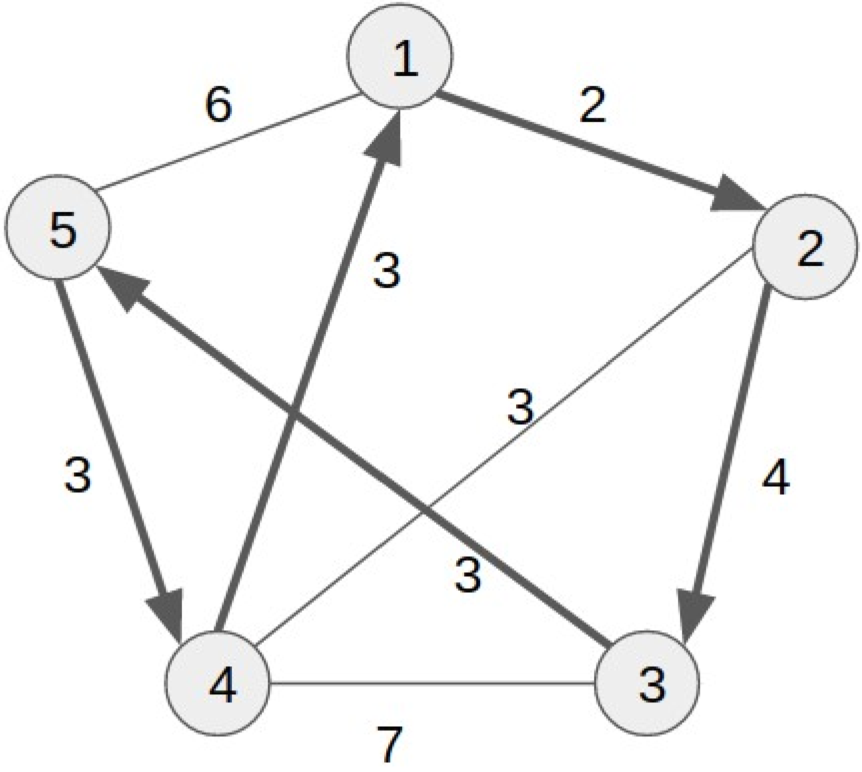
(1,4,2,3,5,1)
Este é uma possível rota, com custo 19.
Podemos achar uma rota com custo menor?

Caixeiro Viajante



Que tal o trajeto do pentágono?
(1,2,3,4,5,1)
… Não é uma boa idéia, seu custo é de 22.

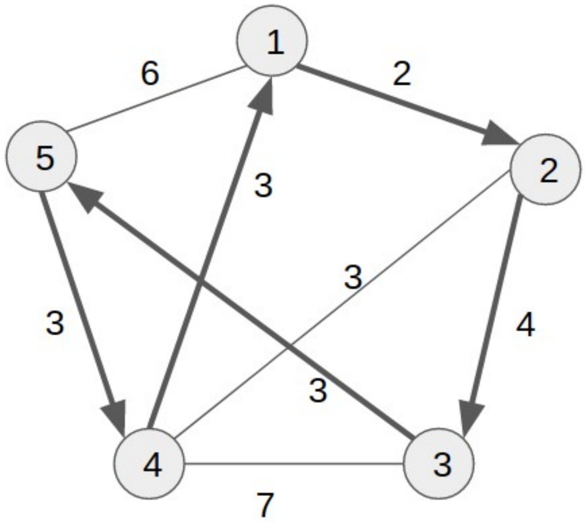
Caixeiro Viajante



Depois de um tempo e algumas tentativas, chegamos a conclusão que este é o caminho ótimo, com custo 15.

MAS… Achar isto em um grafo pequeno já é trabalhoso.

Caixeiro Viajante



Para achar a melhor rota com n arestas (usando força bruta):

1. *Selecione o vértice inicial*
2. *Fazer todas as (n-1) permutações Ex:*
   a. *1,2,3,4,5,1 = 22*
   b. *1,2,3,5,4,1 = 15*
   c. *1,4,2,3,5,1 = 19*
   d. *...*
3. *Salvar os custos das rotas para escolher o menor.*

Lembram como se calcula permutação na matemática?
Sim, com **fatorial**.

Por isso que dizemos que para Grafos maiores o problema fica complexo. Ex: Procurem o valor de 100!

Complexidade dos Algoritmos Estudados

Tema	Complexidade (Tempo)
Busca em Profundidade	O(V+A)
Busca em Largura	O(V+A)
Caminho entre dois vértices	O(V+A)
Encontrar um ciclo	O(V+A)
Menor Caminho	$O(V^2)$
Caixeiro Viajante (Força Bruta)	O(n!)


Thank You!