Roberto Ávila

TQM

Ensino Fundamental

TEORIA E QUESTÕES DE MATEMÁTICA

Toda matéria do Ensino Fundamental – 6º ao 9º ano

Mais de 4000 exercícios propostos com gabarito

Colégio Naval, EPCAr, Colégio Militar, EsSA, EEAR, Pedro II, CEFET [illegible]

CAP-UERJ, CAP-UFRJ, ENEM, UERJ, UFRJ, PUC, UNIRIO

EDITORA XYZ

Nova Edição Revisada e Ampliada

APRESENTAÇÃO

Esta obra é indicada para todos aqueles alunos e colegas professores que desejam ter ao seu alcance um material didático que abrange todo o programa do Ensino Fundamental. Com abordagem precisa, cada capítulo traz uma exploração teórica, rica em detalhes, seguida de uma coletânea de exercícios, dispostos em ordem crescente de dificuldade.

Com o pleno conhecimento da importância dos conceitos aqui apresentados no desenvolvimento de idéias no Ensino Médio, consideramos este livro um "manual de cabeceira" para o aluno que em breve há de ser candidato a uma vaga em concursos e exames vestibulares, visto que suas chances serão aumentadas a partir de um melhor preparo alcançado com o auxílio deste livro.

Certo de alcançar o objetivo maior, que é ser um agente facilitador do aprendizado da Matemática básica, agradeço à minha esposa, por me apoiar, à minha filha, por me incentivar e, principalmente, a Deus, por me capacitar.

O Autor

SUMÁRIO

Aritmética

Capítulo 1
Sistemas de numeração 01

Capítulo 2
Sistema decimal de numerção 04

Capítulo 3
Operações fundamentais 09

Capítulo 4
Números primos 16

Capítulo 5
Divisibilidade 21

Capítulo 6
Máximo divisor comum 28

Capítulo 7
Mínimo múltiplo comum 33

Capítulo 8
Frações 38

Capítulo 9
Números decimais 45

Capítulo 10
Razões e proporções 51

Capítulo 11
Números proporcionais 56

Capítulo 12
Sistemas de unidades de medidas 60

Capítulo 13
Regra de três 71

Capítulo 14
Médias 78

Capítulo 15
Porcentagem 83

Capítulo 16
Juros 99

Álgebra

Capítulo 17
Conjuntos 103

Capítulo 18
Números inteiros 116

Capítulo 19
Expressões algébricas 120

Capítulo 20
Produtos notáveis 127

Capítulo 21
Fatoração 134

Capítulo 22
Equação do 1° grau 148

Capítulo 23
Problemas do 1º grau ... 156

Capítulo 24
Sistemas de equações do 1º grau ... 161

Capítulo 25
Inequação do 1º grau ... 173

Capítulo 26
Equação do 2º grau ... 177

Capítulo 27
Problemas do 2º grau ... 189

Capítulo 28
Potências ... 194

Capítulo 29
Radicais ... 204

Capítulo 30
Equações biquadradas ... 220
Equações irracionais ... 220

Capítulo 31
Sistemas de equações do 2º grau ... 225

Capítulo 32
Funções ... 228

Capítulo 33
Inequações produto e fracionária ... 247
Inequações a duas variáveis ... 249

Geometria

Capítulo 34
Ângulos ... 254

Capítulo 35
Polígonos ... 261

Capítulo 36
Triângulos ... 267

Capítulo 37
Quadriláteros ... 276

Capítulo 38
Círculo ... 283

Capítulo 39
Linhas proporcionais ... 293

Capítulo 40
Relações métricas no triângulo retângulo ... 303

Capítulo 41
Razões trigonométricas no triângulo retângulo ... 313

Capítulo 42
Relações métricas no triângulo qualquer ... 323

Capítulo 43
Relações métricas no círculo ... 327

Capítulo 44
Polígonos regulares ... 332

Capítulo 45
Comprimento da circunferência ... 339

Capítulo 46
Áreas das principais figuras planas ... 344

Sistemas de Numeração

Um mesmo número pode ser representado em vários sistemas, de bases diferentes. A base de um sistema de numeração é dada pela quantidade de dígitos (símbolos) que são utilizados na representação de qualquer número nesse sistema. É obrigatório que um sistema de numeração possua o dígito 1 (um). Abaixo relacionamos alguns sistemas de numeração importantes:

a) **SISTEMA BINÁRIO** (base 2)
Possui dois dígitos: 0, 1.

b) **SISTEMA TERNÁRIO** (base 3)
Possui três dígitos: 0, 1, 2.

c) **SISTEMA DECIMAL** (base 10)
Possui dez dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Neste caso, cada dígito é chamado de **algarismo**.

d) **SISTEMA DE BASE 11**
Possui onze dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10.

→ Os dígitos maiores do que 9 são associados a letras maiúsculas do nosso alfabeto. O principal objetivo é evitar confusão. Imaginemos que tal convenção não existisse: quando víssemos o numeral 710 na base 11, não saberíamos dizer se possuía três dígitos (7, 1 e 0) ou dois dígitos (7 e 10). Assim, com a associação às letras maiúsculas, o numeral 710 na base 11 terá três dígitos, enquanto que o numeral 7A terá dois dígitos.

e) **SISTEMA DE BASE 12**
Possui doze dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11.

f) **SISTEMA HEXADECIMAL** (base 16)
Possui dezesseis dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

Mudança de Base

Chamemos de base qualquer toda base diferente de 10. Temos a considerar três casos de mudança de base:

→ 1° caso: **Base 10 para base qualquer**

Neste caso devemos dividir o número dado na base 10 pela base para a qual passaremos, procedendo-se sucessivas divisões dos quocientes obtidos pela base em questão, até obtermos um quociente menor que a base. O número escrito na base desejada é encontrado escrevendo-se o último quociente seguido pelos restos, lidos na ordem inversa em que foram obtidos.

Exemplos:
a) Escreva o número 72 na base 3:

$$\begin{array}{llll} 72 & |\,3 & & \\ \underline{0} & 24 & |\,3 & \\ & \underline{0} & 8 & |\,3 \\ & & \underline{2} & \boxed{2} \end{array}$$

Logo 72 = $(2200)_3$

Nota: Quando o número está em uma base qualquer, deve ser escrito entre parênteses, com a base indicada à direita e abaixo do segundo parêntese. No caso da base 10, tal procedimento não é necessário.

b) Escreva o número 1579 na base 12.

$$\begin{array}{lll} 1579 & |\,12 & \\ \underline{7} & 131 & |\,12 \\ & \underline{11} & \boxed{10} \end{array}$$

Logo 1579 = $(AB7)_{12}$

→ 2° caso: **Base qualquer para base 10**

Neste caso devemos multiplicar o primeiro dígito da esquerda do número dado pela base, adicionando o resultado ao segundo dígito. Tal resultado deve ser multiplicado pela base e, em seguida, o novo resultado somado ao terceiro dígito. Este procedimento deve ser repetido até o último algarismo da direita.

Exemplos:
a) Escreva na base 10 o número $(1223)_4$.
1 x 4 = 4 → 4 + 2 = 6
6 x 4 = 24 → 24 + 2 = 26
26 x 4 = 104 → 104 + 3 = 107

Daí $(1223)_4$ = 107

b) Escreva o número $(A25)_{11}$ na base 10.
A = 10 x 11 = 110 → 110 + 2 = 112
112 x 11 = 1232 → 1232 + 5 = 1237

Daí $(A25)_{11}$ = 1237

Observação: No próximo capítulo estudaremos uma outra opção para efetuar essa mudança de base.

→ 3° caso: **Base qualquer para base qualquer**

Não existe método que nos permita fazer tal mudança diretamente. É necessário que passemos antes para a base 10 (2° caso) e, em seguida, para a base qualquer que se deseja.

Exemplo:
Escreva o número $(123)_5$ na base 4.

→ Em primeiro lugar vamos passar da base 5 para base 10:
1 x 5 = 5 → 5 + 2 = 7
7 x 5 = 35 → 35 + 3 = 38

Então $(123)_5$ = 38

→ Agora passamos da base 10 para a base 4:

$$\begin{array}{lll} 38 & |\,4 & \\ \underline{2} & 9 & |\,4 \\ & \underline{1} & \boxed{2} \end{array}$$

Daí 38 = $(212)_4$

Concluindo: $(123)_5 = (212)_4$

Observação: No sistema de numeração decimal, "cada dez unidades de uma ordem formam uma unidade da ordem imediatamente superior". Isso justifica o popular "vai 1" no algoritmo da adição:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (1)} \\ 39 \\ +\,21 \\ \hline 60 \end{array}$$

Analogamente, no sistema binário, "cada duas unidades de uma ordem formam uma unidade da ordem imediatamente superior".
Baseado nas afirmativas acima efetue a adição

$$\begin{array}{r} (11101)_2 \\ +\,(11011)_2 \\ \hline ? \end{array}$$

Sem converter para a base 10, em nenhum momento da solução.

Resposta: $(111000)_2$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Escreva na base 2 os números abaixo:
   a) 42
   b) 73
   c) 16

2) Escreva os números abaixo na base 10:
   a) $(21101)_3$
   b) $(111010)_2$
   c) $(2A3)_{12}$
   d) $(1BA)_{13}$

3) Escreva o ternário 11221 na base 4.

4) Assinale a alternativa **FALSA**:
   a) $(125)_5 = 40$
   b) $(22)_3 = 8$
   c) $(1012)_3 = 32$
   d) $(1100)_2 = 12$

5) Qual a alternativa correta?
   a) $7 = (1001)_2$
   b) $9 = (1001)_3$
   c) $7 = (1001)_3$
   d) $9 = (1001)_2$

6) Qual a afirmativa correta?
   a) $(1011)_2 = 14$
   b) $(123)_3 = 18$
   c) $(132)_4 = 30$
   d) Há duas corretas

7) Na história dos campeonatos brasileiros, o C.R. Vasco da Gama foi o que mais vezes teve o artilheiro da competição. Roberto Dinamite em 1974 e 1984 com 16 gols em cada uma das competições; Paulinho em 1978 com 19 gols; Bebeto em 1992 com 18 gols; Edmundo em 1997 com 29 gols (recorde) e Romário em 2002 com 21 gols. Determine a soma de todos esses gols, no sistema de numeração de base 11.

8) Escreva na base 10 o maior binário de 5 dígitos que podemos formar.

9) Com quantos zeros termina o produto 1 x 2 x 3 x 4 x ... x 9 x 10 x 11, quando escrito na base 5?

10) Passe o número $(12003)_5$ para a base 8.

11) Escreva os números abaixo nas bases indicadas:
   a) $(21)_3 = (........)_2$
   b) $(56)_7 = (........)_4$
   c) $(11A)_{11} = (........)_{12}$

12) Resolva as operações:
   a) $(3211)_4 + (2130)_4$
   b) $(7452)_8 - (2634)_8$
   c) $(53)_6 \times (14)_6$
   d) $(101000)_2 \div (1000)_2$

13) O resultado de $(1340)_6 - (1333)_4$, na base 9 é:
   a) 265
   b) 277
   c) 761
   d) 764

14) Dê o resultado da operção, na base 5: $(271)_8 + (12221)_3$.

QUESTÕES DE CONCURSOS

15) **(CEFET)** No sistema de númeração de base 2, o numeral mais simples de 23 é:
   a) 11101
   b) 10111
   c) 1100
   d) 1001
   e) 11

16) **(CEFET)** A tabela abaixo está escrita no sistema binário. Determine o último elemento que satisfaça à seqüência.
   a) 10000
   b) 10001
   c) 10010
   d) 10011
   e) 10100

1010	101	10	1
1011	110	11	100
1100	111	1000	1001
1101	1110	1111	

17) **(CEFET)** "O setor público registra déficit de $ 33,091 bilhões em 1994". Se x é igual ao número de zeros dessa quantia, desprezados os zeros dos centavos, então o número x escrito no sistema binário é:
   a) $10_{(2)}$
   b) $100_{(2)}$
   c) $101_{(2)}$
   d) $110_{(2)}$
   e) $111_{(2)}$

18) **(CN)** Considere um sistema de numeração, que usa os algarismos hindu-arábicos e o valor posicional do algarismo no numeral, mas numera as ordens da esquerda para direita. Por **Exemplo:** no número 3452 tem-se:
1ª ordem: 3
2ª ordem: 4
3ª ordem: 5
4ª ordem: 2
Além disso, cada 7 unidades de uma ordem forma 1 unidade da ordem registrada imediatamente à direita.
Com base nesse sistema de numeração, coloque (E) quando a operação for efetuada erradamente e (C) quando efetuada corretamente. Lendo o resultado final da esquerda para a direita encontramos:

$$\begin{array}{r} 620 \\ +555 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 245 \\ -461 \\ \hline 543 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 360 \\ \times 4 \\ \hline 543 \end{array}$$

( ) ( ) ( )

   a) (E), (E), (E)
   b) (E), (C), (C)
   c) (C), (E), (C)
   d) (C), (C), (E)
   e) (C), (C), (C)

19) **(CN)** O número natural 198 está escrito na base 10. Em quantas bases de numeração o número dado é escrito com três algarismos?

   a) 1
   b) 3

c) 5
d) 7
e) 9

20) **(CN)**Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número na base decimal $n=21^{2012}$, na base 7?
a) 2012
b) 2013
c) 2014
d) 2015
e) 2016

GABARITO

1) a) $(101010)_2$
b) $(100\ 1001)_2$
c) $(1\ 0000)_2$

2) a) 199
b) 58
c) 411
d) 322

3) $(2011)_4$

4) A

5) D

6) C

7) $(A\ 9)_{11}$

8) 31

9) 2

10) $(1556)_8$

11) a) 111
b) 221
c) BA

12) a) $(12001)_4$
b) $(4616)_8$
c) $(1310)_6$
d) $(101)_2$

13) A
14) $(2340)_5$
15) B
16) A
17) E
18) E
19) E
20) A

OBSERVAÇÕES

Sistema Decimal de Numeração

É o sistema de base 10, ou seja, para representarmos qualquer número neste sistema, dispomos de 10 dígitos, que são chamados de **algarismos.** Os algarismos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O algarismo 0 (zero) é o único dito **não significativo**, enquanto que os demais são chamados **significativos.**

Valor Absoluto e Valor Relativo

O **valor absoluto** de um algarismo é ele próprio, independente da posição que ocupa no número em questão.
Já o **valor relativo** depende da posição ocupada pelo algarismo no número.

Exemplo:

→ No número 572, os valores absolutos dos algarismos 5, 7 e 2 são respectivamente 5, 7 e 2.

→ Como: $572 = 500 + 70 + 2$, temos que o valor relativo do algarismo 5 é 500, do algarismo 7 é 70 e o do 2 é 2.

Classes e Ordens

A localização de um algarismo em um número pode ser feita seguindo-se o critério de **ordens** ou o de **classes.**
Cada algarismo em um número representa uma **ordem.** As ordens são contadas da direita para a esquerda.

Exemplo:

8	9	4	3	→	número
4ª	3ª	2ª	1ª	→	ordem

Para podermos ler um número devemos dividi-lo de três em três algarismos, da direita para a esquerda. Cada um desses grupamentos é chamado de **classe.** Dentro de uma mesma classe o primeiro algarismo da direita ocupa a casa das unidades, o segundo a casa das dezenas e o último a casa das centenas. A primeira classe é a **classe simples**, a segunda é a **classe de milhar**, a terceira a **classe de milhão**, a quarta a **classe de bilhão** e assim sucessivamente. A única classe que pode ser incompleta é a última.

Exemplo:

	Classe de bilhão	Classe de milhão	Classe de milhar	Classe simples
O número	5	407	916	823
	u	cdu	cdu	cdu

tem 10 ordens e 4 classes, sendo 3 completas e uma incompleta

Princípio da Posição Decimal

"Cada dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior"

Como podemos observar, dez unidades equivalem a uma dezena, dez dezenas equivalem a uma centena, e assim sucessivamente.

Decomposição de um Número no Sistema Decimal

Todo número escrito no sistema decimal pode ser decomposto na soma dos produtos dos algarismos que o compõem ordenadamente da direita para esquerda, por potências crescentes de 10, começando sempre pela potência 10°.

Exemplos:

a) $7.839 = 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

b) $xyz = x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1 + z \,.\, 10^0$

Observação: Tal decomposição é viável para as demais bases. Basta que multipliquemos cada dígito do número, ordenadamente, da direita para a esquerda, por potências crescentes da base em questão.

Exemplos:

a) $(3542)_6 = 3 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 2 \times 6^0 = 854$

b) $(abc)_8 = a \times 8^2 + b \times 8^1 + c \times 8^0 = 64a + 8b + c$

Algarismos Romanos

O sistema de numeração romana se utiliza dos dígitos a seguir:

I = 1	V = 5	X = 10	L = 50
C = 100	D = 500	M = 1000	

Note que ao lado de cada dígito romano está o seu valor equivalente em algarismos arábicos (os algarismos que normalmente utilizamos no sistema decimal).

Para convertemos um número escrito em algarismos romanos para a numeração decimal ou vice-versa, é necessário que nos familiarizemos com alguns detalhes e propriedades, os quais abordaremos a seguir:

1) O sentido de leitura é da esquerda para a direita.

2) Quando encontramos um dígito de menor ou igual valor do que aquele que está imediatamente à sua esquerda, tais valores devem ser somados.

Exemplos:

a) MD = 1000 + 500 = 1500

b) LX = 50 + 10 = 60

3) Quando encontramos um dígito de maior valor do que aquele que está imediatamente à sua esquerda, tais valores devem ser subtraídos.

Exemplos:

a) CM = 1000 – 100 = 900

b) XL = 50 – 10 = 40

4) Apenas os dígitos associados a potências de 10 (I, X, C e M) podem aparecer repetidos, assim mesmo, no máximo três vezes consecutivas.

Exemplos:

a) MMMDCVII = 3607

b) DCCCIX = 809

5) Cada barra colocada sobre um grupamento de dígitos multiplica por 1000 o valor desse grupamento.

Exemplos:

a) $\overline{\text{VII}}\,\text{CCXXXV} = 7235$

b) $\overline{\overline{\text{XI}}}\,\text{IV} = 11000004$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Qual o menor número de 3 algarismos?

2) Qual o menor número de 3 algarismos significativos?

3) Qual o menor número de 3 algarismos distintos?

4) Qual o menor número de 3 algarismos significativos e distintos?

5) Qual o maior número de 3 algarismos?

6) Qual o maior número de 3 algarismos distintos?

7) Qual o menor número de 4 algarismos?

8) Qual o menor número de 4 algarismos distintos?

9) Qual o menor número de 4 algarismos significativos?

10) Qual o menor número de 4 algarismos significativos distintos?

11) Qual o maior número de 4 algarismos?

12) Qual o maior número de 4 algarismos distintos?

13) Quanto vale a soma do menor número de 4 algarismos distintos com o maior número de 4 algarismos?

14) Quanto vale a diferença entre o menor número de 4 algarismos significativos e distintos e o menor número de 4 algarismos significativos?

15) Quantas ordens e classes tem o número 295476563?

16) No número 758014, quanto vale o produto entre o algarismo de maior valor absoluto e o de maior valor relativo?

17) Quantas dezenas tem o número 67423? E centenas?

18) Qual o número formado por 16 dezenas, meia unidade de 4ª ordem e 12 unidades de milhar?

19) Qual o número formado por 32 unidades de 4ª ordem, 47 centenas e 1,2 dezenas?

20) Quantas centenas tem o número 3876456?

21) 50000 dezenas equivale a meia unidade de:
a) 4ª ordem
b) 5ª ordem
c) 6ª ordem
d) 7ª ordem

22) A soma dos valores absolutos dos algarismos do número 3456X728 é 40. Calcule o valor do algarismo X.

23) Quanto vale a soma do algarismo de maior valor relativo com o de menor valor absoluto do número 78412?

24) Escreva sob a forma de algarismos arábicos, os números romanos:
a) MCCXXXIV
b) MMDCIX
c) MMMCDXI
d) $\overline{\text{LI}}$ DCCXLII

25) Escreva sob a forma de algarismos romanos:
a) 3701
b) 2934
c) 32013
d) 7014219

26) Escreva em algarismos arábicos:
a) MMDCXLII
b) LI CDIX

27) Escreva em algarismos romanos:
a) 3711
b) 13789201

28) Quantos números inteiros escrevemos de 72 a 243?

29) Quantos números inteiros há entre 21 e 94?

30) Quantos números inteiros há de 35 inclusive a 107 exclusive?

31) Quantos algarismos são utilizados para numerarmos um livro que possui 732 páginas?

32) Quantos algarismos são utilizados para escrevermos os números inteiros compreendidos entre 32 e 1812?

33) Para numerar as páginas de um livro foram utilizados 894 algarismos. Quantas páginas tem esse livro?

34) Fernanda escreveu a sucessão dos números inteiros positivos 1234567891011... Qual o algarismo que ocupa a 3783ª posição?

35) Quantas vezes o algarismos 4 ocupa a casa das dezenas, quando escrevemos os números inteiros de 1 até 300?

36) No exercício anterior, quantas vezes o algarismo 4 ocupa a casa das unidades?

37) Quantos números naturais existem:
a) de 125 até 725?
b) entre 125 e 725?
c) de 125 (inclusive) a 725 (exclusive)?

38) Quantas classes completas e incompletas, respectivamente, possui o número 8.147.313?

39) Qual é a ordem e classe, respectivamente, do algarismo "zero" no numeral 210546?

40) Qual a diferença entre o valor relativo do algarismo de 3ª ordem e o valor absoluto do algarismo de 5ª ordem do número 36.427?

41) Assinale a alternativa **INCORRETA**:
a) As palavras número e numeral têm significados diferentes.
b) Um número é representado somente por um numeral.
c) Numeral é qualquer símbolo que representa um número.
d) Nem todo numeral é algarismo.

42) Certa pessoa escrevendo a sucessão de números naturais não nulos, interrompeu seu trabalho em um certo número. Em que número parou, se até esse número empregou 1506 algarismos?

43) As fichas de inscrição dos candidatos a um certo vestibular são colocadas em ordem alfabética de acordo com o nome do candidato, e em seguida é atribuído um número a cada uma delas. A numeração é feita por intermédio de números inteiros positivos e consecutivos, começando do número 1. Sabe-se que para numerar todos os candidatos foram utilizados 232574 algarismos. Quantos candidatos se inscreveram nesse vestibular?

44) Quantos algarismos possui o número $X = 2^{12} \times 5^{9}$?

45) Ao escrever os números inteiros positivos de 1 até 537, inclusive, quantas vezes figurou o algarismo 8?

46) Um número é representado, no sistema de numeração decimal, por um numeral de 2 algarismos cuja soma é 4. Invertendo-se a ordem desses algarismos, obtém-se um número que excede o número original em 18 unidades. Determine o número original.

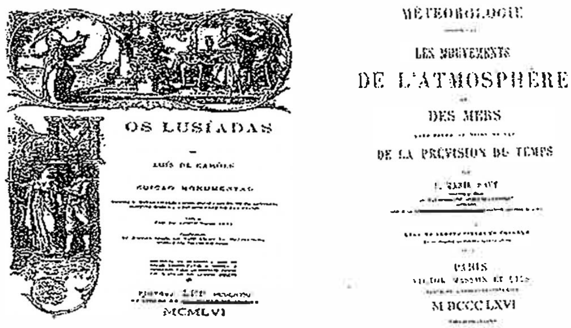
47) Um número N é escrito na base 7 utilizando 2 dígitos. Ao escrevermos o número N na base 5 encontramos os mesmos dígitos, só que em ordem invertida. Escreva o número N na base 3.

QUESTÕES DE CONCURSOS

48) **(E.E.Aer)** Como resultado de um operação aritmética estava escrito "24.905", com evidente erro tipográfico, "o que está colocado de cabeça para baixo é o número 5". Essa afirmativa é:
a) errada
b) correta e lógica
c) correta, mas não lógica
d) matematicamente aceitável

49) **(ENEM)** O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:
A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.
O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é
a) 2 614
b) 3 624
c) 2 715
d) 3 725
e)4 162

50) **(CM)** Temos, abaixo, a reprodução das folhas de rosto de dois livros que foram publicados numa época em que se usavam os algarismos romanos para diversas finalidades. Veja, no final de cada folha de rosto, o ano de publicação de cada um desses livros.



51) **(ENEM)** Efetuando a multiplicação de um número inteiro x por 2.435, um estudante enganou-se e achou o produto 355.510. Se o engano foi a troca de posição em x, do algarismo das dezenas pelo das unidades, o verdadeiro produto é:
a) 238.210
b) 357.350
c) 399.340
d) 1.012.960
e)1.122.535

52) **(CEFET)** No número $(11221)_3$, qual o valor relativo do algarismo que ocupa a segunda ordem quando escrito no sistema decimal?

53) **(E.E.Aer)** Quantos são os números compreendidos de 50 a 60, inclusives, que contêm mais dezenas que unidades?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

54) **(EPCAR)** Três candidatos ao 1° ano do CPCAR/2001 fizeram um cursinho preparatório intensivo. Sabe-se que o candidato A teve aulas do dia 20/06 ao dia 05/07, o candidato B, do dia 30/06 ao dia 09/07 e o candidato C, do dia 01/07 ao dia 25/07. A opção que indica o número de dias em que pelo menos um candidato estava participando do cursinho é:
a) 10
b) 16
c) 25
d) 36

55) **(UNIFICADO)** O número de algarismos do produto $5^{17} \times 4^9$ é igual a
a) 17;
b) 18;
c) 26;
d) 34;
e) 35.

56) **(CPII)** Considere um número natural N e multiplique seus algarismos. Repita o processo até que o resultado seja um único algarismo. Chame esse algarismo de "resíduo" do número N.
Por exemplo, o "resíduo" de 714 é 6, porque $7 \times 1 \times 4 = 28 \rightarrow 2 \times 8 = 16 \rightarrow 1 \times 6 = 6$
a) Qual é o resíduo de 7381?
b) Analise cada afirmação a seguir, classificando-a como verdadeira (V) ou falsa (F):
( ) Em um número de dois algarismos cujo algarismo da unidade é 1, o resíduo é o algarismo de sua dezena.
( ) O resíduo de um número par é sempre par.
( ) Os resíduos de números formados apenas pelo algarismo 3 são sempre ímpares.
c)Qual é o maior número formado por quatro algarismos diferentes cujo resíduo é ímpar? Justifique sua resposta.

57) **(CM)** Considere a seguinte afirmativa: "Somando-se 45 unidades a um número, cujo numeral tem dois algarismos, obtêm-se outro número, cujo numeral tem os mesmos algarismos, em ordem invertida". Se, no número inicial, u indicar o algarismo das unidades e d, o das dezenas, uma equação que poderá representar a afirmativa dada é:
a) $u = 6d$
b) $u - 3d = 3$
c) $u + d = 5$
d) $du - ud = 45$
e) $ud = du + 45$

58) **(CM)** Considere um número N de dois algarismos, ab, e o número obtido após inverter a ordem destes algarismos, ba. Se efetuarmos a subtração ab-ba obtemos como resultado um cubo perfeito positivo. Assim, podemos afirmar que:
a) N não pode terminar em 5
b) N pode terminar em qualquer algarismo exceto 5
c) N não existe
d) Há exatamente 7 valores para N
e) Há exatamente 10 valores para N

59) **(CM)** Se, ao multiplicarmos o número inteiro e positivo n por outro número inteiro e positivo de 2 algarismos, invertermos a ordem dos algarismos deste segundo número, o resultado fica aumentado de 261. A soma dos algarismos que constituem o número n será:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

60) **(EPCAR)** Sejam os números inteiros MNPQ e NMPQ, onde M, N, P e Q são algarismos distintos e diferentes de zero e N > M. Sobre a diferença (NMPQ - MNPQ), pode-se afirmar que, necessariamente, será:
a) ímpar.
b) divisível por (M – N).
c) sempre negativa.
d) par menor que 800.

61) **(EPCAR)** Um número de três algarismos **a, b** e **c**, nessa ordem, **(a > c)** é tal que, quando se inverte a posição dos algarismos **a** e **c** e subtrai-se o novo número do original, encontra-se, na diferença, um número terminado em 4. Essa diferença é um número cuja soma dos algarismos é:
a) 16
b) 17
c) 18
d) 19

62) **(CEFETEQ)** Escrevendo-se o algarismo 5 à direita de um certo número, ele fica aumentado de 248 unidades. Que número é esse?

63) **(CM)** Um numeral é escrito com 6 algarismos, sendo que o algarismo 1 ocupa a ordem das centenas de milhar. Se esse algarismo 1 for colocado à direita dos outros 5 algarismos, o valor do numeral original fica multiplicado por três. A diferença entre o maior e o menor dos números correspondentes a esses dois numerais é:
a) 285.714
b) 342.857
c) 358.471
d) 374.853
e) 428.571

64) **(UNICAMP)** Um número inteiro positivo de três algarismos termina em 7. Se este último algarismo for colocado antes dos outros dois, o novo número assim formado excede de 21 o dobro do número original. Qual é o número inicial? Justifique sua resposta.

65) **(CEFET)** Sabendo que o algarismo 1 aparece 202 vezes na numeração de páginas iniciais sucessivas de um livro, quantas páginas tem esse livro?
a) 440
b) 500
c) 510
d) 540

66) **(ENEM)** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.
Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é
a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

67) **(CN)** Uma expressão constituída por números de dois algarismos é do tipo □□ x □□ - □□, no qual cada quadrinho deve ser ocupado por um algarismo, num total de seis algarismos para toda a expressão. Sabendo-se que os algarismos que preencherão os quadrinhos são todos distintos, o menor valor possível para toda a expressão é (Observação: números do tipo 07 são considerados de um algarismo)
a) 123
b) 132
c) 213
d) 231
e) 312

68) **(CN)** Se, ao multiplicarmos o número inteiro e positivo N por outro número inteiro e positivo de 2 algarismos, invertermos a ordem dos algarismos deste segundo número, o resultado fica aumentado de 207. A soma dos algarismos que constituem o número N dá:
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

69) **(CN)** Um número natural de 6 algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo 1. Levando-se este algarismo 1, para o último lugar, à direita, conservando a sequência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo. O número primitivo é:
a) 100.006
b) múltiplo de 11
c) múltiplo de 4
d) maior que 180.000
e) divisível po 5

70) **(CN)** Considere a seguinte subtração, onde x, b e z são algarismos distintos:

$$\begin{array}{r} 684x \\ -\ x684 \\ \hline bxbz \end{array}$$

Logo, x + b + z é igual a :
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

71) **(CN)** Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$.
O valor de (a + b + c) é igual a:
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

72) **(CN)** Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então M + N é necessariamente múltiplo de:
a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 11

73) **(CN)** Em um número natural N de 9 algarismos, tem-se: os algarismos das unidades simples, unidades de milhar e unidade de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhão iguais a z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:
a) 333664
b) 333665
c) 333666
d) 333667
e) 333668

GABARITO

1) 100
2) 111
3) 102
4) 123
5) 999
6) 987
7) 1000
8) 1023
9) 1111

10) 1234
11) 9999
12) 9876
13) 11022
14) 123
15) 9 ordens e 3 classes
16) 56
17) 6742 e 674
18) 12660
19) 36712
20) 38764
21) D
22) 5
23) 8
24) a) 1234
b) 2609
c) 3411
d) 51742
25) a) MMMDCCI
b) MMCMXXXIV
c) $\overline{\overline{XX}}\overline{II}XIII$
d) $\overline{\overline{VII}}\overline{XIV}CCXIX$
26) a) 2642
b) 51409
27) a) MMMDCCXI
b) $\overline{\overline{XIII}}\overline{DCCLXXXIX}CCI$
28) 172
29) 72
30) 72
31) 2088
32) 6082
33) 334
34) 2
35) 30
36) 30
37) a) 601
b) 599
c) 600
38) duas e uma
39) 4ª e 2ª
40) 397
41) B
42) 538
43) 48736
44) 10
45) 103
46) 13
47) $(122)_3$
48) A
49) A
50) A
51) C
52) 30
53) D
54) D
55) B
56) a) 6
b) V – V – F
c) 9751
57) E
58) D
59) B
60) B
61) C
62) 27
63) A
64) 357
65) C
66) E
67) B
68) A
69) B
70) C
71) D
72) E
73) D

OBSERVAÇÕES

Operações Fundamentais

Neste capítulo estudaremos a estrutura de cada uma das quatro operações fundamentais: ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO e DIVISÃO.

1. ADIÇÃO

→ O algoritmo ("esquema") da adição é:

$$\begin{array}{r} A \\ + \ B \\ \hline C \end{array} \quad \text{ou} \quad \boxed{A+B=C}$$

Os termos **A** e **B** são as **parcelas**, enquanto o termo **C** é a **soma** ou **total**.

2. SUBTRAÇÃO

→ Nesse caso temos que:

$$\begin{array}{r} M \\ - \ S \\ \hline R \end{array} \quad \text{ou} \quad \boxed{M-S=R}$$

Onde **M** é o **minuento**, **S** o **subtraendo** e **R** é o **resto** ou **diferença**.

Observações importantes:

a) "Em toda subtração, a soma dos três termos é sempre igual ao dobro do minuendo".

$$\boxed{M+S+R=2M}$$

Exemplo: Na subtração 12 – 4 = 8,

Temos que M = 12, S = 4 e R = 8. Logo M + S + R = 12 + 4 + 8 = 24 = 2M

b) "Quando aumentamos ou diminuímos de um certo número o minuendo de uma subtração, o resto fica aumentado ou diminuído desse mesmo número".

Exemplo: Na subtração

38 – 10 = 28

Temos que M = 38, S = 10 e R = 28. Se adicionarmos, por exemplo, **3** unidades ao minuendo, teremos:

41 – 10 = 31

Logo M = 41 e R = 31, ou seja, o resto também foi aumentado de **3** unidades.

c) "Quando aumentamos ou diminuímos de um certo número o subtraendo, de um subtração, o resto fica diminuído ou aumentado desse mesmo número".

Exemplo: Na subtração:

26 – 8 = 18

Temos que M = 26, S = 8 e R = 18. Se subtrairmos, **5** unidades ao subtraendo, teremos:

26 – 3 = 23

Portanto S = 3 e R = 23, e daí que o resto foi aumentando de **5** unidades.

3. MULTIPLICAÇÃO

→ Os modelos de multiplicação são:

$$\begin{array}{r} A \\ \times \ B \\ \hline C \end{array} \quad \text{ou} \quad \boxed{A \times B=C}$$

- Onde A é o **multiplicando**, B é o **multiplicador** e C o **produto** ou **total**. O números A e B também podem ser chamados de **fatores**.

4. DIVISÃO

Abaixo mostramos o algorítmo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline & q \end{array}$$

Onde D é o **dividendo**, d o **divisor**, q o **quociente** e r o **resto**.

Observações importantes:

a) "Em toda divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto"

$$\boxed{D=d \times q+r}$$

Exemplo: Na divisão:

$$\begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ \hline 5 & 4 \end{array}$$

-Temos D = 37, d = 8, q = 4 e r = 5.
-Note que D = d x q + r ou seja 37 = 8 x 4 + 5

b) "O maior resto que podemos obter em uma divisão de dividendo, divisor e quociente naturais não nulos, é sempre igual ao divisor menos uma unidade"

Exemplo: Em uma divisão de divisor igual a 10, o maior resto possível é 9.

c) "Em uma divisão, quando multiplicamos ou dividimos o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente não se altera, porém o resto fica multiplicado ou dividido por esse número".

Exemplo: Consideremos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 38 & 14 \\ \hline 10 & 2 \end{array}$$

se dividimos, por exemplo, o dividendo e o divisor por 2, temos:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 7 \\ \hline 5 & 2 \end{array}$$

→ note que quociente não se alterou, porém o resto ficou dividido por 2.

d) "Toda divisão de resto zero (menor resto possível) é chamada de <u>divisão exata</u>".

Exemplo: Consideremos a divisão exata:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 7 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) A soma de três parcelas vale 728. Se aumentarmos a 1ª parcela de 23 unidades, diminuirmos a 2ª parcela de 13 unidades e aumentarmos a 3ª parcela de 45 unidades, qual será o novo valor da soma?

2) O que acontece com a soma de três parcelas quando

aumentamos a 1ª de 32 unidades, diminuímos a 2ª de 17 unidades e aumentamos a 3ª de 44 unidades?

3) O que acontece com o resto de uma subtração quando:
a) aumentamos o minuendo de 8 unidades?
b) diminuímos o minuendo de 4 unidades?
c) aumentamos o subtraendo de 6 unidades?
d) diminuímos o subtraendo de 5 unidades?
e) aumentamos o minuendo de 3 unidades e diminuímos o subtraendo de 5 unidades?
f) diminuímos o minuendo de 2 unidades e aumentamos o subtraendo de 1 unidades?

4) A soma dos três termos de uma subtração é 156. Calcule o minuendo.

5) Em uma subtração, a soma dos três termos vale 360. Calcule-os, sabendo que o resto é o triplo do subtraendo.

6) Em uma subtração, a soma do subtraendo com o resto dá 72, enquanto que a diferença entre eles dá 10. Determine os três termos dessa subtração.

7) A soma de duas parcelas excede a diferença entre elas em 50 unidades. Calcule as parcelas, sabendo que uma é o triplo da outra.

8) A soma dos três termos de uma subtração é 548. Calcule o resto, sabendo que o subtraendo vale 32.

9) Em uma subtração, o minuendo excede o subtraendo em 62 unidades e este execede o resto em 21 unidades. Determine os três termos, sabendo-se que a sua soma vale 290.

10) O produto de dois números é 512. Aumentando-se um deles de 7 unidades, o produto aumenta de 112 unidades. Quais são esses números?

11) O produto de dois números é 800. Diminuindo-se um deles de 7 unidades, o produto diminui de 224 unidades. Determine os números.

12) Em uma divisão, o divisor vale 12 e o quociente é 9. Determine o dividendo, sabendo que o resto é o maior possível.

13) Qual o dividendo de uma divisão cujo quociente é 72, o resto é 13 e o divisor o menor possível?

14) O quociente e o resto de uma divisão são iguais e ambos inferiores em 3 unidades ao divisor. Se o dividendo vale 32, determine os demais termos.

15) Em uma divisão, o resto equivale a 3/4 do divisor e o quociente é 5/3 do resto. Determine o valor do dividendo, sabendo que o divisor vale 12.

16) Em uma divisão, o quociente vale 30 e o resto vale 12. Se dividirmos o dividendo e o divisor dessa divisão, simultaneamente, por 6, quais serão os valores do novo quociente e do novo resto?

17) Um número dividido por 19, deixa resto 7. Quanto devemos adicionar a esse número, no mínimo, para que a divisão seja exata?

18) Dividindo-se um número N por 23 obteve-se resto 7. Qual o maior número inteiro que podemos adicionar a N de modo a não alterar o quociente?

19) Quanto vale o dividendo de uma divisão cujo divisor é o quádruplo do quociente, o resto é o maior possível e a soma do resto com o quociente vale 24?

20) Dividindo-se um número N por um número y obteve-se quociente 30 e resto 8. Se multiplicarmos N e y por 6, quais serão os novos quociente e resto?

21) Ao dividirmos um número N por 34, obtemos resto igual a 13. Ao adicionarmos 25 unidades a N, qual será o novo resto, se mantivermos o divisor?

22) Um número é divisível por 16 e 37. Determine-o, sabendo que o quociente desse número por 16 excede em 42 unidades o seu quociente por 37?

23) A tecla 9 de uma calculadora está com defeito. No entanto, pode-se obter o resultado de 99 x 76 efetuando-se a seguinte operação:
a) 88×87
b) $76 \times 81 + 18$
c) $7600 + 76$
d) $7600 - 76$
e) $7600 - 66$

24) Um professor pediu para que um aluno pensasse em um número e em seguida o multiplicasse por 16. Distraído, o aluno multiplicou o número por 61. Com isso, ele obteve um resultado 990 unidades maior do que o valor correto. Em que número esse aluno pensou?

25) Um comerciante foi a um mercado de vendas por atacado e comprou certo número de garrafas de vodka polonesa, cujo preço unitário era \$ 90,00. Ao passar pelo caixa, este, inadvertidamente, cobrou \$ 9,00 por unidade da bebida. Devido a este fato sua conta ficou diminuída de \$ 10.125,00. Quantas garrafas de vodka ele adquiriu?

26) Um número N é da forma $12k + 10$, com $k \in \mathbb{N}$. Quais os menores números naturais que devemos somar e subtrair de N para que os resultados obtidos sejam divisíveis por 6?

27) Considerem-se todas as divisões de números inteiros positivos por 17, cujo resto é igual ao quadrado do quociente. A soma dos quocientes dessas divisões é:
a) 10
b) 17
c) 17^2
d) $1 + 2 + ... + 17$
e) $1^2 + 2^2 + ... + 17^2$

QUESTÕES DE CONCURSOS

28) **(CM)** Numa churrascaria tipo rodízio são cobrados R\$ 15,00 por pessoa. A sobremesa, cobrada à parte, é 9 reais mais barata que o rodízio. Um grupo de 18 pessoas foi a essa churrascaria. Sabendo que 6 pessoas desse grupo não comeram sobremesa, qual é a quantia que o grupo gastou nessa churrascaria?
a) R\$ 378,00
b) R\$ 342,00
c) R\$ 270,00
d) R\$ 432,00

29) **(CM) QUANTO TEMPO O CORPO AGUENTA SEM ÁGUA?**

Em um país como o Brasil, em pleno verão, com altas taxas de temperatura e umidade relativa do ar, não dá para resistir mais do que quatro dias. No frio, esse tempo pode chegar a sete dias - dependendo, claro, das condições físicas de cada um. Para se ter uma ideia, a perda média de água do ser humano é de cerca de 2 a 2,5 litros de água por dia, que saem na urina, fezes e suor - em dias quentes, chegamos a perder o dobro disso.

Fonte: Revista Superinteressante

Considere o tempo máximo que uma pessoa aguenta ficar sem água, durante o verão. Ao final desse tempo máximo, a perda média de água será de:

a) 16 a 20 litros.
b) 14 a 16 litros.
c) 10 a 14 litros.
d) 8 a 10 litros.

30)(ENEM) A pesca não predatória pressupõe que cada peixe retirado de seu hábitat já tenha procriado, pelo menos uma vez. Para algumas espécies, isso ocorre depois dos peixes apresentarem máxima variação anual de seu peso. O controle de pesca no Pantanal é feito com base no peso de cada espécie.

A tabela fornece o peso do pacu, uma dessas espécies, em cada ano.

Idade (anos)	Peso (kg)
1	1,1
2	1,7
3	2,6
4	3,9
5	5,1
6	6,1
7	7
8	7,8
9	8,5
10	8,9
11	9,1
12	9,3
13	9,4

Considerando esses dados, a pesca do pacu deve ser autorizada para espécimes com peso de, no mínimo:

a) 4 kg
b) 5 kg
c) 7 kg
d) 9 kg
e) 11 kg

31) **(ENEM)** A tabela compra o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de:

a) R$ 0,27
b) R$ 0,29
c) R$ 0,32
d) R$ 0,34
e) R$ 0,61

32) **(CPII)** Minha tia Anita é muito organizada. Antes de fazer compras, por exemplo, ela vê os preços dos produtos em três mercados perto da casa dela. Veja abaixo a lista de compras da tia Anita e os preços que ela encontrou nos mercados AKITEM, PAG-LEV e DOZÉ.

Lista de Compras
1 kg de tomate
2 pacotes de macarrão
2 kg de açúcar
500 g de café

Preços (em $)			
	AKITEM	**PAG-LEV**	**DOZÉ**
Tomate (1kg)	0,70	0,60	0,70
Macarrão (1pct)	1,40	1,70	1,70
Açúcar (1kg)	1,00	0,90	1,00
Café (1kg)	5,00	4,80	5,00

a) Qual dos três mercados tem mais produtos com preços menores?
b) Olhando a lista da tia Anita, diga em qual dos três mercados ela deve fazer suas compras para gastar menos e quanto gastará?

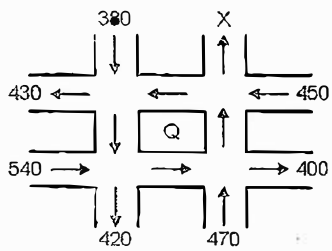
33) **(CM)** Seja S o conjunto dos números naturais pares. As operações que podem ser aplicadas a um par de elementos quaisquer do conjunto S e que produzem apenas elementos do próprio conjunto S são:

a) Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.
b) Adição, subtração, multiplicação e divisão.
c) Adição, subtração e multiplicação
d) Adição, multiplicação e potenciação
e) Adição e multiplicação.

34)**(CEFET)**Leia com atenção a demonstração a seguir:
Vamos provar por a + b que 1 + 1 = 1
Passo 0: Sejam a e b números reais não nulos tais que a = b.
Passo 1: Se a = b, podemos multiplicar os dois membros desta igualdade por a e obter: $\mathbf{a^2 = ab}$
Passo 2: A seguir, subtraímos b^2 dos dois membros da igualdade: $\mathbf{a^2 - b^2 = ab - b^2}$
Passo 3: Fatorando as expressões, temos: $\mathbf{(a + b)(a - b) = b(a - b)}$
Passo 4: Agora dividimos ambos os membros por (a – b) e obtemos: $\mathbf{a + b = b}$
Passo 5: Como no início supomos que a = b, podemos substituir a por b assim: $\mathbf{b + b = b}$
Passo 6: Colocando b em evidência, obtemos: $\mathbf{b(1 + 1) = b}$
Passo 7: Por fim, dividimos a equação por b e concluímos que: $\mathbf{1 + 1 = 1}$
É evidente que a demonstração acima está incorreta. Há uma operação errada:

a) No passo 2.
b) No passo 3.
c) No passo 4.
d) No passo 6.

35) **(UFRJ)** O quarteirão Q de uma cidade é limitado por quatro ruas. O número de veículos que passam por elas, em média, em certo horário, é indicado no diagrama, no qual as setas mostram o sentido do fluxo.



Suponha que todo carro que chega no quarteirão sai por uma das vias indicadas no horário considerado.
Determine X.

36) **(CM)** Um conjunto é constituído por sete números, cuja a soma é igual a 220. Cada número desse conjunto é aumentado de 20 unidades, depois multiplicado por 5 e, finalmente, subtrai-se 20 unidades de cada produto. A soma dos números do novo conjunto assim obtido é:

a) 780
b) 870
c) 1.100
d) 1.660
e) 1.780

37)**(ENEM)** Seja n um número qualquer, inteiro e positivo. Se n é par, divida-o por 2; se n é ímpar, multiplique-o por 3 e adicione 1 ao resultado. Esse procedimento deve ser repetido até que se obtenha como resultado final o número 1. Assim, por exemplo, se n = 12, tem-se:

$12 \Rightarrow 6 \Rightarrow 3 \Rightarrow 10 \Rightarrow 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 8 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$

Ou seja, foram necessárias 9 passagens até obter-se o resultado 1. Nessas condições, se n = 11, o número de passagens necessárias para obter-se o resultado final 1 será:

a) 7
b) 8

c) 11
d) 14
e) 17

38) **(CM)** De dois caminhões foram descarregados caixotes que continham engradados de refrigerante. Do primeiro caminhão foram descarregados 6 caixotes e do segundo, 7 caixotes. Sabendo-se que, em cada caixote, havia 6 engradados e que, em cada engradado, havia 6 garrafas de refrigerante, pode-se afirmar que a quantidade de garrafas descarregadas no total era:
a) 458
b) 468
c) 252
d)288

39) **(CEFET)** Um dado elevador pode transportar, com segurança, no máximo, uma tonelada. Supondo-se que esse elevador esteja transportando três pessoas com 67 kg cada, seis pessoas com 75 kg cada e três pessoas com 82 kg cada, qual o número máximo de pessoas com 56 kg cada que ainda poderiam ser transportadas sem risco de sobrecarga?

40) **(ENEM)** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível coloca-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41. nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado)

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?
a) 406
b) 1 334
c) 4 002
d) 9 338
e)28 014

41) **(CM)** Um técnico em computadores cobra 15 reais pormeia hora trabalhada, podendo permanecer no local onde foi requisitada sua presença por até 3 horas. Possuindo uma quantia de 100 reais, Carlos contratou os serviços desse técnico. O tempo máximo que o técnico poderia permanecer para que ainda restasse a Carlos uma quantia de 25 reais era:
a) 2 horas e meia
b) 2 horas
c) 3 horas e meia
d)3 horas

42) **(UFRJ)** Dois jogadores de futebol-de-botão disputam um desafio em 75 partidas. Nas 35 partidas iniciais o vencedor ganha 3 pontos e nas 40 partidas restantes o vencedor ganha 1 ponto. O perdedor não ganha ponto e nenhuma partida pode terminar empatada. Um dos jogadores ganhou 19 das 35 partidas iniciais. Calcule o número mínimo de partidas que esse jogador ainda deve ganhar para ser campeão do desafio.

43)(ENEM) Segundo a Associação Brasileira de Alumínio (ABAL), o Brasil foi o campeão mundial, pelo sétimo ano seguido, na reciclagem de latas de alumínio. Foi reciclado 96,5% do que foi utilizado no mercado interno em 2007, o equivalente a 11,9 bilhões de latinhas. Este número significa, em média, um movimento de 1,8 bilhão de reais anuais em função da reutilização de latas no Brasil, sendo 523 milhões referentes à etapa da coleta, gerando, assim, "emprego" e renda para cerca de 180 mil trabalhadores. Essa renda, em muitos casos, serve como complementação do orçamento familiar e, em outros casos, como única renda da família.

Revista Conhecimento Prático Geografia, nº 22. (adaptado)

Com base nas informações apresentadas, a renda média mensal dos trabalhadores envolvidos nesse tipo de coleta gira em torno de:
a) R$ 173,00.
b) R$ 242,00.
c) R$ 343,00.
d) R$ 504,00.
e)R$ 841,00.

44)**(ENEM) A contagem de bois**

Em cada parada ou pouso, para jantar ou dormir, os bois são contados, tanto na chegada quanto na saída. Nesses lugares, há sempre um potreiro, ou seja, determinada área de pasto cercada de arame, ou mangueira, quando a cerca é de madeira. Na porteira de entrada do potreiro, rente à cerca, os peões formam a seringa ou funil, para afinar a fila, e então os bois vão entrando aos poucos na área cercada. Do lado interno, o condutor vai contando; em frente a ela, está o marcador, peão que marca as reses. O condutor conta 50 cabeças e grita: - Talha! O marcador, com o auxílio dos dedos das mãos, vai marcando as talhas. Cada dedo da mão direita corresponde a 1 talha, e da mão esquerda, a 5 talhas. Quando entra o último boi, o marcador diz: - Vinte e cinco talhas! E o condutor completa: - E dezoito cabeças. Isso significa 1.268 bois.

Boiada, comitivas e seus peões. In: **O Estado de São Paulo**, ano VI, ed. 63. 21/12/1952 (com adaptações).

Para contar os 1.268 bois de acordo como processo descrito acima, o marcador utilizou:
a) 20 vezes todos os dedos da mão esquerda.
b) 20 vezes todos os dedos da mão direita.
c) todos os dedos da mão direita apenas uma vez.
d) todos os dedos da mão esquerda apenas uma vez.
e) 5 vezes todos os dedos da mão esquerda e 5 vezes todos os dedos da mão direita.

45) **(ENEM)** Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.
O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.
Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são:
a) Verde e Preto
b) Verde e Amarelo
c) Amarelo e Amarelo
d) Preto e Preto
e) Verde e Verde

46) **(ENEM)** Desde 2005, o Banco Central não fabrica mais a nota de R$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior que a do papel. Fabricar uma moeda de R$ 1,00 custa R$ 0,26, enquanto uma nota custa R$ 0,17, entretanto, a cédula dura de oito a onze meses.

Disponível em: http://noticias.r7.com.Acesso em: 26 abr. 2010.

Com R$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas cédulas a mais?
a) 1 667
b) 2 036
c) 3 846
d) 4 300
e) 5 882

47) **(ENEM)** Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo.
Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?
a) 476
b) 675
c) 923
d) 965
e) 1538

48) **(CEFET)** O carro do Sr. Joel é flex (funciona indistin-tamente com gasolina ou álcool) e percorre, em média, 10 km com 1 litro de gasolina ou 7 km com 1 litro de álcool. Num determinado ano em que o litro de gasolina e do álcool custavamR$2,40 e R$1,40, respectivamente, o Sr. Joel rodou 15000 km, tendo abastecido o carro apenas com gasolina. Quanto ele teria economizado, em reais, neste mesmo ano, se tivesse abastecido o carro apenas com álcool?

49) **(ENEM)** Nosso calendário atual é embasado no antigo calendário romano, que, por sua vez, tinha como base as fases da lua. Os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias, e os demais, com exceção de fevereiro, possuem 30 dias. O dia 31 de março de certo ano ocorreu em uma terça-feira. Nesse mesmo ano, qual dia da semana será o dia 12 de outubro?
a) Domingo
b) Segunda-feira
c) Terça-feira
d) Quinta-feira
e) Sexta-feira

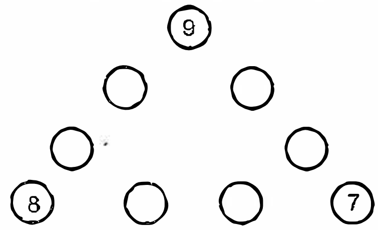
50) **(CN)** Qual será o dia da semana na data 17 de setembro de 2009?
(Observação: Nesta questão o aluno sabia que o dia 01/08/2007, dia do concurso, era uma quarta-feira.)
a) 2ª feira
b) 3ª feira
c) 4ª feira
d) 5ª feira
e) 6ª feira

51) **(ENEM)** Imagine uma eleição envolvendo 3 candidatos A, B, C e 33 eleitores (votantes). Cada eleitor vota fazendo uma ordenação dos três candidatos. Os resultados são os seguintes:

Ordenação	N.º de votantes
A B C	10
A C B	04
B A C	02
B C A	07
C A B	03
C B A	07
Total de votantes	33

A primeira linha do quadro descreve que 10 eleitores escolheram A em 1º lugar, B em 2º lugar, C em 3º lugar e assim por diante.
Considere o sistema de eleição no qual cada candidato ganha 3 pontos quando é escolhido em 1º lugar, 2 pontos quando é escolhido em 2º lugar e 1 ponto se é escolhido em 3º lugar. O candidato que acumular mais pontos é eleito. Nesse caso:
a) A é eleito com 66 pontos.
b) A é eleito com 68 pontos.
c) B é eleito com 68 pontos.
d) B é eleito com 70 pontos.
e) C é eleito com 68 pontos.

52) **(UERJ)** No triângulo desenhado abaixo os pequenos círculos deverão ser preenchidos com os algarismos significativos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetí-los, de modo que nos vértices sejam colocados os algarismos 7, 8, e 9, e que a soma dos algarismos dos 4 círculos em cada lado tenha sempre o mesmo valor.



Assim, essa soma será:
a) 19
b) 21
c) 23
d) 81

53) **(EPCAR)** O produto de um número inteiro A de três algarismos por 3 é um número terminado em 721. A soma dos algarismos de A é
a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

54) **(CEFET)** Qualquer bebida extraída de uma máquina custa 1 real. Se a máquina só aceita moedas de 10, 25, 50 centavos e de 1 real, de quantas maneiras distintas pode-se pagar uma bebida nesta máquina?
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

55) **(ENEM)** Uma pessoa decidiu depositar moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos em um cofre durante certo tempo. Todo dia da semana ela depositava uma única moeda, sempre nesta ordem: 1, 5, 10, 25, 50, e, novamente, 1, 5, 10, 25, 50, assim sucessivamente.
Se a primeira moeda foi depositada em uma segunda-feira, então essa pessoa conseguiu a quantia exata de R$ 95,05 após depositar a moeda de:
a) 1 centavo no 679º dia, que caiu numa segunda-feira.
b) 5 centavos no 186º dia, que caiu numa quinta-feira.
c) 10 centavos no 188º dia, que caiu numa quinta-feira.
d) 25 centavos no 524º dia, que caiu num sábado.
e) 50 centavos no 535º dia, que caiu numa quinta-feira.

56) **(CM)** Pedro tem $(4q + 1)$ notas de 50 reais e Maria $(q + 4)$ notas de 20 reais. A quantidade de notas de 10 reais, com valor equivalente ao valor absoluto da diferença das quantias de ambos é, em função de q:
a) $18q - 4$
b) $18q - 3$
c) $18q - 2$
d) $180q - 1$
e) $180q$

57) **(CN)** O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a:
a) 268
b) 269
c) 270
d) 271
e) 272

58) **(UNICAMP)** Em uma agência bancária cinco caixas atendem os clientes em fila única. Suponha que o atendimento de cada cliente demora exatamente 3 minutos e que o caixa 1 atende o primeiro da fila ao mesmo tempo em que o caixa 2 atende o segundo, o caixa 3 o terceiro e assim sucessivamente.
a) Em que caixa será atendido o sexagésimo oitavo cliente da fila?
b) Quantos minutos depois da abertura dos caixas será iniciado o atendimento desse mesmo sexagésimo oitavo cliente?

59) **(UNICAMP)**
a) Quais são o quociente e o resto da divisão de 3.785 por 17?
b) Qual o menor número natural, maior que 3.785, que é múltiplo de 17?

60) **(E.E.Aer)** A soma de dois números é 329. Na divisão do maior pelo menor, obtém-se quociente 13 e o resto é o maior possível. Qual o maior número?
a) 301
b) 303
c) 305
d) 307

61) **(EPCAR)** Numa divisão, o resto é 1001 e o quociente é 5. Se a diferença entre o dividendo e o divisor for 8929, então o divisor será:
a) 7928
b) 1002
c) 9930
d) 1982
e) 1585,6

62) **(UFRJ)** Determine os números naturais maiores do que zero que, ao serem divididos por 8, apresentam resto igual ao dobro do quociente.

63) **(CN)** Em uma divisão de números naturais, D=2012 é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0 \neq d = 21$ ou $q = 21$. Um resultado possível para r+d ou r+q é:
a) 92
b) 122
c) 152
d) 182

64) **(CPII)** Observe aspectos da divisão por 9 dos números naturais maiores que 10, constituídos apenas de algarismos 1.

$$\begin{array}{r|l} 11 & \underline{9\quad} \\ 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 111 & \underline{9\quad} \\ 3 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1111 & \underline{9\quad\quad} \\ 4 & 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11111 & \underline{9\quad\quad\quad} \\ 5 & 1234 \end{array}$$

Determine
a) o resto da divisão do número 111111 por 9.
b) o menor número natural, maior que 10, formado apenas por algarismos 1, para o qual a divisão por 9 é exata, e o quociente dessa divisão.

65) **(UFRJ)** Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.

66) **(CN)** Uma fábrica de fósforos usa as seguintes definições:
caixa: conjunto de 45 fósforos
maço: conjunto com 10 caixas
pacote: conjunto com 12 maços

Dividindo-se 13 pacotes, 5 maços, 8 caixas e 22 fósforos por 8, obtém-se um número **p** de pacotes, **m** de maços, **c** de caixas e **f** de fósforos, tais que p + m + c + f é igual a:
a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

67) **(CN)** Um torneio de judô é disputado por 10 atletas e deve ter apenas um campeão. Em cada luta não pode haver empate e aquele que perder três vezes deve ser eliminado da competição. Qual o número máximo de lutas necessárias para se conhecer o campeão?
a) 27
b) 28
c) 29
d) 30
e) 31

68) **(CN)** Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até que a soma de todos os algarismos por ele escrito, na parte decimal, foi imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais escreveu?
a) 144
b) 145
c) 146
d) 147
e) 148

69) **(CN)** Um cofre é equipado com um sistema automático que o destranca por um minuto e volta a trancá-lo se não for aberto. Tal sistema tem dois dispositivos independentes: um que dispara de 46 minutos em 46 minutos, após ser ligado o sistema, e o outro de 34 minutos em 34 minutos. Sabendo-se que o cofre pode ser aberto tanto por um, quanto pelo outro dispositivo, e que um não anula o outro, quantas vezes por dia pode-se dispor do cofre para abertura, sendo o sistema ligado à zero hora?
a) 74
b) 73
c) 72
d) 71
e) 70

70) **(CN)** Sabe-se que: o número natural k dividido pelo número natural A dá quociente 56 e resto zero; k dividido pelo número natural B dá quociente 21 e resto zero; e os algarismos de A são os mesmos de B e ambos possuem dois algarismos, porém em ordem inversa. A soma dos algarismos de k é igual a:
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

71) **(CN)** Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?
a) Zero
b) Dois
c) Seis
d) Treze
e) Vinte e cinco

GABARITO

1) 783
2) Aumenta de 59
3) a) aumenta de 8
b) diminui de 4
c) diminui de 6
d) aumenta de 5
e) aumenta de 8

f) diminui de 3
4) 78
5) M = 180; S = 45; R = 135
6) M = 72; S = 41; R = 31
7) 75 e 25
8) 242
9) M = 145; S = 83; R = 62
10) 32 e 16
11) 25 e 32
12) 119
13) 1021
14) d = 7; q = 4; r = 4
15) 189
16) q = 30; r = 2
17) 12
18) 15
19) 119
20) q = 30; r = 48
21) 4
22) 1184
23) D
24) 22
25) 125
26) 2 e 4
27) A
28) B
29) A
30) A
31) B
32) a) PAG-LEV
b) AKITEM e R$8,00
33) E
34) C
35) 590
36) D
37) D
38) B
39) 1
40) B
41) A
42) 16
43) B
44) D
45) A
46) B
47) C
48) R$ 600,00
49) B
50) D
51) C
52) C
53) B
54) D
55) D
56) B
57) B
58) a) 3
b) 39
59) a) 222 e 11
b) 3791
60) D
61) D
62) 10; 20; 30
63) C
64) a) 6
b) 111111111 e 12345679
65) 12345679
66) A
67) C
68) E
69) C
70) E
71) C

OBSERVAÇÕES

Números Primos

Utilizando como universo o conjunto dos números inteiros positivos, diremos que um número é **primo absoluto** quando possui exatamente dois divisores naturais.

Abaixo, enumeramos a sequência dos primeiros números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Quando o número possui mais de dois divisores naturais, é chamado de **número composto**. São compostos:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...

Método para verificação se um número é primo

O processo através do qual verificamos se um número é primo, não é muito prático. Ao contrário, às vezes é por demais trabalhoso, mas é o único eficaz para qualquer número. Assim, devemos dividir o número dado ordenadamente pela sequência dos primeiros números primos. O número será primo se, ao longo dessas divisões sucessivas, obtivermos um quociente menor ou igual ao divisor, sem obter resto zero até então. Note que, se tal fato ocorre, ou seja, encontrarmos algum resto zero, significa que houve uma divisão exata e, portanto, há um divisor desse número diferente dele mesmo e da unidade, daí o número não será primo.

Exemplo:
Verifique se são primos os números:
a) 311
Resolução:
Vamos dividir o número sucessivamente pela sequência dos primeiros números primos até encontrar resto zero (número não primo) ou quociente menor ou igual ao divisor utilizado (número primo)

311	2	311	3	311	5	311	7
1	155	2	103	1	62	3	44

311	11	311	13	311	17	311	19
3	28	12	23	5	18	7	16

↓↓↓
quociente < divisor

→ Pelo exposto, o número 311 é primo.

b) 527
Resolução:
Vamos seguir o mesmo raciocínio do exercício anterior.

527	2	527	3	527	5	527	7
1	263	2	175	2	105	2	75

527	11	527	13	527	17
10	47	7	40	0	31

↓↓↓
divisão exata

→ Assim o número 527 não é primo

Decomposição em fatores primos

Decompor um número em fatores primos, ou *fatorar*, é escrevê-lo sob a forma de produto de potências de números primos distintos.

Um método prático para a fatoração de um número, é traçar à sua direita uma barra vertical e, à direita dela, colocarmos ordenadamente, um abaixo do outro, os números primos que são divisores do número dado. A cada divisor primo colocado, devemos dividir o número à esquerda da barra por ele, colocando o quociente obtido abaixo do número dividendo. Tal procedimento deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias, até que à esquerda da barra tenhamos o número 1 (um).

Exemplo: Fatore os números:
a) 630
Resolução: Vamos escrever o número, colocar a barra e efetuar as divisões sucessivas indicadas na regra acima:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Portanto, a forma fatorada do número é:
$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

b) 128
Resolução: Vamos proceder de forma análoga ao exemplo anterior:

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Daí, temos que:
$128 = 2^7$

Divisores positivos de um número

Exemplo ilustrativo:
Determine os divisores positivos do número 300.
– Para resolver tal problema, devemos seguir os passos abaixo:

1) Em primeiro lugar devemos fatorar o número:

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

2) Em seguida, colocamos uma barra vertical à direita dos fatores encontrados. À direita desta barra aparecerão os divisores pedidos. Para isto, devemos colocar à direta da barra e um pouco acima da linha do primeiro fator encontrado o número 1 (um), que é divisor de qualquer número.

		1
300	2	
150	2	
75	3	
25	5	
5	5	
1		

3) O próximo passo é multiplicarmos cada fator obtido por todos os números que estiverem à direita e acima dele na barra que foi traçada. Quando houver a repetição de um fator, devemos multiplicá-lo apenas pelos números existentes na linha anterior, conforme mostrado a seguir:

		1
300	2	2
150	2	4
75	3	3, 6, 12
25	5	5, 10, 20, 15, 30 ,60
5	5	25, 50, 100, 75, 150, 300
1		

→ Logo, os divisores positivos do número 300 são:
1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 25, 50, 100, 75, 150 e 300

Observamos que os divisores negativos seriam os simétricos dos positivos, ou seja: –1, –2, –3, –4, –5, –6, –10, –12, –15, –20, –25, –30, –50, –60, –75, –100, –150 e –300.

Quantidade de divisores positivos de um número

Para obtermos a quantidade de divisores positivos de um número devemos multiplicar os expoentes obtidos na fatoração do número, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo:
Quantos divisores positivos tem o número 300?
Resolução: Fatorando o número 300 temos:

$$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$$

O número de divisores positivos
$= (2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 18$

Quantidade de divisores ímpares positivos de um número

Neste caso devemos multiplicar apenas os expoentes das bases ímpares, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo:
Quantos divisores ímpares positivos tem o número 300?
Resolução: Fatorando o número 300 temos:

$$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$$

Número de divisores ímpares posiitvos
$= (1 + 1) \times (2 + 1) = 6$

Quantidade de divisores pares positivos de um número

Neste caso temos duas opções de resolução: fazemos a diferença entre o número total de divisores e o número de divisores ímpares ou então multiplicamos o expoente do fator 2 pelos demais, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo: Quantos divisores pares tem o número 300?
Resolução: Fatorando o número 300 temos:

$$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$$

Número de divisores pares positivos
$= 2 \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$

Quantidade de divisores positivos de um número N que são múltiplos de X.

Neste caso devemos determinar a quantidade de divisores positivos do número $\frac{N}{X}$.

Exemplo:
Quantos divisores positivos do número 300 são múltiplos de 6?
Resolução: Devemos obter o número de divisores positivos do número $\frac{300}{6} = 50$.

$$50 = 2^1 \times 5^2$$

Número de divisores positivos $= (1 + 1) . (2 + 1) = 6$.
Podemos constatar: 6; 12; 30; 60; 150 e 300.

Soma dos divisores naturais de um número

Consideremos um número natural N, na sua forma fatorada:

$$N = a^x . b^y . c^z . ...$$

A soma de todos os seus divisores naturais é dada pela fórmula

$$\boxed{S = \frac{a^{x+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{y+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{z+1} - 1}{c - 1} \times ...}$$

Atenção: Se for pedida a soma dos divisores inteiros, devemos lembrar que ela é sempre igual a zero, já que os divisores inteiros são simétricos, dois a dois.

Exemplo:
Seja determinar a soma dos divisores do número 300.
Resolução:
Em primeiro lugar devemos fatorá-lo: $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$.
Verificamos que: a= 2, b = 3, c = 5, x = 2, y = 1 e z = 2.
Aplicando-se a fórmula anteriormente apresentada:

Soma dos os divisores naturais:

$$S = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{1+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{2+1} - 1}{5 - 1} = 7 \times 4 \times 31 = 868.$$

Já a soma dos divisores inteiros, reiterando, vale zero.

Produto dos divisores naturais de um número

Dado um número natural N, com d divisores naturais, o produto deles é dado pela fórmula:

$$\boxed{P = N^{\frac{d}{2}}}$$

Se desejamos o produto de todos os divisores inteiros, a fórmula a ser utilizado é:

$$\boxed{P = (-N)^d}$$

Exemplo:
Dado o número $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$, temos que:

a) Produto dos divisores naturais
$d = (2 + 1) . (1 + 1) . (2 + 1) = 18$

$$P = N^{\frac{d}{2}} = (2^2 x 3^1 x 5^2)^{\frac{18}{2}} = (2^2 x 3^1 x 5^2)^9 = 2^{18} x 3^9 x 5^{18}$$

b) Produto dos divisores inteiros
$P = (-N)^d = (-2^2 \times 3^1 \times 5^2)^{18} = 2^{36} \times 3^{18} \times 5^{36}$

Número quadrado perfeito

Um número N é dito quadrado perfeito quando sua raiz quadrada é um número natural. Para que isto ocorra, basta que, em sua forma fatorada todos os expoentes encontrados sejam pares.

Exemplos:
a) $N = 2^4 \times 5^6 \times 7^2$ é um quadrado perfeito
b) $N = 2^5 \times 3^2 \times 5^6$ não é um quadrado perfeito

Número cubo perfeito

Um número N é dito cubo perfeito quando sua raiz cúbica é um número inteiro. Neste caso, em sua forma fatorada, todos os expoentes obtidos são múltiplos de 3.

Exemplo:
O número $N = 2^6 \times 3^3 \times 7^{12}$ é um cubo perfeito.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Verifique se são primos os números abaixo:
a) 217 -
b) 269 -
c) 331 -

d) 413 -
e) 527 -
f) 853 -
g) 2701 -

2) Quantos números primos há entre 80 e 90?

3) Quanto vale a soma dos números primos compreendidos entre 70 e 80?

4) O que são números primos entre si?

5) Qual o maior número primo de dois algarismos?

6) Fatore o número 25.200.

7) Fatore o número 4096.

8) Quais são os divisores positivos do número 90?

9) Quais são os divisores positivos do número 240?

10) Quais são os três maiores divisores do número 4050?

11) Determine a quantidade de divisores positivos dos números:
a) 84
b) 360
c) 450
d) 512
e) 5880
f) $2^3 \times 3^4 \times 5^4 \times 6^2$

12) Determine o número de divisores ímpares positivos dos números:
a) 720
b) 243
c) 64
d) $2^4 \times 3^4 \times 12^3$
e) $2^3 \times 3^2 \times 5^7$

13) Determine o número de divisores pares positivos dos números:
a) 360
b) 256
c) 81
d) $2^4 \times 4^6 \times 15^3$
e) $2^2 \times 3^5 \times 5^7 \times 11$

14) O número $X = 2^4 \times 10^3 \times 12$ possui **a** divisores positivos, dos quais **b** são pares, **c** são ímpares e **d** são primos. Determine o valor de $a - b + c - d$.

15) O número $C = 2^2 \times 3^x \times 5^3$ tem 60 divisores positivos. Calcule o valor de **x**.

16) O número $\mathbf{N = 2^{x-1} \times 3^5 \times 30^3}$ possui 108 divisores pares positivos. Determine o valor de x.

17) O número $Y = 6^x \times 8^4$ possui 42 divisores pares positivos. Calcule o valor de **x**.

18) Qual o menor número natural que possui 6 divisores positivos?

19) Qual o menor número natural que possui 18 divisores positivos?

20) Verifique se os número abaixo são quadrados perfeitos:
a) $2^6 \times 3^5 \times 7^6$
b) $4^3 \times 5^2 \times 12^3 \times 27$

21) Qual o menor número inteiro positivo pelo qual devemos multiplicar 18000 para obtermos um cubo perfeito?

22) Qual o menor número inteiro positivo pelo qual devemos dividir o número $\mathbf{N = 2^4 \times 3^3 \times 350}$ para obtermos um cubo perfeito?

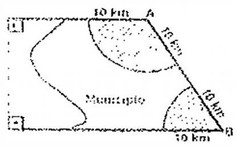
23) Dividindo-se o número 193 pelo número inteiro positivo x obtemos resto 13. Quantos são os possíveis valores de x?

24) Calcule a soma dos divisores positivos dos números:
a) 72
b) 240
c) 500

25) Calcule o produto dos divisores naturais e inteiros dos números:
a) 18
b) 160
c) 324

QUESTÕES DE CONCURSOS

26) **(ENEM)** Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10km do município, conforme mostra a figura:
Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontra-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:
a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%
e)40%



27)**(ENEM)** As idades de dois jovens são representadas por números primos e consecutivas, cuja soma é 30. As idades dos jovens equivalem a:
a) 11 e 19
b) 12 e 18
c) 13 e 15
d) 13 e 17
e)13 e 19

28) **(ENEM)** Certo dia um professor de matemática desafiou seus alunos a descobrirem as idades x, y, z, e anos, de seus três filhos, dizendo ser o produto delas igual a 40.
De pronto, os alunos protestaram: a informação "xyz = 40" era insuficiente para uma resposta correta, em vista de terem encontrado 6 ternas de fatores do número 40 cujo produto é 40. O professor concordou e disse, apontando para um dos alunos, que a soma x + y + z das idades (em anos) era igual ao número que se podia ver estampado na camisa que ele estava usando. Minutos depois os alunos disseram continuar impossível responder com segurança, mesmo sabendo que a soma era um número conhecido, o que levou o professor a perceber que eles raciocinavam corretamente (chegando a um impasse, provocado por duas ternas).
Satisfeito, o professor acrescentou então duas informações definitivas: seus três filhos haviam nascido no mesmo mês e, naquele exato dia o caçula estava fazendo aniversário.
Neste caso, a resposta correta e:
a) 1, 5, 8
b) 1, 2, 20
c) 1, 4, 10
d) 1, 1, 40
e) 2, 4, 5

29)**(EPCAR)** Uma loja colocou um CD à venda por R$ 28,00 a unidade. Como não atraiu muitos compradores, resolveu baixar o preço para um número inteiro de reais. Com isso,

vendeu o restante do estoque que não era superior a 50 unidades, por R$ 377,00. Com base nisso, o número n de unidades do CD restante no estoque é um número cuja soma dos algarismos vale:
a) 6
b) 9
c) 11
d) 15

30) **(CEFET)** Determine três números naturais consecutivos cujo produto é 504.

31) **(EPCAR)** Um número x de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$, tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de x, o número y assim obtido excede x de 18 unidades.
Com base nos dados acima, é correto afirmar que:
a) o máximo divisor comum de y e x NÃO é um número primo.
b) a razão $r = \frac{x}{y}$ é tal que $r > \frac{37}{41}$
c) y tem 2 divisores a mais que x
d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

32) **(CN)** Quantos são os números primos maiores que 100 e menores que 200, nos quais o algarismo das dezenas é par e maior do que o das unidades?
a) Um
b) Dois
c) Três
d) Quatro
e) Cinco

33) **(CN)** Se o número natural expresso por $a^2 - b^2$, b ¹ 0, é primo, então a é:
a) o antecedente de b.
b) o consequente de b.
c) múltiplo de b.
d) divisor de b.
e)um número par.

34) **(PUC)** Ache dois divisores diferentes entre 60 e 70, do número $2^{48} - 1$.

35) **(E.E.Aer)** Dado o número 2520, quanto são os seus divisores que não são números primos?
a) 43
b) 44
c) 45
d) 46

36) **(CM)** O número de divisores positivos de 35280 que, por sua vez, são divisíveis por 12 é:
a) 24
b) 36
c) 48
d) 54
e) 72

37) **(CN)** Seja $N = 2^4 . 3^5 . 5^6$. O número de divisores de N que são múltiplos de 10, é:
a) 24
b) 35
c) 120
d) 144
e) 210

38) **(CEFET)** Se $N = 2 . 30^2$, qual o número de divisores positivos de N que são também múltiplos de 15?

39) **(UFRJ)** Seja **n** o número de todos os retângulos, não congruentes, com 100000 cm² de área, cujas dimensões, em cm, são números inteiros.
Calcule **n.**

40) **(CN)** O produto de todos os divisores inteiros de 144 é:
a) $-2^{30} \times 3^{15}$
b) $2^{30} \times 3^{15}$
c) $-2^{60} \times 3^{30}$
d) $2^{60} \times 3^{30}$
e) -6^{30}

41) **(CN)** Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.
a) $\sqrt[6]{1771561}$
b) $\sqrt[4]{28561}$
c) $\sqrt[6]{4826807}$
d) $\sqrt[4]{331776}$
e) $\sqrt[6]{148035889}$

42) **(CN)** O valor numérico da expressão $120k^4 + 10k^2 + 8$, sendo k pertencente ao conjunto dos números naturais, é o quadrado de um número natural para
a) somente um único valor de k.
b) somente dois valores de k.
c) somente valores de k múltiplos de 13.
d) somente valores de k múltiplos de 18.
e)nenhum valor de k.

43) **(CN)** Na fatoração de um número inteiro positivo N, encontra-se apenas fatores 2, 3 e 5. Sabendo-se que N possui 30 divisores positivos, determine a soma do maior com menor valor possível de N.

44) **(CN)**Um número inteiro N possui 70 divisores. Qual é o menor valor possível para | N + 3172 | ?
a) 2012
b) 3172
c) 5184
d) 22748
e) 25920

45) **(CN)** Observe o dispositivo abaixo.
No dispositivo ao acima, tem-se a decomposição tradicional em fatores primos de um número natural N, em que a letra x está substituindo qualquer número natural diferente de N, zero e um. Sendo y o número total de divisores naturais de N, quantos são os valores possíveis para y?

N	x
x	x
x	x
x	x
1	

a) Três
b) Quatro
c) Cinco
d) Seis
e) Sete

46) **(CM)** Qual é o menor número natural pelo qual se deve multiplicar o número 18, para se obter um número que seja ao mesmo tempo, um quadrado perfeito e um cubo perfeito?
a) 288
b) 648
c) 864
d) 1458
e) 2592

GABARITO

1) a) não
b) sim
c) sim
d) não

GABARITO

e) não
f) sim
g) não
2) 2
3) 223
4) Têm como único divisor positivo o número 1
5) 97
6) $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$
7) 2^{12}
8) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90
9) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240
10) 1350, 2025, 4050
11) a) 12
b) 24
c) 18
d) 10
e) 48
f) 210
12) a) 6
b) 6
c) 1
d) 8
e) 24
13) a)18
b) 8
c) 0
d) 256
e) 192
14) 13
15) 4
16) 1
17) 2
18) 12
19) 180
20) a) não
b) sim
21) 12
22) 700
23) 9
24) a) 195
b) 744
c) 1092
25) a) $2^3 \times 3^6$ e $2^6 \times 3^{12}$
b) $2^{30} \times 5^6$ e $2^{60} \times 5^{12}$
c) $2^{15} \times 3^{30}$ e $- 2^{30} \times 3^{60}$
26) B
27) D
28) A
29) C
30) 7; 8; 9
31) C
32) B
33) B
34) 63; 65
35) B
36) B
37) D
38) 16
39) 18
40) C
41) C
42) E
43) 11970
44) A
45) C
46) E

OBSERVAÇÕES

Divisibilidade

Um número **A** é divisível por um número **B** quando a divisão de **A** por **B** dá um quociente inteiro e resto zero (divisão exata). Neste caso podemos dizer também que **A** é múltiplo de **B**, ou ainda que **B** é divisor de **A**.

Neste capítulo estaremos preocupados em desenvolver métodos que nos permitam determinar o resto de determinadas divisões, sem a necessidade de efetuá-las. Vamos a eles:

Obtenção do resto na divisão por:

1) **2 :** Números pares deixam resto 0 (zero) e número ímpares deixam resto 1 (um), quando divididos por **2**. Então, um número é divisível por **2** quando é par.

Exemplos:
Determine o resto da divisão por 2, dos números:

a) 75687
Resolução: O número 75687 é ímpar, logo o resto da sua divisão por 2 é 1 (um), então ele não é divisível por 2.

b) 843756
Resolução: O número 843756 é par, logo o resto da sua divisão por 2 é 0 (zero), então ele é divisível por 2.

2) **3 :** Devemos dividir a soma dos valores absolutos dos algarismos do número dado por 3, aproveitando o resto. Assim, o número será divisível por 3, quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos também o for.

Exemplo:
Determine o resto da divisão 3, dos números:
a) 742957
Resolução: Em primeiro lugar, somemos seus algarismos:
→ Soma = 7 + 4 + 2 + 9 + 5 + 7
→ Soma = 34
Agora, vamos dividi-la por três:

$$\begin{array}{r|l} 34 & \underline{3} \\ 1 & 11 \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão do número 742957 por 3 é igual a 1
Observação: Você também pode continuar somando os algarismos até obter um número menor; que vai possibilitar o cálculo "de cabeça".
742957 → 7 + 4 + 2 + 9 + 5 + 7 = 34
→ 3 + 4 = 7 → 7 dividido por 3 dá resto 1
b) 6475296

Resolução:
→ Soma = 6 + 4 + 7 + 5 + 2 + 9 + 6
→ Soma = 39

$$\begin{array}{r|l} 39 & \underline{3} \\ 0 & 13 \end{array}$$

Então, o resto da divisão do número 6475296 por 3 é igual a 0 (zero), e ele é divisível por 3.

3) **4 :** Devemos dividir o número formado pelos dois últimos algarismos da direita do número dado por 4, aproveitando o resto. Daí, um número será divisível por 4, quando o número formado por seus dois últimos algarismos da direita também o for.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 4 dos números:

a) 7425787
Resolução: O número formado pelos dois algarismos da direita é 87.
Agora vamos dividi-lo por 4:

$$\begin{array}{r|l} 87 & \underline{4} \\ 3 & 21 \end{array}$$

Logo, o resto da divisão do número 7425787 por 4 é 3, e ele não é divisível por 4.

b) 3147892
Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 92 & \underline{4} \\ 0 & 23 \end{array}$$

Então, o resto da divisão do número 3147892 por 4 é igual a 0 (zero), e ele é divisível por 4.

4) **5 :** Devemos dividir o último algarismo da direita do número dado por **5**, aproveitando o resto. Quando o último algarismo é menor que **5**, ele já é o próprio resto. Daí, podemos concluir que um número será divisível por **5** quando ele terminar por **0** ou **5**.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 5 dos números:
a) 845719

Resolução: É só dividir o último algarismo por 5:

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{5} \\ 4 & 1 \end{array}$$

Logo, o resto é igual a 4, e ele não é divisível por 5.

b) 8455342
Resolução: Como o último algarismo é menor que 5, ele será o próprio resto.
Daí o resto é igual a 2. Então, ele não é divisível por 5.

c) 473185
Resolução: O resto é igual a 0 (zero), pois o número termina em 5, e portanto ele é divisível por 5.

5) **6 :** Devemos dividir por 6 a soma do último algarismo da direita do número com o quádruplo da soma dos demais algarismos, aproveitando o resto.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 6 dos números:
a) 513947
Resolução: Somemos o último algarismo da direita ao quádruplo da soma dos demais:

7 + 4 .(5 + 1 + 3 + 9 + 4) = 7 + 4 . 22 = 7 + 88 = 95
Agora, vamos dividi-lo por 6.

$$\begin{array}{r|l} 95 & \underline{6} \\ 5 & 15 \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão do número 513947 por 6 é 5. Confira!

b) 874566
Resolução: Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior.
6 + 4 . (8 + 7 + 4 + 5 + 6) = 6 + 4 . 30 = 6 + 120 = 126

Agora vamos dividí-lo por 6:

$$\begin{array}{r|l} 126 & \underline{6} \\ 0 & 21 \end{array}$$

Então, o resto da divisão do número 874566 por 6 é igual a 0 (zero), e ele é divisível por 6.

NOTA: Se o seu objetivo não for a determinação do resto na divisão por 6, mas sim verificar se um número é divisível por 6, então basta que ele seja divisível simultaneamente por **2** e por **3**.

Exemplo:
a) O número 5742 é divisível por 6, pois é divisível por 2 e 3. Verifique.

b) O número 4765897 não é divisível por 6, pois não sendo par, não é divisível por 2. Se quisermos saber o resto na divisão por 6, devemos seguir a regra citada anteriormente.

6) *7* : Devemos dividir por 7 a diferença entre as somas das classes ímpares e a soma das classes pares, aproveitando o resto.

→ Para esclarecer os conceitos de classes ímpares e pares, consideremos o exemplo abaixo.

45	673	213	498
classe 4	classe 3	classe 2	classe 1

Devemos lembrar que as classes são contadas da direita para a esquerda. Assim, a primeira classe, a classe simples, é a classe 1(ímpar), a segunda classe, a classe de milhar, é a classe 2 (par), já a terceira classe, a classe de milhão é a classe 3 (ímpar), e assim sucessivamente. Observe que, no exemplo anterior, o número 498 é par, mas ocupa uma classe ímpar (classe 1), o número 213 é ímpar, porém ocupa uma classe par (classe 2). Assim, no número anterior temos:

→ Classes ímpares: 498 (classe 1) e 673 (classe 3)
→ Classes pares: 213 (classe 2) e 45 (classe 4)

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 7, dos números:
a) 84.325.436.397
Resolução: Vamos determinar a soma das classes ímpares e pares:

84	325	436	397
classe 4	classe 3	classe 2	classe 1

→ Soma das classes ímpares (S_i): 397 + 325 = 722
→ Soma classes das pares (S_p): 436 + 84 = 520

Agora calculamos a diferença entre as duas somas:
→ $S_i - S_p = 722 - 520 = 202$

Finalmente vamos dividi-la por 7:

$$\begin{array}{r|l} 202 & 7 \\ \hline 6 & 28 \end{array}$$

Portanto o resto da divisão é igual a 6

b) 235.478.126
Resolução: Vamos determinar a soma das classes ímpares e pares:
→ $S_i = 126 + 235 = 361$
→ $S_p = 478$
→ $S_i - S_p = 361 - 478 = -117$

$$\begin{array}{r|l} -117 & 7 \\ \hline -5 & -16 \end{array}$$

Como o resto não pode ser negativo o "truque" é adicionarmos o divisor **7** a ele:
→ Resto = –5 + 7 = 2

7) **8** : Devemos dividir o número formado pelos três últimos algarismos da direita do número dado por 8, aproveitando o resto. Daí, o número será divisível por 8, quando o número formado por seus três algarismos da direita também o for.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 8, do número 8745681.
Resolução: Em primeiro lugar vamos identificar o número formado pelos três últimos algarismos da direita e, em seguida dividí-lo por 8

$$\begin{array}{r|l} 681 & 8 \\ \hline 1 & 85 \end{array}$$

Portanto, o resto de tal divisão é 1.

8) **9** : Devemos dividir a soma dos valores absolutos dos algarismos do número por 9, aproveitando o resto.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 9, do número 47786638
→ Soma = 4 + 7 + 7 + 8 + 6 + 6 + 3 + 8 = 49
→ Agora vamos dividir essa soma por 9:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 9 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

→ Assim, o resto desejado é igual a 4.

Observação: Tal como sugerimos para a determinação do resto da divisão por 3, nesse caso, também podemos continuar somando os algarismos até encontrar um valor menor do que 9. Essa é aconhecida regra dos **"noves fora"**
47786638 → 4 + 7 + 7 + 8 + 6 + 6 + 3 + 8 = 49
4 + 9 = 13 → 1 + 3 = 4, que é o resto procurado.

9) **10** : Neste caso o resto é igual ao último algarismo da direita do número. Podemos concluir que um número é divisível por 10 quando termina em 0 (zero).

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 10 dos números:

a) 47936
Resolução: O resto é 6, pois este é o algarismo terminal do número.

b) 874360
Resolução: Este número é divisível por 10, pois termina em 0 (zero), que é o resto dessa divisão.

10) **11** : Devemos dividir por 11 a diferença entre as somas dos algarismos de ordem ímpares e pares, aproveitando o resto. Tal como fizemos no caso da divisão por 7, vamos relembrar alguns conceitos fundamentais para o bom entendimento dessa regra. Tomemos como exemplo o número abaixo:

7 4 9 1 8 2 7 1 6
Ordem 1
Ordem 2
Ordem 3
Ordem 4
Ordem 5
Ordem 6
Ordem 7
Ordem 8
Ordem 9

É sabido que cada algarismo corresponde a uma ordem, e que as ordens são contadas da direita para esquerda. O número acima possui 9 algarismos, e então é formado por 9 ordens. A ordem 1 (ímpar) é ocupada pelo algarismo 6, a ordem 2 (par) é ocupada pelo algarismo 1, já o algarismo 7 ocupa a ordem 3 (ímpar), o algarismo 2 ocupa a ordem 4 (par) e, assim sucessivamente. É importante ressaltar que a paridade da ordem independe da paridade do algarismo que a ocupa. Assim, o algarismo 6, que é par, ocupa a ordem 1, que é ímpar, enquanto que o algarismo 1 que é ímpar ocupa a ordem 2 que é par.

Exemplos:
Determine o resto da divisão por 11 dos números:
a) 927160548
Resolução: Vamos identificar a soma, em separado, dos algarismos de ordens ímpares e pares

$\boxed{S_i = 8 + 5 + 6 + 7 + 9 = 35}$

→ Soma das ordens pares
$S_p = 4 + 0 + 1 + 2 = 7$
O próximo passo é obtermos a diferença entre essas somas, e em seguida a sua divisão por 11.

$\rightarrow S_i - S_p = 35 - 7 = 28$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 11 \\ \cline{2-2} \underbrace{6} & 2 \end{array}$$

Portanto, o resto desejado é 6.

b) 6093718254

Resolução: Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior:

$\rightarrow S_i = 4 + 2 + 1 + 3 + 0 = 10$
$\rightarrow S_p = 5 + 8 + 7 + 9 + 6 = 35$
$\rightarrow S_i - Sp = 10 - 35 = -25$

$$\begin{array}{r|l} -25 & 11 \\ \cline{2-2} \underbrace{-3} & -2 \end{array}$$

Como o resto não pode ser negativo, devemos adicionar a ele o divisor 11

$\rightarrow$ Resto $= -3 + 11 = 8$

Observação importante: Para determinarmos o resto da divisão de um número N por uma potência de **2**, escrita na forma $\mathbf{2^n}$, basta calcular o resto do número formado pelos **n** últimos algarismos da direita de **N** por $\mathbf{2^n}$. Essa regra é válida também para as potências de **5**.

Propriedades dos Restos

1) O resto da divisão da soma de duas parcelas por um número é o mesmo que a soma dos restos das parcelas por esse número.

Exemplo:

Seja obter o resto da divisão do resultado da expressão A = 745 + 238 + 818, por 9.

1ª Solução: Vamos determinar os restos deixados pelas parcelas na divisão por 9, e em seguida somá-los.

$745 \div 9 \rightarrow r = 7$
$238 \div 9 \rightarrow r = 4$
$818 \div 9 \rightarrow r = 8$

Soma $= 7 + 4 + 8 = 19 \div 9 \rightarrow r = 1$

2ª Solução: Calculemos o valor de A e em seguida calculemos o resto desejado.

$A = 745 + 238 + 818 = 1801 \div 9 \rightarrow r = 1$

2) O resto da divisão de um produto por um número será o mesmo que o produto dos restos dos fatores.

Exemplo:

Seja obter o resto da divisão do resultado da expressão A = 387 x 482 x 315, por 4.

1ª Solução: Determinemos o resto que cada fator deixa quando dividido por 4, e em seguida vamos multiplicá-los.

$387 \div 4 \rightarrow r = 3$
$482 \div 4 \rightarrow r = 2$
$315 \div 4 \rightarrow r = 3$

Produto $= 3 \times 2 \times 3 = 18 \div 4 \rightarrow r = 2$

2ª Solução: Vamos calcular o valor de A, e determinar o resto pedido.

$A = 387 \times 482 \times 315 = 58758210 \div 4 \rightarrow r = 2$

3) O resto da divisão de uma potência por um número é igual ao resto da base, elevado ao mesmo expoente. Quando o expoente for muito grande, acha-se uma lei de formação dos restos.

Exemplos:

Determine o resto de:

a) 329^3 por 3

Resolução: $3 + 2 + 9 = 14$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} \underbrace{2} & 4 \end{array} \Rightarrow 2^3 = 8 \Rightarrow \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} \underbrace{2} & 2 \end{array}$$

Resposta: resto = 2

b) 2834^{12} por 5

$$2384 \rightarrow \begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ \cline{2-2} \underbrace{4} & 0 \end{array} \rightarrow 4^{12} \text{ por } 5$$

Lei dos restos

$4^0 = 1 \div 5 \rightarrow r = 1$
$4^1 = 4 \div 5 \rightarrow r = 4$
$4^2 = 16 \div 5 \rightarrow r = 1$
$4^3 = 64 \div 5 \rightarrow r = 4$

Conclusão:

Expoente par $\rightarrow$ resto = 1
Expoente ímpar $\rightarrow$ resto = 4

Logo $4^{12} \rightarrow$ resto = 1
Resposta: resto = 1

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine os restos das divisões do número 4567248, respectivamente por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 e 11.

2) Determine os restos das divisões do número 81908270, respectivamente por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 e 11.

3) Determine o valor do menor algarismo que deve ser colocado no lugar de **m** de modo que o número **526m** seja divisível por:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6
f) 8
g) 9
h) 10
i) 11

4) Classifique como **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):
a) ( ) Todo número diferente de zero é divisor de si mesmo.
b) ( ) "UM" é divisor de todos os números.
c) ( ) Submúltiplo de um número é o mesmo que divisor de um número.
d) ( ) Os múltiplos de 2 são sempre pares.
e) ( ) Os múltiplos de 3 são sempre ímpares.
f) ( ) "Zero" é múltiplo de qualquer número.
g) ( ) "Zero" não é divisor de qualquer número.
h) ( ) O conjunto dos múltiplos naturais de um número natural obtém-se multiplicando esse número por todos os elementos do conjunto N.
i) ( ) O conjunto dos divisores naturais de qualquer número natural é sempre um conjunto finito.
j) ( ) O conjunto dos múltiplos naturais de qualquer número natural é sempre um conjunto infinito.
k) ( ) 2K ($K \in N$) é a representação genérica de qualquer número natural par.
l) ( ) 2K + 1 ($K \in N$) é a representação genérica de qualquer número natural ímpar.
m) ( ) O resto da divisão de um número por 5 é o seu algarismo da direita, se for menor que 5 ou seu algarismo da direita menos 5, se for maior que 5.

n) ( ) *Qualquer número é múltiplo de 1.*
o) ( ) *Todo número é múltiplo de si mesmo.*
p) ( ) *51 é um número primo.*
q) ( ) Um número natural é divisível por 4 quando "terminar" por dois zeros ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos for múltiplo de 4.
r) ( ) Um número é múltiplo de 5 quando "terminar" em zero ou 5.
s) ( ) Um número é divisível por 6 quando for múltiplo de 2 e 3 simultaneamente.
t) ( ) Todo número terminado em "três zeros" é múltiplo de 8.
u) ( ) Um número natural é divisível pelo produto x . y ($x \in N$ e $y \in N$) se este número é divisível por x e também por y.

5) Qual o menor número com 3 algarismos significativos diferentes que é divisível por 3?

6) Qual o menor número que deve ser somado a 735167 para obtermos um múltiplo de 9?

7) Qual o menor número que deve ser subtraído de 217483 para obtermos um múltiplo de 25?

8) Determine o menor valor do algarismo **a** de modo que o número 2782a seja, simultaneamente, divisível por:
a) 2 e 3
b) 2 e 5
c) 3 e 5
d) 4 e 9

9) Determine os valores dos algarismos **a** e **b** de modo que o número 517a2b seja divisível por 90.

10) O número 418x23y é divisível por 88. Determine os valores dos algarismos x e y.

11) O número N = 34a7a é divisível por 11. Então, N é também divisível por:
a) 2
b) 5
c) 6
d) 7
e) 9

12) Qual o menor número que deve ser somado a 728 para obtermos um número que seja simultaneamente divisível por 4, 5 e 6.

13) Determine o resto da divisão por 5 do resultado do produto 785687 x 543152 x 913546.

14) Determine o resto da divisão por 9 do resultado da expressão $27146^4 + 781^{34} \times 3411^{15}$.

15) Determine o resto da divisão por 10 do resultado de 1 x 3 x 5 x 7 x ... x 97 x 99.

16) Determine o resto da divisão por 9 do resultado da expressão:

$$2531^5 + 8112^3 \times 478^{33}$$

17) Qual o menor número que devemos somar ao resultado da expressão $3109^2 + 4710^3 \times 47741^{13} + 18092$, para obtermos um número que seja múltiplo de 11?

18) Determine o menor número que devemos subtrair do resultado da expressão $a^4 + 3b^2 + c^3$, de modo a obtermos um número que seja divisível por 9, sabendo que os números **a**, **b** e **c**, quando divididos por 9, deixam restos respectivamente iguais a 4, 1 e 5.

19) Os números **a** e **b** deixam restos respectivamente iguais a 6 e 8 quando divididos por 11. Determine o resto da divisão por 11 do resultado de

$$2a^2 + (a + b)^3 + b$$

20) O número 671x43y8 é divisível por 44. Determine todos os valores possíveis para x e y.

21) Um número N deixa restos respectivamente iguais a 6 e 4, quando divididos por 8 e 7. Determine o resto da divisão de N por 56.

22) Determine o resto da divisão por 9 da potência 7272^{138}.

23) Determine o resto da divisão de 47129^{84} por 8.

24) Determine o resto da divisão de 1473^{217} por 9.

25) Determine o resto da divisão de 217^{89} por 10.

26) Determine o resto da divisão de $728^{330^{48}}$ por 11.

27) Determine o resto da divisão por 11 do número $416^{37^{842}}$.

28) Determine o resto da divisão por 9 do número $3211^{89^{173}}$.

29) Na sequência ABCDEFABCDEFABC..., qual a letra que ocupa a 1268ª posição?

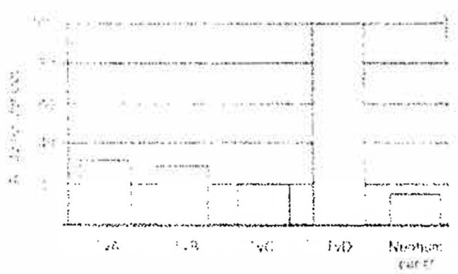
QUESTÕES DE CONCURSOS

30) **(CM)** A Walt Disney comemorou seus 100 anos de produções de belos filmes. Alguns deles são: Pinóquio (1940), Bambi (1952), Cinderela (1950), Peter Pan (1952), A Dama e o Vagabundo (1955), 101 Dálmatas (1961), A pequena Sereia (1989), A Bela e a Fera (1998), ToyStory2 (1999).

Adaptado da Revista Galileu 2001.

Dos filmes citados acima, podemos afirmar que:
a) Apenas 3 desses filmes não foram criados em anos pares.
b) Os anos em que foram criados Cinderela e A Pequena Sereia tem como divisores comuns os números 2, 3, 6 e 9.
c) São 8 os algarismos utilizados para escrever todos os anos em que todos esses filmes foram divulgados.
d) Pinóquio, Bambi e A Bela e a Fera foram divulgados em anos divisíveis por 4.

31) **(ENEM)** Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite.
Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras abaixo:



A percentagem de entrevistados que declaram estar assistindo à TvB é **aproximadamente** igual a:
a) 15%
b) 20%
c) 22%
d) 27%
e) 30%

32) **(ENEM)** Seja X o conjunto dos números da forma 31754xy (x é o dígito das dezenas e y o dígito das unidades), que são divisíveis por 15. O número de elementos de X é:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

33) **(EPCAR)** Seja o número m = 488a9b onde "b" é o algarismo das unidades e "a" o algarismo das centenas. Sabendo-se que m é divisível por 45, então a + b é igual a:
a) 1
b) 7
c) 9
d) 16

34) **(ENEM)** Um número natural n foi dividido por 12 e deu resto 5. A soma dos restos das divisores de n por 4 e por 3 é igual a:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

35) **(ENEM)** Os números de identificação utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade etc) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou digitação de documentos.
Um dos métodos usados para gerar esse dígito utiliza os seguintes passos:
- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2.
- soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que ou igual a 10.
- somam-se os resultados obtidos.
- calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.

O dígito de verificação fornecido pelo processo acima para o número 24685 é:
a) 1
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

36) **(CN)** O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a
a) 268
b) 269
c) 270
d) 271
e) 272

37) **(EPCAR)** Os restos das divisões de 247 e 315 por x são 7 e 3, respectivamente. Os restos das divisões de 167 e 213 por y são 5 e 3, respectivamente. O maior valor possível para a soma x + y é:
a) 36
b) 34
c) 30
d) 25

38) **(CEFET)** Os números inteiros maiores ou iguais a 1 são dispostos de acordo com a tabela abaixo:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20
			21	

Podemos afirmar que os números 1992 e 1997 ocuparão, respectivamente, as colunas:
a) 1 e 4
b) 3 e 4
c) 3 e 2
d) 1 e 2
e) 5 e 2

39) **(EPCAr)** Sobre o menor número natural n de 4 algarismos, divisível por 3, tal que o algarismos das dezenas é metade do algarismo das unidades e igual ao dobro do algarismo das unidades de milhar, é correto afirmar que:
a) n + 1 é divisível por 7
b) n está entre 2000 e 3009
c) n + 2 é múltiplo de 10
d) n apresenta 12 divisores positivos

40) **(CN)** Considere as afirmativas:
I. O número 1147 não é primo.
II. Todo o número da forma abba, onde a e b são algarismos, é divisível por 11.
III. Todo o número múltiplo de 5 e 15 é múltiplo de 75.
IV. O número de divisores naturais de 576 é divisor de 63.

O número de afirmativas verdadeiras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

41) **(CN)** O número 583ab é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b, é:
a) indeterminado
b) 20
c) 18
d) 11
e) 2

42) **(CN)** Se a e b são números naturais e 2a + b é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:
a) 91a + b
b) 92a + b
c) 93a + b
d) 94a + b
e) 95a + b

43) **(CN)** Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até que a soma de todos os algarismos por ele escritos, na parte decimal, foi imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais escreveu?
a) 144
b) 145
c) 146
d) 147
e) 148

44) **(CN)** Sabendo-se que o resultado de 12 x 11 x 10 x ... x 3 x 2 x 1 + 14 é divisível por 13, qual o resto da divisão do número 13 x 12 x ... x 3 x 2 x 1 por 169?
a) 143
b) 149
c) 153
d) 156
e) 162

45) **(CN)** Seja N = xyzzyx um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, determine $N_1 + N_2$.

46) **(CN)** *Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal * indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos.*
123456789101112131415161718192021......... *
O resto da divisão do número formado por 16 é igual a:
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

47)**(EPCAR)** Considere os algarismos zero e 4 os números formados apenas com os mesmos. O número x representa o menor múltiplo positivo de 15, dentre os descritos acima. Se $\frac{x}{30}$ possui um número á de divisores positivos, então a é igual a:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10

48) **(CN)** A divisão do inteiro positivo 'N' por 5 tem quociente 'q_1' e resto 1. A divisão de '$4q_1$' por 5 tem quociente 'q_2' e resto 1. A divisão de '$4q_2$' por 5 tem quociente 'q_3' e resto 1. Finalmente, dividindo '$4q_3$' por 5, o quociente é 'q_4' e o resto é 1. Sabendo que 'N' pertence ao intervalo aberto (621,1871), a soma dos algarismos de 'N' é
a) 18
b) 16
c) 15
d) 13
e) 12

49) **(CN)** O resto da divisão do número 743^{48} por 6 é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

50) **(CEFET)** O resto da divisão de 455^{16} por 5 é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

51) **(CM)** Qual é o algarismo da ordem das unidades simples do numeral correspondente ao produto da multiplicação $4 \cdot 3^{2002}$ escrito com os algarismos do Sistema Decimal de Numeração?
a) 2
b) 3
c) 6
d) 8
e) 9

52) **(CN)** O resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12 é igual a
a) 0
b) 2
c) 7
d) 9
e) 11

53) **(CN)** É correto afirmar que o número $5^{2011} + 2 \times 11^{2011}$ é múltiplo de
a) 13
b) 11
c) 7
d) 5
e) 3

54) **(CN)** Os números da forma $4^{k^2+50} + 4^{k^2+51} + 4^{k^2+52} + 4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:
a) 17
b) 19
c) 23
d) 29
e) 31

55) **(CN)** Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar o número de soluções inteiras e positivas da equação $5x^2 + 11y^2 = 876543$. Qual foi o número de soluções que este aluno obteve?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

GABARITO

1) 0; 0; 0; 3; 0; 0; 8; 4
2) 0: 2; 2; 0; 6; 8; 0; 4
3) a) 0
b) 2
c) 0
d) 0
e) 2
f) 4
g) 5
h) 0
i) 9
4)
a) V b) V c) V d) V e) F
f) V g) V h) V i) F j) F
k) V l) V m) V n) V o) V
p) F q) V r) V s) V t) V u) F
5) 123
6) 7
7) 8
8) a) 2
b) 0
c) 5
d) 8
9) a = 3 e b = 0
10) x = 1 e y = 2
11) A
12) 52
13) 4
14) 7
15) 5
16) 5
17) 1
18) 6
19) 8
20) x = 4 e y = 0 ou x = 6 e y = 2
ou x = 8 e y = 4
21) 46
22) 0
23) 1
24) 0
25) 7
26) 1
27) 5
28) 4
29) B
30) C
31) A
32) A
33) B
34) B
35) E
36) B
37) C
38) A
39) A
40) D
41) D
42) C
43) E

44) D
45) 1.156.650
46) E
47) B
48) D
49) A
50) A
51) C
52) A
53) E
54) A
55) A

OBSERVAÇÕES

Máximo Divisor Comum (MDC)

Exemplo ilustrativo:
Consideremos o conjunto dos divisores positivos dos números 36:
{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Agora vamos formar o conjunto dos divisores positivos do número 48:
{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

Abaixo vemos o conjunto dos divisores positivos comuns a 36 e 48:
{1, 2, 3, 4, 6, 12}

O maior divisor comum desses números, chama-se MDC. Ou seja:
MDC (36, 48) = 12

Portanto, cabe ressaltar que o MDC não é o único divisor comum e sim o maior deles.

Métodos de Obtenção do MDC

O método descrito acima é empírico, quase que artesanal e, naturalmente, nada prático. Em seguida vamos mostrar os dois processo mais usados na obtenção do MDC.

1) Decomposição isolada em fatores primos

Neste caso, devemos em primeiro lugar decompor os números dados em fatores primos. O MDC entre eles será obtido através do produto dos fatores primos comuns encontrados, elevados aos menores expoentes com os quais apareceram.

Exemplo:
Determine o MDC (120, 210)
Resolução: Primeiro vamos fatorar os números:
→ $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
→ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Os fatores comuns obtidos foram 2, 3 e 5, cujos menores expoentes eram 1, 1 e 1. Assim:
→ $MDC\ (120, 210) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
→ MDC (120, 210) = 30

2) Método das divisões sucessivas ou algoritmo de Euclides

O algoritmo para obtenção do MDC, também conhecido como "jogo da velha", é composto de três linhas: LINHA DOS QUOCIENTES, LINHA DOS DIVISORES E LINHA DOS RESTOS.

		→ Linha dos quocientes
		→ Linha dos divisores
		→ Linha dos restos

Exemplo ilustrativo:
Seja novamente determinar o MDC (120, 210)
Resolução: Os números cujo MDC vamos calcular devem ser colocados nas duas primeiras casas da esquerda da linha dos divisores (o maior número mais à esquerda).

210	120			

A seguir devemos dividir o maior pelo menor número, colocando o quociente acima do menor e o resto abaixo do maior. Note que a 1ª casa mais à esquerda da linha dos quocientes ficará sempre vazia.

210	120
90	1

	1			
210	120			
90				

Agora o resto obtido deverá ser colocado à direita do menor número, na linha dos divisores:

	1			
210	120	90		
90				

Em seguida devemos dividir o menor número por esse resto, transpondo o resultado para o algoritmo de forma análoga àquela utilizada na primeira divisão. Esse processo deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias até obtermos um resto igual a zero, e daí, neste caso, o MDC será o último número encontrado à direita na linha dos divisores:

120	90
30	1

	1	1		
210	120	90		
90	30			

	1	1		
210	120	90	30	
90	30			

90	30
0	3

	1	1	3	
210	120	90	30	→ MDC
90	30	0		

Então: MDC (210, 120) = 30

ATENÇÃO: Os menores valores dos quocientes obtidos neste processo são todos iguais a 1 (um), com exceção do último da direita, cujo valor mínimo é 2 (dois).

Observações:
1) Dois números são primos entre si quando o único divisor comum entre eles é a unidade. Note que embora o número 1 (um) não seja primo absoluto, ele é primo com qualquer número natural positivo.

Exemplo:
Os número 8 e 15 são primos entre si pois os divisores positivos do 8 são 1, 2, 4 e 8, enquanto os divisores de 15 são 1, 3, 5 e 15, portanto, o único divisor comum entre eles é o número 1.

2) O MDC de dois números primos entre si vale sempre 1 (um).

Exemplos:
MDC (8, 35) = 1
MDC (291, 292) = 1

Note que dois números naturais consecutivos são sempre primos entre si.

3) O MDC de dois números múltiplos é sempre o menor deles.

Exemplos:
MDC (10, 30) = 10
MDC (2x, 12x) = 2x

4) Os divisores positivos comuns de dois números são os próprios divisores positivos do MDC entre eles.

Exemplo:
Determine os divisores positivos comuns entre 180 e 162.
$180 = 2^2 . 3^2 . 5$
$162 = 2 . 3^4$
MDC (180, 162) = $2 . 3^2 = 18$

Os divisores positivos comuns a 180 e 162 são os divisores positivos de 18, ou seja: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

5) Quando multiplicamos ou dividimos dois ou mais números por um mesmo número diferente de zero, o MDC entre eles fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.

Exemplo:
MDC (20, 30) = 10
Se multiplicamos esses números por 3, por exemplo:
MDC (60, 90) = 30
Observamos que o MDC também ficou multiplicado por 3.

Agora vamos dividir os números por 2.
MDC (30, 45) = 15
Note que o MDC também ficou dividido por 2, o que confirma a observação acima.

6) Os quocientes de dois ou mais números pelo MDC entre eles são sempre números primos entre si.

Exemplo:
É fácil verificar que MDC (40, 16) = 8. Vamos determinar os quocientes dos números pelo MDC:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Note que os quocientes 5 e 2 são primos entre si.

7) O quociente da soma de dois números pelo MDC entre eles é sempre igual à soma de dois números primos entre si. Assim, se multiplicarmos tais números primos entre si pelo MDC dos números, encontraremos os valores desses números.

Exemplo:
A soma de dois números de A e B é 160 e seu MDC vale 20. Calcule esses números.
Resolução:
A + B = 160 e MDC (A, B) = 20
Dividindo-se a soma pelo MDC, encontraremos um valor igual à soma de dois números primos entre si:

$$\frac{A+B}{MDC\ (A,B)} = \frac{160}{20} = 8$$

Sejam **p** e **q** os números entre si procurados: $p + q = 8$
Agora devemos buscar dois números primos entre si de soma 8.

Note que este é um problema de tentativas. Assim são valores admissíveis para **p** e **q**:
a) p = 1 e q = 7 (ou vice-versa)
b) p = 3 e q = 5 (ou vice-versa)

Note que os valores p = 2 e q = 6 ou p = 4 e q = 4 não servem, pois eles não representam pares de números primos entre si.

Portanto os números A e B serão obtidos multiplicando-se os valores de p e q respectivamente pelo MDC (A, B). Observem que este problema admite duas soluções:
a) A = p x MDC = 1 x 20 = 20
B = q x MDC = 7 x 20 = 140
b) A = p x MDC = 3 x 20 = 60
B = q x MDC = 5 x 20 = 100

Resposta: Os números são 20 e 140 ou 60 e 100.

Função de Euller

Consideremos um número N, em sua forma fatorada:

$$N = a^x . b^y . c^z . ...$$

A quantidade de números naturais menores do que N, e que são primos entre si com N, pode ser determinada pela função de Euller representada pela letra grega Ø.

$$\boxed{\varnothing (N) = N \times \left(\frac{a-1}{a}\right) \times \left(\frac{b-1}{b}\right) \times \left(\frac{c-1}{c}\right) \times ...}$$

Exemplo:
Quantos números naturais menores que 60 são primos com ele?

Resolução: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$$\varnothing (60) = 60 \times \left(\frac{2-1}{2}\right) \times \left(\frac{3-1}{3}\right) \times \left(\frac{5-1}{5}\right) =$$

$$= 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16.$$

São eles: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53 e 59.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine o MDC entre 864, 576 e 360.

2) Determine o MDC entre 770, 1386 e 1232 através da decomposição isolada em fatores primos.

3) Determine o MDC entre 540, 1152 e 864 através do algoritmo de Euclides.

4) Determine, através da decomposição isolada em fatores primos, o MDC entre 720, 384 e 432.

5) Determine os três maiores divisores comuns dos números 1920, 3200 e 1280.

6) Determine a soma entre os quatro maiores números divisores comuns dos números 1460, 2190 e 3650.

7) Determine os divisores comuns positivos dos números 780, 600 e 1440.

8) Na determinação do MDC de dois números A e B, pelo método das divisões sucessivas, encontrou-se 40, e quocientes iguais a 2, 3, 1 e 4. Determine os números A e B.

9) Na determinação do MDC, pelo método sucessivas, entre os números A e B encontrou-se 36 e os quatro quocientes foram os menores possíveis. Calcule A e B.

10) Ao determinarmos o MDC de dois números através do algoritmo de Euclides, encontramos cinco quocientes de soma igual a 6. Calcule os números, sabendo-se que o MDC encontrado foi 20.

11) Determine o MDC entre os números 725743 e 725744.

12) O MDC entre os números $A = 5400$ e $B = 2^x . 3^y . 5^z . 7$ é igual a 20. Determine o valor do número B.

13) Dois números de MDC igual a 16 estão entre si assim como 18 está para 20. Determine-os.

14) Sabendo que o MDC (x, 2x) = 60, determine o valor de MDC (x + 20, x − 20).

15) Um número é o triplo do outro. Dividindo-os por 7, o MDC entre esses resultados vale 4. Calcule os números.

16) Determine o valor de x de modo que o MDC dos números $A = 2^x . 3^2 . 5^4$ e $B = 2^{4x} . 3 . 7^2$ tenha 20 divisores positivos.

17) A soma de dois números é 180 e seu MDC vale 30. Quantos pares de números satisfazem a essas condições?

18) Determine os dois menores números de MDC igual a 25, sabendo que eles diferem de 300 unidades.

19) O produto de dois números de MDC igual a 12, vale 7488. Determine esses números.

20) O MDC entre a metade e o triplo de um número vale 60. Determine o MDC entre o dobro e 7/4 desse mesmo número.

21) Quais são os três menores números inteiros pelos quais devemos dividir, respectivamente, os números 208, 112 e 320, de modo a obtermos quocientes iguais?

22) Qual é o maior número inteiro pelo qual devemos dividir os números 354, 770 e 993 para obtermos restos respectivamente iguais a 18, 14 e 27?

23) Uma professora deseja encaixotar 144 livros de Português e 96 livros de Matemática, colocando o maior número possível de livros em cada caixa. O número de livros que ela deve colocar em cada caixa, para que todas elas tenham a mesma quantidade de livros, sem misturar livros de matérias diferentes, é:
a) 36
b) 30
c) 42
d) 46
e) 48

24) Um comerciante distribui 60 pitangas, 72 acerolas, 48 maçãs e 36 cajás entre várias crianças, de modo que cada uma recebesse o mesmo e o menor número possível de frutas de cada espécie.
Qual o número de frutas que cada criança recebeu?

25) Um empreiteiro deseja construir um prédio em um terreno retangular de dimensões 216 m por 414 m. Para isto, deverá cercá-lo, o que será feito por meio de estacas. Se ele colocar uma estaca em cada canto do terreno e utilizar sempre a mesma distância entre duas estacas consecutivas, qual o número mínimo de estacas a ser utilizado?

26) Um feirante tem em sua barraca 135 abacates, 216 peras e 297 maçãs, e deseja distribuí-los em lotes de modo que o número de frutas por lote seja constante e que em cada lote só existam frutas de uma única espécie. Qual o número mínimo de lotes que esse feirante conseguirá formar?

27) Um automóvel percorre 3360 m em uma rua A. Daí dobra à direita e percorre mais 2280 m em uma rua B. No seu trajeto observa que havia um poste no início de sua "viagem" e um no final, e ainda um outro na esquina das duas ruas. Além desses, havia outros. Por quantos postes esse automóvel passou, sabendo-se que a distância entre dois postes consecutivos era constante e a maior possível?

28) Um empresário adquiriu três lotes de ingressos de um show para distribuir entre os funcionários das três filiais de sua empresa, pagando por eles respectivamente $ 504,00, $ 816,00 e $360,00. Se o preço de cada ingresso é um valor em reais, compreendido entre 20 e 30, determine quantos funcionários foram beneficiados pela atitude desse empresário.

29) Determine a quantidade de números naturais menores que N, que são primos com N, nos seguintes casos:
a) N = 180
b) N = 420
c) N = 1176

QUESTÕES DE CONCURSOS

30) **(CEFET)** O MDC dos números A e B ∈ IN* pelo algoritmo de Euclides é dado da seguinte forma:

	3	2	3
		Z	7
X	Y	0	

Sendo, X, Y e Z ∈ IN*, calcule A + B.

31) **(CN)** O algoritmo acima foi utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre os números A e B. Logo A + B + C vale

	1	1	2
A	B	C	40
D	E	0	

a) 400.
b) 300.
c) 200.
d) 180.
e) 160.

32) **(CEFET)** Na pesquisa do máximo divisor comum de dois números, os quocientes obtidos foram 1, 2, 2 e o máximo divisor comum encontrado foi 6. O maior dos números é:
a) 12
b) 30
c) 42
d) 48
e) 144

33) **(E.E.Aer)** Na procura do maior divisor comum de dois números, pelo processo das divisões sucessivas, encontramos os quocientes 1, 2, e 6, e restos 432, 72 e 0, respectivamente. Qual a soma desses dois números?
a) 1800
b) 2000
c) 2104
d) 2304

34) **(CEFETEQ)** Na decomposição em fatores primos de um número natural N, encontramos o seguinte resultado: $N = 2^x . 3^y . 5^z$
Sabendo que N possui 105 divisores, calcule o MDC entre x, y e z.

35) **(CM)** Se a soma de dois números é igual a 288, o MDC entre eles é 36 e um é múltiplo do outro, a diferença entre eles é:
a) 120
b) 216
c) 248
d) 252
e) 324

36) **(CN)** A soma de dois números inteiros e positivos, em que o maior é menor que o dobro do menor, dá 136 e o máximo divisor comum entre eles é 17.
A diferença entre esses números é:
a) 102
b) 65
c) 34
d) 23
e) 51

37) **(EsPCEx)** Qual o maior número pelo qual se deve dividir 1679 e 2352 para que os restos sejam 41 e 77, respectivamente?

38) **(CEFETEQ)** Determinar o maior número pelo qual se deve dividir os números 165 e 215 para que os restos sejam 9 e 11, respectivamente.

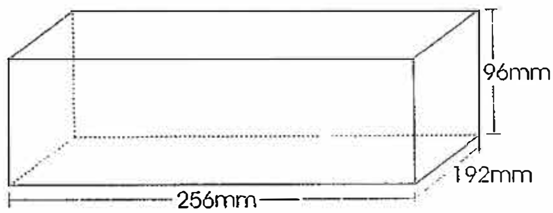
39) **(EPCAR)** Três pedaços de arame têm comprimento 3,6 dam, 4800 cm e 0,72 hm. Deseja-se cortá-los em pedaços menores, cujos comprimentos sejam iguais e sem que haja perda de material. Com base nisso, é **INCORRETO** afirmar que:
a) o comprimento de cada pedaço de arame, após cortá-los, é 120 dm
b) o menor número de pedaços de arame com a mesma medida é 12
c) o arame de comprimento 3,6 dam será dividido em 3 partes iguais.
d) os arames de comprimento 4800 cm e 0,72 hm, após serem cortados, formam um conjunto de 10 pedaços de arame.

40) **(E.E.Aer)** Três rolos de arame farpado têm, respectivamente, 168 m, 264 m e 312 m. Deseja-se cortá-los em partes de mesmo comprimento, de forma que, cada parte, seja a maior possível. Qual o número de partes obtidas e o comprimento, em metros de cada parte?
a) 21 e 14
b) 23 e 16
c) 25 e 18
d) 31 e 24

41) **(PUC)** Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48 m, 60 m e 80 m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Deseja vender o tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

42) **(EPCAR)** Uma abelha-rainha dividiu as abelhas de sua colmeia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha-rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possível, então você redistribuiria suas abelhas em:
a) 8 grupos de 81 abelhas
b) 9 grupos de 72 abelhas
c) 24 grupos de 27 abelhas
d) 2 grupos de 324 abelhas

43) **(CN)** Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo, com seis faces retangulares, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com X de aresta. O maior valor inteiro de X é:



a) 16
b) 18
c) 24
d) 30
e) 32

44) **(CN)** Deseja-se revestir uma área retangular, de 198cm de comprimento e 165cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro em cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?
a) 27
b) 30
c) 33
d) 36
e) 38

45) **(ENEM)** Em uma sala retangular de piso plano nas dimensões 8,80 m por 7,60 m deseja-se colocar ladrilhos quadrados iguais, sem necessidade de recortar nenhuma peça. A medida máxima do lado de cada ladrilho é:
a) 10 cm
b) 20 cm
c) 30 cm
d) 40 cm
e) 50 cm

46) **(CN)** No conjunto dos inteiros positivos sabe-se que 'a' é primo com 'b' quando mdc (a, b) = 1.
Em relação a este conjunto, analise as afirmativas a seguir.

I. A fatoração em números primos é única.
II. Existem 8 números primos com 24 e menores que 24.
III. Se $(a + b)^2 = (a + c)^2$ então b = c.
IV. Se a < b, então a × c < b × c.
Quantas das afirmativas acima são verdadeiras?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

47) **(CN)** O número 12 é o máximo divisor comum entre os números 360, a e b, tomados dois a dois, Sabendo que 100 < a < 200 e que 100 < b < 200, pode-se afirmar que a + b vale:
a) 204
b) 228
c) 288
d) 302
e) 372

48) **(FUVEST)** O produto de dois números inteiros positivos, que não são primos entre si, é igual a 825.
Então o máximo divisor comum desses dois números é:
a) 1
b) 3
c) 5
d) 11
e) 15

49) **(CN)** Se x e y são números inteiros e positivos, representa-se o máximo divisor comum de x e y por mdc (x, y). Assim, o número de pares ordenados (x, y) que são soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y = 810 \\ \text{mdc}(x, y) = 45 \end{cases}$$ é igual a:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 16
e) 18

50) **(CN)** Sejam $A = \{x \in IN^* \mid x \leq 1200\}$ e $B = \{y \in A \mid y$ é primo com $1200\}$. O número de elementos de B é:
a) 270
b) 300
c) 320
d) 360
e) 420

51) **(CN)** Qual é o menor valor positivo de 2160x + 1680y, sabendo que x e y são números inteiros?
a) 30
b) 60
c) 120
d) 240
e) 480

GABARITO

1) 72
2) 154
3) 36
4) 48
5) 640; 320; 160
6) 1314
7) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60
8) 1720; 760
9) 288; 180
10) 260; 160
11) 1
12) 140
13) 144; 160
14) 40
15) 28; 84
16) 9
17) 1
18) 325; 25
19) 12 e 624 ou 48 e 156
20) 30
21) 13; 7; 20
22) 42
23) E
24) 18
25) 70
26) 24
27) 48
28) 70
29) a) 48
b) 96
c) 336
30) 217
31) A
32) C
33) D
34) 2
35) B
36) C
37) 91
38) 12
39) B
40) D
41) 47
42) B
43) E
44) B
45) D
46) E
47) C
48) C
49) A
50) C
51) D

OBSERVAÇÕES

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Exemplo ilustrativo:

Consideremos o conjunto dos múltiplos não negativos do número 20:

{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...}

Agora formemos o conjunto dos múltiplos não negativos do número 30:

{0, 30, 60, 90, 120, 150, ...}

Abaixo destacamos os múltiplos não negativos comuns a 20 e 30:

{0, 60, 120, ...}

Ao menor múltiplo positivo comum desses números, chamamos de MMC.

Assim: MMC (20, 30) = 60

Podemos verificar que o MMC não é o único múltiplo comum, mas o menor positivo deles.

Métodos de obtenção do MMC

Em seguida vamos estudar dois métodos práticos para a obtenção do MMC, já que o processo mostrado acima não é aconselhável pois, muitas vezes pode ser muito trabalhoso.

1) Decomposição isolada em fatores primos

Neste caso devemos decompor os números em fatores primos. O MMC entre eles será obtido através dos produtos dos fatores primos comuns e não comuns encontrados, elevados aos maiores expoente com os quais apareceram.

Exemplo:

Determine o MMC (72, 150)

Resolução:

Em primeiro lugar vamos fatorar os números:

→ $72 = 2^3 . 3^2$

→ $150 = 2 . 3 . 5^2$

Agora é só multiplicarmos todos os fatores, comuns e não comuns, com os maiores expoentes obtidos:

→ MMC (72, 150) = $2^3 . 3^2 . 5^2$

→ MMC (72, 150) = 1800

2) Decomposição simultânea em fatores primos

Neste método colocamos os números lado a lado e traçamos uma barra vertical à direita deles, como se estivéssemos fatorando esses números, o que realmente irá acontecer, só que simultaneamente. À direita da barra serão colocados os fatores primos ordenadamente que sejam divisores de ao menos um dos números à esquerda da barra. Em seguida devemos dividir os números à esquerda pelo fator colocado à direita, colocando-se os quocientes abaixo, dos números utilizados. Esse processo deve ser repetido até que os números à esquerda da barra sejam todos iguais a 1 (um), quando então, o MMC será obtido através do produto de todos os fatores encontrados à direita da barra.

Exemplo:

Determine o MMC (72, 150)

Resolução: Vamos montar o algoritmo para a obtenção do MMC, seguindo passo a passo as instruções anteriores:

$$\begin{array}{r@{\;,\;}r|l} 72 & 150 & 2 \\ 36 & 75 & 2 \\ 18 & 75 & 2 \\ 9 & 75 & 3 \\ 3 & 25 & 3 \\ 1 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Logo MMC (72, 150) = $2^3 . 3^2 . 5^2$

MMC (72, 150) = 1800

Observações:

1) O MMC de dois números primos entre si é igual ao produto deles.

Exemplo:

MMC (9, 10) = 9 x 10 = 90

MMC (32, 25) = 32 x 25 = 800

2) O MMC de dois números múltiplos é sempre o maior deles.

Exemplo:

MMC (20, 80) = 80

MMC (5x, 15x) = 15x

3) Os múltiplos comuns de dois ou mais números são os próprios múltiplos não negativos do MMC entre eles.

Exemplo:

Escreva o conjunto dos múltiplos comuns de 30 e 36.

NOTA: A partir de agora, neste capítulo, quando nos referirmos a múltiplos, fica subentendido que são os múltiplos não negativos.

Resolução: Primeiramente vamos determinar o MMC desses números.

$$\begin{array}{r@{\;,\;}r|l} 30 & 36 & 2 \\ 15 & 18 & 2 \\ 15 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

→ MMC (30, 36) = $2^2 . 3^2 . 5$

→ MMC (30, 36) = 180

De acordo com a observação, os múltiplos comuns de 30 e 36 são os múltiplos do seu MMC, mostrados no conjunto abaixo:

{0, 180, 360, 540, ...}

4) Quando multiplicamos ou dividimos dois ou mais números por um mesmo número diferente de zero, o MMC entre eles fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.

Exemplo:

Podemos calcular facilmente que: MMC (30, 40) = 120

→ Se multiplicarmos ambos os números, por exemplo, por 2, verifique que o MMC entre eles também fica multiplicado por 2.

MMC (60, 80) = 240

→ Se dividirmos esses números por 10, por exemplo, note que o MMC entre eles também fica dividido por 10.

MMC (6, 8) = 24

O que vem a confirmar a observação em questão!

5) O produto do MMC pelo MDC de dois números é sempre igual ao produto desses números.

$\boxed{\text{MDC (a, b) . MMC (a, b) = a . b}}$

Exemplo:

Tomemos como exemplo os números 20 e 50.

MDC (20, 50) = 10

MMC (20, 50) = 100

→ Observe que: 10 x 100 = 20 x 50

→ Ou seja: MDC (20, 50) x MMC (20, 50) = 20 x 50

6) **O MDC de dois números é sempre igual ao MDC entre a soma e o MMC desses números.**

$$\boxed{\text{MDC }(a, b) = \text{MDC }(a + b, \text{MMC }(a, b))}$$

Exemplo:

A soma de dois números é 30 e o MMC entre eles é 36. Determine o MDC desses números.

Resolução: Temos que:
a + b = 30 e MMC (a, b) = 36
→ Calculemos o MDC desses valores
MDC (a + b, MMC (a, b)) = MDC (30, 36) = 6
→ Assim, pela observação acima:
MDC (a, b) = MDC (a + b , MMC (a, b)) = 6

NOTA IMPORTANTE: Se um número N é divisível simultaneamente por vários números, então será divisível pelo MMC desses números.

Exemplos:

a) Se um número é divisível por 6 e 8, também será divisível por MMC (6,8) = 24.

b) Se um número é divisível por 20, então é divisível simultaneamente por 4 e 5, pois MMC (4,5) = 20.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine o MMC entre 126, 48 e 30.

2) Determine o MMC entre 200, 240 e 400.

3) Determine o MMC entre $A = 2^3 . 3^5 . 5^3$, $B = 2^2 . 3^4 . 7^3$ e $C = 3^2 . 5^2 . 11$.

4) Determine o MMC entre $A = 2^4 . 6^5$, $B = 2^3 . 5^4 . 7$ e $C = 2^2 . 10^5 . 77^2$.

5) O MMC entre dois números é 120. Determine o MDC entre eles, sabendo-se que um deles é o quádruplo do outro.

6) Um número é o triplo do outro. Sabendo-se que o MMC entre suas quintas partes vale 36, determine o MDC dos dobros dos números.

7) Sabendo-se que MDC (a, 36) = 2 e MMC (a, 36) = 180, determine o valor de **a**.

8) O produto do MDC pelo MMC entre dois números vale 432. Determine-os, sabendo-se que um é triplo do outro.

9) O MMC entre o dobro, o quádruplo e o óctuplo de um número vale 136. Quanto vale o MDC entre o triplo e o quíntuplo desse mesmo número?

10) O MMC entre dois números inteiros consecutivos é 156. Quais são esses números?

11) Determine o MMC entre dois números, sabendo-se que o produto deles é 1280 e o MDC vale 8.

12) Sabendo-se que o MDC (60, 38) = x e MMC (60, 38) = y, determine o valor de x . y.

13) O MMC entre os números $A = 2^2 . 3^4 . 5$ e $B = 2^4 . 3^2 . 7^x$ possui 200 divisores positivos. Determine o valor de x.

14) Determine a soma dos três menores múltiplos comuns positivos dos números 12, 50 e 36.

15) Determine o menor número que dividido por 18, 20 e 32 deixa sempre resto 9.

16) Determine o menor número que dividido por 24, 10 ou 27 deixa sempre resto 8.

17) Determine o menor número ao qual devemos somar 13 unidades para que ele fique simultaneamente divisível por 24, 18 e 30.

18) Determine o menor número que dividido por 40, 16 e 28, deixa restos respectivamente iguais a 26, 2 e 14.

19) Determine o menor número que dividido por 24, 36 e 30 deixa restos respectivamente iguais a 7, 19 e 13.

20) Determine os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 48 e 30 de modo a obter produtos iguais.

21) Para realizar um trabalho para sua escola, Esculápio comprou uma resma de papel. Após utilizar todas folhas, necessitou adquirir mais uma resma, da qual utilizou apenas algumas folhas. Sabe-se que se ele contar o total de folhas gastas de três em três dúzias, ou quatro em quatro dezenas, sempre sobram treze folhas. Quantas folhas Esculápio utilizou ao todo?

22) Uma luz estroboscópica verde pisca seis vezes por minuto, uma outra amarela pisca dez vezes por minuto, e uma terceira, vermelha pisca quatro vezes por minuto. Se as três piscaram juntas às 21 h, quantas vezes mais piscarão ao mesmo tempo até às 21 h 3 min 40 seg?

23) Em uma sala existem três fumantes. Um deles acende um cigarro de 20 em 20 minutos, outro o faz em 30 em 30 minutos e o terceiro acende um a cada 50 minutos. Se os três acenderam juntos cigarros às 17h30min, quando tal fato tornará a ocorrer pela próxima vez?

24) O cometa **A** é visto a olho nu da Terra de 72 em 72 anos, um outro cometa **B** é visível a cada 40 anos e um terceiro cometa **C** é visível a cada 90 anos. Se no ano de 1956 os três foram vistos a olho nu da Terra, em que ano tal fato tornará a ocorrer pela próxima vez?

25) Um construtor comprou certa quantidade de pregos maior do que 10000 e menor do que 11000. Qual o número de pregos adquiridos, sabendo-se que contando-os às centenas ou às grosas sobram sempre 84 pregos? (Nota: 1 grosa = 12 dúzias)

QUESTÕES DE CONCURSOS

26) **(CESGRANRIO)** O quociente entre o MDC e o MMC dos naturais a e b, primos entre si, é:

a) 1
b) ab
c) $\frac{a+b}{ab}$
d) $\frac{ab}{a+b}$
e) $\frac{1}{ab}$

27) **(EsPCEx)** Seja A o conjunto dos números naturais múltiplos de 6 e B o conjunto dos números naturais múltiplos de 21. Então, o conjunto A ç B é formado pelos múltiplos de que número natural?

28) **(CEFETEQ)** O cálculo do MDC entre dois números inteiros positivos, nos conduziu ao seguinte algoritmo:

	2	3	2	5	2
A	249	72	33	B	3
72	33	6	3	0	

Determine o MMC entre A e B.

29) **(ENEM)** Entre os primeiros mil números inteiros positivos, quantos são divisíveis pelos números 2, 3, 4 e 5?
a) 60
b) 30
c) 20
d) 16
e) 15

30) **(CEFET)** A soma dos valores absolutos dos algarismos de um número superior a 1010, inferior a 2010 e ao mesmo tempo múltiplo de 7, 11 e 13, é:
a) 2
b) 4
c) 5
d) 11
e) 22

31) **(CEFET)** Escreva na base 4, a soma dos valores absolutos de um número que é superior a 500, inferior a 1000, e é, ao mesmo tempo, múltiplo de 3; 11 e 13.

32) **(CEFETEQ)** O MMC de três números é formado exclusivamente pelos fatores primos 2, 3 e 7, todos com os mesmos expoentes. Dois dos números são 21 e 98. Achar o terceiro que não é divisível por 7.

33) **(EPCAR)** Assinale a alternativa correta.
a) Se $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ e $x \neq y \neq 1$ e se x e y são divisíveis por p, então p é o máximo divisor comum de x e y.
b) O máximo divisor comum de dois números naturais divide o seu mínimo múltiplo comum.
c) Se x e y são números primos, com $x > y > 2$, o máximo divisor comum de x e y é igual a x.
d) Se o conjunto dos múltiplos do número natural x é subconjunto do conjunto dos múltiplos do número natural y, então x não é múltiplo de y.

34) **(CEFET)** Se o MMC dos números inteiros $A = 2^k \times 15$ e $B = 4 \times 3^p$ é 360, então:
a) $k = 2p$
b) $k = p$
c) $k + p$ é ímpar
d) kp é múltiplo de 4
e) kp é múltiplo de 15

35) **(EPCAR)** Sabe-se que x, y e z são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = (x \cdot y \cdot z)^2$ e que o mdc (A, B) e o mmc (A, B) são, respectivamente, 21 e 1764.
Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui
a) 4 elementos.
b) 6 elementos.
c) 9 elementos.
d) 12 elementos.

36) **(CN)** Se mmc $(x, y) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ e mdc $(x, y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?
a) 16
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

37) **(CN)** O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre os naturais a, x e b, são respectivamente iguais a 1680 e 120. Sendo $a < x < b$, quantos são os valores de x que satisfazem essas condições?
a) Nenhum
b) Apenas um.
c) Apenas dois.
d) Apenas três.
e) Apenas quatro.

38) **(CN)**

$$
\begin{array}{ccc|c}
a, & b, & c & 2 \\
a, & x, & x & 2 \\
a, & x, & x & 2 \\
a, & x, & x & 3 \\
x, & x, & x & 3 \\
x, & x, & x & 3 \\
x, & x, & x & 5 \\
x, & x, & 1 & 7 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

No algoritmo acima, tem-se a decomposição simultânea em fatores primos dos números a, b e c, onde x está substituindo todos os números que são diferentes de a, b, c e 1.
I – a certamente é múltiplo de 36
II – b certamente é múltiplo de 30
III – c certamente é múltiplo de 35
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é falsa
b) Apenas a afirmativa II é falsa
c) Apenas a afirmativa III é falsa
d) Apenas as afirmativas II e III são falsas
e) As afirmativas I, II e III são falsas.

39) **(CM)** Um paciente foi submetido à medicação prescrita na receita abaixo:

Medicamento 1 ____________ 1 cx
Tomar 01 comprimido de 4 em 4 horas (15 dias)
Medicamento 2 ____________ 1 cx
Tomar 01 comprimido de 6 em 6 horas (15 dias)
Medicamento 3 ____________ 1 cx
Tomar 01 comprimido de 8 em 8 horas (15 dias)

Considerando que o paciente usou a medicação durante 15 dias completos a partir da 1ª dosagem tomando os 3 (três) comprimidos juntos (um comprimido de cada remédio), podemos afirmar que neste período ele tomou os três comprimidos juntos:
a) 15 vezes
b) 16 vezes
c) 17 vezes
d) 18 vezes

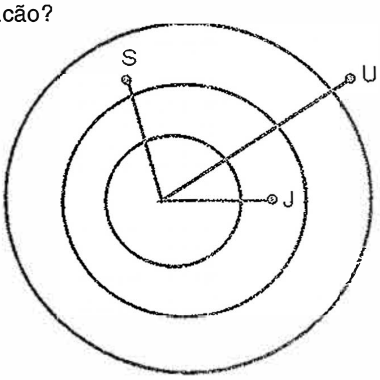
40) **(CEFET)** Ana e Paulo têm 2 filhos: Yasmin com 9 anos e Yan com 15 anos. Paulo é 5 anos mais velho do que Ana e a idade dele pode ser dividida exatamente pelas idades de seus filhos. A idade de Ana pode ser:
a) 40 anos;
b) 45 anos;
c) 27 anos;
d) 36 anos;
e) 30 anos.

41) **(CEFET)** Numa república hipotética, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo; os senadores, 6 anos e os deputados 3 anos. Nessa república, houve eleição para os três cargos em 1989.
A próxima eleição simultânea para esses três cargos ocorreu, novamente, em:
a) 1995
b) 1999
c) 2001
d) 2002
e) 2005

42) **(CEFET)** Na escola X há eleições para Diretor Geral de 6 em 6 anos; para Diretor de Ensino, de 4 em 4 anos e, para Coordenador, de 2 em 2 anos. No ano de 1990 foram feitas simultaneamente as 3 eleições. Em que ano ocorreram as 3 eleições simultâneas, pela primeira vez?

43) **(CEFET)** As revisões mecânica, elétrica e hidráulica de um dado equipamento devem ser realizadas respectivamente em intervalos de 6 meses, 4 meses e 8 meses. Iniciando-se a manutenção com uma revisão simultânea das três categorias em janeiro de 1996, estas três revisões coincidiram novamente em:
a) setembro de 1997;
b) janeiro de 1998;
c) janeiro de 1997;
d) fevereiro de 1998;
e) fevereiro de 1997.

44) **(UNICAMP)** Os planetas Júpiter, Saturno e Urano têm períodos de revolução em torno do Sol de aproximadamente 12, 30 e 84 anos, respectivamente. Quanto tempo decorrerá depois de uma observação para que eles voltem a ocupar simultaneamente as mesmas posições em que se encontravam no momento da observacão?



45) **(EsPCEx)** A tecelagem ALFA vende seus produtos para três clientes. O primeiro exige que as peças de tecido proporcionem cortes de 250 cm de comprimento, sem sobras. O segundo e o terceiro clientes exigem que as peças proporcionem cortes de 300 cm e 400 cm, respectivamente, também sem sobras. Determine o menor comprimento que deve ter uma peça de tecido, a fim de atender às exigências dos três clientes simultaneamente.

46) **(CPII)** Joaquim adora biscoitos e barras de cereais. Nas embalagens de seu biscoito preferido e sua barra de cereais preferida, estão as seguintes informações nutricionais:

Biscoito		
Porção de 26g (3 biscoitos)		
Quantidade por porção		%VD*
Valor calórico	117 kcal	6
Carboidratos	17 g	6
Proteínas	2,3 g	3
Gorduras totais	4,4 g	8
Gorduras saturadas	1,5 g	7
Gordura trans	0 g	**
Fibra alimentar	0,8 g	3
Sódio	203 mg	8
(*) Valores Diários de Referência com base em uma dieta de 2.000 kcal ou 8.400 Kj.		
(**) Valor Não Estabelecido.		

Barra de cereais		
Porção de 22g (1 barra)		
Quantidade por porção		%VD*
Valor calórico	84 kcal	4
Carboidratos	16 g	5
Proteínas	1,0 g	1
Gorduras totais	1,9 g	4
Gorduras saturadas	1,3 g	6
Gorduras trans	0 g	**
Fibra alimentar	0 g	0
Sódio	45 mg	2
(*) Valores Diários de Referência com base em uma dieta de 2.000 kcal ou 8.400 Kj.		
(**) Valor Não Estabelecido.		

Nos quadros acima, a coluna % VD* indica a porcentagem aproximada do valor diário sugerido baseado em uma dieta padrão. Por exemplo, o quadro da barra de cereais mostra que em uma barra há 16 g de carboidratos, o que equivale a aproximadamente 5% da quantidade total de carboidratos que deve ser consumida num dia. Observe que a tabela nutricional do biscoito considera uma porção de três biscoitos.

a) Joaquim comeu um número inteiro de unidades de seu biscoito favorito, atingindo a quantidade máxima de calorias possíveis, sem ultrapassar as 200 kcal sugeridas na embalagem. Determine quantos gramas de gorduras saturadas Joaquim ingeriu com esses biscoitos.

b) Joaquim quer comer um número x de biscoitos e um número y de barras de cereais de forma que as quantidades de kcal consumidas em cada alimento sejam iguais e as menores possíveis. Determine, nessas condições, os valores de x e de y.

47) **(EPCAR)** Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o terreno, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim, o elevador.
O para nos andares múltiplos de 11;
S para nos andares múltiplos 7;
C para nos andares múltiplos de 5; e
T para em todos os andares.
Todos esses elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação.
Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em V (verdadeira) ou F(falsa).
( ) No último andar para apenas 1 elevador.
( ) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.
( ) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores, com exceção do próprio terreno.
Tem-se a sequência correta em
a) F – V – V
b) F – V – F
c) V – F – V
d) F – F – V

48) **(CEFET)** No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luzes "piscam" com freqüências diferentes. A primeira "pisca", 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?
a) 12
b) 10
c) 20
d) 15
e) 30

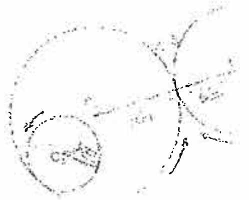
49) **(CN)** Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:
a) 110
b) 120
c) 150
d) 200
e) 300

50) **(CEFET)** Um garoto compra o lote de 3 laranjas ao preço de \$ 0,10. Se ele vende o lote de 5 laranjas por \$ 0,20 e pretende lucrar \$ 1,00, deverá vender:
a) 67 laranjas
b) 150 laranjas
c) 200 laranjas
d) 300 laranjas
e) 350 laranjas

51) **(UFRJ)** Uma escola deseja distribuir cadernos entre os seus 480 alunos, de forma que cada um deles receba o mesmo número de cadernos e não haja sobras. Os cadernos são adquiridos pela escola em pacotes de uma dúzia e meia cada.
Determine o número de pacotes que a escola deve adquirir para que cada aluno receba a menor quantidade possível de cadernos.

52) **(CM)** Para a realização de um concurso seletivo, foram inscritos entre 2000 e 2200 candidatos. Sabe-se que, se eles forem distribuídos somente em salas com capacidades para 40 candidatos cada uma, ou somente em salas com capacidade para 45 candidatos cada uma ou somente em salas com capacidade para 54 candidatos cada uma, sempre haverá necessidade de usar uma outra sala com apenas 20 candidatos, Com base nestas informações, pode-se concluir que o número de candidatos inscritos foi igual a:
a) 2020
b) 2100
c) 2126
d) 2160
e) 2180

53) **(EPCAR)** Os círculos abaixo têm centros fixos em C_1, C_2, C_3 e se tangenciam conforme a figura. Eles giram conforme a direção das setas, e não derrapam nos pontos de contato. Num certo momento, os pontos A e B das circunferências de centros C_1 e C_2 se encontram no ponto de tangência. A partir desse momento até A e B se encontrarem novamente, o número de voltas dadas pelo círculo de centro em C_3 é:
a) 11
b) $11\frac{1}{3}$
c) $11\frac{2}{3}$
d) 12



54) **(EPCAR)** Três alunos A, B e C participam de uma gincana e uma das tarefas é uma corrida em uma pista circular. Eles gastam para esta corrida, respectivamente, 1,2 minutos, 1,5 minutos e 2 minutos para completarem uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três alunos se encontram pela primeira vez no local de partida. Considerando os dados acima, assinale a alternativa correta.
a) Na terceira vez que os três se encontrarem, o aluno menos veloz terá completado 12 voltas.
b) O tempo que o aluno B gastou até que os três se encontraram pela primeira vez foi de 4 minutos.
c) No momento em que os três alunos se encontraram pela segunda vez, o aluno mais veloz gastou 15 minutos.
d) A soma do número de voltas que os três alunos completaram quando se encontraram pela segunda vez foi 24.

55) **(CEFETEQ)** Calcule o menor número que dividido sucessivamente por 12, 15, 18 e 22, deixa resto 7.

56) **(UERJ)** O número de fitas de vídeo que Marcela possui está compreendido entre 100 e 150. Grupando-as de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, sempre resta uma fita.
A soma dos três algarismos do número total de fitas que ela possui é igual a:
a) 3
b) 4
c) 6
d) 8

57) **(CM)** O menor número que dividido por 5 dá resto 4, dividido por 4 dá resto 3, dividido por 3 dá resto 2 e dividido por 2 dá resto 1, é:
a) 39
b) 49
c) 59
d) 79
e) 129

58) **(CN)** De uma determinada quantidade entre 500 e 1000 DVDs, se forem feitos lotes de 5 DVDs sobram 2; se forem feitos lotes com 12 sobram 9 e se forem feitos lotes com 14 DVDs sobram 11. Qual é a menor quantidade, acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra?
a) 6
b) 8
c) 9
d) 13
e) 15

59) **(CN)** Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3; resto 3 quando dividido por 7 e resto 19 quando dividido por 41. Qual é o resto da divisão do número K = (N + 1) (N + 4) (N + 22) por 861
a) 0
b) 13
c) 19
d) 33
e) 43

60) **(CN)** Se o MDC (a; b; c) = 100 e o MMC (a; b; c) = 600, podemos afirmar que o número de conjuntos de três elementos distintos a, b, e c é:
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

61) **(CN)** O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais **a** e **b** é 360 e a . b = 3600. Qual o menor valor que a + b pode assumir?
a) 120
b) 130
c) 150
d) 200
e) 370

62) **(CN)** O número N = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × (...) × (k-1) × k é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de k para que

$\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?
a) 133
b) 119
c) 113
d) 107
e) 105

GABARITO

1) 5040
2) 1200
3) $2^3 . 3^5 . 5^3 . 7^3 . 11$
4) $2^9 . 3^5 . 5^5 . 7^2 . 11^2$
5) 30
6) 120
7) 10
8) 12; 36
9) 17
10) 12; 13
11) 160
12) 2280
13) 3
14) 5400
15) 1449
16) 1088
17) 347
18) 546
19) 343
20) 5; 8
21) 733
22) 7
23) 22h 30min
24) 2316
25) 10884
26) E
27) 42
28) 570
29) D
30) B
31) $(111)_4$
32) 36
33) B
34) C
35) A
36) B
37) C
38) E
39) B
40) A
41) C
42) 2002
43) B
44) 420 anos
45) 60m
46) a) 25,5g
b) x = 28 e y = 13
47) A
48) A
49) E
50) B
51) 80
52) E
53) C
54) D
55) 1987
56) B
57) C
58) C
59) A
60) B
61) B
62) D

Frações

O conceito de fração é utilizado quando desejamos considerar algumas das diversas partes iguais em que um todo foi dividido.

$$\boxed{\text{FRAÇÃO} = \frac{N}{D}}$$

N é o **numerador** e representa o número de partes consideradas.
D é o **denominador** e representa o número de partes iguais em que um todo foi dividido.

Exemplo: A fração $\frac{2}{3}$ significa que estamos considerando duas das três partes iguais em que um todo foi dividido. Podemos representar tal fração pela figura abaixo, por exemplo:

Tipos de frações

1) **Fração Própria**
É aquela cujo numerador é menor do o denominador:

Exemplos:

$\frac{3}{4}; \frac{5}{11}; \frac{3}{9}$

2) **Fração Imprópria**
É aquela cujo numerador é maior ou igual ao denominador.

Exemplos:

$\frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{6}{6}$

3) **Fração Aparente**
É aquela cujo numerador é múltiplo do denominador.

Exemplos:

$\frac{11}{11}; \frac{30}{6}; \frac{40}{8}$

4) **Fração Decimal**
É aquela cujo denominador é uma potência de 10.

Exemplos:

$\frac{6}{100}; \frac{23}{10}; \frac{4573}{10000}$

5) **Fração Ordinária**
É aquela que não é decimal

Exemplos:

$\frac{5}{9}; \frac{31}{20}; \frac{7}{7}$

6) **Fração Irredutível**
É aquela em que denominador e o numerador são primos entre si.

Exemplos:

$\frac{7}{3}; \frac{4}{9}; \frac{35}{17}$

7) **Frações Equivalentes**

São aquelas associadas a uma mesma fração irredutível.

Exemplos:

$\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes, pois podem ser simplificadas à mesma fração irredutível $\frac{2}{3}$.

Número Misto

É aquele que mistura uma parte inteira a uma parte fracionária. Todo número misto é associado a uma fração imprópria.

Exemplo:

$5\frac{2}{3}$ ® lê-se: "cinco inteiros e dois terços"

$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

Transformação de uma fração imprópria em um número misto

Devemos dividir o numerador pelo denominador. O quociente será a parte inteira e o resto será o numerador.

Exemplo 1:

$\frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 28 & 9 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$

Exemplo 2:

$\frac{47}{5} = 9\frac{2}{5}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 47 & 5 \\ \hline 2 & 9 \end{array}$

Redução ao mesmo denominador

Neste caso, devemos calcular o MMC entre os denominadores.

Exemplo:

Seja reduzir as frações $\frac{3}{4}; \frac{7}{3}; \frac{6}{5}$ e $\frac{1}{10}$ ao mesmo denominador.
MMC (4, 3, 5, 10) = 60
Então:

$\frac{3}{4} \overset{\times 15}{=} \frac{45}{60}; \quad \frac{7}{3} \overset{\times 20}{=} \frac{140}{60}; \quad \frac{6}{5} \overset{\times 12}{=} \frac{72}{60}$ e $\frac{1}{10} \overset{\times 6}{=} \frac{6}{60}$

Comparação de frações

1) **Frações com mesmo denominador**
A maior fração é aquela que possui o maior numerador:

Exemplo:

$\frac{3}{10} < \frac{7}{10} < \frac{11}{10}$

2) **Frações com mesmo numerador**
A maior fração é aquela que possui o menor denominador:

Exemplo:

$$\frac{7}{2} > \frac{7}{3} > \frac{7}{10}$$

3) Frações com numeradores e denominadores diferentes

Neste caso devemos reduzir as frações ao mesmo denominador e proceder como no caso 1.

Operações com frações

1) Adição e Subtração

Só podemos adicionar ou subtrair frações que possuam o mesmo denominador. Neste caso, devemos conservar o denominador e adicionar ou subtrair os numeradores. Se as frações tiverem denominadores diferentes, antes devemos reduzi-las ao mesmo denominador:

Exemplos:

a) $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3+5-2}{7} = \frac{6}{7}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{45}{60} + \frac{40}{60} - \frac{48}{60} = \frac{45+40-48}{60} = \frac{37}{60}$

2) Multiplicação

Para multiplicarmos frações, devemos multiplicar os numeradores e multiplicar os denominadores. Para multiplicarmos uma fração por um número, devemos multiplicar apenas o numerador da fração por esse número.

Exemplo:

a) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$

b) $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

3) Divisão

Para efetuarmos a divisão entre duas frações, devemos multiplicar a primeira pelo inverso da segunda. Já para dividirmos um número por uma fração devemos multiplicar o número pelo inverso da fração. E, finalmente, para dividirmos uma fração por um número, devemos multiplicar a fração pelo inverso do número.

Exemplos:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

b) $\dfrac{4}{\frac{5}{7}} = 4 \times \frac{7}{5} = \frac{28}{5}$

c) $\dfrac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

4) Potenciação

Para elevarmos uma fração a um expoente, devemos elevar tanto o numerador como o denominador a esse expoente.

Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5) Radiciação

Para extrairmos a raiz de uma fração, devemos extrair a raiz tanto do numerador como do denominador.

Exemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Dentre as frações $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{10}, \frac{100}{3}, \frac{6}{6}, \frac{3}{50}, \frac{7}{1000}$ e $\frac{36}{4}$, determine:
a) a(s) própria(s).
b) a(s) imprópria(s).
c) a(s) aparentes(s).
d) a(s) decimal(is).
e) a(s) ordinária(s).

2) Coloque as frações $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2}$ em ordem crescente.

3) Na festa de aniversário de Tubério, seus amigos Anfilóquio, Tobias e Élbio comeram, respectivamente, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ do bolo. Se o restante do bolo foi comido pelo aniversariante, diga quais o mais e menos "gulosos" deles.

4) Três corredores partem juntos, do mesmo ponto, para uma corrida em distância. Após 20 minutos, constatou-se que o primeiro corredor havia percorrido $\frac{2}{3}$, o segundo $\frac{9}{16}$ e o terceiro $\frac{5}{8}$ do trajeto total. Pergunta-se: neste momento, qual dos três está mais próximo da linha de chegada?

5) Calcule $\frac{2}{3}$ de 600 azeitonas.

6) Determine $\frac{3}{4}$ dos $\frac{6}{5}$ dos $\frac{7}{12}$ de 120 caracóis.

7) Determine o valor da expressão: $\dfrac{3\frac{1}{4} \text{ de } \left(3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{5} \text{ de } \left(2 - \frac{3}{4}\right)}$.

8) Calcule o resultado de $4\frac{3}{4} - 6 \div 2 \,.\, 3$.

9) Que número devemos somar ao resultado de $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, para obtermos uma unidade?

10) Obter uma fração equivalente à fração $\frac{15}{20}$ cuja soma dos termos seja igual a 84.

11) Obter uma fração equivalente à fração $\frac{28}{35}$ cujo MMC dos termos seja igual a 100.

12) Determine frações equivalentes às frações $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{10}$ e $\frac{6}{5}$, de modo que o numerador da primeira, o denominador da segunda e o numerador da terceira sejam iguais.

13) Determine o valor de **x** de modo que a fração $\frac{17+x}{41+x}$ seja equivalente ao quadrado de uma fração irredutível cujos termos são dois números ímpares consecutivos.

14) Em um campeonato de futebol o jogador Bromário fez 21 gols, o equivalente a $\frac{3}{5}$ do número de gols marcado pelo jogador Bedmundo. Quantos gols marcou o segundo jogador?

15) Carlos só pode pagar $\frac{5}{12}$ de um dívida. Se possuísse mais $ 10.200,00 poderia pagar 70% desta mesma dívida. Quanto Carlos devia?

16) As despesas mensais de um funcionário são: $\frac{3}{5}$ do ordenado com aluguel de casa e $\frac{3}{4}$ do resto com outras obrigações. Além destes gastos, ainda tem que pagar $ 540,00 por mês de compras feitas pela esposa. Como seu ordenado não cobria todas essas despesas, o funcionário teve que fazer um empréstimo mensal de $ 200,00 até liquidar a dívida total da esposa. Qual o ordenado do funcionário?

17) Que dia é hoje, se à metade dos dias transcorridos desde o início do ano adicionarmos a terça parte dos dias que ainda faltam para o seu término, encontraremos o número de dias que já passou?

18) Azarildo foi assaltado por um ladrão "camarada", o qual, ao anunciar o assalto, pediu-lhe apenas $\frac{3}{7}$ da quantia que carregava no bolso. Se a nossa desafortunada vítima, após tal acontecimento, ainda ficou com $ 480,00, qual a quantia roubada?

19) Um pedreiro levanta um muro em 12 dias e um outro executa o mesmo serviço em 4 dias. Em quantos dias, os dois juntos, levantarão um muro idêntico?

20) Uma torneira enche um reservatório em 4 horas, enquanto que uma outra enche o mesmo reservatório em 6 horas. Estando o reservatório vazio, e abrindo-se as duas torneiras simultaneamente, em quanto tempo elas encherão juntas esse reservatório?

21) Uma torneira pode encher um reservatório em 6 horas e um ralo pode esvaziá-lo em 9 horas. Estando o reservatório vazio, abre-se, simultaneamente, a torneira e o ralo. Se esse reservatório é um paralelepípedo de altura 12 m, após 3 horas, a que altura se encontra o nível d´água em seu interior?

22) Uma torneira enche um tanque em 6 horas, uma outra torneira enche o mesmo tanque em 4 horas, já um ralo pode esvaziá-lo totalmente em 3 horas. Estando o tanque vazio, abrindo-se, ao mesmo tempo, as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque encherá?

23) Uma torneira enche um reservatório em 24 horas, uma outra em 36 horas e uma terceira o faz em x horas. Estando o reservatório vazio, abertas as três torneiras simultaneamente, ele enche totalmente após 8 horas. Determine o valor de x.

24) Após a morte de Aguiar, aberto o seu testamento, esta era a sua vontade: "Deixo $\frac{2}{5}$ de meu patrimônio, mais $ 3.000.000,00 para meu filho Edgar; deixo $\frac{2}{3}$ do resto, mais $ 6.000.000,00 para minha sogra Cascavélia e os $ 5.000.000,00 restantes deixo para o meu gato Mimi". Qual era o patrimônio de Aguiar?

25) Um sargento aplicou $\frac{1}{3}$ de suas economias na caderneta de poupança, $\frac{2}{5}$ em ações e os $ 1200,00 restantes deixou em sua conta corrente. Quanto ele aplicou em ações?

26) Para prestar uma prova de português tive que ler um certo livro em três dias: no primeiro dia li a metade do livro, no segundo dia li mais 32 páginas e no terceiro dia li o que faltava, ou seja, a quarta parte do livro. Adivinhe quantas páginas tinha esse livro.

27) Dona Benta comprou certo número de ovos na feira. Na volta para casa escorregou e um terço dos ovos se quebraram. Ao chegar a casa usou $\frac{3}{8}$ dos ovos restantes para fazer um bolo, e observou que sobraram ainda 20 ovos. Quantos ovos ela havia comprado?

28) Dona Maricota, é a eficiente secretária de dois ilustres advogados: Dr. Tancredo e Dr. Pascácio. Para melhor organizar os processos de seus patrões ela comprou uma certa quantidade de clips. Com os processos do Dr. Tancredo ela gastou $\frac{2}{9}$ dos clips e com os do Dr. Pascácio $\frac{17}{35}$ do restante. Se ainda sobrou uma grosa de clips, quantos clips ela comprou?

29) Adquiri uma bateria para meu celular da marca "TROQUIA", cuja autonomia era de 15 horas com o telefone ligado em "stand by" ou de duas horas e meia de conversação. Às 13 horas liguei o meu aparelho com a tal bateria totalmente carregada e às 19 horas ela descarregou completamente.
Durante quanto tempo eu falei nesse celular durante o período citado?

30) Um tonel está cheio de vinho. Tiram-se $\frac{2}{5}$ de sua capacidade, que são substituídos por água. Em seguida retiram-se os $\frac{2}{5}$ da mistura, substituindo-os por água. Sabe-se que a quantidade de vinho restante no tonel é inferior à metade de sua capacidade em 140 litros. Qual a capacidade desse tonel?

QUESTÕES DE CONCURSOS

31) **(CM)** Se a = 11/13, b = 5/7 e c = $\frac{2}{3}$, então é correto afirmar que:

a) a< b < c
b) a< c < b
c) b < c < a
d) c < a < b
e) c < b < a

32) **(CAP-UFRJ)** Em uma calculadora a tecla de divisão está quebrada. Se você precisasse dividir um número por 40 usando esta calculadora, deveria então multiplicá-lo por quanto?

33) **(CM)**Entre os números inteiros 1 e 100, existem quantas frações irredutíveis cujo denominador é 15?

a) 692
b) 792
c) 862
d) 992
e) 1562

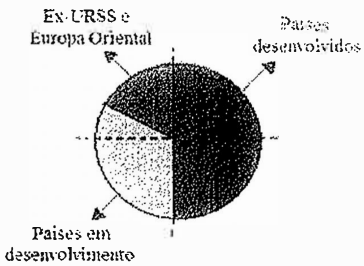
34) **(ENEM)** O Pantanal é um dos mais valiosos patrimônios naturais do Brasil. É a maior área úmida continental do planeta – com aproximadamente 210 mil km², sendo 140 mil km² em território brasileiro, cobrindo parte dos estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. As chuvas fortes são comuns nessa região. O equilíbrio desse ecossistema depende, basicamente, do fluxo de entrada e saída de enchentes. As cheias chegam a cobrir até $\frac{2}{3}$ da área pantaneira.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Durante o período chuvoso, a área alagada pelas enchentes pode chegar a um valor aproximado de

a) 91,3 mil km².
b) 93,3 mil km².
c) 140 mil km².
d) 152,1 mil km².
e) 233,3 mil km².

35)**(ENEM)** Dentre os resíduos industriais destaca-se a emissão de gás carbônico que causa o efeito estufa. O gráfico mostra como se distribuía a produção desse poluente em 1996.



Se a produção dos países desenvolvidos era de 3,2 bilhões de toneladas, a produção dos países em desenvolvimento, em bilhões de toneladas, deve ser estimada em cerca de:

a) 2,7
b) 2,1
c) 1,8
d) 1,5
e)1,2

36)**(ENEM)** O IDH procura refletir a qualidade vida dos cidadãos. No entanto, através de sua análise não é possível averiguar algumas desigualdades como é o caso, por exemplo, dos dados sobre trabalho feminino divulgados pela OIT (Organização Internacional do Trabalho). Segundo a organização, na década de 90 do Século XX, o trabalho feminino correspondeu a 2/3 do total de horas trabalhadas no planeta enquanto o trabalho masculino apenas 1/3. Com base nesses dados é válido afirmar que, em termos de horas trabalhadas, as mulheres trabalharam em relação aos homens:

a) a teça parte.
b) menos da metade.
c) a metade.
d) o dobro.
e)o triplo.

37) **(CM)** Nas disposições gerais do manual, folha 1, temos: "O Concurso destina-se a preencher as 40(quarenta) vagas para a 5ª Série do Ensino Fundamental e as 10 (dez) vagas para a 1ª Série do Ensino Médio do Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF)"
Os totais de candidatos inscritos aos concursos 2003/2004 e 2004/2005 foram os seguintes:

Concurso de Admissão ao CMJF			
Total de inscritos 2003/2004		Total de inscritos 2004/2005	
5ª Série	1ª Série	5ª Série	1ª Série
610	NÃO HOUVE CONCURSO	528	132

Fonte: Secretaria do Corpo de Alunos do CMJF

Analisando estes dados, podemos afirmar que:

a) dos totais de inscritos ao Concurso 2004/2005, ambas as séries poderão ter 5/66 dos seus respectivos candidatos matriculados em 2005 no CMJF.
b) mais de 10% dos candidatos à 5ª série, no Concurso 2004/2005, serão necessários para o preenchimento das 40 vagas.
c) para o preenchimento das 10 vagas para a 1ª série são necessários, no mínimo, 13% do total de candidatos inscritos ao Concurso 2004/2005.
d) o número de candidatos inscritos à 5ª série, no Concurso 2004/2005 reduziu 14% em relação ao total de inscritos ao Concurso 2003/2004.

38) **(ENEM)** Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição?
A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

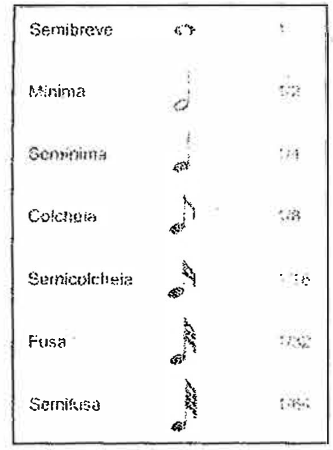
a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) *O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.*

39) **(ENEM)** A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for 1/2, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.
Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é 3/4, poderia ser preenchido com:
a) 24 fusas.
b) 3 semínimas.
c) 8 semínimas.
d) 24 colcheias e 12 semínimas.
e)16 semínimas e 8 semicolcheias.

40) **(CM)** Num jogo de vôlei entre dois times A e B, o time A fez x bloqueios e marcou pontos em 60% destes bloqueios, mais 3. O time B também fez x bloqueios e marcou pontos em 2/5 destes bloqueios, menos 2. O polinômio que representa a diferença entre os bloqueios que geraram pontos para o time A e os que geraram pontos para o time B é:

a) $x + 5$

b) $\frac{1}{5}x + 1$

c) $x + 1$

d) $\frac{1}{5}x + 5$

e) $\frac{1}{5}x - 5$

41) **(CN)** Um fabricante observou que tem condições de aumentar, mensalmente, a sua produção em 1/5 da produção do mês anterior. Considerando a condição dada, se, em janeiro de 2004, a sua produção for P, em que mês desse mesmo ano a sua produção será, pela primeira vez, maior ou igual a 2P?
a) Abril
b) Maio
c) Junho
d) Julho
e)Agosto

42) **(CM)** Em um determinado dia, foi contabilizado o número de adultos e crianças presentes em um parque de diversões. Sabendo-se que o número de adultos equivale a 2/3 do número de crianças e que havia 450 pessoas no local, pode-se afirmar que a quantidade de crianças presentes era de:
a) 180
b) 200
c) 270
d)290

43) **(CEFET)**Os amiguinhos Kaio, Pedro e Lucas dividiram, igualmente, uma quantidade Q de bolas de gude. Antes mesmo de começarem a jogar, chegou o amiguinho Vitor. Resolveram então dividir a quantidade Q, igualmente, entre os quatro. Sabendo que para realizar a divisão bastou que cada um dos três amiguinhos desse vinte e cinco (25) bolas para o Vitor, determine a quantidade Q.

44) **(UFRJ)** Uma fita de vídeo foi programada para gravar 6h. Quanto tempo já se passou, se o que resta para terminar a fita é $\frac{1}{3}$ do que já passou?

45) **(EPCAR)** Uma senhora vai à feira e gasta, em frutas, $\frac{2}{9}$ do que tem na bolsa. Gasta depois $\frac{3}{7}$ do resto em verduras e ainda lhe sobram $ 8,00. Ela levava, em reais, ao sair de casa:
a) 45,00
b) 36,00
c) 27,00
d) 18,00

46) **(EPCAR)** Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levara e Ana Beatriz $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levara.
Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela.
Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então, a soma dos algarismos de x é:
(a) 6
(b) 7
(c) 8
(d) 9

47) **(EPCAR)** No 1° ano do ensino médio de uma escola, 1/3 dos alunos têm menos de 14 anos, 1/4 dos alunos têm idade de 14 a 17anos, e os 80 alunos restantes têm mais de 18 anos. Com base nisso, pode-se afirmar que:
a) a escola possui mais de 200 alunos no 1° ano do ensino médio.
b) o total de alunos que têm de 14 a 17 anos é um número maior que 60
c) a escola possui 128 alunos com pelo menos 14 anos.
d) a diferença entre o número de alunos com mais de 18 anos e o número de alunos com menos de 14 anos é o dobro de 16

48) **(EPCAR)** Mateus ganhou 100g de "bala de goma". Ele come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 40 minutos ele terminou de comer todas as balas que ganhou. Lucas ganhou 60g de "bala delícia", e come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 1 hora, ele terminou de comer todas as balas. Considere que eles começaram a comer ao mesmo tempo.
Com base nessa situação, é **FALSO** afirmar que:

a) ao final de 26 minutos e 40 segundos Lucas e Mateus estavam com $\frac{100}{3}$g de balas cada um.
b) em 30 minutos Mateus comeu 75 g de balas.
c) quando Mateus terminou de comer as balas Lucas ainda tinha 25 g de balas.
d) ao final de 30 minutos Lucas ainda tinha 30 g de balas.

49) **(EPCAR)** Um caminhão-tanque com capacidade para transportar V litros faz a distribuição de óleo em três fábricas: a, b e g. Partindo com o tanque cheio, deixou 3/20 do total em a. Se em b deixou 5/17 do que restou e em g, os últimos 12.600 litros, então, pode-se afirmar que:
a) V é tal que 16.000 < V < 20.000
b) a fábrica a recebeu, em litros, um valor divisível por 9
c) a fábrica b recebeu, em litros, um valor maior que 6.000
d) a soma das quantidades recebidas pelas fábricas a e b é, em litros, um valor V' tal que 9.000 < V' <15.000

50) **(EPCAR)** Três blocos de gelo são tais que o volume do primeiro excede de 1/8 o do segundo, que por sua vez é 16/27 do volume do terceiro, entretanto, o volume desse terceiro bloco excede o volume do primeiro em 1.005 litros. Sabendo-se que o volume da água aumenta de 1/9 ao congelar-se, pode-se dizer que a quantidade de água necessária para obter esses três blocos de gelo é, em litros, um número compreendido entre
a) 6.100 e 6.200.
b) 6.090 e 6.099.
c) 6.000 e 6.089.
d) 5.900 e 5.999.

51) **(CM)** De uma cesta de mangas, o pai retira $\frac{1}{6}$ dessas mangas, a mãe $\frac{1}{5}$ do restante, os três filhos mais velhos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ dos restos sucessivos e o mais jovem as três mangas que sobraram. Qual o número de mangas existentes na cesta?
a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

52) **(CEFET)** Uma gráfica tem uma encomenda de 2.400 cartões de Natal. No 1° dia, foi fabricado $\frac{1}{4}$ do total da encomenda, tendo sido rejeitado pelo controle de qualidade $\frac{1}{3}$ desta produção. No 2° dia, foram fabricados mais $\frac{2}{5}$ do total da encomenda e rejeitados $\frac{5}{12}$ deste lote. Quantos cartões ainda faltavam para completar os 2.400, após o 2° dia?

53) **(EPCAr)** No concurso CPCAR, $\frac{1}{10}$ dos aprovados foi selecionado para entrevista com psicólogos, que deverá ser feita em 2 dias. Sabendo-se que 20 candidatos desistiram, não confirmando sua presença para entrevista, os psicólogos observaram que, se cada um atendesse 9 por dia, deixariam 34 jovens sem atendimento.
Para cumprir a meta em tempo hábil, cada um se dispôs, então, a atender 10 candidatos por dia.
Com base nisso, é correto afirmar que o número de aprovados no concurso
a) é múltiplo de 600.
b) é divisor de 720.
c) é igual a 3400.
d) está compreendido entre 1000 e 3000.

54) **(CM)** João Carlos selecionou para gravar alguns vídeo-clips que iam passar durante a semana na NTV. Como o seu videocassete possui três velocidades de gravações, programou o primeiro vídeo-clip para velocidade SP e a duração foi de 1 hora. O segundo vídeo-clip foi gravado na velocidade LP e o tempo de gravação foi de 1 hora. Hoje, ele precisa programar para gravar o terceiro vídeo-clip e quer utilizar a mesma fita dos dois programas anteriores. Usando a velocidade EP, o tempo de gravação que ainda resta é:
OBS.:velocidade SP: grava uma fita inteira em 2 horas
velocidade LP: grava uma fita inteira em 4 horas
velocidade EP: grava uma fita inteira em 6 horas
a) 4h
b) 3h
c) 2,5h
d) 1,5h
e) 0,5h

55) **(UNICAMP)** Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos; ao fim desse tempo fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x + 3 minutos. Calcule o tempo gasto para encher o tanque.

56) **(CM)** Uma torneira tem capacidade de encher um tanque em 5 horas. Outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Sabe-se que neste tanque existe um ralo que o esvazia em 2 horas. Estando o tanque vazio, abrimos as duas torneiras ao mesmo tempo. Após meia hora, abrimos também o ralo. O tempo que este tanque levará para transbordar será de:
a) 14,5 horas
b) 15 horas
c) 22 horas
d) 22,5 horas
e) 30 horas

57) **(EsPCEx)** Um tanque de combustível dispõe de duas torneiras que o enchem em 5 e 6 horas, respectivamente, e uma torneira de saída que o esvazia completamente em 3 horas. Estando o tanque totalmente vazio, se as três torneiras são abertas, simultaneamente, quantas horas são necessárias para encher o tanque?

58) **(CN)** Um tanque tem duas torneiras para enchê-lo. A primeira tem uma vazão de 6 litros por minuto e a segunda de 4 litros por minuto. Se metade do tanque é enchido pela 1ª torneira num certo tempo t_1, e o restante pela segunda em um certo tempo t_2, qual deveria ser a vazão, em litros, por minuto, de uma única torneira para encher completamente o tanque no tempo $t_1 + t_2$?
a) 4,5
b) 4,8
c) 5,0
d) 5,2
e) 5,8

59) **(EPCAR)** Um reservatório possui 4 torneiras. A primeira torneira gasta 15 horas para encher todo o reservatório; a segunda, 20 horas; a terceira, 30 horas e a quarta, 60 horas. Abrem-se as 4 torneiras, simultaneamente, e elas ficam abertas despejando água por 5 horas. Após esse período

fecham-se, ao mesmo tempo, a primeira e a segunda torneiras.

Considerando que o fluxo de cada torneira permaneceu constante enquanto esteve aberta, é correto afirmar que o tempo gasto pelas demais torneiras, em minutos, para completarem com água o reservatório, é um número cuja soma dos algarismos é:

a) par maior que 4 e menor que 10.
b) par menor ou igual a 4.
c) ímpar maior que 4 e menor que 12.
d) ímpar menor que 5.

GABARITO

1) a) $\frac{3}{4};\frac{5}{6};\frac{3}{50};\frac{7}{1000}$

b) $\frac{9}{7};\frac{11}{10};\frac{100}{3};\frac{6}{6};\frac{36}{4}$

c) $\frac{6}{6};\frac{36}{4}$

d) $\frac{11}{10};\frac{7}{1000}$

e) $\frac{3}{4};\frac{5}{6};\frac{9}{7};\frac{100}{3};\frac{3}{50};\frac{6}{6};\frac{36}{4}$

2) $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$

3) Tobias e Tubério
4) O 1°
5) 400 azeitonas
6) 63 caracóis
7) $\frac{65}{4}$
8) $\frac{17}{4}$
9) $\frac{2}{5}$
10) $\frac{36}{48}$
11) $\frac{20}{25}$
12) $\frac{60}{45};\frac{42}{60};\frac{60}{50}$
13) 8
14) 35
15) \$ 36.000,00
16) \$ 3.400,00
17) 26 de maio
18) \$ 360,00
19) 3
20) 2h 24 min
21) 2 m
22) 12h
23) 18h
24) \$ 60.000.000,00
25) \$ 1.800,00
26) 128
27) 48
28) 360
29) 1h 48 min
30) 1.000 litros
31) E
32) 0,025
33) B
34) C
35) B
36) D
37) A
38) A
39) D
40) D
41) B
42) C
43) 300
44) 4h 30 min
45) D
46) B
47) C
48) C
49) B
50) A
51) D
52) 1440
53) A
54) D
55) 15 min
56) D
57) 30
58) B
59) B

OBSERVAÇÕES

Números Decimais

Número decimal

É todo número composto de duas partes separadas uma da outra por vírgula.

Exemplo:

13,169

Parte inteira — parte decimal

Observação:
Toda fração decimal pode ser escrita sob a forma de número decimal

Exemplos:

a) $\frac{13}{10} = 1,3$

b) $\frac{13}{100} = 0,13$

c) $\frac{169}{1000} = 0,169$

Leitura de um número decimal

1) Lêem-se os inteiros
2) Lê-se a parte decimal, seguida da palavra
   - décimos → se houver uma casa decimal
   - centésimos → se houver duas casas decimais
   - milésimos → se houver três casas decimais
   - décimos de milésimos → se houver quatro casas decimais e assim por diante.

Exemplo:
13,634875 → Lê-se: "treze inteiros e seiscentos e trinta e quatro mil, oitocentos e setenta e cinco milionésimos."

Observação:
Se a parte inteira é nula, lê-se apenas a sua parte decimal, que recebe o nome da ordem que corresponde ao seu último algarismo da direita.

Exemplo:
0,136 → Lê-se: "cento e trinta e seis milésimos"

Transformação de fração decimal em número decimal

- Escreve-se o numerador da fração com tantas casas decimais quantos são os zeros do denominador.

Exemplo:

a) $\frac{13}{10} = 1,3$ (denominador 10 → uma casa decimal)

b) $\frac{13}{100} = 0,13$ (denominador 100 → duas casas decimais)

c) $\frac{1313}{1000} = 1,313$ (denominador 1000 → três casas decimais)

Transformação de um número decimal em fração decimal

Escreve-se como numerador o próprio número decimal, sem a vírgula, e como denominador o algarismo 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número.

Exemplos:

a) $1,3 = \frac{13}{10}$ (uma casa decimal → um zero)

b) $1,69 = \frac{169}{100}$ (duas casas decimais → dois zeros)

c) $0,013 = \frac{13}{1000}$ (três casas decimais → três zeros)

Comparação de números decimais

1° caso - Os números têm partes inteiras diferentes:
É maior aquele que tem a maior parte inteira.

Exemplo:
13,6 > 11,723, porque 13 > 11

2° caso - Os números têm as partes inteiras iguais:
Inicialmente iguala-se o número de casas decimais. É maior aquele que tem a maior parte decimal.

Exemplo:
13,6 > 13,321 → 13,600 > 13, 321, porque 600 > 321

Operações com números decimais

Adição e Subtração

1°) Iguala-se o número de casas decimais, acrescentando zeros.
2°) Coloca-se vírgula embaixo de vírgula.
3°) Adicionamos ou subtraímos como se fossem números naturais.

Exemplo:
a) 1,3 + 0,013 + 13,13 + 13

$$\begin{array}{r} 1,300 \\ 0,013 \\ 13,130 \\ +\ 13,000 \\ \hline 27,443 \end{array}$$

b) 13,1 – 0,1313

$$\begin{array}{r} 13,1000 \\ -\ 0,1313 \\ \hline 12,9687 \end{array}$$

Multiplicação

1°) Multiplicam-se os números decimais como se fossem números naturais (ou seja, ignoram-se as vírgulas).
2°) No resultado, coloca-se tantas casas decimais quanto for o total de casas decimais dos dois fatores juntos.

Exemplo:
12,3 x 0,032

$$\begin{array}{r} 12,3 \\ \times\ 0,032 \\ \hline 246 \\ 369 \\ \hline 0,3936 \end{array}$$

→ 1 casa decimal
→ 3 casas decimais +
4 casas decimais

Divisão

1°) Igualam-se as casas decimais dos dois números.
2°) Efetua-se a divisão como se os números fossem naturais.

Exemplo:
$3{,}6 \div 0{,}12 = 3{,}60 \div 0{,}12 = 360 \div 12 = 30$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}60 & 0{,}12 \\ \downarrow \times 100 & \downarrow \times 100 \\ 360 & 12 \\ 0 & 30 \end{array}$$

Observação:
Existem diferentes regras para efetuar uma divisão de números decimais. Porém, existe uma única que permite calcular facilmente o resto da divisão.
Pelo principio fundamental da divisão. Têm-se que

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r & q \end{array} \rightarrow \boxed{D = d \cdot q + r} \ (1)$$

Onde D é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto.
Por (1) pode-se concluir que o produto d . q e o resto r devem ter o mesmo número de casas decimais do dividendo D.
Observe o exemplo abaixo:

$$0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15 \rightarrow \underbrace{0{,}15}_{2\,casas} \div \underbrace{0{,}5}_{1\,casa} = \underbrace{0{,}3}_{+\ 1\,casa}$$

Daí, conclui-se que o dividendo tem tantas casas decimais quantas têm o divisor e o quociente reunidos.
Quando a divisão não é exata, o resto deve ter tantas casas decimais quantas tem o dividendo.

Observação:
Quando se pede para calcular o quociente de uma divisão de dois números decimais, deve-se indicar com quantas casas decimais se deseja o quociente.

Exemplo:
Dividir 0,6 por 0,11, tendo como quociente duas casas decimais. Determine também o resto dessas divisão.

Resolução:

1º) Prepara-se o dividendo de acordo com o número de casas decimais indicadas para o quociente, utilizando a seguinte regra:

Número de casas decimais do dividendo = Número de casas decimais do divisor + número de casas decimais do quociente

$$\underbrace{0{,}6000}_{4\,casas} \div \underbrace{0{,}11}_{=\ 2\,casas} = \underbrace{quociente}_{+\ 2\,casas}$$

2º) Divide-se como se fossem números naturais

$$\begin{array}{r|l} 6000 & 11 \\ 5 & 545 \end{array}$$

3º) Coloca-se o quociente com o número de casas decimais indicado e o resto com o número de casas decimais do dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}6000 & 0{,}11 \\ 0{,}0005 & 5{,}45 \end{array}$$

Observação 1: Prova real
Note que:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}6000 & 0{,}11 \\ 0{,}0005 & 5{,}45 \end{array} \rightarrow D = d \times q + r$$

$0{,}600 = 0{,}11 \times 5{,}45 + 0{,}0005$
$0{,}6000 = 0{,}5995 + 0{,}0005$
$0{,}6000 = 0{,}6000$

Observação 2: Quando não se indicar o número de casas decimais do quociente pedido, cabe a cada um fazer essa determinação (ou seja, escolher o quociente com 2 ou 3 casas decimais, por exemplo).

Observação 3: Obter um quociente com aproximação de:
- **a menos de 0,01:** significa quociente com duas casas decimais.
- **a menos de 0,001:** significa quociente com três casas decimais.

Dízimas periódicas

Um número decimal que apresenta repetição infinita de um grupamento de algarismos após a vírgula é chamado de **dízima periódica**.

Exemplo:
4,727272 ...; 83,4444 ...; 21,78313131 ...

Classificação das dízimas periódicas

Uma dízima periódica pode ser **simples** ou **composta**. Na dízima periódica simples, todo e qualquer algarismo após a vírgula se repete infinitamente, enquanto que no caso da composta, existe ao menos um algarismo que não se repete infinitamente após a vírgula.

Exemplos:
7,545454... é simples;
8,3333 ... é simples;
4,2111 ... é composta;
31,44787878 ... é composta

Geratriz de uma dízima periódica

Toda dízima periódica é equivalente a uma fração irredutível na qual ao dividirmos o numerador pelo denominador, obtemos a dízima em questão. A essa fração chamamos de **geratriz.**

Exemplo:

Consideremos a fração irredutível $\frac{17}{3}$. Se dividirmos 17 por 3, teremos:

$$\begin{array}{l|l} 17 & 3 \\ \ \ 20 & 5{,}666\ldots \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 20\ldots & \end{array}$$

Observe que a reação $\frac{17}{3}$ gerou a dízima 5,666 ..., logo é a sua geratriz.

E então: $\frac{17}{3} = 5{,}666\ldots$

Representação de uma dízima periódica

Podemos escrever uma dízima periódica de uma forma simplificada. Para isto devemos colocar uma **barra** sobre o grupamento que se repete após a vírgula, ou ainda colocar tal grupamento entre parênteses.

Exemplos:

$4{,}525252\ldots = 4{,}\overline{52} = 4{,}(52)$

$3{,}17666\ldots = 3{,}17\overline{6} = 3{,}17(6)$

Partes de uma dízima periódica

A parte vem antes da vírgula é chamada de **parte inteira.** A parte que vem após a vírgula e se repete infinitamente é a

parte periódica ou **período**. No caso da dízima periódica composta, a parte que vem após a vírgula e não se repete infinitamente é a **parte não periódica** ou **anteperíodo.**

Exemplos:

$4{,}585858... = 4,\overline{58}$ $\begin{cases}\text{parte inteira} = 4\\ \text{parte periódica} = 58\end{cases}$

$73{,}297777... = 73{,}29\bar{7}$ $\begin{cases}\text{parte inteira} = 73\\ \text{parte não periódica} = 29\\ \text{parte periódica} = 7\end{cases}$

Cálculo da geratriz de uma dízima periódica simples

Devemos escrever a parte inteira seguida da parte periódica, menos a parte inteira, sobre tantos noves quantos forem os algarismos do período.

Exemplo:
Obter as geratrizes das dízimas:

a) $5{,}44444... = 5,\bar{4} = \frac{54-5}{9} = \frac{49}{9}$

b) $3{,}717171... = 3,\overline{71} = \frac{371-3}{99} = \frac{368}{99}$

Cálculo da geratriz de uma dízima periódica composta

Devemos escrever a parte inteira seguida da parte não periódica seguida da parte periódica, menos a parte inteira seguida da parte não periódica, sobre tantos noves quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos do anteperíodo.

Exemplos:
Obter as geratrizes das dízimas:

a) $2{,}5838383... = 2{,}5\overline{83} = \frac{2583-25}{990} = \frac{2558}{990} = \frac{1279}{495}$

b) $1{,}332222... = 1{,}33\bar{2} = \frac{1332-133}{900} = \frac{1199}{900}$

Observações:

1) No caso de uma decimal exata (número decimal finito), para escrevê-la sob a forma de fração, devemos escrever a parte inteira seguida da parte decimal, sobre o número 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais, como visto no capítulo anterior.

Exemplos:

a) $5{,}7193 = \frac{57193}{10000}$

b) $8{,}777 = \frac{8777}{1000}$

2) Toda dízima periódica de período 9, aumenta o algarismo imediatamente anterior a ele de uma unidade.

Exemplos:

a) $17{,}9999... = 17,\bar{9} = 18$

b) $43{,}759999... = 43{,}75\bar{9} = 43{,}76$

3) Quando o denominador de uma fração irredutível tiver apenas os fatores 2 e/ou 5, ela vai gerar uma decimal exata com tantas casas decimais quanto o maior entre os expoentes desses fatores 2 e/ou 5.

Exemplo:

a) $\frac{7}{2000} = \frac{7}{2^4 \times 5^3}$: vai gerar uma decimal exata com 4 casas decimais.

Observe que $\frac{7}{2000} = 0{,}0035$, o que confirma a nossa previsão.

b) $\frac{11}{64} = \frac{11}{2^6}$: vai gerar uma decimal exata com 6 casas decimais.

Conferindo: $\frac{11}{64} = 0{,}171875$

4) Quando o denominador de uma fração irredutível só tiver fatores diferentes de 2 e de 5, ela vai gerar uma dízima periódica simples. Neste caso, não podemos determinar com exatidão a quantidade de algarismos do período, porém podemos prever um conjunto de possíveis valores dessa quantidade. Assim, dada uma fração irredutível de denominador N, que não possui nem o fator 2 e nem o fator 5, a dízima periódica simples por ela gerada terá no período uma quantidade de algarismos igual a um dos divisores positivos do número que expressa a quantidade de números primos com N, menor que ele (ver fórmula de Euller no Capítulo 6).

Portanto, isto é, uma regra que nos permite ter os hipotéticos números de algarismos do período, já que a quantidade real só será conhecida se efetuarmos a divisão do numerador pelo denominador.

Exemplos:

a) $\frac{5}{7}$: vai gerar uma dízima periódica simples. Para obtermos os possíveis números de algarismos do período, vamos em primeiro lugar determinar a quantidade de números primos com 7, menores que ele (fórmula de Euller):

$\varnothing(7) = 7 \cdot \left(\frac{7-1}{7}\right) = 7 \cdot \frac{6}{7} = 6$

Os possíveis números de algarismos do período serão os divisores positivos de 6 (ver Capítulo 4), que são: 1, 2, 3 ou 6.

Fazendo-se a conta, temos que $\frac{5}{7} =$ 0,714285714285..., o que confirma a nossa previsão, pois há 6 casas no período. Note que se a fração é irredutível, o numerador não interfere no número de casas do período. Assim, qualquer fração irredutível de denominador 7 gerará uma dízima periódica simples com 6 casas no período.

b) $\frac{4}{117} = \frac{4}{3^2 \times 13}$

$\varnothing(117) = 117 \cdot \left(\frac{3-1}{3}\right) \cdot \left(\frac{13-1}{13}\right) = 117$

A fração $\frac{4}{117}$ vai gerar uma dízima periódica simples com uma quantidade de algarismos que pode ser igual a 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ou 72 (divisores positivos de 72).

5) Quando uma fração irredutível tiver um denominador com fatores 2 e/ou 5 e ao menos um outro fator, ela vai gerar uma dízima periódica composta com tantos algarismos na parte não periódica quanto for o maior entre os expoentes dos fatores 2 e/ou 5. Já o número de algarismos do período pode ser analisado de forma análoga à observação número 4, desde que desconsideremos os fatores 2 e/ou 5, nos preocupando

apenas com os demais fatores.

Exemplos:

a) $\frac{31}{220} = \frac{31}{2^2 x 5 x 11}$: vai gerar uma dízima periódica composta com 2 algarismos na parte não periódica e com período que poderá ter 1, 2, 5 ou 10 algarismos.
[Lembre que Ø (11) = 10]

b) $\frac{1}{5250} = \frac{1}{2x3x5^3x7}$: vai gerar uma dízima periódica composta com 3 algarismos na parte não periódica e com 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 algarismos no período.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Transforme em fração irredutível cada um dos números decimais abaixo:
a) 1,444...
b) 2,363636...
c) 4,030303...
d) 3,444...
e) 1,212121...
f) 4,7333...
g) 6,21252525...
h) 3,14999...
i) 3,777
j) 52,00414141...
l) 4,7999...
m) 8,999...

2) Calcule o valor da expressão $\frac{0{,}777...\times 1{,}2}{1{,}555...\times 1{,}44} + \frac{3{,}4 \div 5}{\frac{2}{3} \div \frac{9}{18}}$

3) Resolva as expressões:

a) $1{,}2333... \div \frac{37}{40} + 0{,}777... \times \frac{3}{2} - \frac{60}{41} \times 1{,}3666...$

b) $0{,}3222... \times \frac{30}{29} + 0{,}\overline{3} + 0{,}(6) + \frac{0{,}\overline{45}}{\frac{3}{11}}$

c) $3{,}5 + 2{,}1666... + 0{,}444... \div \frac{5}{9}$

4) Que tipo de número decimal cada uma das frações abaixo gerará?

a) $\frac{3}{80}$

b) $\frac{11}{512}$

c) $\frac{2}{13}$

d) $\frac{1}{420}$

5) A fração $\frac{7}{2^x \times 11^y}$ gera um decimal exato com 6 casas decimais.
Determine os valores de x e y.

6) A fração $\frac{1}{2^x \times 5^y \times 7^z}$ gera uma dízima periódica simples com no máximo 42 algarismos no período, calcule x, y e z.

QUESTÕES DE CONCURSOS

7) **(E.E.Aer)** O valor da expressão:

$0{,}04 \times \left[\left(1 - 4{,}8 : 24\right) + \frac{15}{100}\right]$ é:

a) $\frac{38}{100}$

b) $\frac{19}{500}$

c) 1

d) 38

8) **(PUC)** O valor de $\sqrt{2{,}777...}$ é:
a) 1,2
b) 1,666...
c) 1,5.
d) Um número entre $\frac{1}{2}$ e 1.
e) 3,49.

9) **(PUC)** O valor de $\frac{\sqrt{1{,}777...}}{\sqrt{0{,}111...}}$ é:
a) 4,444...
b) 4
c) 4,777...
d) 3
e) $\frac{4}{3}$

10) **(CM)** Qual é o valor de m na proporção
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

11) **(E.E.Aer)** Qual o valor da expressão

$\frac{1}{3} - \left\{2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 : 0{,}001\right] + 1 - 0{,}333...\right\}$?

a) $\frac{19}{24}$

b) $-\frac{339}{12}$

c) $\frac{319}{24}$

d) $\frac{347}{12}$

12) **(CEFETEQ)** Resolva a expressão abaixo, apresentando a resposta na forma mais simples.

$$\frac{4 + 0{,}333... : \frac{10}{3} + \frac{59}{10}}{\frac{10}{7} \times 0{,}2}$$

13) **(CEFET)** Assinale o valor mais próximo do número

$$\frac{3\frac{1}{2} : 2 + 4{,}45 : 11{,}333...}{0{,}28333... \times 60}$$

a) $\frac{1}{289}$

b) $\frac{9}{289}$

c) $\frac{125}{100}$

d) 0,125

e) 9

14) **(CM)** Na expansão decimal de 5/39, o 2007° algarismo depois da vírgula é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 5
e) 8

15) **(CN)** Dados os números

$A = 0{,}273849\overline{51}$

$B = 0{,}\overline{27384951}$

$C = 0{,}2738\overline{4951}$

$D = 0{,}27384\overline{951}$

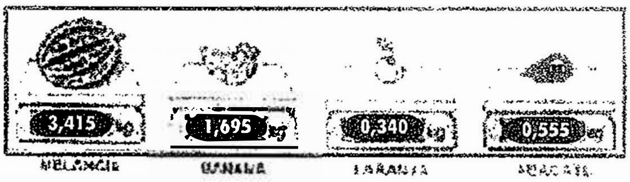
$E = 0{,}27384\overline{951}$

F = 0,2738495127989712888...

Podemos afirmar que:

a) A > F > E > C > D > B
b) A > F > B > D > C > E
c) F > C > D > B > A > E
d) B > C > A > F > E > D
e) E > A > C > D > F > B

16) **(CM)** Veja as massas das frutas marcadas na balanças:



Calcule quantos quilogramas tem a melancia, a penca de bananas e o abacate, juntos.

a) 6,005 kg
b) 5,45 kg
c) 5,99 kg
d) 5,665 kg

17) **(ENEM)** Em quase todo o Brasil existem restaurantes em que o cliente, após se servir, pesa o prato de comida e paga o valor correspondente, registrado na nota pela balança. Em um restaurante desse tipo, o preço do quilo era R$ 12,80. Certa vez a funcionária digitou por engano na balança eletrônica o valor R$ 18,20 e só percebeu o erro algum tempo depois, quando vários clientes já estavam almoçando. Ela fez alguns cálculos e verificou que o erro seria corrigido se o valor incorreto indicado na nota dos clientes fosse multiplicado por:

a) 0,54
b) 0,65
c) 0,70
d) 1,28
e) 1,42

18) **(CM)** Para avaliar se uma pessoa é obesa ou não, calcula-se o Índice de Massa Corporal (IMC), que é o número obtido dividindo-se a massa corporal "peso" (em quilogramas), pelo quadrado da altura. Quem tem esse índice superior a 30 é obeso. A reportagem abaixo foi extraída e adaptada da revista Veja.

Laudo diz que o guru do emagrecimento morreu acima do peso e com o coração em mau estado.

O laudo preparado por médicos legistas de Nova York registra que o corpo de Robert Atkins pesava 117 quilos. A divulgação do documento na semana passada, dez meses depois da morte do médico americano, aos 72 anos, teve a repercussão de uma explosão nuclear no mundo dos regimes de emagrecimento. Significa que o guru das dietas morreu com 27 quilos acima do peso considerado ideal para seu 1,82 metro de altura.

Baseando-se nessas informações, calculamos o IMC de Robert Atkins, e encontramos:

a) 32
b) 33
c) 34
d) 35

19) **(ENEM)** Para dificultar o trabalho de falsificadores, foi lançada uma nova família de cédulas do real. Com tamanho variável – quanto maior o valor, maior a nota – o dinheiro novo terá vários elementos de segurança. A estreia será entre abril e maio, quando começam a circular as notas de R$ 50,00 e R$ 100,00.

As cédulas atuais têm 14 cm de comprimento e 6,5 cm de largura. A maior cédula será a de R$ 100,00, com 1,6 cm a mais no comprimento e 0,5 cm maior na largura.

Disponível : http://br.noticias.yahoo.com.
Acesso em: 20 abr. 2010 (adaptado)

Quais serão as dimensões da nova nota de R$ 100,00?

a) 15,6 cm de comprimento e 6 cm de largura.
b) 15,6 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
c) 15,6 cm de comprimento e 7 cm de largura.
d) 15,9 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
e) 15,9 cm de comprimento e 7 cm de largura.

20) **(CM)** Além de esbanjar alegria e samba no pé, os carnavalescos precisam seguir regras rígidas que serão analisadas por uma comissão julgadora.

As regras determinam, entre outras coisas, que o desfile deve durar de 65 a 80 minuto (desconta-se 0,2 ponto por minuto a mais ou a menos). A bateria tem de ter pelo menos 200 ritmistas e a ala das baianas, 100 integrantes (a escola perde meio ponto em cada quesito se esses números forem menores). Devem desfilar de cinco a oito carros alegóricos e a comissão de frente precisa ser composta por dez a 15 pessoas (mais ou menos que isso vale 1 ponto a menos em cada item).

Uma falta grave é desobedecer o item que proíbe mestre-sala, porta-bandeira, mestre de bateria, puxador e comissão de frente de participar de outro desfile, mesmo fora do estado. A bancada pode tirar até 2 pontos da agremiação e suspender o infrator por três anos.

Uma escola de samba do Rio de Janeiro apresentou seu desfile em 83 minutos, pois um dos 5 carros alegóricos quebrou e não entrou no desfile. Além disso, na ala das baianas faltou uma das 100 integrantes e a porta-bandeira participou de outro desfile no estado de São Paulo.

Essa escola de samba perdeu por tais faltas, na sua pontuação geral, o máximo de:

a) 3,1 pontos
b) 3,7 pontos
c) 4,1 pontos
d) 4,7 pontos

21) **(ENEM)** O gás natural veicular (GNV) pode substituir a gasolina ou álcool nos veículos automotores. Nas grandes cidades, essa possibilidade tem sido explorada, principalmente, pelos táxis, que recuperam em um tempo relativamente curto o investimento feito com a conversão por meio da economia proporcionada pelo uso do gás natural. Atualmente,a conversão para gás natural do motor de um automóvel que utiliza a gasolina custa R$ 3.000,00. Um litro de gasolina permite percorre cerca de 10 km e custa R$ 2,20, enquanto um metro cúbico de GNV permite percorrer cerca de 12 km e custa R$ 1,10. Desse

modo, um taxista que percorra 6.000 km por mês recupera o investimento da conversa em aproximadamente:
a) 2 meses
b) 4 meses
c) 6 meses
d) 8 meses
e)10 meses

22) **(CN)** Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros.
a) o quociente é sempre inteiro.
b) o resto é sempre inteiro.
c) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
d) os possíveis valores para resto têm uma quantidade limitada de valores.
e) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

23) **(CN)** O resultado da divisão de 7^{12} por 6, é um número
a) inteiro
b) com parte decimal finita
c) com parte decimal infinita periódica simples
d) com parte decimal infinita periódica composta
e)com parte decimal infinita e não periódica

24) **(CN)** Sobre o número $\frac{1937}{8192}$ podemos afirmar que é:
a) uma dízima periódica simples
b) uma dízima periódica composta
c) um decimal exato com 12 casas decimais
d) um decimal exato com 13 casas decimais
e) um decimal exato com 14 casas decimais

25) **(CN)** A representação decimal do número $(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c)^{-1}$, sendo a, b e c números naturais, é uma dízima periódica composta. Sendo assim, pode-se afirmar que, necessariamente.
a) $a = 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$
b) $a \neq 0, b \neq 0$ e $c = 0$
c) $a \neq 0, b = 0$ e $c \neq 0$
d) $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $b \neq 0$
e) $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$

26) **(CN)** Determine os denominadores das frações ordinárias irredutíveis que convertidas em decimais, dão origem a uma dízima periódica composta com um algarismo na parte não periódica e um algarismo no período.

27) **(CN)** Um número natural N é formado por dois algarismos. Colocando-se um zero entre esses dois algarismos, N aumenta de 270 unidades. O inverso de N dá uma dízima com 2 algarismos na parte não periódica. A soma dos algarismos de N é:
a) 5
b) 7
c) 8
d) 9
e) 11

28) **(CN)** Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível 5/7 e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?
a) 11
b) 12
c) 14
d) 15
e) 17

GABARITO

1) a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{26}{11}$ c) $\frac{133}{33}$ d) $\frac{31}{9}$ e) $\frac{40}{33}$ f) $\frac{71}{15}$

g) $\frac{15376}{2475}$ h) $\frac{63}{20}$ i) $\frac{3777}{1000}$ j) $\frac{514841}{9900}$ l) $\frac{24}{5}$

m) 9

2) $\frac{139}{150}$

3) a) $\frac{1}{2}$ b) 3 c) $\frac{97}{15}$

4) a) decimal exata com 4 casas decimais.
b) decimal exata com 9 casas decimais.
c) dízima periódica simples com 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 algarismos no período.
d) dízima periódica composta com 2 algarismos no anteperíodo e com 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 algarismos no período.
5) $x = 6$ e $y = 0$
6) $x = 0, y = 0$ e $z = 2$
7) B
8) B
9) B
10) C
11) D
12) 35
13) D
14) E
15) E
16) D
17) C
18) D
19) C
20) C
21) B
22) D
23) D
24) D
25) D
26) 6; 15; 18; 45; 90
27) D
28) C

OBSERVAÇÕES

Razões e Proporções

Razão

É uma relação entre duas grandezas, expressas na mesma unidade ou não.

Razão: $\frac{a}{b}$ ou **a : b**

Lê-se: "a está para b"

Onde **a** é o **antecedente** e **b** é o **consequente**.

A diferença entre **razão** e **fração** é muito sutil, o que leva a uma confusão por parte dos alunos. Vamos mostrar, com dois exemplos, a aplicação correta de cada um dos conceitos.

1° Exemplo:
Consideremos que José possua três bolas de gude, enquanto que Pedro possui 4 bolas de gude. A razão (relação) entre os números de bolas de gude de José para Pedro é de **"3 para 4"** ou $\frac{3}{4}$.

2° Exemplo:
Tomemos uma barra de chocolate. Vamos dividi-la em 4 partes iguais. Se eu comer 3 dessas partes, estarei comendo a fração **"três quartos"** ou seja $\frac{3}{4}$ dessa barra de chocolate.

Podemos observar que no 1° exemplo a notação $\frac{3}{4}$ expressou uma comparação entre duas grandezas (números de bolas de gude). Já no 2° exemplo a mesma representação $\frac{3}{4}$ foi utilizada para indicar que "um todo" (barra de chocolate) foi dividido em 4 quatro parte, das quais três foram consideradas.

Se tal explicação não chegou a convencer o leitor, ao menos fica o consolo de que as propriedades operatórias das razões e das frações são similares, não influenciando na resolução dos exercícios se o aluno sabe ou não distinguir a diferença entre elas.

Escalas

Quando um arquiteto faz a planta de um prédio, obviamente que ele não pode fazê-lo em verdadeira grandeza, por isso ele faz uma redução proporcional das medidas reais para que seja possível representá-las nessa planta. Essa redução segue um parâmetro definido pelo arquiteto mas, para que haja o entendimento de todos, inclusive dos leigos, é necessário que ele seja divulgado. Esse parâmetro é chamado de **escala.** A escala é a relação (razão) entre as medidas na planta e no objeto real.

$$\boxed{\text{ESCALA} = \frac{\text{MEDIDA NA PLANTA}}{\text{MEDIDA REAL}}}$$

1° Exemplo:
Qual a escala utilizada em um mapa no qual a distância entre as cidades A e B é de 4 cm, enquanto que a distância real é de 100 km?

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{PLANTA}}{\text{REAL}} = \frac{4\text{ cm}}{100\text{ km}} = \frac{4\text{ cm}}{10000000\text{ cm}}$$

$$\text{ESCALA} = \frac{1}{2500000} = 1 : 2500000$$

2° Exemplo:
Um poste com 6 m de altura teria que tamanho em um desenho feito com uma escala de 1:200?

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{PLANTA}}{\text{REAL}} \Rightarrow \frac{1}{200} = \frac{x}{6\text{m}}$$

$$x = \frac{6\text{ m}}{200} = \frac{600\text{ cm}}{200} = 3\text{ cm}$$

Proporção

É uma igualdade entre razões equivalentes (ver frações equivalentes).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou **a:b = c:d** ou **a:b::c:d**

lê-se: "a está para b, assim como c está para d"

Temos que **a** e **d** são os extremos, enquanto que **b** e **c** são os meios. Podemos dizer ainda que **a** e **c** são os antecedentes e **b** e **d** são os consequentes.

Relação fundamental das proporções

"Em toda proporção o produto dos meios é sempre igual ao produto dos extremos."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

Exemplo:
Em uma proporção, os antecedentes da primeira e da segunda razões são respectivamente iguais a 2 e 6, enquanto que o consequente da segunda razão vale 15. Calcule o consequente da primeira razão.

Resolução:

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{15} \quad \rightarrow \quad 6 . x = 2 . 15$$

$$6x = 30$$

$$x = 5$$

Proporção contínua

É aquela que possui os meios ou os extremos iguais. É usual, caso o problema não estabeleça o contrário, considerarmos em uma proporção contínua que os meios sejam iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

Quando nem os meios nem os extremos são iguais, a proporção é **não contínua.**

Exemplos:

a) $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ → proporção contínua

b) $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$ → proporção contínua

c) $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$ → proporção não contínua

Quarta proporcional

É o quarto termo de uma proporção não contínua.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o número **d** é a **quarta proporcional** entre **a, b** e **c,** nesta ordem.

Exemplo:

Determine a quarta proporcional entre os números 4; 20 e 5.

Resolução:

$$\frac{4}{20} = \frac{5}{x} \rightarrow 4 \cdot x = 5 \cdot 20$$

$$4x = 100$$
$$x = 25$$

Terceira proporcional

É o terceiro termo diferente de uma proporção contínua.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número **c** é a **terceira proporcional** entre **a** e **b**, sendo **b** a média (termo repetido).

Exemplo:

Determine a terceira proporcional entre os números 6 e 12.

Resolução:

$$\frac{6}{12} = \frac{12}{x} \rightarrow 6 \cdot x = 12 \cdot 12$$
$$6x = 144$$
$$x = 24$$

Média geométrica ou proporcional

É o termo que se repete em uma proporção contínua. Cabe ressaltar que, salvo em contrário, os termos que se repetem são os meios.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número **b** é a **média geométrica** ou **proporcional** entre **a** e **c**.

Exemplo:

Determine a média geométrica entre os números 2 e 50.

Resolução:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{50} \rightarrow x \cdot x = 2 \cdot 50$$

$$x^2 = 100$$
$$x = 10$$

NOTA: Tal cálculo também poderá ser feito seguindo o que será estudado no capítulo sobre médias (Capítulo 14)

Propriedades das proporções

1) "Uma proporção não se altera quando alternamos seus meios, seus extremos ou meios e extremos simultaneamente."

Exemplo:

Dada a proporção: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

→ Alternando os meios: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

→ Alternando os extremos: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$

→ Alternando meios e extremos: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Podemos observar que a proporcionalidade não se alterou.

2) "Em toda proporção a soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma ou a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \nearrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \searrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Exemplo:

Na proporção: $\frac{15}{20} = \frac{9}{12}$, podemos escrever:

→ $\frac{15+9}{20+12} = \frac{24}{32} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12}$ (verifique que é uma proporção)

→ $\frac{15-9}{20-12} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12}$ (verifique que é uma proporção)

3) "Em toda proporção o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado do seu consequente."

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2}$$

Exemplo:

Na proporção: $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$, temos que:

→ $\frac{4 \cdot 10}{6 \cdot 15} = \frac{40}{90} = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{10}{15}\right)^2$ (verifique que é uma proporção)

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine a razão entre 48 pirulitos e 156 pirulitos.

2) Determine a razão entre o número de dias de um ano bissexto e a soma dos números de dias dos meses de março, abril, maio e junho, deste mesmo ano.

3) Determine a razão entre os números 1,212121... e 2,3424242...

4) Determine o valor de x na proporção 2 : x :: 6 : 24.

5) Determine o valor de x na proporção $\frac{2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{16}{81}}} = \frac{x}{0{,}333...}$.

6) As idades de um pai e de um filho estão na razão 5 para 2. Se a soma dessas idades é 42, determine a diferença entre elas.

7) O produto de dois números é 1280. Determine-os, sabendo-se que eles estão na razão de 4 para 5.

8) Determine a 4ª proporcional entre os números 3, 6 e 5.

9) A 4^a proporcional entre os números 2; x e 3,2 é $\frac{3}{2}$.
Determine o valor de x.

10) Determine a 3^a proporcional entre os números 4 e 10, onde 10 é a média.

11) Determine a média proporcional entre os números 8 e 18.

12) Determine a média proporcional entre 2 e 4,5.

13) Em uma proporção os antecendentes são 22 e 35. Determine os consequentes, sabendo que sua soma é 228.

14) Em uma proporção, os consequentes, são 3 e 6, e o produto dos quatro termos vale 5184. Determine a soma dos antecendentes.

15) Determine os antecedentes de uma proporção cujos consequentes são 6 e 8, sabendo que a soma dos quatro termos é 84.

16) Determine os quatro termos de uma proporção contínua, sabendo-se que um dos meios é o triplo de um dos extremos e que o produto dos quatro termos é 1296.

17) O produto do MDC pelo MMC de dois números é 1232. Determine-os sabendo-se que um deles está para o outro assim como 7 está para 11.

18) Em uma maquete de um estádio de futebol, uma torre de iluminação de altura 18 metros é representada por um palito de 3,6 centímetros de comprimento. Qual foi a escala utilizada?

19) A miniatura de um automóvel foi construída na escala de 1:40. Se a roda do automóvel tem raio de 48 cm, qual o diâmetro de cada roda da miniatura?

20) Qual a escala em que foi construída a planta de uma casa, sabendo-se que uma porta de altura de 2,4 m é representada por uma de 0,6 cm de altura?

21) Um mapa rodoviário foi feito utilizando uma escala de 1:100000. Se neste mapa uma cidade **A** dista 40 cm de uma outra cidade **B**, qual a distância real entre essas cidades?

22) Um mapa foi construído na escala de 1: 250.000. Observando a posição de duas cidades que, no mapa, distam 8 cm, podemos dizer que na realidade a distância entre as duas cidades, em quilômetros, é aproximadamente igual a:
a) 8
b) 10
c) 12
d) 16
e) 20

23) Um técnico de laboratório manipula dois recipientes que contêm misturas das substâncias A e B. Embora os volumes das misturas sejam iguais, num dos recipientes a proporção de A para B é $\frac{1}{2}$ (uma parte de A para duas de B) e no outro é $\frac{1}{2}$. Se ele juntar os dois conteúdos num único recipiente, qual passará a ser a proporção de A para B?

QUESTÕES DE CONCURSOS

24) **(E.E.Aer)** Calculando-se a quarta proporcional entre os números $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ e $5-\sqrt{21}$, obtém-se:
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) 1
d) 2

25) **(E.E.Aer)** A terceira proporcional entre os números 5 e 6 é:
a) 0,5
b) 1,0
c) 5,0
d) 7,2

26) **(ENEM)** Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.
Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?
a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

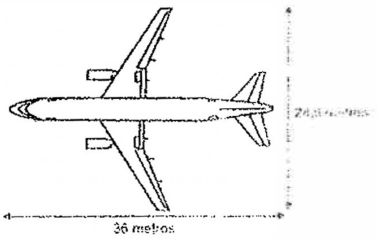
27) **(ENEM)** Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.
Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de
a) 1 : 250
b) 1: 2 500
c) 1: 25 000
d) 1: 250 000
e) 1 : 25 000 000

28) **(ENEM)** No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".
Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).
Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.
Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?
a) 1 : 20
b) 1 : 100
c) 1 : 200
d) 1 : 1 000
e) 1 : 2 000

29) **(UFRJ)** Um automóvel de 4,5 m de comprimento é representado, em escala por um modelo de 3 cm de comprimento. Determine a altura do modelo que representa, na mesma escala uma casa de 3,75 m de altura.

30) **(ENEM)** A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por

companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião e escala de 1 : 150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

a) 2,9cm x 3,4cm
b) 3,9cm x 4,4cm
c) 20cm x 25cm
d) 21cm x 26cm
e) 192cm x 242cm

31)**(ENEM)** As Olimpíadas de 2016 serão realizadas na cidade do Rio de Janeiro. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção especial devido as suas dimensões. Piscinas olímpicas têm 50 metros de comprimento por 25 metros de largura.
Se a piscina olímpica fosse representada em uma escala de 1 : 100, ela ficaria com as medidas de

a) 0,5 centímetro de comprimento e 0,25 centímetro de largura.
b) 5 centímetros de comprimento e 2,5 centímetros de largura.
c) 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.
d) 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.
e) 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura.

32) **(ENEM)** Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km2, é de

a) 250
b) 25
c) 2,5
d) 0,25
e) 0,025

33)**(ENEM)** Visando adotar um sistema de reutilização de água, uma indústria testou cinco sistemas com diferentes fluxos de entrada de água suja e fluxos de saída de água purificada.

	Sistemas				
	I	II	III	IV	V
Fluxo de entrada (água suja)	45 L/h	40 L/h	40 L/h	20 L/h	20 L/h
Fluxo de saída (água purificada)	15 L/h	10 L/h	5 L/h	10 L/h	5 L/h

Supondo que o custo por litro de água purificada seja o mesmo, obtém-se maior eficiência na purificação por meio do sistema:

a) I
b) III
c) V
d) II
e) IV

34) **(E.E.Aer)** Se 760 litros de uma mistura contém álcool e água na razão 14: 5, então o número de litros de álcool na mistura é:

a) 200
b) 360
c) 480
d) 560

35)**(ENEM)** Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época, 26 abr. 2010 (adaptado)

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.
De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

a) 4 mil.
b) 9 mil.
c) 21 mil.
d) 35 mil.
e) 39 mil.

36)**(ENEM)** A produção de Matemática é um exemplo da aceleração científica de nosso século. Há mais de 2000 anos que arazão entre o número de "matemáticos produtivos" e a população mundial mantém-se próxima de 1 para 4×10^6. Em 1900 a população mundial era $1,6 \times 10^9$ e atualmente é $5,6 \times 10^9$. Isso indica que o número de "matemáticos produtivos" do início do século foi:

a) acrescido de 100 indivíduos
b) multiplicado por 1,5, aproximadamente
c) aproximadamente duplicado
d) aproximadamente triplicado
e) acrescido de 100%

37) **(UNICAMP)** Numa lanchonete o refrigerante é vendido em copos descartáveis de 300 ml e 500 ml. Nos copos menores, o refrigerante custa $ 0,90 e, nos maiores, $ 1,70. Em qual dos copos você toma mais refrigerante pelo mesmo preço?

38)**(ENEM)** Já são comercializadas no Brasil veículos com motores que podem funcionar com o chamado combustível flexível ou seja, com gasolina ou álcool em qualquer proporção. Uma orientação prática para o abastecimento mais econômico é que o motorista multiplique o preço do litro da gasolina por 0,7 e compare o resultado com o preço do litro de álcool. Se for maior, deve optar pelo álcool. A razão dessa orientação deve-se ao fato de que, em média, se com um certo volume de álcool o veículo roda dez quilômetros, com igual volume de gasolina rodaria cerca de:

a) 7 km
b) 10 km
c) 14 km
d) 17 km
e) 20 km

39)**(ENEM)** Um carro é denominado flex se ele pode ser abastecido com gasolina ou com álcool. Considere que os preços do álcool e da gasolina sejam, respectivamente, R$ 1,59 e R$ 2,49 por litro. Suponha que um carro flex rode 10,5 km/l de gasolina. Qual deve ser a relação km/l desse carro, para o álcool, para que a utilização do álcool seja financeiramente mais vantajosa que a de gasolina?

a) Entre 4 km/l e 5 km/l
b) Entre 5 km/l e 6 km/l
c) Entre 6 km/l e 7 km/l
d) Entre 7 km/l e 8 km/l
e) Entre 8 km/l e 9 km/l

40) **(UERJ)** Um bar vende suco e refresco de tangerina. Ambos são fabricados diluindo em água um concentrado desta fruta. As proporções são de uma parte de concentrado para três partes de água, no caso do suco e, de uma parte de concentrado para seis de água no caso do refresco.
O refresco também poderia ser fabricado diluindo x partes de suco em y partes de água, se a razão $\frac{x}{y}$ fosse igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$
c) 1
d) $\frac{4}{3}$
e) 2

41)**(CEFET)**Leia atentamente o texto abaixo:
"**Antiguidade Clássica** – Há uma forma clássica de definir a beleza: a harmonia de proporções. O conceito, criado na Grécia antiga, tem como base a chamada razão áurea. Segundo os gregos antigos, a perfeição estética está na relação geométrica de 1 para 1,618. O italiano Leonardo da Vinci a ilustrou como o Homem Vitruviano, em que essa proporção pode ser verificada entre a altura do corpo humano (1,618) e a distância do umbigo até o chão (1), e a medida da cintura até a cabeça (1,618) e a largura do tórax (1). Atenção: não se está falando em metros"

a) De acordo com o texto, quanto deve medir, aproximadamente, em centímetros, a largura do tórax de uma pessoa de 161,8cm de altura que obedece os critérios da perfeição estética descritos?
b) Considere que o corpo de Elisa com x metros de altura segue os padrões de perfeição estética descritos acima. Considerando 1/1,618 = c, escreva a medida t do tórax de Elisa em função da razão c e de sua altura x.

42)**(CN)** Se a, b, c e d são números reais não nulos tais que $ad^2 + bc^2 = 0$, pode-se afirmar que

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+c}; b+d \neq 0.$

b) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}; c+d \neq 0.$

c) $\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c+d}; c+d \neq 0.$

d) $\frac{c}{a}+\frac{b}{d}=\frac{b+c}{a+d}; a+d \neq 0.$

e) $\frac{c}{b}+\frac{d}{a}=\frac{c+d}{a+b}; a+b \neq 0.$

GABARITO

1) $\frac{4}{13}$
2) 3
3) $\frac{400}{773}$
4) 8
5) $\frac{5}{4}$
6) 18
7) 32 e 40
8) 10
9) $\frac{15}{16}$
10) 25
11) 12
12) 3
13) 88 e 140
14) 36
15) 30 e 40
16) 2, 6, 6 e 18
17) 28 e 44
18) 1: 500
19) 2,4 cm
20) 1: 400
21) 40 km
22) E
23) $\frac{8}{13}$
24) D
25) D
26) C
27) E
28) E
29) 2,5 cm
30) D
31) C
32) B
33) D
34) D
35) D
36) D
37) nos copos menores
38) C
39) C
40) D
41) a) 38,2
b) $t = x \cdot (c - c^2)$
42) B

Números Proporcionais

Números diretamente proporcionais

Um conjunto de números **A** é dito **diretamente proporcional** a um outro conjunto de números **B**, se e somente se, os **quocientes** entre os elementos de A e B, tomados ordenadamente, forem todos iguais.

Se A = {a, b, c} é **diretamente proporcional** a B = {x, y, z}, então $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$

Exemplo:
Os conjuntos {4, 12, 10} e {6, 18, 15)} são diretamente proporcionais, pois $\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

IMPORTANTE: Os conjuntos são diretamente proporcionais pois de modo a manter o quociente constante, o numerador e o denominador devem aumentar ou diminuir ao mesmo tempo.

Números inversamente proporcionais

Um conjunto de números **A** é dito **inversamente proporcional** a um outro conjunto de números **B**, se e somente se, os **produtos** entre os elementos de A e B, tomados ordenadamente, forem todos iguais.

Se A = {a, b, c} é **inversamente proporcional** a B = {x, y, z}, então a.x = b.y = c.z = k

Exemplo:
Os conjuntos {2, 5, 4} e {50, 20, 25} são inversamente proporcionais, pois 2 . 50 = 5 . 20 = 4 . 25 = 100

IMPORTANTE:
Os conjuntos são inversamente proporcionais pois de modo a manter o produto constante, se aumentarmos um fator o outro deve diminuir silmultaneamente.

Divisão proporcional

Divisão direta
Dividir o número N em partes diretamente proporcionais aos números a, b, c ... é encontrar os números x, y, z, ... tais que:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z + \ldots = N \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots \end{cases}}$$

Exemplo:
Dividir o número 320 em partes diretamente proporcionais aos números 5, 7 e 4.

Resolução:
Sejam x, y e z as partes desejadas.

$$\begin{cases} x + y + z = 320 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4} \end{cases}$$

→ Um artifício prático para a resolução desse tipo de sistema é introduzir a razão **k** de proporcionalidade. Assim:
x = 5k   y = 7k   z = 4k

Substituindo na 1° equação:
5k + 7k + 4k = 320
16k = 320
k = 20
Logo: x = 5k = 100; y = 7k = 140 e z = 4k = 80

Divisão inversa

Dividir o número N em partes inversamente proporcionais aos números a, b, c, ... é encontrar os números x, y, z, ... tais que:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z + \ldots = N \\ \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \ldots \end{cases}}$$

Exemplo:
Dividir o número 390 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 6.
Resolução:
Consideremos as partes como sendo x, y e z. Então

$$\begin{cases} x + y + z = 390 \\ \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

→ Em primeiro lugar vamos tirar o MMC dos denominadores das frações:

$$\text{MMC}(2, 5, 6) = 30 \to \left\{ \frac{1}{2} = \frac{15}{30};\ \frac{1}{5} = \frac{6}{30} \text{ e } \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \right.$$

$$\frac{x}{\frac{15}{30}} = \frac{y}{\frac{6}{30}} = \frac{z}{\frac{5}{30}}$$

Em seguida, abandonemos os denominadores comuns às frações:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

Agora devemos proceder como na divisão direta:
x = 15k   y = 6k   z = 5k
Substituindo na 1ª equação:
15k + 6k + 5k = 390
26k = 390
k = 15
Logo: x = 15k = 225; y = 6k = 90 e z = 5k = 75

Divisão direta e inversa

Dividir o número N em partes diretamente proporcionais aos números a, b, c, ... e simultaneamente inversamente proporcionais a α, β, γ, ..., é encontrar os números x, y, z, ..., tais que:

$$\begin{cases} x + y + z + \ldots = N \\ \frac{x}{a.\frac{1}{\alpha}} = \frac{y}{b.\frac{1}{\beta}} = \frac{z}{c.\frac{1}{\gamma}} = \ldots \end{cases}$$

Exemplo:
Dividir o número 1010 silmultaneamente em partes diretamente proporcionais a números 4; 3; e 5 e simultaneamente inversamente 'poporcionais a 3; 8 e 2..
Resolução:
Sejam x, y, z as partes desejadas. Daí:

$$\begin{cases} x + y + z = 1010 \\ \frac{x}{4.\frac{1}{3}} = \frac{y}{3.\frac{1}{8}} = \frac{z}{5.\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} = \frac{y}{\frac{3}{8}} = \frac{z}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{32}{24}} = \frac{y}{\frac{9}{24}} = \frac{z}{\frac{60}{24}}$$

Em seguida, abandonamos os denominadores comuns às frações:

$$\frac{x}{32} = \frac{y}{9} = \frac{z}{60}$$

Agora devemos proceder como na divisão direta:
x = 32k y = 9k z = 60k

Substituindo na 1ª equação
32k + 9k + 60k = 1010
101k = 1010
k = 10
Logo: x = 32k = 320; y = 9k = 90 e z = 60k = 600

Observação Importante:
Se não for citado no exercício se a divisão é direta ou inversa, fica subentendido que a divisão é direta.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine o valor de y – x de modo que as seqüências (x, 12, 18) e (12, 16, y) sejam diretamente proporcionais.

2) Sabendo-se que as sucessões (4, x, 20) e (25, 10, y) são inversamente proporcionais, calcule o valor de $\frac{x}{y}$.

3) As seqüências (2, 4, y) e (3, x, 15) são diretamente proporcionais. Determine o valor de x + y.

4) As sucessões (4, x, 6) e (15, 20, y) são inversamente proporcionais. Determine o valor de x + y.

5) Dividir o número 480 em partes diretamente proporcionais a 7, 4 e 5.

6) Dividir o número 372 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5.

7) Dividir o número 780 em partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 8 e simultaneamente inversamente proporcionais a 3, 4 e 6.

8) Dividir o número 795 em partes diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{10}$.

9) Dividir o número 198 em partes inversamente proporcionais a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{8}$.

10) Dividir o número 870 em partes simultaneamente diretamente proporcionais a 2, $\frac{4}{3}$ e 6, e inversamente proporcionais a $\frac{2}{5}$, 6 e $\frac{2}{9}$.

11) Determine os valores de x, y e z em $\begin{cases} x + y + z = 580 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{2} \end{cases}$

12) Calcule x, y e z em $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 319 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} \end{cases}$

13) Calcule x, y e z em $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 464 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} \end{cases}$

14) Obter os valores de a, b e c em: $\begin{cases} 3a - 2b + 4c = 170 \\ \frac{a}{6} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} \end{cases}$

15) Determine os valores de x, y e z em: $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 70 \\ 2xy = 4xz = 3yz \end{cases}$

16) Um grupo de 5 amigos pretende dividir o aluguel de uma casa de praia proporcionalmente ao número de dias que cada um vai passar nela, conforme a tabela abaixo:

AMIGOS	Nº DE DIAS
João	01
Carlos	04
Pedro	03
Vicente	07
Ricardo	05

Sabendo que o valor do aluguel é de $1000,00, a quantia que coube a Carlos foi de:
a) 50
b) 100
c) 150
d) 200
e) 250

17) Uma firma foi montada pelos sócios A, B e C, que participaram com $ 40.000,00, $ 20.000,00 e $ 30.000,00, respectivamente. Após dois anos houve um lucro de $ 135.000,00, que foi dividido proporcionalmente aos capitais investidos. Quanto coube a cada um dos sócios?

18) Dividindo-se o número *N* em partes proporcionais a 2, 4 e 5, encontrou-se a segunda parte igual a 28. Determine o valor de *N*.

19) Uma empresa depositou um total de $ 7.400,00 de FGTS para seus três funcionários A, B e C, que têm o mesmo salário e estão nesta empresa há 7, 12 e 18 anos, respectivamente. Que parte deste depósito cabe ao funcionário B?

20) Uma firma deseja distribuir, a título de produtividade, a importância de $ 6.060,00 entre seus três empregados, utilizando critérios coerentes em relação ao número de horas extras trabalhadas e ao número de faltas. Sabendo-se que o funcionário A faltou 3 dias e fez 40 horas extras, o funcionário B faltou 5 dias e fez 28 horas extras, enquanto que o funcionário C faltou 2 dias e fez 16 horas extras, quanto coube a cada um deles?

21) Um número foi dividido proporcionalmente a 7, 4 e 9, respectivamente. Qual é esse número, sabendo-se que a segunda parte valia 60?

22) Seis amigos fizeram uma sociedade. Três deles entraram com $ 3.000,00 cada um, e os outros três contribuíram com $ 1.800,00, $ 2.000,00 e $ 4.000,00. Ao repartirem um lucro de $ 37.800,00 em partes diretamente proporcionais ao que cada sócio investiu, aquele que contribuiu com a maior parte receberá:
a) $ 7.500,00
b) $ 9.000,00
c) $ 9.450,00
d) $ 10.800,00

e) $ 14.000,00

23) O auxiliar de laboratório A, leva em média um minuto para preparar uma solução de limpeza e o auxiliar de laboratório B, um minuto e meio. Havendo um total de 300 soluções a preparar, os 2 auxiliares combinaram dividir a tarefa de tal modo que, se iniciassem o preparo simultaneamente, também terminariam o preparo ao mesmo tempo. O número de soluções preparadas pelo auxiliar A corresponderá a:
a) 120
b) 150
c) 180
d) 210

24) Para a realização de um teste de qualidade no combustível comercializado pelo posto de gasolina "KI-BOMBA", foram retirados dois recipientes cheios de combustíveis das bombas a e b. Verificou-se que o líquido existente na bomba a era uma mistura de água, álcool e gasolina na proporção 1:2:3, enquanto que na bomba b a proporção era 3:4:5.
Ao misturarmos partes dos líquidos encontrados nesses recipientes, é possível obtermos uma mistura na proporção:
a) 2:5:8.
b) 3:5:7.
c) 4:5:6.
d) 5:6:7.
e) 7:9:11.

QUESTÕES DE CONCURSOS

25) **(CN)** Os números naturais x e 18 são, nesta ordem, inversamenteproporcionais aos números naturais y e 45. Se x > y, quantos são os possíveis valores para x?
a) 9
b) 10
c) 15
d) 18
e) 20

26) **(CM)** Determine o valor de b sabendo que $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$ e $a + 2b + 3c = 46$.
a) 10
b) 12
c) 6
d) 8
e) 4

27) **(CN)** $x + y + z = 201$, x é diretamente proporcional a 2 e inversamente proporcional a 5; y é diretamente proporcional a $\frac{1}{2}$ e z é inversamente proporcional a $\frac{3}{4}$. O menor desses números é:
a) 30
b) 45
c) 36
d) 20
e) 15

28) **(CN)** As linhas da tabela abaixo mostram a variação de quatro grandezas: A, B, C e D. Observa-se, por exemplo, que quando a grandeza A vale 6 as grandezas B, C e D valem, respectivamente, 18, 108 e 1.

A	1	3	6	9
B	3	9	18	27
C	3	27	108	243
D	3	2	1	1/3

Com base nos dados apresentados, analise as afirmativas a seguir.
I – A grandeza A é diretamente proporcional a B.
II – A grandeza A é diretamente proporcional a C.
III – A grandeza A é inversamente proporcional a D.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa I e II são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

29) **(CN)** Em um problema de regra de três composta, entre as variáveis x, y e z, sabe-se que, quando o valor de y aumenta, o de x também aumenta; mas quando z aumenta, o valor de x diminui, e que para x = 1 e y = 2, o valor de z = 4.
O valor de x, para y = 18 e z = 3 é:
a) 6,75
b) 0,333...
c) 15
d) 12
e) 18

30) **(CN)** No estudo de ciências, item "Gases Perfeitos", tem-se a seguinte fórmula $\frac{P_1V_1}{T}=\frac{P_2V_2}{T}$, onde P_1, V_1 e T_1 são, respectivamente, as condições de pressão, volume e temperatura de um gás perfeito num primeiro estado; e P_2, V_2 e T_2 num segundo estado. Considerando a fórmula dada, analise as afirmativas abaixo.
I – Pressão e volume são diretamente proporcionais.
II – Pressão e temperatura são diretamente proporcionais.
III – Volume e temperatura são inversamente proporcionais.
Assinale a alternativa correta.
a) As afirmativas I, II e III são falsas.
b) Apenas a afirmativa I é falsa.
c) Apenas a afirmativa II é falsa.
d) Apenas a afirmativa III é falsa.
e)Apenas as afirmativas I e III são falsas.

31) **(CN)** Dois amigos compraram uma rifa por R$ 20,00, cujo prêmio é de R$ 1.000,00. Um deles deu R$ 15,00, e, o outro, R$ 5,00. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu a maior parte?
a) R$ 250
b) R$ 300
c) R$ 450
d) R$ 500
e) R$ 750

32) **(CEFETEQ)** Três amigos resolveram juntar dinheiro para dividir o total no final do ano. O valor da cota era de $ 5,00. Eles só poderiam depositar valores múltiplos da cota. No final do ano eles dividiram o total "da caixinha" no valor de $ 1.200,00 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, correspondentes aos direitos adquiridos. O número de cotas a ser pago a cada um é, respectivamente, igual a:
a) 2, 3 e 5
b) 10, 15 e 25
c) 30, 60 e 45
d) 40, 60 e 100
e) 48, 72 e 120

33) **(E. E. Aer)** Uma herança de $ 33.000,00 deve ser repartida entre Antônio, Benedito e Carlos. Cada um deve receber partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 6, respectivamente, e, inversamente proporcionais às idades. Antônio tem 12 anos, Benedito tem 15 anos e Carlos, 24 anos. Quanto receberá Benedito?
a) $ 9.000,00
b) $ 12.000,00
c) $ 15.000,00
d) $ 24.000,00

34) **(CN)** O conjunto P é formado por três elementos respectivamente proporcionais a 2, 3 e 7. Sabendo que o menor mais o triplo do maior menos o dobro do outro é

igual a 34, a soma destes três elementos é igual a:
a) 20
b) 21
c) 22
d) 23
e) 24

35) **(CM)** Em uma determinada cidade, no verão sempre falta água, por isso, um grupo de moradores de uma vila de cinco casas resolveu comprar 10 m^3 de água de uma carro-pipa, para abastecer, respectivamente, da casa I à casa V, suas cisternas de 2.500 ℓ, 3.000 ℓ, 1.200 ℓ, 1.500 ℓ e 1.600 ℓ, sendo o restante da água desperdiçada. Os moradores dividiram o custo da água de acordo com a capacidade de suas respectivas cisternas e o valor da água desperdiçada foi dividido em partes iguais. Sabendo que o motorista do carro-pipa cobrou \$ 100,00 pela água, o morador da casa V deverá pagar:
a) \$ 15,20
b) \$ 16,00
c) \$ 16,40
d) \$ 25,40
e) \$ 30,00

36)**(CEFET)** Uma herança foi dividida da seguinte maneira: João recebeu um terço do total e o restante foi dividido em partes diretamente proporcionais às idades dos outros três herdeiros. Sabendo que Maria, a mais velha dentre os três, recebeu o mesmo que João e que as idades dos outros dois herdeiros são vinte e doze anos, qual é a idade de Maria?
a) 28 anos
b) 29 anos
c) 32 anos
d) 36 anos

37) **(CN)** Uma herança P foi dividida por dois herdeiros, com idades, respectivamente, iguais a n e m, em partes diretamente proporcionais ao quadrado de suas idades. Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?

a) $\dfrac{P^2 n}{m^2+n^2}$

b) $\dfrac{Pn^2}{m^2+n^2}$

c) $\dfrac{P^2 n^2}{m^2+n^2}$

d) $\dfrac{Pn^2 m}{m^2+n^2}$

e) $\dfrac{P^2 n^2 m}{m^2+n^2}$

38) **(CEFET)**"*A maioria das construções brasileiras é coberta com uma estrutura chamada laje. Este tipo de cobertura ganhou a preferência dos construtores, pela facilidade de se levantar mais tarde um novo pavimento, ficando a laje como piso.*"
Lorena possui uma casa a ponto de laje e contratou o pedreiro "Nessabase" para fazer o serviço. Ele disse que, para preparar a mistura para fazer o concreto, são necessários cimento, pedra e areia lavada na proporção 1 : 3 : 3, ou seja, 1 parte de cimento, 3 partes de areia lavada (grossa) e 3 de pedra. Sabe-se que os preços do cimento, da pedra e da areia, por quilograma são, respectivamente, R\$ 0,56, R\$ 0,04 e R\$ 0,03. Determine quanto custa, em reais, a produção de 2800kg dessa mistura.

39) **(EPCAR)** Dois aviões, respeitando as normas de segurança, voam em linha reta no mesmo sentido, com o objetivo de chegar à cidade D.
O primeiro, com uma velocidade média de 150000 m/h, passa pela cidade A, às 10 horas da manhã de certo dia.
O segundo, com uma velocidade média de 2 km/min, passa pela cidade B, no mesmo instante em que o primeiro avião passa por A. A cidade B está situada entre A e D e entre as cidades B e D existe uma torre C, alinhada com as três cidades.
Sabe-se que as cidades A, B e D, bem como a região onde está localizada a torre C, possuem mesmo fuso horário e que as velocidades médias dos dois aviões se mantiveram constantes durante todo o percurso.
Sabe-se, também, que a distância entre C e B é 12000 dam e entre A e C é 3240 hm.
Se os aviões chegam à cidade D, ao mesmo tempo, é correto afirmar que isso ocorreu entre
a) 16 h e 20 min e 16 h e 30 min.
b) 16 h e 30 min e 16 h e 40 min.
c) 16 h e 40 min e 16 h e 50 min.
d) 16 h e 50 min e 17 h .

40) **(CN)** O litro do combustível X custa R\$ 2,00 e do combustível Y, R\$ 3,00. O tanque do veículo V, que se move indiferentemente com os combustíveis X e Y, tem capacidade total de 54 litros. O veículo V, quanto abastecido unicamente com o combustível X, tem rendimento de 15 quilômetros por litro e, quando abastecido unicamente com o combustível Y, tem rendimento de 18 quilômetros por litro. Quantos reais gastará o proprietário de V, caso resolva abastecer completamente o seu tanque com uma mistura desses combustíveis, de forma que, numericamente os volumes correspondentes de X e Y sejam, simultaneamente, diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos de cada um deles?
a) R\$ 131,00
b) R\$ 132,00
c) R\$ 133,00
d) R\$ 134,00
e) R\$ 135,00

GABARITO

1) 15
2) 2
3) 16
4) 13
5) 210; 120; 150
6) 180; 120; 72
7) 160; 300; 320
8) 300; 360; 135
9) 60; 18; 120
10) 135; 6; 729
11) 300; 80; 200
12) 22; 33; 77
13) 12; 8; 16
14) 30; 10; 25
15) 21; 28; 14
16) D
17) \$ 60.000,00; \$ 30.000,00; \$ 45.000,00
18) 77
19) \$ 2.400,00
20) \$ 3.000,00; \$ 1.260,00; \$ 1.800,00
21) 300
22) B
23) C
24) B
25) B
26) C
27) C
28) A
29) D
30) E
31) D
32) E
33) B
34) E
35) C
36) C
37) B
38) R\$ 308,00
39) C
40) B

Sistemas de Unidades de Medidas

Sistema métrico decimal

Neste segmento iremos abordar as unidades que devem ser utilizadas para avaliar as medidas de várias grandezas em um sistema de base 10. Para facilitar o estudo, vamos dividi-lo em três tipos de grandezas: UNIDIMENSIONAIS, BIDIMENSIONAIS e TRIDIMENSIONAIS. Tal classificação depende da quantidade de medições necessárias para avaliar a grandeza em questão. Os exemplos abaixo vão tornar claros tais conceitos.

1° Exemplo: Seja determinar o comprimento de um fio de seu cabelo. Observe que para fazê-lo, de posse de uma régua ou fita métrica, será necessário **uma única medição** para que você estabeleça o comprimento desejado. Portanto, a grandeza **comprimento** é UNIDIMENSIONAL (uma dimensão).

2° Exemplo: Seja determinar a área de um campo de futebol. Neste caso, como estudado na Geometria Plana, devemos medir o comprimento e a largura do campo para determinar sua área, ou seja, são necessárias **duas medições**, daí, a grandeza **área** é BIDIMENSIONAL (duas dimensões).

3° Exemplo: Seja determinar o volume de uma caixa d'água. Para obter o volume, devemos medir o comprimento, a largura e a altura da caixa, ou seja, são necessárias **três medições**, logo, a grandeza **volume** é TRIDIMENSIONAL (três dimensões).

Passemos agora ao estudo propriamente dito dessas grandezas:

1) **Unidade Unidimensionais**

	MÚLTIPLOS ÷ 10 ←			UNIDADE PADRÃO	SUBMÚLTIPLOS → x10		
COMPRIMENTO	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
MASSA	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
CAPACIDADE	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Nomenclatura

km → quilômetro
hm → hectômetro
dam → decâmetro
m → metro
dm → decímetro
cm → centímetro
mm → milímetro

kg → quilograma
hg → hectograma
dag → decagrama
g → grama
dg → decigrama
cg → centigrama
mg → miligrama

kl → quilolitro
hl → hectolitro
dal → decalitro
l → litro
dl → decilitro
cl → centilitro
ml → mililitro

Importante!
Na conversão de uma unidade para outra, cada unidade "pulada" para a direita deve levar a vírgula uma casa para a direita, ou seja, multiplicar o número por 10. Enquanto que, cada unidade "pulada" para a esquerda leva a vírgula uma casa para esquerda, ou seja divide o número por 10.

Exemplo:
Faça as conversões que seguem:
a) 37, 157 m → ______________ cm

Resolução:
De metros (m) para centímetros (cm), "pulamos" duas casas para a direita. Façamos o mesmo com a vírgula. Então:

→ 37, 157 m = 3715,7 cm

b) 2,41 dg → ______________ hg

Resolução:
De decigramas (dg) para hectograma (hg), "pulamos" três casas para a esquerda. Façamos o mesmo com a vírgula. Logo:

→ 2,41 dg = 0,00241 hg

2) **Unidades Bidimensionais**

	MÚLTIPLOS ÷ 100 ←			UNIDADE PADRÃO	SUBMÚLTIPLOS → x 100		
ÁREA	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
UNIDADES AGRÁRIAS			ha	a	ca		

Nomenclatura

km^2 → quilômetro quadrado
hm^2 → hectômetro quadrado
dam^2 → decâmetro quadrado
m^2 → metro quadrado
dm^2 → decímetro quadrado
cm^2 → centímetro quadrado
mm^2 → milímetro quadrado
ha → hectare
a → are
ca → centiare

Observação:
As unidades agrárias são utilizadas exclusivamente para a medição de áreas de terras. É bom frisar que:

1 ha = 1 hm^2	1 a = 1 dam^2	1 ca = 1m^2

Importante!
Na conversão de uma unidade para outra, cada unidade "pulada" para a direita deve levar a vírgula duas casas para a direita, ou seja, multiplicar o número por 100. Enquanto que, cada unidade "pulada" para a esquerda leva a vírgula duas casas para a esquerda, ou seja divide o número por 100.

Exemplo:
Faça as convenções abaixo:
a) 2,731 m^2 → ______________ cm^2

Resolução: De m^2 para cm^2, "pulamos" duas casas para a direita, então a vírgula deve ser colocada **quatro** casas à direita.

→ 2,731 m^2 = 27310 cm^2

b) 874 dm^2 → ______________ hm^2

Resolução:
De dm^2 para hm^2 "pulamos" três casas para a

esquerda, daí a vírgula deve se deslocar **seis** casas para esquerda. Neste exemplo temos um número inteiro. Quando isto ocorre, devemos considerar que a vírgula se encontra após o último algarismo da direita do número. Então:

$\boxed{\rightarrow 874\ dm^2 = 0{,}000874\ hm^2}$

c) 39, 4 a → ________________ ca

Resolução:
Para convertermos as unidades agrárias, devemos utilizar um procedimento análogo ao dos dois itens anteriores. Assim, de **a** para **ca**, "pulamos" **uma** unidade que levará a vírgula **duas** casas para a direita. Portanto:

$\boxed{\rightarrow 39{,}4\ a = 3940\ ca}$

3) **Unidades Tridimensionais**

	MÚLTIPLOS ÷ 1000 ←			UNIDADE PADRÃO	SUBMÚLTIPLOS → x 1000		
VOLUME	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Nomenclatura

km^3 → quilômetro cúbico
hm^3 → hectômtero cúbico
dam^3 → decâmetro cúbico
m^3 → metro cúbico
dm^3 → decímetro cúbico
cm^3 → centímetro cúbico
mm^3 → milímetro cúbico

Importante!
A conversão neste caso é feita deslocando a vírgula três casas para cada unidade "pulada".

Exemplos:
Faça as conversões a seguir:
a) 2,41 dam^3 → ____________ m^3

Resolução:
De dam^3 para m^3, "pulamos" uma unidade para a direita, então a vírgula deve ser colocada **três** casas à direita.

$\boxed{\rightarrow 2{,}41\ dam^3 = 2410\ m^3}$

b) 372 mm^3 → ____________ dm^3

Resolução: De mm^3 para dm^3, "pulamos", duas unidades para a esquerda, portanto a vírgula deve ser colocada **seis** casas para a esquerda.

$\boxed{\rightarrow 372\ mm^3 = 0{,}000372\ dm^3}$

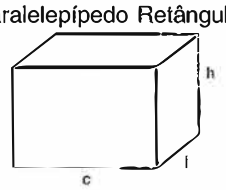
Observações:
1) Pode ser útil saber que 1 litro de água pura tem massa 1 kg.

2) A seguir vamos mostrar alguma relações importantes entre as unidades de volume (tridimensionais) e de capacidade (unidimensionais):

$\boxed{1m^3 = 1k\ell}$ $\boxed{1\ dm^3 = 1\ell}$ $\boxed{1\ cm^3 = 1\ m\ell}$

Volumes dos principais sólidos

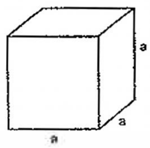
1 - Paralelepípedo Retângulo



$\boxed{V = c\,.\,\ell\,.\,h}$

C → comprimento
l → largura
h → altura

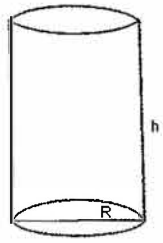
2 - Cubo



$\boxed{V = a^3}$

a → aresta

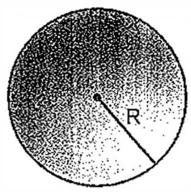
3 - Cilindro



$\boxed{V = \pi\,.\,R^2\,.\,h}$

Lembrete: $\pi \cong 3{,}14$
R → raio da base
h → altura

4 - Esfera



$\boxed{V = \frac{4\,.\,\pi\,.\,R^3}{3}}$

R → raio da esfera

Densidade

A densidade de uma substância é a quantidade de massa que ela possui por unidade de volume. Podemos, de um modo mais simples, conceituar densidade como sendo a razão entre a massa e o volume de certa substância.

$$\boxed{d = \frac{m}{v}}$$

Exemplos:
a) Se a embalagem pet de 2 litros de certo refrigerante, totalmente cheia, comporta 3 kg desse líquido, podemos determinar a densidade do refrigerante nela contido.

Resolução:

$$d = \frac{m}{v} = \frac{3\,kg}{2\,\ell} = 1{,}5\ kg/\ell.$$

Tente você também em sua casa, não esquecendo de efetuar duas pesagens: a embalagem cheia e vazia, para você ter uma noção mais exata da massa do refrigerante.

b) Sabendo-se que a densidade de certo metal é 17,2 kg/ℓ, determinar a massa de um bloco de 42500 cm^3 desse mesmo metal.

Resolução:
Devemos, em primeiro lugar, estar atentos às unidades. Para isto devemos converter o volume do bloco em litros, unidade utilizada na densidade dada:
$v = 42500\ cm^3 = 42{,}5\ dm^3 = 42{,}5\ \ell$
$d = 17{,}2\ kg/\ell$
$m = ?$

$$d = \frac{m}{v}$$

$$17{,}2 = \frac{m}{42{,}5}$$

$m = 17{,}2 \times 42{,}5$
$m = 731$ kg

Observação!
Como citado anteriormente, 1 litro de água pura tem massa de 1 kg. Assim, a densidade de água pura é 1 kg/ℓ.

Sistema inglês de medidas

Em seguida vamos citar as principais unidades inglesas de medidas:

1) Comprimento

A unidade inglesa de comprimento é JARDA (yd), que equivale a 3 PÉS (ft). Cada pé equivale a 12 POLEGADAS (in), enquanto que cada polegada corresponde a 2,54 cm.

Exemplo:

A medida 7 yd 2ft 10in, a quantas polegadas e centímetros equivale?

Resolução:

7 yd $\Rightarrow$ 7 x 3 = 21 ft $\Rightarrow$ 21 x 12 = 252 in

2 ft $\Rightarrow$ 2 x 12 = 24 in

7 yd 2ft 10in = 252 in + 24 in + 10 in = 286 in = 286 x 2,54 cm = 726,44 cm

2) Área

A unidade inglesa de área é o ACRE. Sabe-se que um acre equivale a aproximadamente 0,405 ha.

3) Capacidade

A unidade inglesa capacidade é o GALÃO. Um galão corresponde a aproximadamente 4,55 litros.

4) Massa

A unidade inglesa de massa é a LIBRA, e cada libra equivale a 0,454 kg

Sistema sexagesimal de medidas

É um sistema de base 60. Suas principais unidades são:

1) Tempo

A unidade padrão é o segundo (s). Seus múltiplos são o minuto (min) e a hora (h)

Sabemos que:

1 h = 60 min
1 min = 60 s
1 h = 3600 s.

2) Ângulo

Esta unidade será melhor trabalhada na Geometria Plana, porém cabe-nos adiantar que a unidade padrão para a avaliação da medida de um ângulo, neste sistema, é o GRAU (°). Seus sub-múltiplos são o minuto (') e o segundo (")

Assim, temos que:

1° = 60'
1' = 60"
1° = 3600"

Operações em sistemas não decimais

Como estudado nos capítulos I e II, no sistema decimal (base 10) os algarismos variam de 0 a 9. Se em uma operação, o valor que ocupa uma ordem chega a 10, devemos retirar 10 unidades dele e "vai 1" para a próxima ordem à sua esquerda. Tal raciocínio deve ser usado nos sistemas não decimais. Por exemplo o sistema sexagesimal (base 60) quando o valor de uma posição chega a 60, devemos subtrair 60 e "vai 1" para a próxima posição à sua esquerda. Devemos proceder desta forma com todas as posições, com exceção da última à esquerda, na qual o valor pode às vezes, ultrapassar o número 60. Por exemplo, 152°32'43" tem o valor em graus superior a 60, já no sexagesimal 17h42min19s, o valor em horas não deve ultrapassar 24, pois embora não estivesse errado, o mais usual seria a cada 24h associarmos a um dia.

No sistema inglês de medida de comprimento devemos lembrar que 1 jarda equivale a 3 pés e que cada pé equivale a 12 polegadas. Assim na casa das polegadas o valor máximo é 11, se chegar a 12, "vai 1". Já na casa dos pés o valor máximo é 2 se chegar a 3, "vai 1".

1) Adição

Neste caso devemos adicionar os números que ocupam casas de mesmas unidades, respeitando os limites mencionadas no parágrafos anteriores.

Exemplo:

a)

4h 37min 29s
+ 7h 49min 52s
11h 86min 81 s

+1 ← −60

11h 87min 21 s

+1 ← −60

12h 27min 21s

b)

18yd 2ft 7in
+ 9yd 2ft 8in
27yd 4 ft 15 in

+1 ← −12

27 yd 5ft 3in

+1 ← −3

28yd 2ft 3in

2) Subtração

Devemos subtrair os números que ocupam as mesmas unidade operando no sentido da direita para a esquerda. Se o minuendo for menor do que o subtraendo devemos "pedir uma unidade emprestada" ao número que ocupa a casa imediatamente à sua esquerda.

Exemplos:

Efetuar:

a) 72° 26' 19" - 40° 42' 36"

71° 85'

−1° → +60'

25' 79"

−1' → +60"

72° 26' 19"
− 40° 42' 36"
31° 43' 43"

b) 13yd 1ft 5in - 8yd 2ft 9in

12yd 3ft

−1yd → +3ft

Øft 17in

−1ft → + 12 in

13yd 1ft 5in
− 8yd 2ft 9in
4yd 1ft 8in

3) Multiplicação

Neste caso trataremos da multiplicação por um número inteiro. Para isto, devemos multiplicar os números que ocupam cada unidade da medida em questão, pelo número dado, mais uma vez não esquecendo dos limites estabelecidos para cada unidade.

Exemplos:

a)

6yd	2ft	10in
	x	9
54yd	18ft	90in
	+7ft ← –84in	
54yd	25ft	6in
+8yd ← –24ft		
62yd	1ft	6in

b)

2h	32min	28s
	x	7
14h	224min	196s
	+3 min ← – 180s	
14h	227min	16s
+3h ← –180 min		
17h	47min	16s

4) Divisão

Sugerimos que neste caso transformemos as medidas complexas dadas (expressas por mais de uma unidade) em uma única unidade, de preferência a última da direita, e efetuemos a divisão entre as medidas incomplexas (expressas por uma única unidade) obtidas.

O resultado será adimensional (sem unidade de medida), um número real, desde que dividamos medidas de mesma unidade.

Exemplos:

a) Dividir 20° 39' 6" por 13° 46' 4".

20° = 20 x 3600" = 72000"

39' = 39 x 60" = 2340"

20° 39' 6" = 72000" + 2340" + 6" = 74346"

13° = 13 x 3600" = 46800"

46' = 46 x 60" = 2760"

13° 46' 4" = 46800" + 2760" + 4" = 49564"

$$\frac{20°39'6"}{13°46'4"} = \frac{74346"}{49564"} = 1{,}5$$

b) Dividir 20yd 2ft 8in por 6yd 1ft 7in

20yd = 20 x 3ft = 60ft = 60 x 12in = 720in

2ft = 2 x 12in = 24in

20yd 2ft 8in = 720in + 24in + 8in = 752in

6yd = 6 x 3ft = 18ft = 18 x 12in = 216in

1ft = 12in

6yd 1ft 7in = 216in + 12in + 7in = 235in

$$\frac{20yd\ 2ft\ 8in}{6yd\ 1ft\ 7in} = \frac{752in}{235in} = 3{,}2$$

Sistema Internacional de Medidas

Desde 1968, o Sistema Internacional de Medidas (SI) substitui o Sistema Decimal, até então adotado no Brasil.

No SI, que também é utilizado em diversos países, podemos citar como unidades mais frequentes em nosso cotidiano: o metro (comprimento), o metro quadrado (área), o metro cúbico (volume), o segundo (tempo), o quilograma (massa), o radiano (ângulo plano), etc.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Efetue as conversões:
a) 3,53 m = cm
b) 0,183 dam = km
c) 7,23 m = mm
d) 0,43 km = m
e) 1 cm = hm
f) 8,7 g = kg
g) 0,871 ton = dag
h) 32 dg = dag
i) 4,732 hg = mg
j) 28,4 ton = cg
k) 0,2 cℓ = ℓ
d) 4 kℓ = ℓ
m) 0,7 daℓ = ℓ
n) 33 ml = kℓ

2) Converta as unidades:
a) 3,2 m² = cm²
b) 183 dm² = hm²
c) 8,7 dam² = cm²
d) 0,23 ha = ca
e) 1347 mm² = a
f) 13 a = ca
g) 2,85 ha = km²
h) 387,4 cm² = a

3) Efetue as conversões:
a) 3,31 cm³ = mm³
b) 4,611 dm³ = hm³
c) 7,61 m³ = mm³
d) 89473 cm³ = m³
e) 7,85 dm³ = ℓ
f) 487 cm³ = kℓ
g) 8,4871 cℓ = m³
h) 0,4 daℓ = km³
i) 8,47 mℓ = m³
j) 0,004 hm³ = kℓ
k) 381 dam³ = daℓ

4) Determine a razão entre 2,4 kg e 0,72 ton.

5) Determine os valores das expressões:

a) $1{,}5\ km + \frac{1{,}72}{0{,}04}\ m + 0{,}36\ dam =$ __________ hm

b) $0{,}2\ m^2 + 4{,}5 \times 0{,}03\ cm^2 + \frac{5{,}28}{0{,}006}\ ca =$ __________ a

c) $0{,}004 : 0{,}2 \times 1{,}4\ m^3 + 0{,}1\ kl - 3{,}21\ cm^3 =$ ________ ℓ

6) Quantas polegadas há em:
a) 27yd 1ft 7in
b) 32yd 2ft 11in

7) Quantas jardas há em:
a) 4yd 2ft 3in
b) 5yd 2ft 6in

8) Resolva as operações:
a) 13yd 2ft 7in + 5yd 2ft 9in
b) 9yd 1ft 11in + 7yd 1ft 8in
c) 28yd 2ft 8in - 17yd 2ft 13in
d) 16yd 1ft 3in - 10yd 2ft 9in
e) 6yd 2ft 9in x 5
f) 8yd 1ft 8in x 4
g) 101yd 2ft 6in : 6
h) 94yd 2ft 8in : 7

9) Um caminhão transporta 12 toneladas de uma mercadoria. Se ela está embalada em sacos de 50 Kg, o número de sacos que este caminhão transporta é:
a) 24
b) 48
c) 240
d) 480
e) 2400

10) Um agrimensor utilizou uma trena com 100 dm de comprimento para avaliar a área de um terreno retangular

e encontrou 83 ha. Ao chegar a casa verificou que esta trena estava defeituosa pois possuía 0,01 dam a mais do que devia. Determine a área real do terreno.

11) A capacidade de uma garrafa de refrigerante é de 290 ml. Para lavar cada uma dessas garrafas, uma pessoa gasta 180 ml de água. O número aproximado de litros de água gasto por essa pessoa para lavar 72 garrafas, é:
a) 7
b) 9
c) 11
d) 13
e) 15

12) A Matemática pode ajudar a denunciar a concentração de renda que existe nesse país. Você já teve notícia de algum fazendeiro ser dono de, por exemplo, 50.000 ha de terras improdutivas. Suponha que essas terras sejam desapropriadas para fins de reforma agrária e divididas em lotes de 1000 m². Se colocarmos uma família de "sem-terra" em cada um desses terrenos, quantas famílias seriam beneficiadas?

13) De um tecido de 1,2 m de largura, Maria cortou 780 quadrados de 24 cm de lado. O comprimento do tecido gasto, em metros, é:
a) 3,774
b) 15,6
c) 22,46
d) 37,44
e) 156

14) Pedro comprou um sítio de 14 hectares, reservando, para a construção da casa e área de lazer, $\frac{1}{4}$ do terreno. O restante, Pedro usou para plantar arroz, milho e feijão. Se a área plantada tem $\frac{2}{7}$ de arroz e $\frac{2}{5}$ de milho, quantos metros quadrados do terreno foram ocupados com a plantação de feijão?

15) Um pedreiro deseja taquear uma sala de dimensões 12m de comprimento por 65dm de largura. Para isto vai utilizar tacos de dimensões 5cm x 13cm. Quantos tacos serão necessários?

16) Uma indústria automobilística deseja financiar, a preço de custo, para seus funcionários, casas com 90m² de área construída e 14m² de quintal. Para isso adquiriu um terreno em Resende de dimensões 0,32km por 2,6hm.
A construção de ruas, praças, área de lazer, lojas de conveniências, portaria, etc, deverá ser feita em 20% da área total do terreno. Quantas casas podem ser efetivamente construídas no restante do terreno?

17) Quanto uma pessoa gastará com tinta para pintar a sala de sua casa, inclusive o teto, que tem 60dm de comprimento, 0,04hm de largura e 350cm de altura, sabendo-se que cada lata de tinta custa $ 8,50 e dá para pintar 2m²?.

18) Uma lavoura tem uma área plantada de 100 quilômetros quadrados com uma produção de 0,4 tonelada por hectare. Sabendo-se que uma colheitadeira colhe 200.000 quilos por dia, o tempo gasto para colher a área toda é:
OBS.: 1 hectare = 10.000 m²
a) 50 dias
b) 30 dias
c) 25 dias
d) 20 dias
e) 15 dias

19) Para ladrilhar uma parede de 4,2m de altura e 0,45dam de comprimento, utilizam-se ladrilhos quadrados de lado 30cm, que são vendidos por $ 40,00 a caixa com 30 ladrilhos. Se o pedreiro cobra $ 20,00 para assentar cada m² de ladrilho, qual o gasto total, sabendo que o restante do material é fornecido pelo pedreiro e já está incluso no orçamento?

20) Um agricultor arou o seu milharal para fazer um novo plantio. É sabido que cada 5m² de terra suporta no máximo nutrir 7 pés de milho, que produzem no máximo 6 espigas cada. Se a área a ser plantada é de 24hm por 32dam, qual a quantidade máxima de espigas que esse agricultor poderá colher na próxima safra?

21) O consumo mensal de água na lavanderia de um hospital é de 242,500 m³. Mantendo-se este consumo, o número de litros d'água gastos num trimestre será:
a) 24250
b) 72750
c) 242500
d) 727500

22) A capacidade, em litros, de uma caixa de formato cúbico que tem 50 centímetros de aresta é de:
a) 125
b) 250
c) 375
d) 500
e) 625

23) Um reservatório tem a forma de um cubo de 2,4 m de aresta e contém água até 25% de sua altura. A metade da água nele contida foi distribuída em recipientes de 64 litros de capacidade. O número de recipientes usados corresponde a:
a) 27
b) 28
c) 29
d) 30
e) 31

24) Uma funcionária de um posto de saúde deverá inutilizar 1200 ampolas de vacinas fora do prazo de validade. Sabendo-se que cada ampola contém 10 cm³ de vacina, pode-se afirmar que o volume que será destruído, em litros, é de:
a) 1,2
b) 12
c) 120
d) 1200
e) 12000

25) A água ao congelar, aumenta $\frac{1}{10}$ de seu volume. Para se obter uma pedra de gelo de 220 cm³, o número de mililitros de água necessários corresponde a:
a) 2
b) 20
c) 200
d) 2000

26) Um reservatório cúbico de 2 m de aresta está totalmente cheio de refresco. Todo o seu conteúdo será utilizado para encher garrafas de 400 ml, as quais serão vendidas ao público por $ 0,70. Qual será o total apurado?

27) Para minimizar os efeitos das enchentes do Rio Torto, foi levantado, em sua margem, um paredão com 20 m de comprimento, 48 cm de largura e 30 dm de altura.

Sabendo-se que os tijolos usados nessa construção tinham dimensões 12 cm x 2 dm x 150 mm e que $\frac{5}{32}$ do volume eram ocupados por argamassa, determine o número de tijolos utilizados.

28) Um tonel cilíndrico de 25 dm de altura e $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ m de raio está totalmente cheio de vinho gerupiga. Todo esse conteúdo será envasilhado em barris com 0,25 hl de capacidade, que serão vendidos a $ 18,00, cada um. Qual o total apurado, considerándo que todos foram vendidos?

29) O conteúdo de um tonel cilíndrico totalmente cheio de óleo será utilizado para encher latas, também cilíndricas, cuja altura é a sétima parte da altura do tonel e cujo raio da base é a quinta parte do raio da base do tonel. Quantas latas serão necessárias?

30) Um caminhoneiro parou em um posto de gasolina para completar o tanque de combustível com óleo diesel, após uma certa viagem. O marcador do nível de combustível indicava a existência de $\frac{7}{12}$ do volume total do tanque de óleo diesel. Sabendo-se que o valor do litro de óleo diesel era $ 0,62 e que o tanque tinha dimensões 2 m de comprimento, 150 cm de largura e 800 mm de altura, quanto gastou no abastecimento desse caminhão?

31) O interior de um ônibus de turismo tem 12 m de comprimento, 25 dm de altura e 0,004 km de largura. Sabe-se que as poltronas e demais acessórios ocupam $\frac{1}{15}$ do espaço total e que cada pessoa, em um ambiente como esse, precisa de 4 m^3 para se acomodar e respirar. Determine o número máximo de pessoas que podem viajar nesse ônibus.

32) Expresse em g/cm^3 as densidades:
a) 0,07 ton/dm^3
b) 43 kg/m^3

33) Um copo com capacidade para 300 ml está cheio com água do mar, cuja densidade é 1,025 kg/ℓ. Joga-se em seu interior cinco pedras de gelo, cúbicas de lado 2 cm, feitas de água pura. Desconsiderando-se a variação de volume de água pura após o degelo, determine a densidade aproximada da nova mistura.

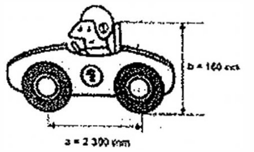
34) A densidade do leite pasteurizado é 1,028 kg/ℓ. Determine:
a) A massa contida em um copo de 250 mℓ totalmente cheio de leite.
b) O volume ocupado por 822,4 g desse leite.

35) A densidade do ferro é aproximadamente 8 g/cm^3. Qual a massa de um bloco de ferro de dimensões 3 m x 4 dm x 35 mm?

36) No setor de pesagem de uma firma exportadora encontram-se três tonéis idênticos e totalmente cheios: o primeiro com água, o segundo com suco de laranja e o terceiro com óleo de mamona. Sabendo-se que a densidade do suco e do óleo são respectivamente iguais a 1,04 kg/ℓ e 1,043 kg/ℓ e que as pesagens do primeiro e segundo tonéis foram 92 kg e 95,2 kg, nesta ordem, qual deve ter sido a pesagem do terceiro tonel?

QUESTÕES DE CONCURSOS

37) **(ENEM)** Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:
a)distância a entre os eixos dianteiro e traseiro;
b)altura b entre o solo e o encosto do piloto.
Ao optar pelas medidas a e b em metros, obtêm-se, respectivamente,



a) 0,23 e 0,16
b) 2,3 e 1,6
c) 23 e 16
d) 230 e 160
e) 2 300 e 1 600

38) **(ENEM)** O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.
Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.
Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro
a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

89) **(CEFET)** Um livro tem 3cm de espessura, desprezando-se a capa. Considerando-se que o livro tem um total de 200 folhas, a espessura, em metros, de uma folha desse livro é:
a) $1,5 \times 10^{-2}$;
b) 6×10^{-2};
c) $1,5 \times 10^{-4}$;
d) 6×10^{-4};
e) $1,5 \times 10^{-3}$.

40) **(ENEM)** O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebem ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.
De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?
a) 8 bilhões de litros.
b) 16 bilhões de litros.
c) 32 bilhões de litros.
d) 40 bilhões de litros.
e) 48 bilhões de litros.

41) **(ENEM)** Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros vôos.
Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas vôos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 21 abr. 2010. (adaptado).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés. Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

a) 3.390 pés.
b) 9 390 pés.
c) 11 200 pés.
d) 19 800 pés.
e) 50 800 pés.

42) **(ENEM)** Existe uma cartilagem entre os ossos que vai crescendo e se calcificando desde a infância até a idade adulta. No fim da puberdade, os hormônios sexuais (testosterona e estrógeno) fazem com que essas extremidades ósseas (epífises) se fechem e o crescimento seja interrompido. Assim, quanto maior a área não calcificada entre os ossos, mais a criança poderá crescer ainda. A expectativa é que durante os quatro ou cinco anos da puberdade, um garoto ganhe de 27 a30 centímetros.

Revista Cláudia. Abr. 2010 (adaptado)

De acordo com essas informações, um garoto que inicia a puberdade com 1,45 m de altura poderá chegar ao final dessa fase com uma altura:
a) mínima de 1,458 m.
b) mínima de 1,477 m.
c) máxima de 1,480 m.
d) máxima de 1.720 m.
e) máxima de 1.750 m.

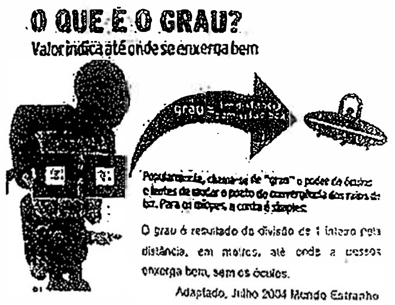
43) **(ENEM)** O hábito de comer um prato de folhas todo dia faz proezas para o corpo. Uma das formas de variar o sabor das saladas é experimentar diferentes molhos. Um molho de iogurte com mostarda contém 2 colheres de sopa de iogurte desnatado, 1 colher de sopa de mostarda, 4 colheres de sopa de água, 2 colheres de sopa de azeite.

DESGUALDO. P. Os Segredos da Supersalada. Revista Saúde. Jan. 2010.

Considerando que uma colher de sopa equivale a aproximadamente 15 ml, qual é o número máximo de doses desse molho que se faz utilizando 1,5 L de azeite e mantendo a proporcionalidade das quantidades dos demais ingredientes?
a) 5
b) 20
c) 50
d) 200
e) 500

44) **(EPCAR)** Um medicamento deve ser ingerido na quantidade de 3 mg por quilograma da massa corporal, Não pode, contudo, exceder 200 mg por dose ministrada. Cada gota, desse medicamento, contém 5 mg do remédio. O número de gotas desse medicamento que deve ser prescrito por dose a um paciente de 80 kg, é:
a) 46
b) 40
c) 16
d) 80

45) **(CM)**



Com base no texto, acima, podemos afirmar que:

a) Uma pessoa, míope, que só enxerga bem, sem os óculos, até 0,5 metros precisa de óculos de 2 (dois) graus.
b) Uma pessoa, míope, que usa óculos de 4 (quatro) graus, enxerga bem, sem os óculos, até 20 centímetros de distância dela.
c) Uma pessoa, míope, sem seus óculos de 3 (três) graus, enxerga bem um objeto que está a 40 centímetros de distância dela.
d) Uma pessoa, míope, enxerga bem, sem os seus óculos de 1 (um) grau, outra pessoa que está até a 1,5 metros de distância dela.

46) **(EPCAR)** Na festa junina do Bairro Jardim foi montada uma barraca que vende pasteis e suco. Sabe-se que cada pastel teve um custo de R$ 0,50 e o suco já preparado para o consumo foi compradoem garrafas de 600 m ℓ por R$ 1,20 cada.
O proprietário resolveu vender o suco em copos de 250 m ao preço de 2 reais cada copo e um pastel era oferecido em cortesia para cada copo de suco consumido.
Ao final da festa, foram consumidas nessa barraca todas as 100 garrafas de suco que o proprietário havia adquirido e todos os clientes aceitaram a cortesia e não sobrou nenhum pastel.
É correto afirmar que, se não houve outras despesas, e o proprietário dessa barraca teve um lucro x relativo somente à venda dos sucos com suas cortesias, então a soma dos algarismos de x é igual a:
a) 3
b) 6
c) 9
d) 13

47) **(ENEM)** O quadro apresenta informações da área aproximada da cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km^2)	Área/total Brasil
Amazônia	4.196.943	49,29%
Cerrado	2.036.448	23,92%
Mata Atlântica	1.110.182	13,04%
Caatinga	844.453	9,92%
Pampa	176.496	2,07%
Pantanal	150.355	1,76%
Área total Brasil	8.514.877	

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120m x 90m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas.
Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?
a) 1.400
b) 14.000
c) 140.000
d) 1.400.00
e) 14.000.000

48) **(ENEM)** Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20 000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:
O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.
Considerando que um ano tem aproximadamente 32 x 10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km^2 (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:
a) 10 000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.

b) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
c) 20 000 km², e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
d) 40 000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
e) 40 000 km² e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

49) **(ENEM)** No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura.
Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?
a) 10^2
b) 10^4
c) 10^5
d) 10^6
e) 10^7

50) **(CEFET)** Um aluno, ao fazer o simulado de uma prova com 70 questões, gastou, em média, 3 minutos na resolução de cada questão. Desse modo, ao terminar o tempo disponível para a prova, percebeu que havia deixado 14 questões em branco. Para que nenhuma questão ficasse sem resolução, neste simulado, esse aluno deveria gastar na resolução de cada questão um tempo médio de:
a) 2 minutos e 15 segundos;
b) 3 minutos e 45 segundos;
c) 5 minutos;
d) 2 minutos e 40 segundos;
e) 2 minutos e 24 segundos.

51) **(CM)** 1ª prova: Matemática - composta por 100% (cem por cento) de questões objetivas (itens de múltipla escolha), com duração máxima de 02 (duas) horas;
Os candidatos somente poderão sair do Local de Prova do EI após transcorridos 2/3 (dois terços) do tempo total destinado à realização de cada prova.
Um candidato usou apenas 2/3 do tempo total destinado à realização da prova, tendo se ausentado durante 7 minutos e 13 segundos para ir ao banheiro. O tempo que esse candidato gastou realmente para fazer a prova foi:
a) 1 h 52min 47s
b) 1 h 12min 57s
c) 1 h 12min 47s
d) 1 h 13min 47s

52) **(ENEM)** Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

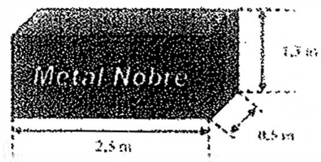
$IMC = \dfrac{massa(kg)}{[altura(m)]^2}$	$RIP = \dfrac{altura(cm)}{\sqrt[3]{massa(kg)}}$

ARAUJO, C.G. S: RICARDO, D. R. Índice de Massa Corporal: Um QuestionamentoCientífico Baseado em Evidências. Arq. Brás. Cardiologia, volume 79, nº 1, 2002 (adaptado)

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m², então ela possui RIP igual a
a) 0,4 $cm/kg^{1/3}$
b) 2,5 $cm/kg^{1/3}$
c) 8 $cm/kg^{1/3}$
d) 20 $cm/kg^{1/3}$
e) 40 $cm/kg^{1/3}$

53) **(ENEM)** Uma fotografia tirada em uma câmera digital é formada por um grande número de pontos, denominados pixels. Comercialmente, a resolução de uma câmera digita é especificada indicando os milhões de pixels, ou seja, os megapixels de que são constituídas as suas fotos.
Ao se imprimir uma foto digital em papel fotográfico, esses pontos devem ser pequenos para que não sejam distinguíveis a olho nu. A resolução de uma impressora é indicada pelo termo dpi (cfofperinch), que é a quantidade de pontos que serão impressos em uma linha com uma polegada de comprimento. Uma foto impressa com 300 dpi, que corresponde a cerca de 120 pontos por centímetro, terá boa qualidade visual, já que os pontos serão tão pequenos, que o olho não será capaz de vê-los separados e passará a ver um padrão contínuo.
Para se imprimir uma foto retangular de 15 cm por 20 cm, com resolução de pelo menos 300 dpi, qual é o valor aproximado de megapixels que a foto terá?
a) 1,00 megapixel.
b) 2,52 megapixel.
c) 2,70 megapixel.
d) 3,15 megapixel.
e) 4,32 megapixel.

54) **(ENEM)** A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.
O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza
a) massa.
b) volume.
c) superfície.
d) capacidade.
e) comprimento.



55) **(ENEM)** Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.
Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

56) **(ENEM)** Para calcular a capacidade total da garrafa, acima, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

57) **(CM)** Ao se reformar o assoalho de uma sala, suas 49 tábuas corridas foram substituídas por tacos. As tábuas medem 3m de comprimento por 15cm de largura e os tacos, 2dm por 75mm. O número de tacos necessários para essa substituição foi:
a) 1029
b) 1050

c) 1470
d) 1500
e) 1874

58) **(CM)** O Colégio Militar de Juiz de Fora, criado pela Portaria Ministerial n.° 324, de 29 Jun. 93, ocupa uma área total de 115.922 m², sendo 16.917 m² de área construída em módulos pré-fabricados.
Consideramos que o piso da área construída sejam lajotas quadradas de lado 60 cm. A quantidade mínima dessas lajotas necessárias para revestir todo o piso da área construída deve ser:
a) 46981
b) 46992
c) 322005
d) 322006

59) **(CM)** Uma parede de 484 m² de área de um laboratório, foi revestida com cerâmicas quadradas de 0,11 m de lado. Sabendo-se que cada cerâmica custou R$ 2,00 e que a mão-de-obra para colocação foi de R$ 85,00 por m², o custo total do revestimento, em reais, foi igual a:
a) 121140
b) 121150
c) 121160
d) 121170
e) 121180

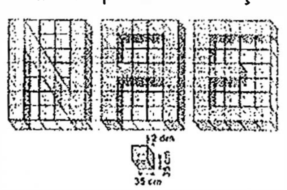
60) **(EPCAR)** A embalagem de um tipo de óleo era uma lata cilíndrica de 40 mm de altura e 12 cm de diâmetro da base. O fabricantesubstitui essa embalagem por uma outra lata cilíndrica do mesmo material e com o mesmo volume da antiga. Sabendo-se que o diâmetro da nova embalagem é de 0,6 dm e que a espessura do material das embalagens é desprezível, então, é **INCORRETO** afirmar que

Dado $\pi = 3,14$

a) a altura da nova embalagem é 16 cm
b) a quantidade de material utilizada na fabricação da embalagem antiga é 37,68 m²
c) o percentual de economia de material na fabricação da nova embalagem é 5%
d) a capacidade das embalagens é de aproximadamente 9/20 litros.

61) **(EPCAR)** Todos os anos, as escolas de formação militar de ensino médio das três Forças Armadas Brasileiras se reúnem para colocar seus alunos em competições esportivas. São os chamados Jogos da NAE – Naval Aeronáutica e Exército.
Em 2008, esses jogos ocorrerão na EPCAR e, para a recepção dos atletas, será elaborado um letreiro em concreto com as letras N, A e E para ser colocado próximo ao Pátio da Bandeira.
Com a intenção de saber quanto de cimento será gasto para a confecção das letras, desenhou-se um croqui com a indicação das medidas reais como na reprodução abaixo.
O rendimento do cimento que será usado é de 0,5 kg para cada 9,31 ℓ de concreto.

A quantidade de cimento a ser usada para a confecção do letreiro é, em kg, igual a
a) 75
b) 150
c) 225
d) 300

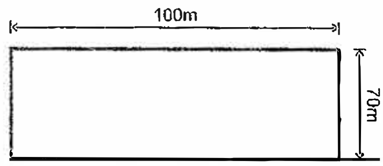


62) **(EPCAR)** Um vinhedo de forma retangular medindo 2 hm de comprimento e 9 dam de largura produziu 100 pipas totalmente cheias de vinho com a capacidade de 0,25 m³ cada uma.
Considere que
- este vinho foi vendido a R$ 1.600,00 o hl;
- o aluguel do vinhedo é de R$ 40.000,00 por 10.000m²; e
- as despesas com a produção do vinho totalizam R$ 78.000,00

Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) o aluguel do vinhedo é inferior a R$ 70.000,00.
b) o lucro líquido do vinhateiro é um valor, em reais, cuja soma dos algarismos é maior que 7.
c) a produção de 1 m² foi de $0,13\bar{8}$ dal.
d) a despesa total do vinhateiro representa menos de 35% da receita.

63) **(CEFET)** A figura abaixo mostra como Vicente envolveu, com fitas, três caixas de 10 cm de comprimento, 4 cm de largura e 3cm de altura. Sabendo que Vicente gastou o mínimo de fita nessa tarefa, em qual das três caixas (*A*, *B* ou *C*) Vicente gastou menos fita? Justifique sua resposta.

64) **(CN)** A área esquematizada abaixo representa um pátio para estacionamento de veículos. Reservando-se um espaço retangular mínimo de 2 metros por 3 metros para cada um, quantos veículos no máximo pode-se ali estacionar?
a) 1150
b) 1155
c) 1160
d) 1166
e) 1170



65) **(ENEM)** As dimensões de uma caixa retangular são 3cm, 20mm e 0,07m. O volume dessa caixa, em mililitros, é:
a) 0,42
b) 4,2
c) 42
d) 420
e) 4200

66) **(CEFET)** Pretende-se construir uma piscina em forma de paralelepípedo reto-retângulo com **3m** de comprimento e **2m** de largura. Se a capacidade da piscina será de 4800 litros, qual deverá ser a sua profundidade em centímetros?
a) 90
b) 80
c) 70
d) 60
e) 50

67) **(ENEM)** Uma piscina retangular de 10,0 m x 15,0 m e fundo horizontal está com água até a altura de 1,5 m. Um produto químico em pó deve ser misturado à água à razão de um pacote para cada 4500 litros.
O número de pacotes a serem usados é:
a) 45
b) 50
c) 55
d) 60
e)75

68) **(CEFET)** Carlos desenhou um retângulo com 2 m e 3 m de lados no quintal de sua casa. Em seguida, começou a cavar, verticalmente, sempre acompanhando os lados desse retângulo. Até que profundidade Carlos terá que cavar para obter um poço que, totalmente cheio, tenha capacidade de 81.000 litros?

69) **(CM)** O volume de uma determinada caixa d'água é dado pela fórmula V = ℓ.c.h, sendo ℓ a largura da caixa, c o

comprimento e h a altura. Se sua largura mede $\sqrt{2}$ m, seu comprimento mede $\sqrt{3}$ m, e sua altura mede $\sqrt{4}$ m, então o volume dessa caixa d'água é:

a) $\sqrt{3}\,m^3$

b) $2\sqrt{3}\,m^3$

c) $\sqrt{6}\,m^3$

d) $2\sqrt{6}\,m^3$

70) **(CEFET)** Calcule o volume de uma paralelepípedo retângulo, cujo perímetro da base é igual a 14 cm, a altura, igual a 3 cm, e o comprimento, 3 cm maior que a largura.
a) 15 cm^3
b) 24 cm^3
c) 32 cm^3
d) 30 cm^3
e) 16 cm^3

71) **(CEFETEQ)** Uma piscina de piso e paredes laterais retangulares tem as seguintes dimensões: 2 m de largura, 1,5 m de profundidade e 4 m de comprimento. Sabendo-se que o proprietário dessa piscina deseja aumentar, em seis mil litros, o seu volume, e que não é possível alterar sua largura e sua profundidade, que alteração, no comprimento, a piscina deverá sofrer?

72) **(ENEM)** Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte?
Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?
a) 10 viagens
b) 11 viagens
c) 12 viagens
d) 24 viagens
e) 27 viagens

73) **(ENEM)** Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é Spa-Francorchamps, no Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.
Suponha que um piloto de um equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/l, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no box para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, a ser liberado para retomar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo:
a) 617 kg
b) 668 kg
c) 680 kg
d) 689 kg
e) 717 kg

74) **(ENEM)** Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:
a) 9
b) 11
c) 13
d) 15
e) 17

75) **(ENEM)** Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.
Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 12 cm
d) 24 cm
e) 25 cm

76) **(ENEM)** Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm são levados juntos á fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm.
O valor de x é:
a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

77) **(ENEM)** Em um recipiente contendo 5 decilitros de água, foram colocados 300 centigramas de açúcar, obtendo-se, assim, uma mistura homogênea. Quantos miligramas de açúcar existem em uma amostra de 1 cm^3 dessa mistura?
a) 0,06
b) 0,6
c) 6
d) 60
e) 600

78) **(CEFET)** Sabe-se que 1 cm^3 de aço pesa 7,85 g. Quanto custará, aproximadamente, uma barra desse material com 6 m de comprimento e seção retangular de 25 mm x 6 mm, se o quilo do aço custa $ 3,00?

79) **(EPCAR)** Em condições ambientes, a densidade do mercúrio é de aproximadamente 13 g/cm^3. A massa desse metal, do qual um garimpeiro necessita para encher completamente um frasco de meio litro de capacidade é igual a:
a) 260 g
b) 2,6 kg
c) 650 g
d) 6,5 kg

80) **(EPCAR)** Uma torneira com funcionamento normal e sem interrupção gasta 12 horas e 30 minutos para encher um tanque em forma de paralelepípedo, cuja base mede 45dm por 500cm e cuja altura mede x metros. Após jorrar 3.600dal de água, que correspondem a 1/5 da capacidade do tanque, a torneira apresenta um defeito que reduz a sua vazão em 1/3. Considerando constante a vazão da torneira após o defeito, pode-se afirmar que o tempo gasto a mais para completar o tanque sem que a água entorne é:
a) 12 horas e 30 minutos.
b) 15 horas.
c) 10 horas e 30 minutos.
d) 5 horas.

GABARITO

1) a) 353
   b) 0,00183
   c) 7.230
   d) 430
   e) 0,0001
   f) 0,0087
   g) 87.100
   h) 0,32
   i) 473.200
   j) 2.840.000.000
   k) 0,002
   l) 40.000
   m) 7
   n) 0,000033

2) a) 32.000
   b) 0,000183
   c) 8.700.000
   d) 2.300
   e) 0,00001347
   f) 1.300
   g) 0,0285
   h) 0,0003874

3) a) 3.310
   b) 0,000000004611
   c) 7.610.000.000
   d) 0,089473
   e) 7,85
   f) 0,000487
   g) 0,000084871
   h) 0,000000000004
   i) 0,00000847
   j) 4.000
   k) 38.1000.000

4) $\frac{1}{300}$

5) a) 15,466
   b) 8,802000135
   c) 127,99679

6) a) 991
   b) 1.187

7) a) $\frac{19}{4}$
   b) $\frac{35}{6}$

8) a) 19yd 2ft 4in
   b) 17yd 7in
   c) 10yd 2ft 7in
   d) 5yd 1ft 6in
   e) 34yd 1ft 9in
   f) 34yd 8in
   g) 16yd 2ft 11in
   h) 13yd 1ft 8in

9) C
10) 84,6683 ha
11) D
12) 500.000
13) D
14) 33.000
15) 12.000
16) 640
17) $ 399,50
18) D
19) $ 658,00
20) 6.451.200
21) D
22) A
23) A
24) B
25) C
26) $ 14.000,00
27) 1.250
28) $ 28.800,00
29) 175
30) $ 620,00
31) 28
32) a) 70g/cm³
    b) 0,043g/cm³
33) 1,022 kg/ℓ
34) a) 257g
    b) 0,8ℓ
35) 336 kg
36) 95,44 kg
37) B
38) E
39) C
40) E
41) C
42) E
43) C
44) B
45) A
46) B
47) E
48) E
49) C
50) E
51) C
52) E
53) E
54) B
55) B
56) C
57) C
58) B
59) A
60) B
61) A
62) C
63) C
64) B
65) C
66) B
67) B
68) 13,5 m
69) D
70) D
71) aumentar em 2m
72) C
73) B
74) C
75) B
76) D
77) C
78) $ 21,20
79) D
80) B

OBSERVAÇÕES

Regra de Três

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra, e a diminuição de uma implica na diminuição da outra, sempre na mesma razão.

Exemplos:

a) As grandezas **MASSA** e **PREÇO** são diretamente proporcionais, pois quanto maior é a massa de um certo produto, maior é o seu preço. Se dobrarmos a massa, o preço também deve dobrar.

b) As grandezas **NÚMERO DE MÁQUINAS DE UMA INDÚSTRIA** e **NÚMERO DE PEÇAS PRODUZIDAS** são diretamente proporcionais, pois quanto maior é o número de máquinas, maior é o número de peças produzidas. Se triplicarmos o número de máquinas, a produção deve triplicar.

Importante: Para que possamos garantir que duas grandezas são diretamente proporcionais, como mostramos, é necessário que o aumento de uma implique no aumento da outra, na mesma razão. No quadro abaixo, temos na 1ª coluna o valor, em metros, do lado de um quadrado; na 2ª coluna, temos o seu respectivo perímetro (soma dos lados), em metros, enquanto que na 3ª coluna, temos a sua respectiva área, em m².

LADO	PERÍMETRO	ÁREA
1	4	1
2	8	4
3	12	9

Observe que à medida que o lado aumenta, o perímetro também aumenta. Isto não é suficiente para concluirmos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Note que da 1ª para a 2ª linha o valor do lado foi multiplicado por 2 e o seu perímetro também foi multiplicado por 2. Da 1ª para a 3ª linha, o valor do lado foi multiplicado por 3 e o seu perímetro também foi multiplicado por 3. Isto indica que os aumentos são feitos nas mesmas razões, logo as grandezas valor do lado e perímetro são diretamente proporcionais.

Podemos verificar que o aumento do valor medida do lado implica no aumento de sua área. Mas será que isto garante que essas grandezas são diretamente proporcionais?

Como vimos anteriormente, da 1ª a 2ª linha, a medida do lado dobrou e a medida da área quadruplicou. Aumentaram em razões diferentes! Assim, embora o aumento da medida do lado do quadrado faça com que a sua área também aumente, podemos garantir que essas grandezas não são diretamente proporcionais.

Grandezas inversamente proporcionas

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando o aumento de uma delas ocasiona a diminuição da outra, e vice-versa, sempre em razões inversas.

Exemplos:

a) As grandezas **NÚMERO DE OPERÁRIOS** e **TEMPO DE DURAÇÃO DE OBRA** são inversamente proporcionais, pois quanto maior é o número de operários, menor é o tempo de conclusão da obra. Se dobrarmos o número de operários, o tempo de duração da obra se reduz à metade.

b) As grandezas **VELOCIDADE** e **TEMPO DE VIAGEM** são inversamente proporcionais, pois quanto maior é a velocidade, menor é o tempo necessário para concluir a viagem. Se triplicarmos a velocidade, o tempo de conclusão da viagem fica reduzido à terça parte.

Regra de três

Quando trabalhamos com grandezas proporcionais, em duas situações diferentes, podemos calcular uma dessas grandezas em função das demais. A esse processo chamamos de **regra de três**. Uma **regra de três** pode ser **simples** ou **composta**, conforme relacione duas grandezas (simples) ou mais de duas grandezas (composta). Também pode ser **direta**, se relacionar apenas grandezas diretamente proporcionais, **inversa** se relacionar apenas grandezas inversamente proporcionais, ou **direta e inversa**, quando relaciona grandezas dos dois tipos.

Resolução de uma regra de três

Exemplo ilustrativo 1:

Uma pessoa gasta 40 minutos, dirigindo a 60 km/h, para se deslocar da Tijuca até São Gonçalo. Em quanto tempo, esta pessoa, faria esta viagem, se a velocidade fosse de 80 km/h?

Resolução:

Em primeiro lugar devemos dispor corretamente as grandezas envolvidas, arrumando grandezas de mesmas unidades em uma mesma coluna:

40 min —— 60 km/h
x —— 80 km/h

Agora vamos montar uma equação em que o primeiro membro é a razão que contém a variável e o segundo membro é o produto das demais razões, que estarão invertidas, no caso das grandezas correspondentes serem inversamente proporcionais à grandeza associada à variável.

No exemplo acima a grandeza velocidade será relacionada à grandeza tempo. Podemos observar que aumentando-se a velocidade do automóvel, o tempo gasto diminui. Logo as grandezas são inversas, e a razão correspondente à velocidade ($\frac{60}{80}$), deverá ser invertida no 2º membro da equação:

$$\frac{40}{x} = \frac{80}{60}$$

$80x = 2400$

$x = 30$ min

Exemplo ilustrativo 2:

32 pedreiros constroem 240 m de muro em 12 dias. Em quantos dias, 40 pedreiros construirão 200 m de muro?

Resolução: Vamos arrumar as grandezas envolvidas:

32 pedreiros – 240 m – 12d
40 pedreiros – 200 m – xd

Como esta regra de três é composta, devemos comparar a grandeza onde está a variável com cada uma das demais, uma por vez, supondo que todas as outras são constantes.

Vamos relacionar a variável **tempo** com o **número de pedreiros**. Devemos observar, para tanto, que se aumentarmos o número de pedreiros, o tempo necessário para concluir a obra deverá diminuir (note que a grandeza número de metros de muro deve ser considerada, nesta análise, como constante), portanto essas grandezas são inversas e devemos inverter a razão $\frac{32}{40}$.

Analisamos agora a variável **tempo** com o **número de metros de muro** construído. É claro que se aumentarmos o comprimento do muro, o número de dias necessários para construi-lo aumentará também, logo essas grandezas são diretas e daí que não devemos inverter a razão 240/ 200

Montando a equação:

$$\frac{12}{x} = \frac{40}{32} \cdot \frac{240}{200} \text{ simplificando} \rightarrow \frac{12}{x} = \frac{1}{32} \cdot \frac{48}{1}$$

$48x = 12 . 32$

$48x = 384$

$x = 8$ dias

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Seis metros de um certo tecido custam $ 74,00. Qual o preço de 27 metros desse mesmo tecido?

2) Um relógio adianta 48 minutos por dia. Se esse relógio foi acertado às 7 horas, qual será a hora exata quando ele estiver marcando 17 h 45 min?

3) Uma secretária digitou 48 laudas em 10 horas. Em quanto tempo ela consegue digitar 72 laudas?

4) Um tecelão fabrica seis cachecóis em 2 h 40 min. Em 20 horas, quantos cachecóis ele fará?

5) Um avião com velocidade de 600 km/h gasta 20 min para ir de uma cidade A a uma cidade B. Um outro avião com velocidade de 800 km/h, quanto tempo levará para ir de A até B?

6) Vinte e quatro operários fazem uma obra em cinco dias. Em quanto tempo quarenta operários, igualmente capacitados, fariam a mesma obra?

7) Um muro é feito em 12 dias por 7 homens. Em quantos dias 3 homens farão o mesmo muro?

8) Com 5 ℓ de gasolina, um automóvel percorre a distância de 41 km. Quantos quilômetros percorrerá o mesmo automóvel com 20 ℓ de gasolina?

9) O comprimento, em metros, do arame necessário para produzir 320 pregos é igual ao número de pregos que se produzem com 20 metros desse mesmo arame. Quantos pregos serão produzidos com 500 metros desse arame?

10) Um engenheiro diz que pode terminar um certo trabalho em 3 dias se dispuser de um certo número de operários. Entretanto, com mais 3 operários, o trabalho pode ser feito em 2 dias. Quantos dias seriam necessários para que um único operário fizesse sozinho esse trabalho?

11) Um grupo de trinta e dois escoteiros parte para um acampamento com víveres suficientes para doze dias. Após seis dias de acampamento, chegam mais dezesseis escoteiros para se juntar ao grupo. Para quanto tempo mais durarão os mantimentos desse novo grupo?

12) Um avicultor comprou ração para alimentar seus vinte e quatro canários belgas durante doze dias. Após dois dias quatro canários morreram. Para quantos dias durará a ração para os pássaros restantes?

13) Um avicultor tinha milho para alimentar 15 galinhas durante 25 dias. Depois de 5 dias o avicultor comprou 5 galinhas. Três dias depois dessa compra, um "lobo mau" come algumas galinhas e o milho acaba em 15 dias. Quantas galinhas o "lobo mau" comeu?

14) Trinta operários constróem uma casa em seis dias, trabalhando oito horas por dia. Em quantos dias vinte e quatro operários construirão uma casa idêntica à primeira, trabalhando doze horas por dia?

15) Em uma fábrica 300 operários constróem 90 mesas em 4 dias, trabalhando 6 horas por dia. Quantas mesas 700 operários construirão em 18 dias, trabalhando 12 horas por dia?

16) Doze escavadeiras, cavam 1400 m² de um terreno em quatro dias. Em quantos dias oito escavadeiras, cavarão 2100 m² de um terreno cuja dureza é $\frac{2}{3}$ da dureza do outro terreno?

17) Vinte pedreiros constróem 270 metros de muro em cinco dias, trabalhando oito horas por dia. Quantos metros de muro, seis pedreiros, com o dobro da atividade dos primeiros, construirão trabalhando quatro horas por dia, durante vinte e cinco dias?

18) Um navio com uma tripulação de 3600 homens necessita de 210000 litros de água para fazer uma viagem com duração de 35 dias. Se a quantidade de marinheiros for reduzida em 600 homens e o número de litros de água passar a ser 250000, quantos dias poderá durar essa viagem?

19) Oito operários cavam um poço de 2 m de altura, 3 m de largura e 4,5 m de comprimento em 18 dias. Quantos operários serão necessários para cavar um poço de 1,5 m de altura, 4 m de largura e 6 m de comprimento, em 16 dias?

20) 5 tratores iguais preparam para plantação, um terreno de 20 hectares, trabalhando 8 horas por dia durante 7 dias. Quantas horas por dia precisam trabalhar 14 tratores para preparar 54 hectares de terreno em 6 dias?
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

21) Um pastor possui 16 ovelhas e ração suficiente para alimentá-las durante 19 dias. Após 4 dias, um bando de lobos matou 6 ovelhas e após 3 dias deste evento o pastor adquiriu algumas ovelhas, constatando-se que a ração restante daria para alimentar o novo rebanho por mais 15 dias. Quantas ovelhas foram adquiridas pelo pastor?

22) Dez homens comem dez sanduíches em dez minutos. Em quantos minutos trezentos homens comerão trezentos sanduíches?

QUESTÕES DE CONCURSOS

23) **(ENEM)** Se noventa operários constroem uma estrada em 20 meses, estão cinquenta operários constroem esta mesma estrada em:
a) 26 meses
b) 30 meses
c) 32 meses
d) 36 meses
e) 40 meses

24) **(ENEM)** Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4 800 W consome 4,8 kW por hora.
Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?
a) 0,8
b) 1,6
c) 5,6
d) 11,2
e) 33,6

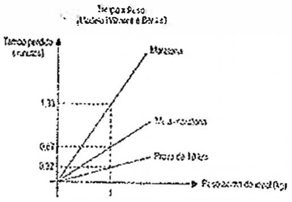
25) **(ENEM)** Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da lua. O calendário maia segue o ciclo de Vênus,

com cerca de 584 dias,e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra.

MATSUURA, Oscar. Calendários e o fluxo do tempo. Scientific American Brasil. Disponível em: http://www.uol.com.br. Acesso em: 14 out. 2008 (adaptado).

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?
a) 30 ciclos
b) 40 ciclos
c) 73 ciclos
d) 240 ciclos
e) 384 ciclos

26) **(ENEM)** O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2km), a meia-maratona (21,1km) ou uma prova de 10km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas, utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico:



Altura (m)	Peso (kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
:	:

Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em:
a) 0,32 minuto
b) 0,67 minuto
c) 1,60 minuto
d) 2,68 minutos
e) 3,35 minutos

27)**(ENEM)** Pneus usados geralmente são descartados de forma inadequada, favorecendo a proliferação de insetos e roedores e provocando sérios problemas de saúde pública. Estima-se que, no Brasil, a cada ano, sejam descartados 20 milhões de pneus usados. Como alternativa para dar uma destinação final a esses pneus, a Petrobras, em sua unidade de São Mateus do Sul, no Paraná, desenvolveu um processo de obtenção de combustível a partir da mistura dos pneus com xisto. Esse procedimento permite, a partir de uma tonelada de pneu, um rendimento de cerca de 530 kg de óleo.

Disponível em: http://www.ambientebrasil.com.br Acesso em: 3 out. 2008 (adaptado).

Considerando que uma tonelada corresponde, em média, a cerca de 200 pneus, se todos os pneus descartados anualmente fossem utilizados no processo de obtenção de combustível pela mistura com xisto, seriam então produzidas:
a) 5,3 mil toneladas de óleo.
b) 53 mil toneladas de óleo.
c) 530 mil toneladas de óleo.
d) 5,3 milhões de toneladas de óleo.
e)530 milhões de toneladas de óleo.

28) **(ENEM)** Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:
- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: http://cyberdiet.terra.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.
A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?
a) 50 minutos
b) 60 minutos
c) 80 minutos
d) 120 minutos
e) 170 minutos

29) **(CEFET)**Um professor mora na cidade do Rio de Janeiro e trabalha numa escola na cidade de Angra dos Reis. Semanalmente ele sai de casa dirigindo seu automóvel, segue pela Rodovia Rio – Santos que liga as duas cidades e chega em sua escola na **hora H** da primeira aula. Na primeira semana de trabalho ele percorreu esse caminho na ida, com uma velocidade média de **80 km/h** num tempo disponível de **3 horas** para chegar. Na segunda semana, também na ida, ao se preparar para fazer o mesmo trajeto de casa para a escola, percebeu que se atrasara um pouco e que o tempo que dispunha para chegar era reduzido em 20% em relação ao tempo da primeira semana. Para chegar na escola em Angra dos Reis, na mesma **hora H**, o referido professor deverá aumentar sua velocidade média para:
a) 85 km/h
b) 90 km/h
c) 95 km/h
d) 100 km/h
e) 105 km/h

30) **(CEFET)** O elevador panorâmico do Cantagalo pode transportar 12 adultos ou 20 crianças. Qual o maior número de crianças que poderia ser transportadas com 9 adultos?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

31) **(CEFET)** Arnaldo pode realizar um trabalho em 9 dias. Bernardo é 50% mais eficiente que Arnaldo. O número de dias que Bernardo leva para concluir o mesmo trabalho que Arnaldo é:
a) 3
b) 4
c) 4,5
d) 6
e) 13,5

32) **(CN)** Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:
a) 54
b) 36
c) 24
d) 18
e) 9

33) **(CN)** Uma bicicleta tem uma roda de 40 cm de raio e a outra de 50 cm de raio. Sabendo que a roda maior dá 120 voltas para fazer certo percurso, quantas voltas dará a roda menor, para fazer 80 % do mesmo percurso?
a) 78,8
b) 187,5
c) 120
d) 96
e) 130

34) **(ENEM)** Em abril de 2009, o observatório espacial americano Swift captou um feixe de raios gama proveniente de uma explosão no espaço. Cientistas italianos e ingleses apresentaram conclusões de que as luzes captadas provêm do colapso de uma estrela ocorrido há 13 bilhões de anos, apenas 630 milhões de anos após o Big Bang, expansão súbita que originou o Universo. Batizada de GRB 090423, a estrela é o objeto celeste mais antigo já observado pelo homem.

Revista Veja. 4 nov. 2009 (adaptado).

Suponha uma escala de 0 h a 24 h e considere que o Big Bang ocorreu exatamente à 0 h. Desse modo, a explosão da estrela GRB 090423 teria ocorrido à(s)
a) 1,10 h.
b) 1,16 h.
c) 1,22 h.
d) 1,84 h.
e) 2,01 h.

35) **(CEFETEQ)** Paulo percorre 4320 km em seu automóvel, durante 5 dias, rodando 8 horas por dia. Calcule quantas horas diárias deverá Paulo rodar com o mesmo veículo para percorrer 2916 Km em 3 dias, mantidas as mesmas condições.

36) **(CEFET)** Num programa de reflorestamento de uma certa região, 4 homens, trabalhando 8 horas por dia, plantaram, em 10 dias, 6.000 mudas. Quantas horas por dia terão que trabalhar 6 homens para plantar 9.000 mudas, em apenas 8 dias?

37) **(EsPCEx)** Um grupo de jovens em 15 dias, fabricam 300 colares de 1,20 m cada. Quantos colares de 1,25 m serão fabricados em 5 dias?

38) **(CM)** Três máquinas, funcionando 10 horas por dia, durante 4 dias, imprimem 60.000 folhas. Admitindo-se que uma das máquinas não esteja funcionando e havendo necessidade de imprimir, em 6 dias, 120.000 folhas, o número de horas por dia que cada uma das máquinas restantes deve funcionar é:
a) 10
b) 15
c) 20
d) 24
e) 25

39) **(EPCAR)** Um tear eletrônico, trabalhando 5 horas por dia, produz 1200 peças em 3 dias. O número de horas que deverá trabalhar no 8° dia para produzir 1840 peças, se o regime de trabalho fosse 3 horas diárias, seria um número do intervalo:
a) [2, 3[
b) [3, 4[
c) [4, 6[
d) [1, 2[

40) **(EPCAR)** Se 16 homens gastam 10 dias montando 32 máquinas, o número de dias que 20 homens necessitarão para montar 60 máquinas é:
a) par
b) ímpar
c) primo
d) não inteiro

41) **(CM)** Em 30 dias, 24 operários asfaltam uma avenida de 960 metros de comprimento por 9 metros de largura. Nas mesmas condições de trabalho, quantos operários seriam necessários para fazer o asfaltamento, em 20 dias, de uma avenida de 600 metros de comprimento e 10 metros de largura?
a) 25
b) 28
c) 31
d) 34
e) 37

42) **(EPCAR)** Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10° dia, 4 operários foram dispensados.
No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é:
a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira.
d) quarta-feira.

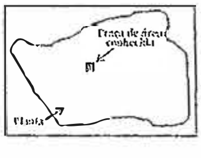
43) **(EPCAR)** Uma fábrica recebeu uma encomenda de 50 aviões. A fábrica montou os aviões em 5 dias, utilizando 6 robôs de mesmo rendimento, que trabalharam 8 horas por dia. Uma nova encomenda foi feita, desta vez 60 aviões. Nessa ocasião, um dos robôs não participou da montagem. Para atender o cliente, a fábrica trabalhou 12 horas por dia. O número de dias necessários para que a fábrica entregasse as duas encomendas foi:
a) exatamente 10
b) mais de 10
c) entre 9 e 10
d) menos de 9

44) **(CM)** Se da construção de um reservatório foi realizada em 10 dias por 12 operários, cada um deles trabalhando 6 horas por dia, o restante da construção pode ser feito em 9 dias por x operários, cada um trabalhando 8 horas por $\frac{1}{3}$ dia. Então, o valor de x é:
a) 18
b) 20
c) 22
d) 24
e) 25

45) **(EPCAR)** Trinta operários trabalhando 8 horas por dia, constroem 36 casas em 6 meses. O número de dias que deverão ser trabalhados no último mês para que 2/3 dos operários, trabalhando 2 horas a mais por dia, construam 0,75 das casas, considerando um mês igual a 30 dias, é:
a) 10
b) 12
c) 15
d) 16

46) **(E. E. Aer)** Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Quantos dias levarão para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando 6 horas diárias?
a) 12
b) 36
c) 64
d) 81

47) **(ENEM)** Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m x 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente:
a) 800
b) 10000
c) 320000
d) 400000
e) 5000000



48) **(ENEM)** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.
Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:
a) 920 kg
b) 800 kg
c) 720 kg
d) 600 kg
e) 570 kg

49) **(ENEM)** Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R$ 120,00 por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R$ 600,00 semanais e, como um estímulo, também propôs que na semana na qual ele vendesse R$ 1.200,00, ele receberia R$ 200,00, em vez de R$ 120,00.
Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de:
a) R$ 160,00
b) R$ 165,00
c) R$ 172,00
d) R$ 180,00
e) R$ 198,00

50) **(ENEM)** Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina.
O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.
Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria:
a) manter sua proposta.
b) oferecer 4 máquinas a mais.
c) oferecer 6 trabalhadores a mais.
d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

51) **(CN)** Cláudio comprou 10 dólares com 125 australes e Marta comprou 5 australes com 120 pesos chilenos. Assim, João pode comprar:
a) 3 dólares com 100 pesos chilenos.
b) 3000 pesos chilenos com 10 dólares.
c) 1200 pesos chilenos com 5 dólares.
d) 800 pesos chilenos com 2 dólares.
e) 50 dólares com 1000 chilenos.

52) **(UFRJ)** O preço de 32 jabuticabas é igual ao número de jabuticabas que podemos comprar com $ 2,00.
Quantas jabuticabas pode-se comprar com $ 25,00?

53) **(EPCAR)** Se gato e meio, comem rato e meio em minuto e meio:
a) Em quanto tempo 1 gato come dois ratos?
b) Quantos gatos comem 60 ratos em 30 minutos?

54) **(CN)** Se K abelhas, trabalhando K meses do ano, durante K dias no mês e durante K horas por dia, produzem K litros de mel; então o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dia, em W dias e em W meses do ano, será:
a) K^3 / W^2
b) W^5 / K^3
c) K^4 / W^3
d) W^3 / K^4
e) W^4 / K^3

55) **(CEFETEQ)** Quatro torneiras iguais despejam um total de 2.800 litros de água em 2 horas. Calcular, em quantas horas, três dessas torneiras despejam um total de 21.000 litros de água.

56) **(CN)** Um reservatório deve ser enchido completamente com uma mistura de 76% de gasolina e 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha, em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?
a) 1h 30 min
b) 1h 36 min
c) 1h 42 min
d) 1h 48 min
e) 1h 54 min

57) **(EPCAR)** Um aluno da EPCAR possui um relógio que adianta 2/3 do minuto a cada 12 horas. Às 11 horas e 58 minutos (horário de Brasília) do dia 10/03/07, verifica-se que o mesmo está adiantado 8 minutos.
Considerando que não há diferença de fuso horário entre o relógio do aluno e o horário de Brasília, marque a alternativa correta.
a) Às 23 horas e 58 minutos (horário de Brasília), do dia 05/03/2007, o relógio do aluno marcava 23 horas, 58 minutos e 40 segundos.
b) Para um compromisso às 12 horas (horário de Brasília), do dia 06/03/2007, sem se atrasar nem adiantar, o aluno deveria descontar 1 minuto e 40 segundos da hora marcada em seu relógio.
c) No dia 07/03/2007, às 12 horas (horário de Brasília), o relógio do aluno marcava 12 horas e 2 minutos.
d) A última vez em que o aluno acertou o relógio foi às 11 horas e 58 minutos do dia 04/03/2007.

58) **(EPCAR)** Nos preparativos da festa de 60 anos da EPCAR, um grupo A composto de 6 soldados, trabalhando 6 horas por dia, contava com o prazo de 7 dias para aparar a grama dos jardins, utilizando todos os componentes o mesmo tipo de equipamento.
Já que outros setores da Escola necessitavam também de reparos, ao final do 5º dia, quando apenas 75% do gramado estava cortado, alguns soldados foram remanejados e um novo grupo B se formou.
Esse grupo B, cuja quantidade de soldados correspondia a $\frac{1}{3}$ do grupo A, dispôs-se a acabar de aparar a grama dos jardins, aumentando a carga horária diária em $33\frac{1}{3}\%$ e utilizando equipamentos duas vezes mais produtivos.
Supondo que todos os equipamentos tiveram perfeito funcionamento aproveitando sua capacidade máxima, é correto afirmar que o grupo B concluiu a tarefa:
a) após o prazo previsto de sete dias.
b) em dez horas de trabalho.
c) em oito horas de trabalho.
d) um dia antes do prazo previsto.

59) **(EPCAR)** Um grupo A de 6 pedreiros e 8 ajudantes executou $\frac{4}{5}$ de uma obra em 12 dias, trabalhando 6 horas por dia. Por motivo de férias, o grupo A foi substituído por um grupo B de 8 pedreiros e 2 ajudantes que trabalhou 5 horas por dia para terminar a obra. Sabendo-se que a produção de 2 ajudantes equivale, sempre, à produção de 1 pedreiro e que não houve ausência de nenhum componente dos grupos de trabalho em nenhum dos dias, é correto afirmar que o grupo B
a) ao substituir o grupo A, acarretou um atraso de 1 dia no tempo em que a obra teria ficado pronta, caso a mesma tivesse sido concluída pelo grupo A.
b) terminou a obra no tempo t > 5 dias.
c) gastaria mais de 21 dias se tivesse executado a obra inteira.
d) teria executado a parte feita pelo grupo A em menos de 15 dias.

60) **(EPCAR)** Três operários A, B e C trabalhando juntos 8 horas por dia construíram um muro em 6 dias. Se B tivesse trabalhado sozinho, 8 horas por dia, gastaria $\frac{2}{3}$ a mais da quantidade de dias utilizada pelos três juntos. Se **A** tivesse trabalhado sozinho, 4 horas por dia, gastaria o quádruplo do número de dias de **B**.
Considerando A, B e C cada um trabalhando 8 horas por dia, sendo mantidas as demais condições de trabalho, é correto afirmar que para construir tal muro
a) um deles, isoladamente, gastaria exatamente 1 mês.
b) A e B juntos gastariam mais de 7 dias.
c) C gastariam sozinho menos de 1 mês e meio de trabalho.
d) B e C trabalhando juntos gastariam menos de 10 dias.

61) **(CEFET)** Uma escola tem merenda para alimentar seus 160 alunos durante 62 semanas. Após 14 semanas, houve uma evasão em massa de 40 alunos. Passadas mais 15 semanas, a escola recebe 90 alunos novos. Quantas semanas, no total, a reserva da merenda durou, sabendo-se que, durante esse tempo, não recebeu nada para o estoque?

62) **(EPCAR)** A quantidade de suco existente na cantina de uma escola é suficiente para atender o consumo de 30 crianças durante 30 dias. Sabe-se que cada criança consome, por dia, a mesma quantidade de suco que qualquer outra criança desta escola. Passados 18 dias, 6 crianças tiveram que se ausentar desta escola por motivo de saúde.
É correto afirmar que, se não houver mais ausências nem retornos, a quantidade de suco restante atenderá o grupo remanescente por um período de tempo que somado aos 18 dias já passados, ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em:
a) 10%
b) 20%
c) 5%
d) 15%

63) **(CM)** Um hospital tem remédio para medicar 320 pacientes durante 33 dias. Após 8 dias, o hospital recebe mais 80 pacientes, mas a quantidade de medicamento disponível não sofre acréscimo. Então, será possível medicar o total de pacientes por mais:
a) 21 dias
b) 20 dias
c) 19 dias
d) 18 dias
e) 17 dias

64) **(CEFET)** Um fazendeiro tem ração estocada para alimentar sua criação de galinhas durante um mês (trinta dias). Após consumidos dois terços do estoque, o fazendeiro resolve vender um terço da criação. Por quantos dias poderão ser alimentadas as galinhas restantes?
a) 8
b) 10
c) 13
d) 15
e) 18

65) **(CEFET)** O dono de um canil gasta 180 kg de ração por mês para alimentar igualmente cada um de seus 24 cães. Tendo morrido alguns de seus cães, é aconselhado a dobrar a quantidade da ração por animal. Quantos cães restaram no canil, se, ao seguir o conselho, um estoque de 90 kg de ração passou a durar 10 dias?

66) **(CEFET)** Uma granja dispõe de ração suficiente para 200 galinhas, durante 100 dias. Transcorridos os primeiros 25 dias de consumo da ração, a granja recebe mais 50 galinhas. A partir dessa data, a granja poderá alimentar as 250 galinhas por mais quantos dias?
a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

67) **(CM)** Em um quartel de Cavalaria do Exército, a ração existente é suficiente para alimentar 40 cavalos durante 45 dias. Supondo que os cavalos consomem quantidades iguais de ração diariamente, quantos dias duraria a terça parte da ração se existissem apenas 30 cavalos?

a) 11 dias
b) 15 dias
c) 18 dias
d) 20 dias
e) 25 dias

68) **(CM)** Um fazendeiro tinha ração para alimentar suas 45 ovelhas durante 25 dias. Depois de passados 5 dias, ele resolveu comprar mais 5 ovelhas, sendo obrigado a aumentar proporcionalmente a quantidade diária de ração oferecida ao seu rebanho a partir desta compra.
Então, o tempo, em dias, que a ração durou depois da compra das 5 ovelhas foi:
a) 12
b) 15
c) 18
d) 20
e) 22

69) **(CN)** Uma criação de 12 aves tipo A consome um saco de ração K em exatamente 30 dias e uma criação de 6 aves tipo B consome um saco de ração K, igual ao primeiro, em exatamente 10 dias. Inicialmente, tem-se um saco de ração K para cada um dos tipos de aves mencionados. No fim do quinto dia, a ração disponível para as aves de tipo B estragou-se, obrigando a distribuição de toda a ração restante para os dois tipos de aves. Assim sendo, quantos dias inteiros vai durar a ração restante para alimentar todos os animais na forma regular?
a) Cinco
b) Seis
c) Sete
d) Oito
e) Nove

GABARITO

1) $ 333,00
2) 17h 23 min 30 s
3) 15h
4) 45
5) 15 min
6) 3 dias
7) 28
8) 164 km
9) 2.000
10) 18
11) 4 dias
12) 12
13) 4
14) 5
15) 1.890
16) 6
17) 405
18) 50
19) 12
20) D
21) 4
22) 10
23) D
24) D
25) A
26) E
27) B
28) B
29) D
30) C
31) D
32) D
33) C
34) A
35) 9h/d
36) 10
37) 96
38) C
39) A
40) B
41) A
42) D
43) C
44) B
45) B
46) C
47) E
48) A
49) C
50) D
51) B
52) 100
53) a) 3min
b) 3
54) E
55) 20h
56) B
57) A
58) B
59) A
60) D
61) 28
62) A
63) B
64) D
65) 18
66) E
67) D
68) C
69) B

OBSERVAÇÕES

Médias

Neste capítulo iremos abordar o cálculo das diversas médias existentes na aritmética usual.

1) Média Aritmética

"A média aritmética entre vários números é obtida dividindo-se a soma desses números pela quantidade deles."

$$MA = \frac{\text{SOMA}}{\text{QUANTIDADE}}$$

Exemplo:

Determine a média aritmética entre os números 3; 7; 2 e 6.

$$MA = \frac{3+7+2+6}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5$$

2) Média Geométrica ou Proporcional

"A média geométrica entre n números é igual à raiz de índice n do produto desses números."

$$MG = \sqrt[\text{quantidade}]{\text{PRODUTO}}$$

Exemplo:

Determine a média geométrica entre os números 2; 32 e 1.

$$MG = \sqrt[3]{2.32.1} = \sqrt[3]{64} = 4$$

3) Média Ponderada

"A média ponderada entre vários números, com certos pesos, é igual à soma dos produtos de cada número pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos".

$$MP = \frac{\text{SOMA DE NÚMEROS VEZES PESO}}{\text{SOMA DOS PESOS}}$$

Exemplo:

Um aluno prestou provas de matemática, que tem peso 2, português quem tem peso 2 e história que tem peso 1. Se suas notas foram respectivamente iguais a 7,0; 8,0 e 6,0, determine sua média.

$$MP = \frac{7\times2+8\times2+6\times1}{2+2+1} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

4) Média Harmônica

"A média harmônica entre vários números é o inverso da média aritmética dos inversos desses números."

$$MH = \frac{1}{\text{MÉDIA ARITMÉTICA DOS INVERSOS DOS NÚMEROS}}$$

Exemplo:

Determine a média harmônica entre os números 3; 5 e 4.

→ Inversos dos números $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

→ Média aritmética dos inversos:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{3} = \frac{\frac{20+12+15}{60}}{3} = \frac{\frac{47}{60}}{3} = \frac{47}{60}\cdot\frac{1}{3} = \frac{47}{180}$$

$$\rightarrow MH = \frac{1}{\frac{47}{180}} = \frac{180}{47}$$

Observações:

1) A média harmônica entre dois números é igual ao duplo produto desses números dividido pela soma deles:

$$MH\,(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Exemplo:

Determine a média harmônica entre os números 3 e 5.

$$MH\,(3{,}5) = \frac{2.3.5}{3+5} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

2) Dados dois números **a** e **b**, as suas médias aritmética, geométrica e harmônica são ligadas pela relação:

$$MA\,(a, b) \,.\, MH\,(a, b) = MG^2\,(a, b)$$

Exemplo: Determine a média geométrica entre dois números, sabendo que suas médias aritmética e harmônica valem, respectivamente, 6,5 e $\frac{72}{13}$.

Resolução: Substituindo-se esses valores na relação dada, temos: $6{,}5 \,.\, \frac{72}{13} = MG^2$, simplificando-se 6,5 com 13:

$\frac{72}{2} = MG^2$, logo: $MG^2 = 36$; $MG = \sqrt{36}$; $MG=6$

3) Dados dois números positivos cujas médias aritmética, geométrica e harmônica são expressas, respectivamente, por MA, MG e MH, sempre vale a relação $MH \le MG \le MA$.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine a média aritmética entre os números 4, 7, 18 e 3.

2) Determine a média geométrica entre os números $\frac{28}{9}$, $\frac{3}{7}$ e 48.

3) Determine a média ponderada dos números 12, 20 e 18, com pesos respectivamente iguais a 4, 3 e 5.

4) Determine a média harmônica entre os números 4, 6 e 3.

5) Determine a média geométrica entre $\frac{1}{x-y}$, $x^2 - y^2$ e $(x^2 - xy + y^2)$.

6) A média harmônica de dois números é 16. Calcule-os, sabendo-se que um deles é o dobro do outro.

7) Dois candidatos A e B disputam uma vaga em um concurso público, prestando, para isto, provas de Matemática, Português e História, que têm pesos respectivamente iguais a seis, três e um. Se o candidato **A** obteve notas sete, quatro e sete, e o candidato **B** obteve notas quatro, nove e oito, nas provas citadas anteriormente, qual deles estará mais apto a conseguir a vaga?

8) A média aritmética entre 32 números é 15. Se retirarmos os números 37 e 23, qual a média aritmética entre os números restantes?

9) Uma lanchonete oferece três opções de sanduíches: O Big-Ronald´s, o Framburguer e o Hotfish, cujos preços são $ 3,40, $ 2,10 e $ 1,60, respectivamente. Um grupo de jovens consumiu cinco Big Ronald´s, oito Framburgueres e uma certa quantidade de Hotfishes.

Quantos Hotfishes esse grupo consumiu, sabendo-se que o preço médio por sanduíches foi de $ 2,25?

10) Determine a média aritmética de dois números cujas médias harmônica e geométrica, valem, respectivamente 6, 4 e 8.

11) Em uma escola um aluno só passa de ano em uma matéria se tiver média igual ou superior a 7,0 nos quatro bimestres. Se Ari tirou nos três primeiros bimestres notas respectivamente iguais a 6,4; 5,2 e 8,4, em Matemática, quanto deverá tirar, no mínimo, no quarto bimestre para passar de ano nessa matéria?

12) A grande especialidade dos bares da cidade de Caimpé é a bebida "rabo de pavão". Para prepará-la devemos juntar três doses do conhaque "Voz do Além", a quatro doses da aguardente "Morte Lenta", a oito doses do licor "Pimenta Malagueta". Sabendo-se que cada dose dos "ingredientes" custam, respectivamente $ 2,00, $ 1,50 e $ 3,00, determine qual será o preço de cada dose dessa explosiva iguaria.

13) Determine a média geométrica de dois números cujas médias aritmética e harmônica valem, respectivamente, 8 e 4,5.

14) Coloque em ordem crescente as médias aritmética, harmônica e geométrica entre os números 4 e 9.

15) A média geométrica entre os números 2/3, 6/5, 10 e x vale 2. Calcule o valor de x.

16) Num certo dia, a variação de temperatura num laboratório foi

Horas	10	11	12	13	14	15
°C	26,5	27,0	28,0	29,0	28,5	27,5

A temperatura média nesse período foi, em graus, de:
a) 27,75
b) 28,25
c) 28,50
d) 33,30

17) A média aritmética de 10 números é 45 e a média dos 8 primeiros é 40. A soma dos 2 números que foram excluídos vale:
a) 80
b) 95
c) 110
d) 120
e) 130

18) Numa pequena empresa, com 20 funcionários, a distribuição dos salários é a seguinte:

Número de empregados	Salário
12	8.000
5	12.000
3	20.000

a) Qual é o salário médio dos empregados dessa empresa?
b) A empresa vai contratar um diretor-geral e não gostaria que a nova média salarial superasse o maior salário atual. Qual é o salário máximo que ela pode oferecer ao diretor?

19) Uma pessoa comprou 5 presentes a $ 12,00 cada um, 3 presentes a $ 15,00 cada e 2 presentes a $ 8,50 cada. O preço médio, por presente, corresponde a:
a) $ 11,60
b) $ 11,80
c) $ 12,00
d) $ 12,20
e) $ 12,40

QUESTÕES DE CONCURSOS

20) **(CEFETEQ)** A média harmônica entre os números 2, 3 e 6 é:
a) 3,7
b) 3,4
c) 3,3
d) 3,2
e) 3,0

21) **(CN)** Se os números x, y e z são, respectivamente iguais às médias aritmética, geométrica e hamônica de dois números reais positivos, então:
a) $x.y=1$
b) $x.z=y$
c) $x.z=y^2$
d) $y^2+z^2=x^2$
e) $(y+z)^2=x^2$

22) **(CN)** Se h, g e a são, respectivamente, as médias harmônica, geométrica e aritmética entre dois números, então:
a) ah = 2g
b) ah = g
c) ah = $2g^2$
d) ah = g^2
e) ah = $2\sqrt{g}$

23) **(CN)** Seja $M = \frac{x.y}{x+y}$, onde x e y são reais positivos, logo M é:
a) o quociente entre a média geométrica e a média aritmética de x e y.
b) a metade do quociente entre a média geométrica e a média aritmética de x e y.
c) a média aritmética dos inversos de x e y.
d) a média harmônica de x e y.
e) a metade da média harmônica de x e y.

24) **(ENEM)** A média aritmética de 11 números é 45. Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será:
a) 48,7
b) 48
c) 47,5
d) 42
e) 41,5

25) **(UFF)** Para que a média aritmética das notas de uma turma de 20 alunos aumentasse em 0,1, alterou-se uma dessas notas para 7,5. Antes da alteração, tal nota era:
a) 5,5.
b) 6,0
c) 7,4
d) 7,5
e) 8,5

26) **(UNICAMP)** A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

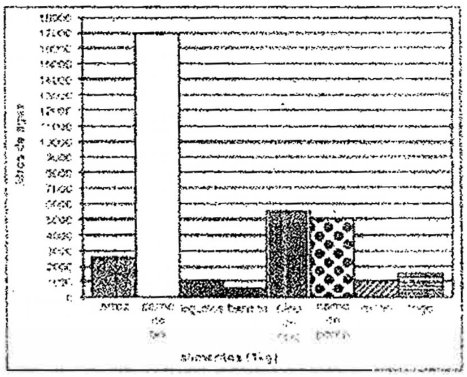
27) **(CN)** Um aluno calculou a média aritmética entre os cem primeiros números inteiros positivos, encontrando $50\frac{1}{2}$. Retirando um desses números encontrou como nova média aritmética $50\frac{27}{99}$. O número retirado está entre:

(Dado: A média aritmética de n números é igual à soma desses n números dividida por n).
a) 30 e 40
b) 40 e 50
c) 50 e 60
d) 60 e 70
e) 70 e 80.

28) **(CN)** Um professor de matemática apresentou uma equação do 2° grau completa, com duas raízes reais positivas, e mandou calcular, as médias aritmética, geométrica e harmônica entre essas raízes, sem determiná-las. Nessas condições
a) somente foi possível calcular a média aritmética.
b) somente foi possível calcular a média aritmética e geométrica.
c) somente foi possível calcular as médias aritmética e harmônica.
d) foi possível calcular as três médias pedidas.
e)não foi possível calcular as três médias pedidas.

29) **(CM)** Sendo M_a a média aritmética e M_g a média geométrica das raízes da equação $x^3 + 10x^2 + 16x = 0$, podemos afirmar que:
a) 0 £$M_g<M_a$
b) $0<M_a<M_g$
c) M_a£ $0<M_g$
d) $0<M_g<M_a$
e) M_a£ 0 £M_g

30) **(ENEM)** Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade de litros de água necessária para a produção de 1kg de alguns alimentos.



Com base no gráfico, para a produção de 100kg de milho, 100kg de trigo, 100kg de arroz, 100kg de carne de porco e 600kg de carne de boi, a quantidade média necessária de água, por quilograma de alimento produzido, é aproximadamente igual a:
a) 415 litros por quilograma.
b) 11.200 litros por quilograma.
c) 27.000 litros por quilograma.
d) 2.240.000 litros por quilograma.
e) 2.700.000 litros por quilograma.

31)**(CPII)** Um comerciante de frutas possuía 70 dúzias de laranjas de uma mesma qualidade para vender num dia ensolarado do mês de Outubro. Inicialmente, começou vendendo a dúzia dessa laranja por R$ 3,70 e, conforme as vendas não correspondiam às suas expectativas, foi reduzindo o preço para garantir a venda de toda a mercadoria. Dessa forma, o preço da laranja foi reduzido em três ocasiões. A tabela abaixo informa a quantidade de dúzias de laranjas vendidas em cada horário daquele dia e os respectivos preços cobrados pelo comerciante.

Período	Preço por dúzia	N.° de dúzias vendidas
Das 8h às 10h	3,70	10
Das 10h às 12h	3,20	15
Das 12h às 14h	2,80	30
Das 14h às 16h	2,50	15

a)Qual foi o preço médio da dúzia da laranja vendida naquele dia?
b)Se o comerciante vendesse as 25 primeiras dúzias a R$ 3,42 (a dúzia), por quanto deveria vender cada dúzia restante para que o preço médio das dúzias de laranja vendidas naquele dia fosse de R$ 3,15?

32) **(ENEM)** O IGP-M é um índice da Fundação Getúlio Vargas, obtido por meio da variação dos preços de alguns setores da economia, do dia vinte e um do mês anterior ao dia vinte do mês de referência. Ele é calculado a partir do Índice de Preços por Atacado (IPA-M), que tem peso de 60% do índice, do Índice de Preços ao Consumidor (IPC-M), que tem peso de 30%, e do Índice Nacional de Custo de Construção (INCC), representando 10%. Atualmente, o IGP-M é o índice para a correção de contratos de aluguel e o indexador de algumas tarifas, como energia elétrica.
A partir das informações, é possível determinar o maior IGP-M mensal desse primeiro trimestre, cujo valor é igual a

INCC

MÊS /ANO	ÍNDICE DO MÊS (em %)
MAR / 2010	0,45
FEV / 2010	0,35
JAN / 2010	0,52

IPC-M

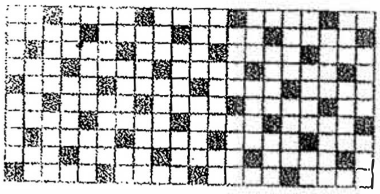
MÊS /ANO	ÍNDICE DO MÊS (em %)
MAR / 2010	0,83
FEV / 2010	0,88
JAN / 2010	1,00

IPA-M

MÊS /ANO	ÍNDICE DO MÊS (em %)
MAR / 2010	1,07
FEV / 2010	1,42
JAN / 2010	0,51

a) 7,03%
b) 3,00%
c) 2,65%
d) 1,15%
e) 0,66%

33)**(ENEM)** Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado abaixo, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio.



As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de:
a) R$ 8,20
b) R$ 8,40
c) R$ 8,60
d) R$ 8,80
e) R$ 9,00

34) **(CEFET)** Uma micro empresa produziu 10.000 unidades de um certo produto, vendendo-o da seguinte forma:
as primeiras 3.000 unidades, ao preço unitário de $ 20,00
as 5.000 unidades seguintes, ao preço unitário de $ 25,00
as últimas 2.000 unidades, ao preço unitário de $ 32,00
Qual foi o preço médio unitário?
a) $ 24,60
b) $ 24,90
c) $ 32,00
d) $ 32,90
e) $ 33,50

35)**(UFRJ)** Um aluno da escola XYZ faz quatro provas de matemática por ano. A primeira prova possui peso um, a segunda peso dois, a terceira peso três e a quarta peso

quatro. João obteve nota cinco na primeira prova, cinco na segunda e sete na terceira.
A média final do aluno é calculada através da média ponderada entre as quatro provas. Para aprovação, o aluno deve ter média igual ou superior a seis.
Determine a nota mínima que João deve obter na quarta prova para ser aprovado.

36) **(CN)** No Colégio Naval, a turma do 1º ano é distribuída em 5 salas. Num teste de Aritmética, as médias aritméticas das notas dos alunos, por sala, foram, respectivamente: 5,5; 5,2; 6,3; 7,1 e 5,9. A média aritmética das notas da turma é
a) 5,9
b) 6,0
c) 6,15
d) 6,5
e) impossível de ser calculada com esses dados.

37) **(CM)** Um aluno para ser aprovado no Colégio Militar, precisa ter média anual maior ou igual a 5. Se ele obteve nos três primeiros bimestres notas 3,8; 4,8; e 4,6 que têm peso 1 cada uma, quanto precisa tirar, no mínimo, no quarto bimestre (que tem peso 2), para ser aprovado?
a) 5,8
b) 6,0
c) 5,4
d) 5,9
e) 6,3

38) **(CM)** Em um concurso todas as quatros provas (Língua Portuguesa, Matemática, Língua Estrangeira e Noções de Informática) têm o mesmo valor máximo, que é 100. A prova de Língua Portuguesa tem peso 4, a de Língua Estrangeira tem peso 3 e a de Noções de Informática, peso 2. Um candidato obteve nota 75 em Língua Portuguesa, 80 em Matemática, 90 em Língua Estrangeira e 70 em Noções de Informática, sem computar os pesos. A média ponderada foi igual a 79,20. Assim sendo, o peso da prova de Matemática é:
a) 3,1
b) 3,25
c) 3,5
d) 3,75
e) 4,5

39) **(CN)** Com a finalidade de se pesquisar a renda média em reais M da sua população, uma determinada região S foi dividida em quatro setores: X, Y, Z e W, com, respectivamente, 2.550, 3.500, 3.750 e 4.200 pessoas. Observou-se, então, que a renda média em reais deX é de R$ 800,00, a de Y é de R$ 650,00, a de Z é de R$ 500,00 e a de W é de R$ 450,00. Logo
a) 605,00 < M < 615,00
b) 595,00 < M < 605,00
c) 585,00 < M< 595,00
d) 575,00 < M < 585,00
e) 565,00 < M < 575,00

40) **(UFRJ)** Na eleição para a prefeitura de certa cidade, 30% dos eleitores votaram pela manhã e 70% à tarde. Os eleitores da manhã gastaram, em média, 1 minuto e 10 segundos para votar, enquanto que os da tarde demoraram, em média 1 minuto e 20 segundos. Determine o tempo médio gasto por eleitor na votação.

41) **(CEFET)** O composto de uma substância A e de uma substância B é vendido por R$ 26,00 o kg.Asubstância A é vendida por R$ 30,00 o kg e a substância B por R$ 20,00 o kg. O preço do composto é calculado em função das quantidadesdas substâncias e seus preços.As quantidades de A e B no kg desse composto deverá ser, respectivamente:
a) 200g e 800g;
b) 500g e 500g;
c) 700g e 300g;
d) 600g e 400g;
e) 800g e 100g.

42) **(EPCAR)** Um líquido L_1 de densidade 800 g/ℓ será misturado a um líquido L_2 de densidade 900 g/ℓ. Tal mistura será homogênea e terá a proporção de 3 partes de L_1 para cada 5 partes L_2. A densidade da mistura final, em g/, será:
a) 861,5
b) 862
c) 862,5
d) 863

43) **(CN)** Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa máquina?
a) 3,2
b) 3,5
c) 3,6
d) 4,0
e) 4,5

44) **(CN)** Os minérios de ferro de duas minas X e Y possuem, respectivamente, 72% e 58% de ferro. Uma mistura desses dois minérios deu um terceiro minério possuíndo 62% de ferro. A razão entre as quantidades do minério da mina X para o da mina Y, nessa mistura, é:
a) 1,4
b) 1,2
c) 0,5
d) 0,2
e) 0,4

45) **(CN)** Um minério A tem massa igual a 5 kg e contém 72% de ferro, e um minério B de massa m, contém 58% de ferro. A mistura desses minérios contém 62% de ferro. A massa m, em kg é:
a) 10
b) 10,5
c) 12,5
d) 15,5
e) 18,5

46) **(CN)** Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?
a) 8040
b) 4020
c) 2010
d) 1005
e) 105

GABARITO

1) 8
2) 4
3) 16,5
4) 4
5) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$
6) 12 e 24
7) A
8) 14

9) 7
10) 10
11) 8
12) $ 2,40
13) 6
14) MH < MG < MA

15) $\frac{1}{2}$

16) A
17) E
18) a) 10.800

b) 204.000
19) D
20) E
21) C
22) D
23) E
24) A
25) A
26) 80 mulheres e 40 homens
27) E
28) D
29) E
30) B
31) a) R$ 2,95
b) R$ 3,00
32) D
33) B
34) B
35) 6
36) E
37) D
38) C
39) D
40) 1min 17s
41) D
42) C
43) C
44) E
45) C
46) A

OBSERVAÇÕES

Porcentagem

TAXA PORCENTUAL OU PERCENTUAL OU CENTESIMAL

É toda fração de denominador 100

$$\boxed{\frac{x}{100} = x\%}$$

→ lê-se: "**x por cento**".
→ x é a taxa de porcentagem

Exemplos:

a) $47\% = \frac{47}{100} = 0{,}47$

b) $3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$

c) Numa escola de 500 estudantes, 300 são meninas. Qual a porcentagem de meninas nessa escola?

Resolução:

$$\frac{\text{Meninas}}{\text{Total}} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

Escrevendo $\frac{3}{5}$ como uma fração de denominador 100, tem-se:

$$\frac{3}{5} = \frac{3x20}{5x20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

DICA IMPORTANTE:
Na prática, basta multiplicar a fração por 100%.

$$\frac{3}{5} \times 100\% = \frac{300\%}{5} = 60\%$$

Observação:
Existe ainda uma notação não muito divulgada que é o "**por mil**", representado por $^0{}_{00}$.

Exemplos:

a) $3\ ^0{}_{00} = 3 / 1000 = 0{,}003$

b) $0{,}47 = 47 / 100 = 470 / 1000 = 470\ ^0{}_{00}$

Porcentagem
É o resultado obtido quando aplicamos uma taxa percentual a certo valor.
Para calcularmos um dito percentual de um número, devemos multiplicá-lo pela taxa percentual indicada.

Exemplos:

a) 20% de $80 = \frac{20}{100} \cdot 80 = 16$

b) 15% de $60 = \frac{15}{100} \cdot 60 = 9$

c) 10% dos 25% de $400 = \frac{10}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot 400 = 10$

IMPORTANTÍSSIMO: Cem por cento de um número é sempre igual ao próprio número. Com efeito:

$$\boxed{100\% \text{ de } X = \frac{100}{100} \cdot X = X}$$

Exemplos:
a) 100% de 40 = 40

b) 100% de $\frac{89}{7} = \frac{89}{7}$

CONCLUSÃO IMPORTANTE:

Os problemas envolvendo porcentagem, geralmente podem ser resolvidos de três maneiras básicas. Vamos mostrá-las, resolvendo o problema a seguir de três modos diferentes.

Cabe a você leitor optar qual a melhor solução para o problema que deseja resolver.

Seja resolver a questão: O livro "Como entender as mulheres" custa, à vista, R$ 40,00. Na compra com cheque pré-datado é cobrado um acréscimo de 30% sobre o valor à vista. Um cliente que opte pelo pagamento pré-datado, quanto pagará pelo livro?

1ª solução: Transformando o percentual em fração decimal

30% de R$ 40,00 $= \frac{30}{100} \times 40 =$ R$ 12,00

P = R$ 40,00 + R$ 12,00 = R$ 52,00

2ª solução: Montando uma regra de três
Como o acréscimo é cobrado sobre o preço à vista, este será associado a 100%.

100% ----- R$ 40,00
30% ----- X

100% . X = 30% . 40 (Simplificando o %)
100 x = 1200
x = 12
P = R$ 40,00 + R$ 12,00 = R$ 52,00

3ª solução: Transformando o percentual em número decimal.
Note que, se não houvesse acréscimo, o cliente pagaria 100% do valor do livro. Como há um acréscimo de 30%, ele pagará $100\% + 30\% = 130\% = \frac{130}{100} = 1{,}3$

P = R$ 40,00 . 1,3 = R$ 52,00

Então, analise e escolha a melhor forma de resolver os exercícios propostos. O autor sugere uma atenção especial à 3ª solução.

Acréscimos

Se uma mercadoria de valor inicial V_0 for vendida com uma acréscimo de a%, o seu valor de venda V, será dado por:

$$V = \underbrace{V_0}_{\text{Preço original}} + \underbrace{a\% \text{ de } V_0}_{\text{acréscimo}} \Rightarrow V = V_0 + \frac{a}{100} \cdot V_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V = \underbrace{\left(1 + \frac{a}{100}\right)}_{\text{Fator de aumento}} \cdot V_0}$$

onde $\begin{cases} V \rightarrow \text{valor de venda (após acréscimo)} \\ V_0 \rightarrow \text{valor inicial} \\ a \rightarrow \text{taxa de acréscimo} \end{cases}$

Exemplo:
Uma mercadoria que custa C sofre um acréscimo de 24%. Por quanto é vendida a mercadoria?

Resolução:

$$V = \left(1 + \frac{24}{100}\right) \cdot C \rightarrow V = 1{,}24\ C$$

Descontos

Se uma mercadoria de valor inicial V_0 for vendida com um desconto de d%, o seu valor de venda V, será dado por:

$$V = \underbrace{V_0}_{\text{Preço original}} - \underbrace{d\% \text{ de } V_0}_{\text{desconto}} \Rightarrow V = V_0 - \frac{d}{100} \cdot V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot V_0,$$

onde $\begin{cases} V \to \text{valor de venda (após desconto)} \\ V_0 \to \text{valor inicial} \\ d \to \text{taxa de desconto} \end{cases}$

Exemplo:
Uma mercadoria que custa C é vendida com um desconto de 20%. Por quanto é vendida a mercadoria?

Resolução:

$$V = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot C \Rightarrow V = 0{,}8\,C$$

Transações comerciais

Considere uma mercadoria que tenha sido vendida por um preço de venda **PV**, após ser adquirida por um preço de custo **PC**. Tal transação pode ter sido realizada com um lucro **L** ou com um prejuízo **P**. Vamos abordar ambos os casos.

Importante:
1) Quando não for citado se o lucro ou o prejuízo incidiu sobre o PC ou PV, consideremos a incidência sobre PC.
2) Quando o lucro ou o prejuízo for dado sobre PC, devemos chamar PC de 100% PC.
3) Quando o lucro ou o prejuízo for dado sobre PV, devemos chamar PV de 100% PV.

1° Caso: **VENDA COM LUCRO**
Neste caso temos a relação : **PV = PC + L**

Exemplo:
Qual o preço de custo de um mercadoria que foi vendida por \$ 2.860,00, sabendo que houve um lucro de 30% nesta venda?

Resolução:
→ Neste problema temos: PV = 2860 e L = 30% PC. Então:

PV = PC + L
2860 = PC + 30% PC
2860 = 100% PC + 30% PC
2860 = 130% PC

$$2860 = \frac{130}{100} \cdot PC$$

$$PC = 2860 \cdot \frac{100}{130}$$

PC = \$ 2.200,00

2° Caso: **VENDA COM PREJUÍZO**
Neste caso temos a relação **PV = PC – P**

Exemplo:
Por quanto devo vender um objeto que me custou \$ 480,00, de modo a ter um prejuízo de 20% sobre o preço de venda?

Resolução:
→ Os dados do problema são PC = 480 e P = 20% PV. Então

PV = PC – P
PV = 480 – 20% PV
100% PV = 480 – 20% PV
100% PV + 20% PV = 480
120% PV = 480

$$\frac{120}{100} \cdot PV = 480$$

$$PV = 480 \cdot \frac{100}{120}$$

PV = \$ 400,00

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Escreva sob a forma de fração irredutível:
a) 25%
b) 24%
c) 360%
d) 30%
e) 42%
f) 240%
g) 2,56%
h) 0,0012%

2) Escreva sob a forma de número decimal
a) 40%
b) 132%
c) 3,14%
d) 0,003%

3) Escreva sob a forma de porcentagem, os números:
a) 0,35
b) 1,74
c) 4,3
d) $\frac{3}{50}$
e) $\frac{2}{5}$
f) 0,56
g) $\frac{17}{20}$
h) $\frac{37}{10}$
i) $\frac{15}{8}$
j) 2,93
l) $\frac{3}{16}$
m) 0,0073
n) $\frac{3}{16}$
o) $\frac{1}{32}$

4) Determine o valor de:
a) 30% de 120 pregos.
b) 20% dos 40% de 600 bolas.
c) 15% de 40.
d) 42% de 25.
e) 10% dos 30% de 800.
f) 140% dos 0,5% de 40000.

5) Qual é o número cujos 26% valem 195?

6) Qual é o números cujos 70% valem 224?

7) Determine o número cujos 32% valem 208.

8) Qual é o número cujos 25% dos 12% valem 36?

9) Qual é o número cujos 35% dos 60% valem 1764?

10) Determine o valor de x (em forma de percentual) na equação:

3,2% de 150 = 4x + 0,2% de 800

11) Em uma turma de 72 alunos, a quarta parte ficou reprovada. Qual o percentual de aprovação?

12) O projeto TAMAR tem como objetivo monitorar a postura dos ovos das tartarugas marinhas em locais protegidos por fiscais e biólogos, e posteriormente acompanha a ida dos filhotes para o mar. Em uma certa praia encontravam-se enterrados certo número de ovos. Desse total apenas 28% dos ovos geraram tartarugas saudáveis, o que correpondeu a 67200 "tartaruguinhas". Qual o número total de ovos que havia nessa praia?

13) Em uma turma de 80 alunos, 28 foram reprovados. Qual o percentual de aprovação?

14) Se um entre cada 320 habitantes de um cidade é engenheiro, então a porcentagem de engenheiros nessa cidade é dada por:
a) 0,32%
b) 3,2
c) 0,3215%
d) 0,3125%
e) 3,125%

15) Uma certa mercadoria que custava $ 12,50, teve um aumento, passando a custar $ 13,50. A majoração sobre o preço antigo foi de:
a) 1,0%
b) 10,0%
c) 12,5%
d) 8%
e) 10,8%

16) Em um determinado país, a população urbana é 13.200.000 habitantes e a rural 52.800.000 habitantes. Pergunta-se:
a) Qual a porcentagem da população do país que vive nas cidades?
b) Que porcentagem da população do país vive no campo?

17) Uma mercadoria custa "R" reais. Por quanto ela é vendida, se sofre um acréscimo de:
a) 30%
b) 45%
c) 3%
d) 23,74%
e) 400%
f) 100%

18) Calcule a porcentagem de acréscimo em cada caso abaixo:

	Preço anterior	Novo preço após acréscimo
a)	x	1,8 x
b)	x	1,35x
c)	x	2,342x
d)	$ 3,00	$ 3,90

19) Uma mercadoria custa "R" reais. por quanto ela é vendida após o desconto de:
a) 30%
b) 35%
c) 22%
d) 10%
e) 25%

20) Calcule a porcentagem de desconto em cada caso abaixo:

	Preço anterior	Novo preço após desconto
a)	x	0,8 x
b)	x	0,75x
c)	$ 125,00	$ 100,00

21) Uma dívida de $ 360,00 foi paga após o vencimento. Por causa disso houve um acréscimo de 5%, a título de multa e juros. De quanto foi o pagamento?

22) Um trabalhador obteve um aumento de 30% no seu salário e recebeu $ 1.365,00. Determine o valor do salário antes do aumento.

23) Uma mercadoria cujo preço à vista é de $ 150,00 está sendo oferecida com 8% de abatimento para pagamento à vista. Quanto será pago, à vista, pela mercadoria?

24) Comprei um livro com 120 páginas. No primeiro dia li 45% desse livro, no segundo dia li mais a terça parte do resto e no terceiro dia li o restante do livro. Quantas páginas eu li no terceiro dia?

25) Quando o açúcar custava $ 1,20 o quilo, seu preço representava 40% do preço do quilo de uma determinada marca de café. Qual era o preço do quilo desse café?

26) Uma pessoa deposita $ 10.000,00 em caderneta de poupança, que rende 10% a cada mês. Se não fizer nenhuma retirada, ao final de três meses, quanto ele terá em sua conta?

27) Em uma turma, 80% dos alunos foram aprovados, 15% reprovados e os 6 alunos restantes desistiram do curso. Quantos alunos havia na turma?

28) Um feirante adquiriu 10 grosas de laranjas, pagando $ 0,80 a dúzia. Sabendo-se que todas as laranjas foram vendidas, com lucro de 15%, qual o total apurado na venda?
Obs.: 1 Grosa = 12 dúzias

29) Pela insistência de um cliente, este pagou apenas $ 17,40 na compra de um CD que custava $ 30,00. Qual foi o percentual de desconto?

30) Uma certa mercadoria, que custava $ 12,50, teve um aumento, passando a custar $ 14,50. Qual a taxa de reajuste sobre o preço do artigo?

31) Comprei um automóvel por $ 6.200,00. Por quanto devo vendê-lo, para ter um lucro de 15%?

32) Revendi um objeto por $ 120,00, tendo um lucro de 15% sobre o preço da venda. Por quanto eu havia comprado o objeto?

33) Uma loja adquire um rádio na fábrica por $ 160,00 e o vende com lucro de 36% sobre a venda. Qual o preço de venda do rádio?

34) Revendi um par de tênis por $ 61,20. Quanto me custou esse par de tênis, sabendo que tive um prejuízo de 15% nesta venda?

35) Vendi o meu automóvel, que me custou $ 8.320,00, com prejuízo de 28% sobre o preço de venda. Qual foi o preço da venda?

36) Vendi minha bicicleta por $ 210,00, com prejuízo de 16%. Quanto eu havia pago por ela?

37) Comprei um quadro por $ 952,00 e revendi com um lucro de 68% sobre o preço de venda. Qual foi o preço de venda?

38) Lucrar 75% sobre o preço de venda de uma mercadoria é equivalente a lucrar sobre o custo uma porcentagem de:
a) 125%
b) 150%
c) 200%
d) 225%
e) 300%

39) Suponhamos que nos vestibulares 2001 uma universidade tivesse tido para os seus diversos cursos, uma média de 3,60 candidatos por vaga oferecida. Se para os vestibulares 2002 o número de vagas for aumentado em 20% e o número de candidatos aumentar em 10%, qual a média de candidatos por vaga que essa universidade terá?
a) 3,24
b) 3,30
c) 3,36
d) 3,40
e) 3,46

40) Se $y = x^2$, então um aumento de 20% no valor de x provoca, em y, um aumento de:
a) 4%
b) 20%
c) 40%
d) 44%
e) 400%

41) Dois aumentos sucessivos de 20% são equivalente a um único aumento de:
a) 44%
b) 40%
c) 20%
d) 50%

42) Uma certa categoria profissional obteve 30% de aumento salarial em janeiro e mais 40% em fevereiro. Qual o percentual de aumento salarial acumulado por essa categoria nesse bimestre?

43) Em abril, certo comerciante aumentou em 20% o preço de determinado artigo. Em maio, durante uma promoção, este artigo foi vendido com 30% de desconto sobre o preço cobrado em abril. Pode-se, então, afirmar que o preço promocional deste artigo, se comparado a seu preço de antes do aumento, era:
a) 16% menor
b) 14% menor
c) 10% menor
d) 10% maior
e) 12% maior

44) A cada mês que passa, o valor de um motocicleta desvaloriza 10% em relação ao valor do mês anterior. Se a moto é comprada por $ 10.000,00, qual o valor da moto no final do 3º mês?

45) Dez por cento de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para verificar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a uma pessoa infectada, e dá 80% de acertos quando aplicado a uma pessoa sadia. Qual a porcentagem aproximada de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

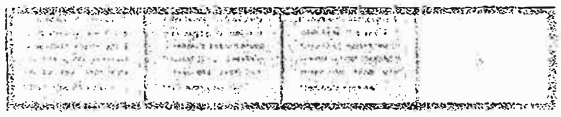
46) Um pai aplicou certo capital em um banco a juros de 4% ao mês. No fim do mês, retirou o capital empregado acrescido dos juros e dividiu para Júnior, Daniela e Marcela em partes proporcionais a 3, 4 e 6. Se Daniela recebeu $ 2.080,00 a mais que Júnior podemos afirmar que o capital aplicado foi de:
a) $ 18.000,00
b) $ 20.000,00
c) $ 22.000,00
d) $ 24.000,00
e) $ 26.000,00

47) Adquiri um lote de bijouterias nas Lojas Ourolindo. Revendi 2/5 das peças com 16% de lucro e o restante com lucro 23%, apurando nas vendas um total de $ 2.404,00. Quanto paguei pelas "jóias"?

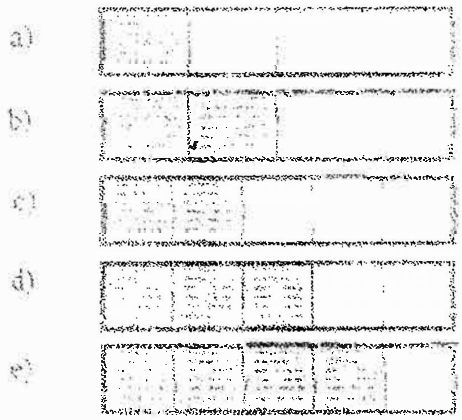
48) No país da Bobolândia, Zeferino investiu todo o seu patrimônio em ações da indústria Me Engana Que Eu Gosto S.A.. Após um ano, as ações adquiridas renderam 160% enquanto que a inflação no mesmo período foi de 300%.
Qual foi o prejuízo real que nosso "esperto" amigo teve sobre o capital investido?

QUESTÕES DE CONCURSOS

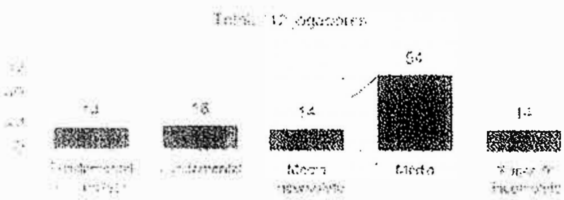
49) **(ENEM)** Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.
Uma representação possível para essa segunda situação é:



50) **(ENEM)** A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.



De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

(O Globo, 24/7/2005.)

a) 14%
b) 48%
c) 54%
d) 60%
e)68%

51) **(CM)** Um investidor comprou uma barra de ouro de 50kg por R$ 1875,00. Passado algum tempo, ele comprou outra barra de ouro idêntica à primeira por R$ 2400,00. Dessa forma, é correto afirmar que o quilograma do ouro sofreu um aumento de:
a) 30%
b) 29%
c) 28%
d) 27%
e) 25%

52) **(CEFET)** Qual é, aproximadamente, a média de músicas por CD?
a) 16,4
b) 17,8
c) 18,6
d) 19,2

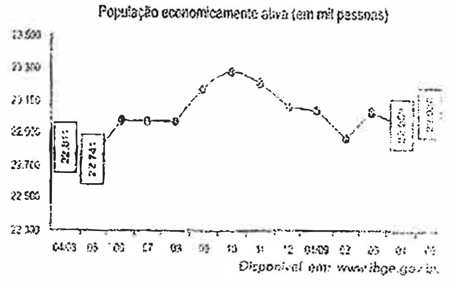
53) **(CEFET)** Quantas músicas mais, no mínimo, deverão cair em domínio público até que o percentual de músicas da obra de Noel Rosa nessa situação, ultrapasse 70% de sua obra?
a) 34
b) 38
c) 42
d) 45

54)**(ENEM)** Uma pesquisa sobre orçamentos familiares, realizado recentemente pelo IBGE, mostra alguns itens de despesa na distribuição de gastos de dois grupos de famílias com rendas mensais bem diferentes.

TIPO DE DESPESA	RENDA ATÉ R$ 400,00	RENDA MAIOR OU IGUAL A R$ 6.000,00
Habitação	37%	23%
Alimentação	33%	9%
Transporte	8%	17%
Saúde	4%	6%
Educação	0,3%	5%
Outros	17,7%	40%

Considere duas famílias com rendas de R$ 400,00 e R$ 6.000,00, respectivamente, cujas despesas variam de acordo com os valores das faixas apresentadas. Nesse caso, os valores, em R$, gastos com alimentação pela família de maior renda, em relação aos da família de menor renda, são, aproximadamente:
a) dez vezes maiores.
b) quatro vezes maiores.
c) equivalentes.
d) três vezes menores.
e)nove vezes menores.

55)**(ENEM)** O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a:
a) 23.940
b) 32.228
c) 920.800
d) 23.940.800
e) 32.228.000

56)**(ENEM)** A eficiência de anúncios num painel eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada foi avaliada por uma empresa. Os resultados mostraram que, em média:
° passam, por dia, 30.000 motoristas em frente ao painel eletrônico;
° 40% dos motoristas que passam observam o painel;
° um mesmo motorista passa três vezes por semana pelo local.
Segundo os dados acima, se um anúncio de um produto ficar exposto durante sete dias nesse painel, é esperado que o número mínimo de motoristas diferentes que terão observado o painel seja:
a) 15.000
b) 28.000
c) 42.000
d) 71.000
e) 84.000

57)**(ENEM)** As "margarinas" e os chamados "cremes vegetais" são produtos diferentes, comercializados em embalagens quase idênticas. O consumidor, para diferenciar um produto do outro, deve ler com atenção os dizeres do rótulo, geralmente em letras muito pequenas. As figuras que seguem representam rótulos desses dois produtos.

Peso Líquido **500 g**
MARGARINA
65% de Lipídios
Valor energético por porção 10 g: 59 Kcal

Peso Líquido **500 g**
CREME VEGETAL
35% de Lipídios
Valor energético por porção 10 g: 32 Kcal
Não recomendado para uso culinário

Uma função dos lipídios no preparo das massas alimentícias é torná-las mais macias. Uma pessoa que, por desatenção, use 200 g de creme vegetal para preparar uma massa cuja receita pede 200 g de margarina, não obterá a consistência desejada, pois estará utilizando uma quantidade de lipídios que é, em relação à recomendada, aproximadamente:
a) o triplo
b) o dobro
c) a metade
d) um terço
e) um quarto

58) **(CM)** Metade dos 2 bilhões de cristãos é católica e 10% são ortodoxos. Os outros 40% são evangélicos (ou protestantes). E as novas igrejas pentencostais e neopentecostais cresceram tanto que já são quase metade dos evangélicos - ou 19% da cristandade.

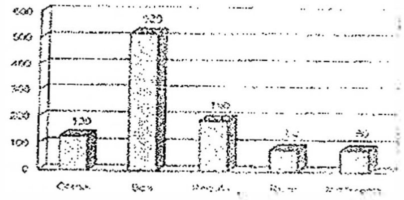
Fonte: Revista Superinteressante - fevereiro 2004

Do total de cristãos, podemos afirmar que o número de evangélicos (ou protestantes) é igual a:
a) 400.000.000
b) 500.000.000
c) 800.000.000
d) 1.000.000.000

59) **(ENEM)** Numa pesquisa de opinião, feita para verificar o nível de aprovação de um governante, foram entrevistadas 1000 pessoas, que responderam sobre a administração da cidade, escolhendo uma – e apenas uma – dentre as possíveis respostas: ótima, boa, regular, ruim e indiferente. O gráfico abaixo mostra o resultado da pesquisa.

De acordo com o gráfico, pode-se afirmar que o percentual de pessoas que consideram a administração ótima, boa ou regular é de:

a) 28%
b) 65%
c) 71%
d) 84%
e) 90%

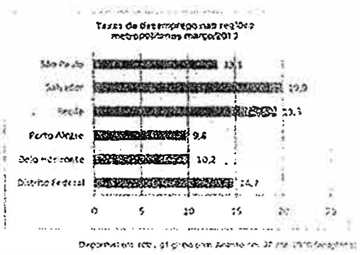


60) **(ENEM)** No dia 12 de janeiro de 2010, o governo da Venezuela adotou um plano de racionamento de energia que previa cortes no fornecimento em todo o país.
O ministro da Energia afirmou que uma das formas mais eficazes de se economizar energia nos domicílios seria o uso de lâmpadas que consomem 20% menor da energia consumida por lâmpadas normais.

Disponível em: http://www.bbc.co.uk.
Acesso em: 23 abr.2010 (adaptado).

Em uma residência, o consumo mensal de energia proveniente do uso das lâmpadas comuns é de 63 kWh. Se todas as lâmpadas dessa residência forem trocadas pelas lâmpadas econômicas, esse consumo passará a ser de, aproximadamente,
a) 9 kWh.
b) 11 kWh.
c) 22 kWh.
d) 35 kWh.
e) 50 kWh.

61) **(ENEM)** Os dados do gráfico seguinte foram gerados da partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010. nessa região, foi de
a) 24 500
b) 25 000
c) 220 500
d) 223 000
e) 227 500

62) **(ENEM)** No mundial de 2007, o americano Bernard Lagat, usando pela primeira vez uma sapatilha 34% mais leve do que a média, conquistou o ouro na corrida de 1.500 metros com um tempo de 3,58 minutos. No ano anterior, em 2006, ele havia ganhado medalha de ouro com um tempo de 3,65 minutos nos mesmos 1.500 metros.

Revista Veja, São Paulo, ago. 2008 (adaptado).

Sendo assim, a velocidade média do atleta aumentou em aproximadamente:
a) 1,05%
b) 2,00%
c) 4,11%
d) 4,19%
e)7,00%

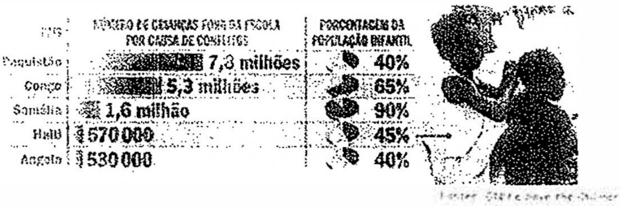
63) **(ENEM)** Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura abaixo.

Ao setor a estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Esse número é:

a) 45
b) 90
c) 180
d) 450
e) 900

64) **(CPII)** Observe a matéria a seguir, extraída da Revista Vejà, edição 1978, de 18 de outubro de 2006.

UM EXÉRCITO SEM ESTUDO



Quarenta e três milhões de crianças estão sem estudar em todo o mundo por causa de guerras em seu país segundo relatório divulgado pela ONU. Nos conflitos, escolas são destruídas, muitos professores morrem e, em alguns lugares, alunos são recrutados para a guerra.
Com base nos dados apresentados, responda:
a) Qual é o número de habitantes que corresponde à população infantil de Angola?
b) O número de crianças da escola no Paquistão é maior do que no Congo, embora a porcentagem da população infantil sem acesso aos estudos seja maior no Congo do que no Paquistão. Como isto é possível? Justifique sua resposta.

65) **(CM)** Uma loja de eletrodomésticos oferece um desconto de 15% para pagamento à vista. Um cliente comprou uma geladeira pagando à vista R$ 1020,00. Qual o preço, sem desconto, dessa geladeira?
a) R$ 1200,00
b) R$ 1220,00
c) R$ 1240,00
d) R$ 1260,00
e) R$ 1280,00

66) **(CM)**Um automóvel custa, atualmente, 30% a mais do que no mesmo mês do ano passado. Se atualmente ele custa R$ 11.999,00, quanto custava há um ano?
a) R$ 8400,00
b) R$ 9230,00
c) R$ 9400,00
d) R$ 8600,00
e) R$ 8230,00

67) **(ENEM)** Entre 10 de fevereiro e 10 de novembro, o preço do quilograma de mercadorias num determinado supermercado sofreu um aumento de 230%. Se o preço do quilograma em 10 de novembro era R$ 39,60, qual era o preço em 10 de fevereiro?
a) R$ 12,00
b) R$ 14,00
c) R$ 16,00
d) R$ 18,00
e) R$ 19,00

68) **(ENEM)** Para liquidar seu estoque de roupas de inverno, certa loja dá um desconto de 25% no preço de seus produtos. Assim, para calcular o novo preço de um vestido que, antes da liquidação, custava R$ 300,00, efetuando uma única operação, o vencedor dessa loja poderá:
a) dividir 300 por 0,25
b) dividir 300 por 0,75

c) multiplicar 300 por 0,25
d) multiplicar 300 por 0,75
e) multiplicar 300 por 0,8

69) **(CN)** Uma pessoa comprou uma geladeira para pagamento à vista, obtendo um desconto de 10%. Como o balconista não aceitou o seu cheque, ele pagou com 119.565 moedas de um centavo. O preço da geladeira sem desconto, é:
a) $ 1.284,20
b) $ 1.284,50
c) $ 1.328,25
d) $ 1.328,50
e) $ 1.385,25

70) **(ENEM)** O Aedes aegypti é vetor transmissor da dengue. Uma pesquisa feita em São Luís – MA, de 2000 a 2002, mapeou os tipos de reservatório onde esse mosquito era encontrado. A tabela a seguir mostra parte dos dados coletados nessa pesquisa.

	População de A. aegypti		
Tipos de reservatórios	2000	2001	2002
pneu	895	1.658	974
tambor/tanque/depósito de barro	6.855	46.444	32.787
vaso de planta	456	3.191	1.399
material de construção/peça de carro	271	436	276
garrafa/lata/plástico	675	2.100	1.059
poço/cisterna	44	428	275
caixa d'água	248	1.689	1.014
recipiente natural, armadilha, piscina e outros	615	2.658	1.178
Total	10.059	58.604	38.962

Caderno Saúde Pública, vol. 20, n.º 5, Rio de Janeiro, out./2004 (com adaptações).

Se mantido o percentual de redução da população total de A. aegypti observada de 2001 para 2002, teria sido encontrado, em 2003, um número total de mosquito:
a) menor que 5.000
b) maior que 5.000 e menor que 10.000
c) maior que 10.000 e menor que 15.000
d) maior que 15.000 e menor que 20.000
e) maior que 20.000

71) **(CPII)** Para completar a sua coleção de cartas de RPG, Gabriel trocou 60% das que possuía por uma carta rara. Depois da troca percebeu que 20% das cartas que agora tinha eram repetidas e, então, deu todas essas cartas para Pedro.
a) Se Gabriel tinha inicialmente 185 cartas, quantas ele deu a Pedro?
b) Imagine agora a mesma situação, com outros dados. Suponha que após dar suas cartas para Pedro, Gabriel ainda tenha ficado com 84 cartas. Nesse caso, quantas cartas Gabriel tinha inicialmente?

72) **(CEFETEQ)** Leia atentamente o artigo publicado na revista "Época".
"Remédios já subiram. Desde sexta-feira 4, o aumento das tarifas aéreas está autorizado. Energia elétrica e telefone devem subir nos próximos dias (...) tudo isso deve repercutir na inflação, já no mês de julho. (...)"
"Os aumentos que já vieram e os que estão por vir – em média"

energia elétrica	12%
passagens aéreas	10,8%
telefone	8,3%
remédios	3%

Suponha que um aposentado receba um salário de $ 123,60. Este senhor comprava uma caixa de remédios por $ 10,00 antes do aumento de 3%. Sabe-se que cada caixa de remédios dura apenas 5 dias e que o aposentado não pode deixar de tomar o remédio nem um dia. Considerando 1 mês igual a 30 dias, calcule o percentual do salário desse senhor que será gasto com esse remédio.

73) **(UFRJ)** A organização de uma festa distribuiu gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingresso foram à festa.
a) Determine o percentual de mulheres na festa.
b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para pessoas do sexo feminino?

74) **(UFRJ)** Uma pessoa alugou um apartamento por $ 2.000,00 mensais durante três meses. Após esse período, o aluguel foi reajustado em 105%.
a) Calcule o valor do aluguel mensal após o aumento.
b) A inflação, naqueles três meses, foi de 30% ao mês. Determine qual deveria ter sido o percentual de reajuste para que tivesse correspondido à inflação do período.

75) **(CEFET)** Um automóvel custava, em janeiro deste ano $ 13.000,00. Em março, este preço sofreu um reajuste de 4% e, em setembro um novo reajuste de 6%. Determine:
a) O preço do automóvel em setembro.
b) O percentual total aplicado sobre o preço do automóvel, no período de janeiro a setembro.

76) **(ENEM)** Uma bióloga conduziu uma série de experimentos demonstrando que a cana-de-açúcar mantida em um ambiente com o dobro da concentração atual de CO_2 realiza 30% mais de fotossíntese e produz 305 mais de açúcar do que a que cresce sob a concentração normal de CO_2. Das câmaras que mantinham esse ar rico em gás carbônico, saíram plantas também mais altas e mais encorpadas, com 40% mais de biomassa.

Disponível em: http://revistapesquisa.fapesp.br. Acesso em: 26 set 2008.

Os resultados indicam que se pode obter a mesma produtividade de cana numa menor área cultivada. Nas condições apresentadas de utilizar o dobro da concentração de CO_2 no cultivo para dobrar a produção da biomassa da cana-de-açúcar, a porcentagem da área cultivada hoje deveria ser, aproximadamente,
a) 80%
b) 100%
c) 140%
d) 160%
e) 200%

77) **(ENEM)** Com 2.800 km de extensão, o rio São Francisco nasce em Minas Gerais, na Serra da Canastra, e desemboca no Oceano Atlântico, oferecendo condições naturais de navegação em alguns trechos.

° Da nascente até a cidade de Três Marias (MG), são 509 km.

° O primeiro trecho navegável, que vai de Três Marias a Pirapora (MG), corresponde a 6% da extensão total do rio.

° O segundo trecho navegável, que vai de Pirapora à cidade de Petrolina (PE), corresponde a duas vezes e meia o trecho não navegável que vai de Petrolina a Piranhas (AL).

° E finalmente, com uma extensão de 208 km, de Piranhas até a foz, no Oceano Atlântico, apresenta navegação turística.

Adaptado de http://www.transportes.gov.br/bit/hidro/griosaof.htm. Acesso em: 12 ago. 2006.

A partir dos dados apresentados, a extensão do trecho entre Petrolina e Piranhas é em quilômetros, aproximadamente:
a) 547
b) 638
c) 766
d) 853
e) 928

78) **(ENEM)** A taxa anual de desmatamento na Amazônia é calculada com dados de satélite, pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), de 1° de agosto de um ano a 31 de julho do ano seguinte. No mês de julho de 2008, foi registrado que o desmatamento acumulado nos últimos 12 meses havia sido 64% maior do que no ano anterior, quando o INPE registrou 4.974 km2 de floresta desmatada. Nesses mesmos 12 meses acumulados, somente o estado de Mato Grosso foi responsável por, aproximadamente, 56% da área total desmatada na Amazônia.

Jornal O Estado de São Paulo. Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 30 ago. 2008 (adaptado).

De acordo com os dados, a área desmatada sob a responsabilidade do estado do mato Grosso, em julho de 2008, foi:

a) inferior a 2.500 km².
b) superior a 2.500 km² e inferior a 3.000 km².
c) superior a 3.000 km² e inferior a 3.900 km².
d) superior a 3.900 km² e inferior a 4,700 km².
e)superior a 4.700 km².

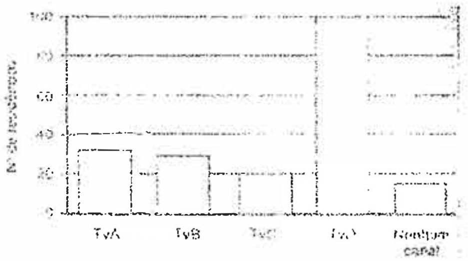
79) **(ENEM)** A resolução das câmeras digitais modernas é dada em megapixels, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas em geral, em 3 bytes. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de bytes necessários para armazená-las. Considere 1 KB = 1.000 bytes, 1 MB = 1.000 KB, 1 GB = 1.000 MB.

Utilizando uma câmera de 2.0 megapixels cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazena-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar:

a) um CD de 700 MB.
b) um pendrive de 1 GB.
c) um HD externo de 16 GB.
d) um memorystick de MB.
e) um cartão de memória de 64 MB.

80) **(ENEM)** Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite.

Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras abaixo:



A percentagem de entrevistados que declaram estar assistindo à TvB é **aproximadamente** igual a:

a) 15%
b) 20%
c) 22%
d) 27%
e) 30%

81) **(ENEM)** Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 355 dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de

a) 16%
b) 24%
c) 32%
d) 48%
e) 64%

82) **(CM)** Uma pesquisa com os alunos de uma escola mostrou que 15% dos alunos são gordos, 20% dos meninos são gordos e 12% das meninas são gordas. Qual a porcentagem de meninas na escola?

a) 48%
b) 62,5%
c) 52%
d) 37,5%
e) 40%

83) **(ENEM)** Antes de uma eleição para prefeito, certo instituto realizou uma pesquisa em que foi consultado um número significativo de eleitores, dos quais 36% responderam que iriam votar no candidato X; 33%, no candidato Y e 31%, no candidato Z. A margem de erro estimada para cada um desses valores é de 3% para mais ou para menos. Os técnicos do instituto concluíram que, se confirmado o resultado da pesquisa:

a) apenas o candidato X poderia vencer e, nesse caso, teria 39% do total de votos.
b) apenas os candidatos X e Y teriam chances de vencer.
c) o candidato Y poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre X.
d) o candidato Z poderia vencer com uma diferença de, no máximo 1% sobre X.
e) o candidato Z poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre o candidato Y.

84) **(EPCAR)** Numa turma de um cursinho, 40% dos alunos são menores de idade. Com o objetivo de que somente metade dessa turma fosse composta por alunos maiores de idade, x% dos alunos maiores de idade foram remanejados para outra turma.

Sabendo-se que não houve mais mudança nessa turma, é correto afirmar que x é igual a:

a) 20
b) 30
c) 33, l
d) 33, 3

85) **(ENEM)** Uma escola de ensino médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª série, 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série, 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens.

A tabela abaixo pode ser preenchida com as informações dadas:

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Ênio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Ênio	1	1	1	1	1

O valor de a é:

a) 10
b) 48
c) 92
d) 102
e) 120

86) **(UFF)** Em uma fábrica, sobre o preço final do produto, sabe-se que:

I. 1/4 dele são salários;
II. 1/5 dele são impostos;
III. 25% dele é o custo da matéira prima;

IV. o restante dele é lucro.
O percentual do preço que representa o lucro é:
a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 30%
e) 50%

87) **(CEFET)** Num determinado grupo de alunos do CEFET, constatou-se que 33 1/3% são botafoguenses, 20% são vascaínos e apenas 12,5% são flamenguistas. O menor número possível de alunos desse grupo é:
a) 40
b) 60
c) 80
d) 100
e) 120

88) **(EPCAR)** Num certo ano, todos os alunos do CPCAR foram divididos por faixa etária, nos grupos A, B e C, conforme tabela abaixo.

GRUPO	FAIXA ETÁRIA	QUANTIDADE (%)
A	de 13 a 15 anos	45
B	de 16 a 18 anos	20
C	mais de 18 anos	y

De todos os alunos, 30% optaram por participar de uma Olimpíada de Matemática. Desses participantes, 20% foram do grupo A e 35% do grupo B.
Com base nesses dados, pode-se afirmar que a porcentagem de alunos do grupo C que não participou da Olimpíada, considerando-se todos os alunos do CPCAR com mais de 18 anos, é um número entre:
a) 5 e 20
b) 20 e 35
c) 35 e 50
d) 50 e 65

89)**(CEFETEQ)** Uma pesquisa do IBOPE ouviu 2400 telespectadores a fim de saber como estava a audiência do domingo, às 20 horas. O resultado foi o seguinte: viam o canal A, viam o canal B, viam o canal C e os restantes estavam com os aparelhos desligados. O número de pessoas que não viam televisão naquele horário corresponde a:
a) 1% dos entrevistados
b) 3% dos entrevistados
c) 4% dos entrevistados
d) 8% dos entrevistados
e) 10% dos entrevistados

90)**(EPCAr)** Em uma Escola, havia um percentual de 32% de alunos fumantes. Após campanha de conscientização sobre o risco que o cigarro traz à saúde, 3 em cada 11 dependentes do fumo deixaram o vício, ficando, assim, na Escola, 128 alunos fumantes.
É correto afirmar que o número de alunos da Escola é igual a:
a)176
b)374
c)400
d)550

91)**(ENEM)** O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2.000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.
Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2.000 pessoas é, aproximadamente:
a) 740
b) 1.100
c) 1.310
d) 1.620
e) 1.750

92)**(CN)** Numa cidade, 28% das pessoas têm cabelos pretos e 24% possuem olhos azuis. Sabendo que 65% da população de cabelos pretos têm olhos castanhos e que a população de olhos verdes que tem cabelos pretos é 10% do total de pessoas de olhos castanhos e cabelos pretos, qual a porcentagem do total de pessoas de olhos azuis, que têm os cabelos pretos?
OBS.: Nesta cidade só existem pessoas de olhos azuis, verdes ou castanhos.
a) 30,25%
b) 31,25%
c) 32,25%
d) 33,25%
e) 34,25%

93) **(ENEM)** Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.
O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados.
O número esperado de carros roubados da marca Y é:
a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

94) **(ENEM)** O Brasil, em 1997, com cerca de 160 X 10^6 habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250.000 tep (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias.
O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia.
Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é **x vezes maior** do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é:
a) 2,1
b) 3,3
c) 6,3
d) 10,5
e) 12,7

95) **(ENEM)** Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Disponível em: planetasustentavel.abhril.com.br.
Acesso em: 02 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente.
a) 22,5%
b) 50,0%
c) 52,3%
d) 65,5%
e) 77,5%

96) **(ENEM)** Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1° de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br
Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura fina dísel/ biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?
a) 27,75 milhões de litros.
b) 37,00 milhões de litros.
c) 231,25 milhões de litros.
d) 693,75 milhões de litros.
e) 888,00 milhões de litros.

97) **(ENEM)** Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento. De acordo com o risco que o paciente pretende assumir.
Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?
a) 3 doses
b) 4 doses
c) 6 doses
d) 8 doses
e) 10 doses

98) **(ENEM)** Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: **insuficiente**, quando o crescimento é menor que 1%; regular, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; **bom**, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; **ótimo**, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e **excelente**, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R$ 132 000,00 em 2008 e de R$ 145 000,00 em 2009.
De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve se considerado:
a) insuficiente
b) regular
c) bom
d) ótimo
e) excelente

99) **(EPCAR)** Um reservatório possui 4 torneiras. A primeira torneira gasta 15 horas para encher todo o reservatório; a segunda, 20 horas; a terceira, 30 horas e a quarta, 60 horas. Abrem-se as 4 torneiras, simultaneamente, e elas ficam abertas despejando água por 5 horas. Após esse período fecham-se, ao mesmo tempo, a primeira e a segunda torneiras.
Considerando que o fluxo de cada torneira permaneceu constante enquanto esteve aberta, é correto afirmar que o tempo gasto pelas demais torneiras, em minutos, para completarem com água o reservatório, é um número cuja soma dos algarismos é:
a) par maior que 4 e menor que 10.
b) par menor ou igual a 4.
c) ímpar maior que 4 e menor que 12.
d) ímpar menor que 5.

100) **(CEFET)** O dono de um posto de combustível cobra $ 1,21 por litro de gasolina e tem um lucro de 10% nesta operação. Visando aumentar essa margem, recorre a um expediente já usual nesse tipo de estabelecimento, consistindo do acréscimo de mais um algarismo ao preço da gasolina, que passa a ser $ 1,215. Tendo vendido 6550 litros de gasolina, podemos afirmar que seu lucro na venda desse combustível foi de aproximadamente:
a) 10,22%
b) 10,34%
c) 10,45%
d) 11%
e) 11,34%

101) **(EPCAR)** Um terreno que possui 2,5 ha de área é totalmente aproveitado para o plantio de arroz. Cada m^2 produz 5 litros de arroz que será vendido por 75 reais o saco de 50 kg.
Sabe-se que o agricultor teve um total de despesas de 60000 reais, que houve uma perda de 10% na colheita e que vendeu todo o arroz colhido.
Se cada litro de arroz corresponde a 800 g de arroz, é correto afirmar que 20% do lucro, em milhares de reais, é um número compreendido entre
a) 1 e 10.
b) 10 e 16.
c) 16 e 22.
d) 22 e 30.

102) **(EPCAR)** Um comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ de se estoque de pares de meia com lucro de 30% sobre o custo. Como pretendia renovar o estoque, reduziu o preço de venda e acabou tendo um prejuízo de 10% sobre o custo com a venda dos pares que restavam em sua loja. É correto afirmar que, ao final do estoque, esse comerciante teve, sobre o custo, um:
a) lucro de 2%.
b) lucro de 20%.
c) prejuízo de 2%.
d) prejuízo de 20%.

103) **(CN)** Um certo líquido aumenta o seu volume em 15%, ao ser congelado. Quantos mililitros desse líquido devem-se colocar, no máximo, em um recipiente de 230 mililitros, sabendo-se que este não sofre qualquer alteração da sua capacidade nesse processo?
a) 195,5
b) 200
c) 205
d) 210
e) 215

104) **(CN)** Uma máquina é capaz de fabricar, ligada durante um tempo inteiro de minutos T, 3T peças, sendo que 20% delas são defeituosas. Para obter-se, no mínimo, 605 peças perfeitas essa máquina deverá funcionar quantos minutos?
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

105) **(CN)** Ao dividir-se a fração 3/5 pela fração 2/3 encontra-se 2/5. Qual é, aproximadamente, o percentual do erro cometido?
a) 35,55%
b) 45,55%

c) 55,55%
d) 65,55%
e) 75,55%

106) **(CN)** Num certo país, o governo resolveu substituir todos os impostos por um imposto único, que seria, no caso dos salários de 20% sobre os mesmos. Para que um trabalhador receba, após o desconto, o mesmo salário que recebia antes, deverá ter um aumento sobre o mesmo de:
a) 15%
b) 20%
c) 25%
d) 40%
e) 50%

107) **(CN)** A diferença entre um desconto de 50% e dois descontos sucessivos de 30% e 20% sobre o valor de R$ 40.000,00 é um valor inteiro
a) múltiplo de 7.
b) múltiplo de 9.
c) múltiplo de 12.
d) ímpar.
e) zero, pois os descontos são iguais.

108) **(CEFET)** Com o aumento do preço do petróleo no mercado internacional, o preço da gasolina foi reajustado em 4% para o consumidor. No entanto, haverá necessidade de um novo reajuste de 3% sobre o preço atual, a partir do próximo mês, para repassar totalmente o reajuste do petróleo. Após esse segundo reajuste, o preço da gasolina, para o consumidor, terá sofrido, em relação ao preço inicial, um aumento de:
a) 7%;
b) 7,12%;
c) 8,2%;
d) 7,2%;
e) 8,12%.

109) **(CN)** Uma mercadoria que teve dois aumentos sucessivos de 30% e 20% deverá ter um único desconto de x% para voltar ao preço inicial. Logo:
a) $30 < x < 35$
b) $35 < x < 40$
c) $45 < x < 55$
d) $55 < x < 65$
e) $x > 65$

110) **(CEFETEQ)** O salário de um técnico teve dois aumentos: 30% em outubro e 120% em novembro do mesmo ano, passando a valer $ 1.144,00. Qual era o salário do técnico anteriormente a esses dois aumentos?

111) **(EPCAR)** Em certo período, o valor total da cesta básica de alimentos subiu 82% e o salário mínimo, nesse mesmo período, aumentou 30%.
Para que recupere o poder de compra da cesta básica de alimentos, o salário mínimo deverá ser aumentado em y%. O valor de y, então, é tal que 20 está para y assim como 8 está para:
a) 12
b) 16
c) 24
d) 32

112) **(CEFET)** O valor P de uma mercadoria teve dois aumentos sucessivos, um de 8% e outro de 12%, seu preço ficou em R$ 756,00. Se, ao invés destes dois aumentos, P tivesse um único aumento de 20%, o preço final da mercadoria seria:
a) igual ao preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
b) aproximadamente R$ 21,53 a menos que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
c) R$ 6,00 a menos que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
d) R$ 2,00 a mais que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.

113) **(CEFETEQ)** Jorge gasta 25% do seu salário com o aluguel de seu apartamento. O salário de Jorge vai aumentar 25% e o aluguel de seu apartamento aumentará 30%. A que percentual do novo salário de Jorge corresponderá o novo aluguel a ser pago?

114) **(CEFET)** A mensalidade da minha escola sofreu um aumento de 30% este mês, e permitiu um desconto de 10% a todos os alunos que pagassem até o dia cinco. Se paguei no dia três, efetivamente quantos por cento paguei a mais que no mês passado?
a) 13%
b) 17%
c) 20%
d) 117%
e) 120%

115) **(UFRJ)** A fim de atrair a clientela, uma loja anunciou um desconto de 20% na compra à vista de qualquer mercadoria. No entanto, para não ter redução na margem de lucro, a loja reajustou previamente seus preços, de forma que, com o desconto, os preços retornassem aos seus valores inicias.
Determine a porcentagem do reajuste feito antes do desconto anunciado.

116) **(EPCAr)** Uma loja aumenta o preço de um determinado produto cujo valor é de $ 600,00 para, em seguida, a título de "promoção", vendê-lo com "desconto" de 20% e obter, ainda, os mesmos $ 600,00; então, o aumento percentual do preço será de:
a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%

117) **(CN)** Um comerciante aumentou o preço de uma mercadoria em 25%. Contudo, a procura por essa mercadoria continuou grande. Então ele fez um novo aumento de 10%. Como o preço ficou muito alto, a mercadoria encalhou e, além disso, o prazo de validade estava vencendo. Finalmente fez um desconto para que o preço voltasse ao valor inicial. Esse último desconto:
a) foi de 35%
b) ficou entre 30% e 35%
c) ficou entre 27% e 28%
d) foi de 25%
e) ficou entre 22% e 25%

118) **(CM)** Um estudante gasta 20% de sua bolsa de estudo com transporte. Se o transporte aumenta 26% e a bolsa 5%, a porcentagem da bolsa que este estudante passará a ter para gastar com transporte será de:
a) 21%
b) 22%
c) 23%
d) 24%
e) 25%

119) **(CM)** Os produtores de um show de rock resolveram dar desconto de 25% no preço do ingresso. Estimou-se, com isso, que o público aumentaria em 60%. Caso se confirmassem as estimativas dos produtores, podemos afirmar que o total arrecadado nas bilheterias:
a) aumentaria 35%
b) aumentaria 20%
c) aumentaria 10%
d) aumentaria 5%
e) diminuiria 10%

120) **(UFF)** A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, esta confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. Determine a variação, em porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.

121)**(UERJ)** Um comerciante resolveu dar um desconto de 20% no preço de uma mercadoria A. Em seguida aumentou os preços das mercadorias B, C, D e E com percentuais Y inversamente proporcionais aos seus respectivos preços X, de modo que a, soma desses percentuais fosse também 20%. Vide tabela abaixo, com os preços inicias, por unidade, de cada mercadoria:

Mercadoria	A	B	C	D	E
Preço em reais	50	5	10	15	20

Dizemos que uma grandeza Y é inversamente proporcional a outra grandeza X, quando existe uma constante k, tal que $Y = \frac{k}{x}$.

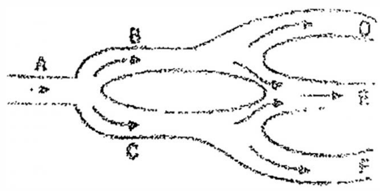
Calcule, nessas condições:

a) O valor da constante k.

b) A quantidade mínima de unidades que devem ser vendidas, apenas do produto C, para que a diferença entre seus preços final e inicial recupere o desconto concedido em uma única unidade da mercadoria A.

122) **(UFF)** Na reprodução de uma figura, a primeira cópia obtida reduziu em 30% a área desta figura. A seguir, esta cópia, foi reproduzida com ampliação de 40%.
A área da figura obtida na segunda cópia, comparada com a área da figura original, é:
a) 98% menor
b) 90% menor
c) extamente igual
d) 2% menor
e) 10% maior

123) **(EPCAR)** A figura abaixo mostra um trecho de uma malha rodoviária de mão única. Dos veículos que passam por A, 45% viram à esquerda, dos veículos que passam por B, 35% viram à esquerda. Daqueles que trafegam por C, 30% dobram à esquerda.
Qual é o percentual dos veículos que, passando por A, entram em E?



a) 57,50%
b) 45,75%
c) 38,60%
d) 29,85%

124) **(ENEM)** As promoções do tipo "leve 5 e pague 4", comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre cada unidade vendida, de:
a) 30%
b) 25%
c) 20%
d) 15%
e) 10%

125)**(CEFET)** Um produto está tabelado em $ 200,00. Comprando-o à vista, você terá 20% de desconto. Quantos por cento a mais, sobre o valor à vista, representa o preço de tabela?

126) **(CN)** As vendas de uma empresa foram, em 1998, 60% superior às vendas de 1997. Em relação a 1998, as vendas de 1997 foram inferiores em:
a) 62,5%
b) 60%
c) 57,5%
d) 44,5%
e) 37,5%

127) **(ENEM)** Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra.
Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?
a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 36%

128) **(ENEM)** João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 15% sobre o total emprestado.

a) opção que dá a João o menor gasto seria a renegociar suas dívidas com o banco.

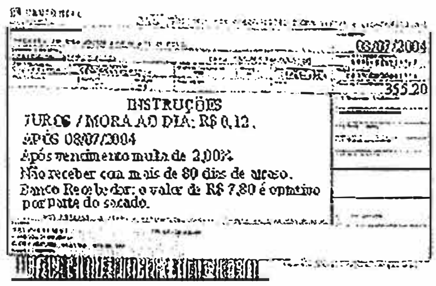
b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.

c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

129) **(CM)** Observe o título bancário no valor de R$ 355,20, e leia atentamente as instruções no centro do mesmo, onde constam as informações para o pagamento:



Considere ainda que:

° O cliente não pagará o valor de R$ 7,80, incluído no valor do documento, já que é optativo;

° O pagamento foi efetuado no dia 13/07/2004 sendo cobrados, portanto, juros pelos dias de atraso, e a multa por não ter pago na data do vencimento.

ATENÇÃO: Juros/mora e multa calculados após o desconto de R$ 7,80 do valor do documento.

Nestas condições, o valor cobrado no ato do pagamento foi de:
a) R$ 355,10
b) R$ 355,20
c) R$ 355,30
d) R$ 354,94

130) **(ENEM)** Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 30% de desconto sobre o preço da tabela ou no cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista sai por R$ 70,00, no cartão sairá por:
a) R$ 130,00
b) R$ 110,00
c) R$ 100,10
d) R$ 98,00
e) R$ 77,00

131) **(UFRJ)** Um eletrodoméstico custa $ 2.500,00 à vista, mas pode também ser pago em duas vezes: $ 1.500,00 de entrada e $ 1.500,00 ao fim de 30 dias. Qual é o juro mensal que a loja está cobrando do cliente que paga em duas vezes?

132) **(UFRJ)** Uma loja oferece duas formas de pagamentos para seus clientes: à vista ou em duas parcelas iguais. A loja anuncia, na vitrine, um vestido por um preço total de $ 200,00 para pagamento em duas vezes, sendo $ 100,00 no ato da compra e $ 100,00 trinta dias após essa data.
Para pagamento à vista, a loja oferece um desconto de 10% sobre o preço total de $ 200,00 anunciado na vitrine.
Considerando o preço à vista como o preço real do vestido, determine a taxa de juros cobrada pela loja no pagmento em duas vezes.

133) **(CN)** Um vendedor sempre coloca os seus produtos à venda com lucro de 70% sobre o preço de custo. Se o preço de custo de um certo produto aumentou de $ 170,00, o que corresponde a 20% do preço que tal produto era vendido, o novo preço de venda é:
a) $ 850,00
b) $ 1.020,00
c) $ 1.139,00
d) $ 1.224,00
e) $ 1.445,00

134) **(CM)** Dona Margarida vai comprar um fogão na loja SÓ - ELETRO que oferece duas formas de pagamento, conforme o anúncio.

FOGÃO 4 BOCAS
⇒ À VISTA: 10% DE DESCONTO SOBRE O PREÇO ANUNCIADO OU ⇒ DUAS PARCELAS IGUAIS SOBRE O PREÇO ANUNCIADO: A PRIMEIRA NO ATO DA COMPRA E A SEGUNDA 30 DIAS APÓS A COMPRA.

Procurando sempre a melhor forma de pagamento ela resolveu calcular a taxa de juros cobrada no pagamento parcelado. Essa taxa de juros é igual a:
a) 10%
b) 15%
c) 25%
d) 30%
e) 35%

135) **(CEFET)** Uma livraria oferece duas opções de pagamento:
1ª opção: à vista, com 30% de desconto;
2ª opção: em duas prestações mensais iguais, sem desconto, sendo que a primeira prestação deve ser paga no ato da compra.
Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

136) **(ENEM)** Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3.800,00 gerado pela aplicação.
A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de
a) R$ 4 222,22
b) R$ 4 523,80
c) R$ 5 000,00
d) R$ 13 300,00
e) R$ 17 100,00

137) **(EPCAR)** Pedro colocou um terreno a venda visando um lucro de 20% sobre o preço de custo.
Tendo em vista que a crise financeira atual dificultou a transação, ele resolveu fazer a venda em duas etapas:
1ª etapa: Vendeu $\frac{3}{6}$ de $\frac{2}{3}$ do terreno reduzindo a taxa de lucro à metade e recebeu R$ 44.000,00 pelo negócio.
2ª etapa: Vendeu o restante do terreno e conseguiu o lucro de 20% sobre o custo desta parte.
Analisando os fatos acima, conclui-se que Pedro:
a) havia pago pelo terreno todo menos de R$ 90.000,00
b) recebeu, no total, menos de R$ 110.000,00.
c) teve uma redução de 5 mil reais no lucro total pretendido.
d) teve um lucro real de 16% sobre o preço de custo.

138) **(EPCAR)** João pagou a metade dos $\frac{3}{5}$ do que devia.
Ao procurar o credor para quitar o restante de sua divida, foram-lhe apresentadas duas propostas:
1ª) Pagar tudo à vista com 10% de desconto.
2ª) Assumir um acréscimo de 30% para um possível pagamento parcelado.
João optou pelo pagamento à vista e gastou exatamente 945 reais para quitar o restante da dívida.
Caso optasse pela 2ª proposta, João teria gasto a mais um valor em reais compreendido entre:
a) 390 e 410
b) 410 e 430
c) 430 e 450
d) 450 e 470

139) **(EPCAR)** Carlos, ao levantar o total de suas dívi das, percebeu que dispõe de uma poupança com saldo de y reais eu lhe permitirá pagar 40% do que deve. Se ele acrescentar a esse saldo de poupança x reais, apurado com a venda à vista de seu carro, ele pagará tudo e ainda lhe sobrará 10000 reais.
O irmão de Carlos, querendo ajudar, emprestou-lhe 3200 reais para serem devolvidos sem juros assim que Carlos consiga vender o carro.
Usando todo o saldo de sua poupança e mais o empréstimo do irmão, Carlos reduzirá sua divida para $\frac{7}{15}$ de seu valor original, enquanto aguarda a venda do carro.
Com base nesses dados é correto afirmar que
a) o valor x apurado com a venda de seu carro à vista é maior que 30000 reais.
b) o total de suas dívidas no levantamento original não chega a ser 20000 reais.
c) se vender seu carro por x reais, ele pagará seu irmão, quitará o restante do que deve e ainda ficará com uma quantia maior que y reais.
d) sem recorrer à poupança e sem a ajuda do irmão, considerando somente os x reais da venda do carro, ele não quitaria suas dívidas.

140) **(EPCAR)** Dois sócios x e y que montaram uma firma e que têm retirada mensal de acordo com o capital inicial de cada um, combinaram que a soma das retiradas totalizaria R$ 5.000,00. Após 6 meses, y passou a receber por mês mais 15% por ter adquirido algumas cotas de x que, consequentemente, passou a receber 1/10 a menos. Sabendo-se que, mesmo após a mudança, o total da retirada mensal permaneceu e que x sempre economizou

1/12 do que recebia, enquanto y sempre economizou 12,5%, é **INCORRETO** afirmar que:
a) a economia mensal de ambos era a mesma nos primeiros 6 meses.
b) x passou a receber menos de R$ 2.800,00 após 6 meses.
c) a diferença entre as duas retiradas caiu para 40% com a mudança.
d) a economia mensal de x diminuiu R$ 30,00 com a alteração das retiradas.

141) **(EPCAR)** Um determinado carro popular custa, numa revendedora, R$ 22.500,00 à vista. Numa promoção para queima de estoque, que será realizada em dezembro de 2006, com R$ 6.500,00 de entrada, um comprador tem o valor restante do carro facilitado em 36 prestações mensais, sendo que as prestações num mesmo ano são iguais e que a cada ano a prestação sofre um aumento de 10%, relativamente à do ano anterior. Sabendo-se que a primeira prestação a ser paga nomês de janeiro de 2007 é de R$ 500,00, pode-se afirmar que:
a) o comprador desembolsará, ao final do 2o ano, excluindo a entrada, um valor maior que 12.800,00
b) o valor total a ser desembolsado na compra a prazo será de R$ 25.000,00
c) se o comprador adquirir o carro à vista e não optar pela promoção, economizará 17% do valor do carro à vista.
d) o valor total das prestações nos 36 meses é de R$19.860,00

142) **(UFRJ)** Para montar uma fábrica de sapatos, uma empresa fez um investimento inicial de $ 120.000,00. Cada par de sapatos é vendido por $ 30,00, com uma margem de lucro de 20%. A venda mensal é de 2.000 pares de sapatos.
Determine o número de meses necessários para que a empresa recupere o investimento inicial.

143) **(EPCAR)** Um comerciante ao comprar livros que custavam x reais a unidade ficou ciente de que pagaria também um frete correspondente a 1,6% sobre o valor da compra. Ele resolveu pagar à vista após conseguir um desconto de 10% sobre o valor total dos livros, mas teve que assumir o valor original do frete, desembolsando, assim, R$ 2.748,00 pela aquisição.
Na venda, ele deu um preço aos livros visando lucrar 50% sobre a tabela original, onde cada um custava x reais.

Após vender $\frac{4}{5}$ do total de livros, ele os remarcou reduzindo o preço de cada um, em 20%.

Depois de algum tempo, viu que havia vendido $\frac{2}{3}$ do resto e ainda sobravam 10 livros, que foram doados a uma escola.
Se na comercialização ele gastou R$ 252,00 a mais e ainda conseguiu, ao final, um lucro real de y% sobre todos os gastos, é correto afirmar que y é igual a
a) 20
b) 24
c) 30
d) 36

144) **(UFRJ)** A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%.
Um certa mercadoria, cujo preço à vista é P, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: $ 100,00 de entrada, uma prestação de $ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de $ 220,00 a ser paga em 60 dias.
Determine P, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

145) **(PUC)** Uma geladeira pode ser comprada à vista por $ 2.000,00, ou em três prestações mensais iguais, sendo a primeira delas paga no ato da compra. Se o vendedor cobra juros de 30% ao mês sobre o saldo devedor, qual deverá ser o valor de cada prestação, aproximadamente?

146) **(CN)** Seja P o produto de 3 números positivos. Se aumentarmos dois deles de 20% e diminuirmos o outro de 40%, teremos que P:
a) não se altera
b) aumenta de 13,6%
c) aumenta de 10%
d) diminui de 10%
e) diminui de 13,6%

147) **(CEFET)** Um empresário comprou dois automóveis por preços diferentes, investindo um total de $ 100.000,00. Um deles desvalorizou 20%, o outro valorizou 20%. Agora, ambos têm o mesmo valor. Qual é esse valor?

148) **(CN)** João vendeu dois carros de modelos SI e SR, sendo o preço de custo do primeiro 20% mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de 20% sobre os seus respectivos preço de venda. Se o total dessa venda foi $ 88.000,00, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a:
a) $ 30.000,00
b) $ 32.000,00
c) $ 34.000,00
d) $ 35.000,00
e) $ 36.000,00

149) **(UFRJ)** Dois produtos P_1 e P_2 são fabricados com os componentes A e B. P_1 é composto de 20% de A e 80% de B, enquanto P_2 é composto por 10% de A e 90% de B. A fábrica tem estocados 2 litros de A e 13 litros de B. Quantos litros de P_1 e de P_2 ela pode fabricar usando todo o seu estoque?

150) **(CN)** Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:
a) 6,0 %
b) 6,3 %
c) 7,0 %
d) 7,3 %
e) 8,0 %

151) **(UFRJ)** Das 100 pessoas que estão em uma sala. 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%?

152) **(CN)** Considere um soro glicosado a 5% quando para cada 100 ml de soro tem-se 5 ml de glicose.
Com dois soros X e Y, respectivamente, glicosados a 5% e 23%, deseja-se obter 3 litros de uma mistura com 8% de glicose. Portanto, necessita-se, em litros de um volume de soro X igual a:
a) 2,5
b) 2,3
c) 2,1
d) 2,0
e) 1,8

153) **(CN)** Uma determinada conta a pagar de valor X vence no dia 30 de novembro, mas, se for paga até o dia 30 de setembro, tem 20% de desconto sobre X e, se for paga até o dia 31 de outubro, tem 10% de desconto sobre X. Alguém reservou o valor exato Y para pagar essa conta no dia 30 de setembro, no entanto esqueceu-se de fazê-lo e só efetuou esse pagamento no dia 31 de outubro. Qual a porcentagem a mais sobre Y que terá de pagar?
a) 10%
b) 12,5%
c) 17,5%

d) 20%
e) 25%

154) **(CN)** Num determinado jogo, o apostador recebe, toda vez que ganha, o valor apostado inicialmente, mais 25% do mesmo; e recebe, toda vez que perde, apenas 25% do valor apostado inicialmente. Sabendo-se que foi feita uma aposta inicial de uma quantia x e que foram realizadas quatro jogadas, sempre sendo apostado o valor total obtido na jogada anterior, das quais ganhou-se duas e perdeu-se duas, qual é, aproximadamente, o percentual de x obtido no final?
a) 3,7
b) 4,7
c) 5,7
d) 6,7
e) 9,8

GABARITO

1) a) $1/4$
b) $6/25$
c) $6/25$
d) $3/10$
e) $21/50$
f) $12/5$
g) $16/625$
h) $\frac{3}{250.000}$

2) a) 0,4
b) 1,32
c) 0,0314
d) 0,00003

3) a) 35%
b) 174%
c) 430%
d) 6%
e) 40%
f) 56%
g) 85%
h) 370%
i) 187,5%
j) 293%
l) 18,75%
m) 0,73%
n) 16%
o) 3,125%

4) a) 36 pregos
b) 48 bolas
c) 6
d) 10,5
e) 14
f) 280

5) 750
6) 320
7) 650
8) 1.200
9) 8.400
10) 80%
11) 75%
12) 240.000
13) 65%
14)
15) D

16) a) 20%
b) 82%
17) a) 1,3R
b) 1,45R
c) 1,03R
d) 1,2374R
e) 5R
f) 2R

18) a) 80%
b) 35%
c) 134,2%
d) 30%

19) a) 0,7R
b) 0,65R
c) 0,78R
d) 0,9R
e) 0,75R

20) a) 20%
b) 25%
c) 20%

21) $ 378,00
22) $ 1.050,00
23) $ 138,00
24) 44
25) $ 3,00
26) $ 13.310,00
27) 120
28) $ 110,40
29) 42%
30) 16%
31) $ 7.130,00
32) $ 102,00
33) $ 250,00
34) $ 72,00
35) $ 6.500,00
36) $ 250,00
37) $ 2.975,00
38) E
39) B
40) D
41) A
42) 82%
43) A
44) $ 7.290,00
45) 33%
46) E
47) $ 2.000,00
48) 35%
49) C
50) D
51) C
52) A
53) C
54) B
55) D
56) B
57) C
58) C
59) D
60) E
61) A
62) B
63) D
64) a) 1.325.000
b) Os valores são calculados a partir da popula- população total de cada país.
65) A
66) B
67) A
68) D
69) D
70) E

71) a) 15
b) 260

72) 50%
73) a) 38%
b) 120

74) a) $ 4.100,00
b) 119,7%

75) a) $ 14.331,20
b) 10,24%

76) C
77) A
78) D
79) E
80) A
81) B
82) B
83) D

84) D
85) C
86) D
87) E
88) D
89) E
90) D
91) E
92) D
93) B
94) B
95) C
96) D
97) B
98) C
99) B
100) C
101) B
102) A
103) B
104) D
105) C
106) C
107) C
108) B
109) B
110) $ 400,00
111) B
112) C
113) 26%
114) B
115) 25%
116) B
117) C
118) D
119) B
120) Redução de 10%

121) a) 48%
b) 21

122) D
123) B
124) C
125) 25%
126) E
127) C
128) E
129) D
130) B
131) 50%
132) 25%
133) C
134) C
135) 150%
136) C
137) D
138) B
139) C
140) D
141) D
142) 10 ou 12
143) D
144) $ 500,00
145) $ 847,00
146) E
147) $ 48.000,00
148) B
149) P_1 : 5 e P_2 : 10
150) E
151) 50
152) A
153) B
154) E

OBSERVAÇÕES

Juros

Juros simples

No cálculo dos juros simples, a taxa de juros incidirá sempre sobre o capital inicial. Assim sendo, os juros simples **j**, produzidos por um capital **C**, durante um tempo **t**, submetido a uma taxa **i**, são dados por:

$$\boxed{j = C.i.t}$$

Observações:

1) Para aplicarmos a fórmula acima, é necessário que a taxa **i**, e o tempo **t** estejam na mesma unidade, ou seja, se a taxa for anual, o tempo deve ser dado em anos, se a taxa for mensal, o tempo deve estar em meses; no caso de uma taxa diária, o tempo deve ser expresso em dias.

2) É importante ressaltarmos que:
→ 1 mês comercial = 30 dias
→ 1 ano comercial = 12 meses = 360 dias

3) Ao indicarmos a taxa, utilizamos as notações:
a.a. : ao ano
a.m.: ao mês
a.d. : ao dia

4) Quando não for indicada a periocidicidade da taxa, supomos que ela seja anual.

5) O montante **M** é dado por:

$$\boxed{M = C + j}$$

Exemplo:

Quais os juros produzidos por $ 2.000,00, durante 7 meses a uma taxa de 36% aa? E o montante?

Resolução:

Neste caso temos: C = 2000; t = 7 m = 7/12 a e

$i = 36\%\ aa = \frac{36}{100}\ aa$

$j = C.i.t = 2000.\frac{36}{100}\cdot\frac{7}{12} = \$\ 420,00$

M = C + j = 2000 + 420
M = $ 2420,00

Juros compostos

Neste caso, o cálculo do juro é feito em relação ao montante que se tem no início de cada período. No final de cada período, o juro é incorporado ao capital.

Exemplo:

O Prof. Marcão pediu emprestado $ 100,00 a um banco que cobra juros compostos de 10% ao mês. Qual é o montante da dívida 3 meses após o pedido de empréstimo?

Resolução:

Mês	Montante no início de cada mês	Juros do Mês	Montante no final de cada mês
1º	100,00	10% de 100 = 10	110,00
2º	110,00	10% de 110 = 11	121,00
3º	121,00	10% de 121 = 12,10	133,10

Importante:

O montante obtido quando aplicamos um capital **C**, durante um tempo **t**, a uma taxa **i**, é dado por:

$$\boxed{M = C\,.\,(1 + i)^t}$$

No exemplo anterior, temos:

$C = 100 \quad t = 3m \quad i = 10\%\ am = \frac{10}{100} = 0{,}1\ am$

$M = C\,.\,(1 + i)^t = 100\,.\,(1 + 0{,}1)^3 = 100\,.\,1{,}1^3 =$
$= 100\,.\,1{,}331 = 133{,}10$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

Considere nos itens 1 a 10, a modalidade de juros simples.

1) Quanto renderá de juros a quantia de $ 800,00 aplicada durante 5 anos e meio, a uma taxa de 2% ao ano?

2) Que capital produz ao final de 40 meses, aplicado a uma taxa anual de 60%, um montante de $ 4.263,00?

3) Quais os juros produzidos por $ 6.000,00, durante 3 anos, com uma taxa de 5% ao ano?

4) Quais os juros produzidos por $ 1.200,00, durante 7 meses, a uma taxa de 18% ao ano?

5) A quanto se eleva o capital de $ 2.400,00, quando aplicado durante dois anos e quatro meses, a uma taxa de 32% ao ano?

6) Durante quanto tempo o capital de $ 280,00 deve ser investido para produzir $ 224,00, a uma taxa de 5% ao ano?

7) A que taxa anual devemos aplicar $ 840,00, durante 15 meses, para obter juros de $ 756,00?

8) Após quanto tempo um certo capital quintuplica de valor, aplicado a uma taxa mensal de 4%?

9) A que taxa mensal deve ser aplicado o capital de $ 1.600,00 durante três anos, para produzir juros de $ 1.728,00?

10) Quantos dias devemos esperar para que um capital, aplicado à taxa de 150% ao ano, triplique o valor?

11) A taxa mensal que faz um capital de $ 80.000,00 render $ 14.400,00 de juros simples, em 6 meses, é:
a) 3,0%
b) 3,5%
c) 4,0%
d) 4,5%
e) 5,0%

12) Durante quantos anos, Bruno deve aplicar $ 30.000,00, à taxa de 2,5% de juros simples ao mês, para obter um montante de $ 57.000,00?
a) 18 anos
b) 6 anos
c) 36 anos
d) 3 anos

13) Sarah emprestou uma certa quantia a sua amiga Caroline à taxa de juros simples de 15% ao ano. Depois de 8 meses, Sarah recebeu $ 3.600,00 de juros. Qual foi a quantia que Sarah emprestou?

14) Um capital foi aplicado a juros simples, à taxa de 117,6% ao ano, durante 5 meses, dando um retorno de $ 161.665,00. Esse capital corresponde a:
a) $ 98.200,00
b) $ 99.800,00
c) $ 103.800,00
d) $ 108.500,00
e) $ 112.400,00

15) Qual é o capital que aplicado à taxa de 2% ao mês durante 3 anos, produziu \$ 360,00 de juros simples?
a) \$ 6.000,00
b) \$ 600,00
c) \$ 500,00
d) \$ 5.000,00

16) Uma conta bancária com saldo devedor paga juros de 4,0% ao mês no regime de juros simples. Nos primeiros 10 dias o saldo devedor foi de \$ 600,00 e nos dias 20 dias restantes o saldo devedor foi de \$ 900,00. Os juros a serem pagos nesses 30 dias será de:
a) \$ 32,00
b) \$ 24,00
c) \$ 8,00
d) \$ 6,00
e) \$ 60,00

17) Se $\frac{6}{8}$ de uma quantia produzem $\frac{3}{8}$ desta mesma quantia de juros simples em 4 anos, qual é a taxa aplicada?
a) 20% a.a.
b) 125% a.a
c) 12,5% a.a
d) 200% a.a
e) 10% a.a

QUESTÕES DE CONCURSOS

18) **(CN)** Uma instituição financeira abaixou a sua taxa de juros de 2,5% para 2,0%. Assinale a opção que apresenta, em percentagem, a redução sobre a taxa inicial.
a) 0,5
b) 5
c) 7,5
d) 15
e) 20

19) **(CN)** Em quantos meses, no mínimo, um capital aplicado segundo a taxa simples de 0,7% ao mês produz um montante que supera o dobro do seu valor?
a) 140
b) 141
c) 142
d) 143
e) 144

20) **(EPCAR)** Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:
1. Mateus aplicou a quantia **y** durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia **x** de Lucas.
2. Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.
3. No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.
Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x - y$ é igual a:
a) R\$ 103,20
b) R\$ 106,40
c) R\$ 108,30
d) R\$ 109,60

21) **(EPCAR)** Dois capitais a e b, a > b, cuja diferença entre os mesmos é igual aos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{8}$ de R\$ 4.000,00 foram aplicados às taxas de juros simples de 20% ao ano, o capital maior; e 30% ao ano, o capital menor.
Após 257 dias de aplicação, o investidor solicitou resgate do maior valor aplicado e mais os juros das duas aplicações que naquela data representavam valores iguais.
Sabendo-se que o ano comercial possui 360 dias e que em qualquer dia do ano que o investidor resgatasse as aplicações ele receberia o rendimento proporcional ao tempo de aplicação, é correto afirmar que
a) o valor total aplicado é menor que R\$ 900,00.
b) se os dois capitais só fossem resgatados ao final do primeiro ano, eles teriam rendido, juntos, $\frac{1}{4}$ de seu valor.
c) o capital menor corresponde a 60% do capital maior.
d) após o resgate do maior valor aplicado e dos juros das duas aplicações, se for mantida a aplicação do capital menor, à mesma taxa, após meio ano, ele renderá um valor correspondente a 10% do capital maior.

22) **(CEFET)** Um capital foi aplicado da seguinte maneira: seus dois quintos rendendo 4% ao mês e a parte restante rendendo 3% ao mês. No fim de um mês, a diferença entre os juros das duas partes foi de \$ 27,00. Qual foi o capital aplicado inicialmente?

23) **(CN)** Se uma pessoa aplica somente $\frac{2}{5}$ de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês (juros simples) e recebe \$ 9.600,00 de juros, então o seu capital é de:
a) \$ 128.000,00
b) \$ 240.000,00
c) \$ 320.000,00
d) \$ 400.000,00
e) \$ 960.000,00

24) **(EPCAR)** Um capital C colocado a render juros simples durante 18 meses produziu o montante de \$ 63.000,00. Colocado nas mesmas condições durante dois anos produziu o montante de \$ 72.000,00. Qual a taxa anual?
a) 50%
b) 20,83%
c) 36%
d) 32,74%
e) 48,6%

25) **(CM)** A prefeitura de um Município multou a companhia de papéis e sucatas local em \$ 3.850,00, por poluição do meio ambiente. Se o pagamento não for efetuado até o próximo dia 20 de novembro, haverá um acréscimo de 20% desse valor, mais juros simples por dia de atraso, calculados sobre o novo valor da multa à taxa de 12% ao mês.
Assim sendo, caso só liquide esta dívida no dia 30 de novembro corrente, a fábrica deverá pagar:
a) \$ 4.635,40
b) \$ 4.804,80
c) \$ 5.082,00
d) \$ 6.468,00
e) \$ 10.164,00

26) **(CN)** Uma dívida, contraída à taxa de juros simples de 10% ao mês, deverá ser paga em duas parcelas, respectivamente iguais a R\$ 126,00, daqui a 4 meses, e R\$ 192,00, daqui a 6 meses. Caso essa mesma dívida fosse paga em duas parcelas iguais, uma daqui a 4 meses, e a outra daqui a 6 meses, qual seria a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso?
a) R\$ 4,30
b) R\$ 4,40
c) R\$ 4,50
d) R\$ 4,60
e) R\$ 4,70

27) **(EPCAR)** Sr. José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5 % ao ano. Terminado o primeiro

ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou $\frac{1}{3}$ na compra de material para construção de sua casa. O restante do dinheiro investiu em duas aplicações: colocou $\frac{5}{7}$ a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano. Pode-se afirmar, então que a quantia x que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13

28) **(CM)** Uma pessoa resolve realizar aplicações financeiras em três modalidades diferentes, todas a juros simples, para ter segurança e rentabilidade. Aplica, assim, R$ 5000,00 em poupança, rendendo 2% ao mês de juros, R$ 4000,00 em CDB, que lhe rende 3,5% de juros ao mês e R$ 3000,00 na Bolsa de Valores, rendendo-lhe 4% de juros ao mês. Dessa forma, ele consegue uma taxa média de juros mensais igual a:
a) 2,75%
b) 2,90%
c) 3,00%
d) 3,10%
e) 3,25%

29) **(EPCAR)** Ao desfazer uma sociedade, dois sócios A e B fizeram a retirada de suas partes que eram diretamente proporcionais a 1 e 3. O sócio A aplicou, então, o valor de sua retirada à taxa de 50% ao ano. Já o sócio B aplicou a sua parte à taxa de 25% ao ano e 2/3 do montante que recebeu após 12 meses foi igual a 150.000 reais. Pode-se afirmar que:
a) a diferença entre os rendimentos dos sócios A e B, após 12 meses, é, em milhares de reais, um número do intervalo [8, 15]
b) a soma dos capitais retirados por A e B é igual ao montante que o sócio B conseguiu após 12 meses.
c) o rendimento obtido pelo sócio A é igual a 30% do rendimento do sócio B.
d) o capital retirado pelo sócio A e o rendimento conseguido pelo sócio B são valores iguais.

30) **(CM)** Um capital C foi aplicado a juros simples, durante um ano e seis meses, da seguinte maneira: 50% do capital foi aplicado a 4% ao ano, $\frac{1}{3}$ foi aplicado a 10% ao ano e o restante foi aplicado a i% ao ano. Se o rendimento total obtido ao término do prazo foi 10,5% do capital aplicado, então o valor de i é:
a) 8%
b) 10%
c) 12%
d) 14%
e) 16%

31) **(CN)** A que taxa de juros simples, em por cento ao ano, deve-se emprestar um certo capital, para que no fim de 6 anos e 8 meses, duplique de valor?
a) 10
b) 12
c) 15
d) 18
e) 20

32) **(CN)** Uma aplicação do mercado financeiro, que rende 0,3% ao dia, exige um mínimo de $ 50.000,00 para ser efetuada. Uma pessoa que dispõe de $ 45.000,00, toma $ 5.000,00 à taxa de 1% ao dia, para fazer tal aplicação. Durante quantos dias, no mínimo, deverá aplicar para pagar o empréstimo e continuar aplicando?
Obs.: Considerar os juros simples.
a) 40
b) 43
c) 45
d) 47
e) 50

33) **(CN)** Um capital C foi aplicado a uma taxa mensal numericamente igual ao capital. Quantos meses são necessários para que os juros simples sejam iguais ao quadrado do capital?
a) 20
b) 50
c) 100
d) 200
e) 400

34) **(CEFET)** Caio aplicou, por dois meses, certa quantia à taxa de 10% ao mês, num sistema de juros simples. Sua irmã Luísa aplicou a mesma quantia, com a mesma taxa e durante o mesmo período de tempo, porém num sistema de juros compostos. Em relação ao juro recebido por Caio, o juro recebido por Luísa foi:
a) 5% menor
b) 5% maior
c) 10% menor
d) 10% maior

35) **(ENEM)** João deseja comprar um carro cujo preço á vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses.
Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.
Para ter o carro, João deverá esperar:
a) dois meses, e terá a quantia exata.
b) três meses, e terá a quantia exata.
c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
d) quatro meses, e terá a quantia exata.
e)quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

36) **(ENEM)** Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pagão em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é
a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

37) **(ENEM)** Considere que uma pessoa dec da investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:
Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre
As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa devera
a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidades de 39% ao não é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

38) **(CEFET)** Amanda,Bianca e Carlos tinham, juntos, R$ 10.000,00. Cada um deles investiu sua parte por um ano, com juros de 10% ao ano. Depois de creditados seus juros no final desse ano, Carlos passou a ter R$ 1.100,00 mais o dobro do novo capital de Amanda. No ano seguinte, os três reinvestiram seus capitais, ainda com juros de 10% ao ano. Depois de creditados os juros de cada um no final desse segundo ano, o novo capital de Carlos era igual à soma dos novos capitais de Bianca e Amanda. Qual era o capital inicial de Amanda?
a) R$ 2.000,00
b) R$ 2.200,00
c) R$ 2.400,00
d) R$ 2.600,00
e) R$ 2.800,00

39) **(EPCAR)** Com os 7/8 da metade do valor da herança que Carlos recebeu, ele adquiriu um lote. Com 1/3 do restante ele liquidou suas dívidas e o valor que sobrou foi dividido em partes iguais aplicadas como a seguir: a 1a parte foi aplicada na poupança com rendimento de 0,5% ao mês; e a 2ª foi aplicada em ações onde, ao fim de 15 dias, ele havia perdido 40% do valor dessa aplicação. Ao fim dos 15 dias subsequentes, Carlos conseguiu recuperar 50% do que foi perdido, ficando com um capital equivalente a 48.000 reais na 2ª parte aplicada. Com base nisso, é **INCORRETO** afirmar que:
a) o valor total dessa herança seria suficiente para comprar uma casa avaliada em 300.000 reais, caso não comprasse o lote nem liquidasse suas dívidas.
b) o lote adquirido custou menos de 150.000 reais.
c) o rendimento da poupança no primeiro mês foi superior a 200 reais.
d) considerando o mês de 30 dias, ao final do primeiro mês, a soma das partes aplicadas e seus rendimentos totalizavam 108.000 reais.

GABARITO

1) $ 88,00
2) $ 1.421,00
3) $ 900,00
4) $ 126,00
5) $ 4.192,00
6) 16 anos
7) 72%
8) 8 anos e 4 meses
9) 3%
10) 480
11) A
12) D
13) $ 36.000,00
14) D
15) C
16) A
17) C
18) E
19) D
20) A
21) D
22) $ 13.500,00
23) C
24) A
25) B
26) B
27) D
28) C
29) A
30) B
31) C
32) E
33) C
34) B
35) C
36) D
37) C
38) A
39) D

OBSERVAÇÕES

Conjuntos

Conceituação

O conceito de conjunto é um dos mais fundamentais em toda a Matemática e tal como ponto, reta e plano não tem definição. Sua percepção é intuitiva. Os componentes de um conjunto são chamados de elementos. É importante saber a simbologia utilizada no tratamento de conjuntos. Dentre os principais símbolos podemos destacar:

a) A, B, C, ... → letras maiúsculas indicam conjuntos
b) a, b, c, ... → letras minúsculas indicam elementos
c) | → tal que
d) $\exists$ → existe
e) $\exists|$ → existe um único
f) $\nexists$ → não existe
g) $\forall$ → para todo, qualquer que seja
h) $\wedge$ → e
i) $\vee$ → ou
j) n(A) → nº de elementos do conjunto A

Representação de um conjunto

Podemos representar um conjunto segundo três formas:

I) Por extensão:
Os elementos são mostrados explicitamente no conjunto, colocados entre chaves e separados por vírgulas.

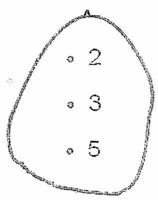
Ex: A = {0, 1, 4}

II) Por compreensão
Os elementos são dados de forma implícita por intermédio de uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

Ex: A = {x|x é vogal}

III) Por diagramas
Utilizam-se linhas fechadas não entrecruzadas em cujo interior são dispostos os elementos do conjunto. Quando a linha utilizada é um círculo, estamos diante de um diagrama de *VENN*.

Ex:



Diagrama

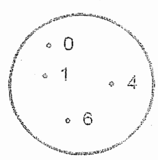


Diagrama de *Venn*

Observações:
1) Os elementos repetidos de um conjunto são contados uma única vez. Assim sendo, não é aconselhável a repetição de elementos, o que seria, de todo supérfluo.

Ex: Sendo A = {1,1,2,2,3,3}, B = {1,2,2,2,3} e C = {1,2,3}, temos que n(A) = n(B) = n(C) = 3.

2) A ordem em que os elementos aparecem no conjunto é irrelevante. Logo, dois conjuntos que apresentam os mesmos elementos, em qualquer ordem, são iguais.

Ex: Se A = {1,2,3} e B = {2,3,1}, então A = B

Conjuntos importantes

I) Conjunto vazio
É aquele que não possui elementos. É representado por {} ou Ø.
Ex: A = {y | y é estado brasileiro iniciado pela letra y} = Ø

II) Conjunto unitário
É aquele que apresenta um único elemento.
Ex: A = {2} → lê-se: "conjunto unitário 2".

III) Conjunto universo
É o conjunto de onde são retiradas as soluções de determinado problema. É representado pelo símbolo U.

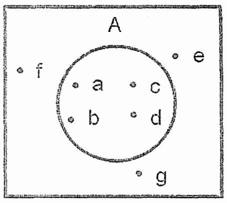
Relação de pertinência

A relação de pertinência é utilizada somente entre *ELEMENTO* e *CONJUNTO*. Os símbolos usados são:

$\in$ → pertence a
$\notin$ → não pertence a

Exemplos:
Dado o conjunto A = {a, b, c, d}, podemos afirmar que:

a $\in$ A
c $\in$ A
e $\notin$ A
g $\notin$ A



Observação:
Todo conjunto pode ser elemento de um outro conjunto, conjunto este chamado de FAMÍLIA DE CONJUNTOS.

Exemplo:
a) O conjunto {1,2} é elemento do conjunto A = {{1,2},3,4}. Assim, {1,2} $\in$ A.

b) O conjunto X = {1, {2}, {3, 5}} possui três elementos que são 1,{2} e {3,5}.

Relação de inclusão

Para o relacionamento entre dois conjuntos, utiliza-se a inclusão, que é regida pelos seguintes símbolos:

$\subset$ → está contido em
$\not\subset$ → não está contido em
$\supset$ → contém
$\not\supset$ → não contém

Exemplos:

{1,2}	$\subset$	{1, 2, 3}
{0,1,3,4}	$\supset$	{1}

Observações:
a) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
Ex: Ø $\subset$ {1,2}

b) Todo conjunto está contido e contém ele mesmo.
Ex: {2,5} $\subset$ {2,5} $\wedge$ {2,5} $\supset$ {2,5}

c) Chamamos de *SUBCONJUNTO* de um conjunto, todo conjunto nele contido. Como o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, ele é subconjunto de qualquer conjunto.

Importante
Se um conjunto tem *n* elementos, então terá 2^n subconjuntos.

Ex: Dado o conjunto A = {1,2,3}, temos que n(A) = 3, logo terá

$2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos, quais sejam:
Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}

Conjuntos numéricos

I) Conjunto dos números naturais (IN)

IN = {0, 1, 2, ...}

II) Conjunto dos números inteiros (Z)

Z = {......., –2, –1, 0, 1, 2, ...}

Observação:

A letra Z foi escolhida para representar o conjunto dos números inteiros pois inicia a palavra ZAHL que, em alemão, significa número.

III) Conjunto dos números racionais (Q)

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \wedge q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

Observação:

Cabe ressaltar que o conjunto Q é formado por todos os números que podem ser expressos sob forma fracionária de numerador e denominador inteiros e este não nulo. Nesse conjunto figuram as frações ordinárias, os números decimais exatos, as dízimas periódicas e os números inteiros.

Ex: $\frac{2}{3}$; –0,78; 4,333....; –11; $\frac{43}{10}$; 0; 0,8

IV) Conjunto dos números irracionais (I)

$$I = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q}, p \wedge q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

Observação:

No conjunto I aparecem todos os números que não pertencem ao conjunto Q, tais como as raízes inexatas e as dízimas não periódicas.

Ex: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{19}$; π ; 4,913762104...

V) Conjunto dos números reais (R)

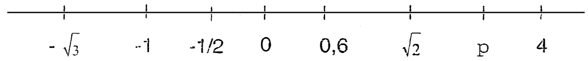
$$R = \{ x \mid x \in Q \vee x \in I \}$$

Observação:

O conjunto R é formado pelos números racionais e irracionais.

A Reta Real

Os conjuntos N, dos números naturais, e Z, dos números inteiros, são infinitos porém enumeráveis. Isso significa que dado um elemento $\underline{x}$ de qualquer um desses conjuntos podemos identificar o seu sucessor, que seria o menor elemento do conjunto que é maior do que $\underline{x}$. Assim, por exemplo, o sucessor do número 2, nos conjuntos N e Z, é o número 3, cujo sucessor é o número 4, cujo sucessor é o número 5, e assim por diante. Note que poderíamos determinar os sucessores infinitamente, pois, como citamos anteriormente, esses conjuntos (N e Z), apesar de infinitos são enumeráveis. Consideremos agora o conjunto R, dos números reais. Lembre-se que, nesse conjunto, encontram-se todos os números racionais e irracionais. Você poderia identificar o sucessor real do número 2? Se você disser que é o 3, eu posso dizer, por exemplo, que é o 2,1. Você pode dizer que é o 2,01, e eu posso dizer que é o 2,001. Ou seria o 2,0001? Ou o número 2,00001? Certo é que a cada número citado como postulante sucessor do número 2, existe um outro mais "próximo" do 2. Isto ocorre porque o conjunto dos números reais é infinito e não enumerável, haja vista que entre dois números reais quaisquer existe um outro número real. Devido à necessidade de uma representação gráfica para a melhor visualização dos elementos do conjunto R, buscou-se um elemento geométrico que possuísse características análogas a ele. Escolheu-se a reta como modelo para representar os números reais, pois, além de ser formada por infinitos pontos, é impossível identificar o sucessor de cada um deles, visto que entre dois pontos quaisquer de uma reta há sempre um terceiro, fato semelhante ao que ocorre com os números reais. A reta utilizada, nesse caso, é chadada de RETA NUMERADA ou RETA REAL. A reta real é orientada, pois estabelece-se um ponto como origem, associado ao número 0 (zero) e faz-se uma convenção de sinais: os pontos situados à direita do ponto origem estão associados aos numeros positivos e os situados à esquerda estão associados aos números negativos. Os números devem ser marcados em ordem crescente da esquerda para a direita, através de uma correspondência biunívoca, em que a cada número real está associado um único ponto da reta e vice-versa. Na figura a seguir, mostramos a reta numerada e alguns elementos do conjunto R.



VI) Conjunto dos números complexos ou imaginários (C)

$$C = \{ x \mid x = a + bi, a \wedge b \in R, i = \sqrt{-1} \}$$

Nota:

O conjunto C dos números complexos é o conjunto mais abrangente de todos. Será objeto de estudo no ensino médio.

Observações:

I) A exclusão do ZERO de um conjunto deve ser feita usando-se um ASTERISCO (*).

Ex:
IN* = {1,2,3.....,}
Z* = {......, –2, –1, 1, 2,...}

II) A exclusão dos NÚMEROS NEGATIVOS deve ser feita usando-se um SINAL POSITIVO (+).

Ex:
Z_+ = {0, 1, 2, 3,...} → inteiros não negativos.

III) A exclusão dos NÚMEROS POSITIVOS deve ser feita usando-se um SINAL NEGATIVO (–).

Z_- = {...., –3, –2, –1, 0} → inteiros não positivos.

Operações com conjuntos

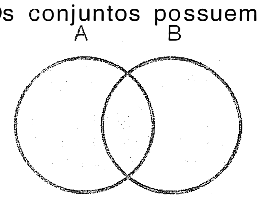
1) União

A união de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a um ou ao outro conjunto.

$$\boxed{A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}}$$

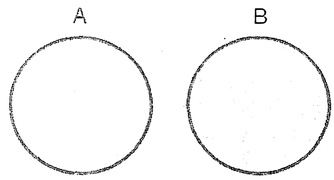
Nos diagramas de VENN abaixo, $A \cup B$ é representado pela região sombreada.

1° Caso: Os conjuntos possuem ao menos um elemento comum.



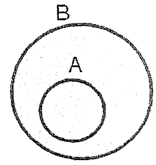
Ex: A = {1,2,3} e B = {2,3,4,5,7} → $A \cup B$ = {1,2,3,4,5,7}

2° Caso: Os conjuntos não possuem elementos comuns.



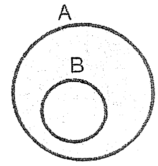
Ex: A = {0,2,3} e B = {1,4,5,6} → $A \cup B$ = {0,1,2,3,4,5,6}

3º Caso: O conjunto A está contido no conjunto B.



Ex: $A = \{1,2\}$ e $B = \{0,1,2,3,4\}$ $\rightarrow$ $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$

4º Caso: O conjunto B está contido no conjunto A.



Ex: $A = \{1,2,3,5,7\}$ e $B = \{2,7\}$ $\rightarrow$ $A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

Propriedades

1) $A \cup A = A$

2) $A \cup \varnothing = A$

3) $A \cup B = B \cup A$

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

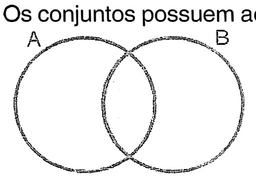
2) Interseção

A interseção de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos simultaneamente.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

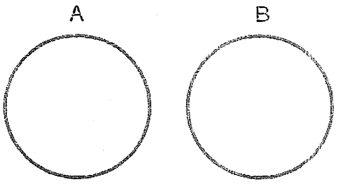
Nos diagramas de VENN abaixo, $A \cap B$ é representado pela região sombreada.

1º Caso: Os conjuntos possuem ao menos um elemento comum.



Ex: $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{1,3,4\}$ $\rightarrow$ $A \cap B = \{1\}$

2º Caso: Os conjuntos não possuem elementos comuns.



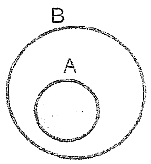
Ex: $A = \{0,2\}$ e $B = \{3,4,7\}$ $\rightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

Observação:

Dois conjuntos que não possuem elementos comuns são chamados de CONJUNTOS DISJUNTOS. Portanto, se M e N são dois conjuntos disjuntos, teremos:

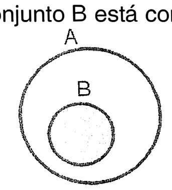
$$M \cap N = \varnothing$$

3º Caso: O conjunto A está contido no conjunto B.
Ex: $A = \{0,1\}$ e $B = \{0,1,2,3\}$ $\rightarrow$ $A \cap B = \{0,1\}$



Note que, se $A \subset B$, então $A \cap B = A$

4º Caso: O conjunto B está contido no conjunto A.



Ex: $A = \{1,2,3,5\}$ e $B = \{2,3\}$ $\rightarrow$ $A \cap B = \{2,3\} = B$

Propriedades

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

3) $A \cap U = A$

4) $A \cap B = B \cap A$

5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7) $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

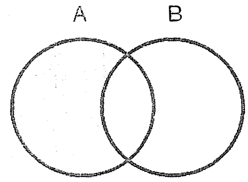
3) Diferença

A diferença entre dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo.

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

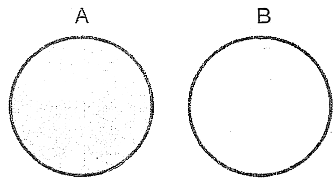
Nos diagramas de Venn abaixo, A – B é representado pela região sombreada.

1º Caso: Os conjuntos possuem ao menos um elemento comum.



Ex: $A = \{0,1,2,4\}$ e $B = \{1,2,5\}$ $\rightarrow$ $A - B = \{0,4\}$

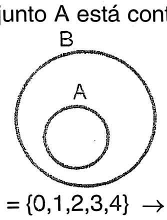
2º Caso: Os conjuntos são disjuntos.



Ex: $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4,6\}$ $\rightarrow$ $A - B = \{1,3,5\}$

Note que, se $A \cap B = \varnothing$ então $A - B = A$

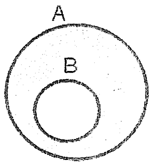
3º Caso: O conjunto A está contido no conjunto B.



Ex: $A = \{1,4\}$ e $B = \{0,1,2,3,4\}$ $\rightarrow$ $A - B = \varnothing$

Note que, se $A \subset B$, então $A - B = \varnothing$

4º Caso: O conjunto B está contido no conjunto A.



Ex: $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{2,4\} \Rightarrow A - B = \{3,5\}$

Propriedades

1) $A - A = \varnothing$

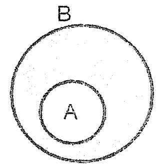
2) $A - \varnothing = A$

3) $A - B = B - A \Rightarrow A = B$

4) Complementar

Se um conjunto A está contido em um conjunto B, chamamos de complementar de A em B ao conjunto B – A, isto é, o conjunto dos elementos de B que não pertencem a A.

$\boxed{C_B^A = B - A}$



No diagrama de VENN acima, C_B^A é representado pela região sombreada.

Nota:
A ausência do conjunto inferior no complementar indica que este é feito em relação ao conjunto universo.

$\boxed{C^A = \overline{A} = A' = C_U^A = U - A}$

Ex: Dados os conjuntos $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$ e $C = \{2,3,5\}$, se considerarmos como universo o conjunto $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, temos que:

a) $C_B^A = B - A = \{3,4\}$

b) $\overline{C} = C_U^C = U - C = \{0,1,4,6\}$

c) C_C^A não está definido, pois $A \not\subset C$

Propriedades

1) $C_A^A = \varnothing$

2) $C_A^{\varnothing} = A$

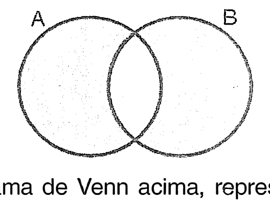
5) Diferença simétrica

A diferença simétrica de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos.

$\boxed{A \Delta B = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}}$

ou

$\boxed{A \Delta B = \{x | x \in A - B \vee x \in B - A\}}$



No diagrama de Venn acima, representamos A Δ B no caso em que A e B têm ao menos um elemento comum. Diagrame você, leitor, os outros casos e constate as propriedades abaixo

Propriedades

1) $A \Delta A = \varnothing$

2) $A \Delta \varnothing = A$

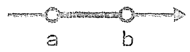
3) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$

4) $A \subset B \Rightarrow A \Delta B = B - A$

Intervalos Reais

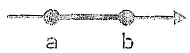
Denomina-se intervalo real, a qualquer subconjunto dos números reais. Sejam **a** e **b** números reais, com a < b. Vamos destacar todas as hipóteses possíveis.

1) Intervalo aberto



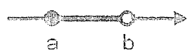
$\{x \in R \mid a < x < b\} = (a, b)$ ou $]a, b[$

2) Intervalo fechado



$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$

3) Intervalo semiaberto à direita

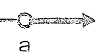


$\{x \in R \mid a \leq x < b\} = [a, b)$ ou $[a, b[$

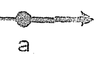
4) Intervalo semiaberto à esquerda

$\{x \in R \mid a < x \leq b\} = (a, b]$ ou $]a, b]$

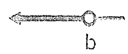
5) Intervalos infinitos



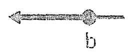
$\{x \in R \mid x > a\} = (a, +\infty)$ ou $]a, +\infty[$



$\{x \in R \mid x \geq a\} = [a, +\infty)$ ou $[a, +\infty[$



$\{x \in R \mid x < b\} = (-\infty, b)$ ou $]-\infty, b[$



$\{x \in R \mid x \leq b\} = (-\infty, b]$ ou $]-\infty, b]$

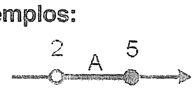
Observação:

a) Quando um elemento extremo não pertence ao conjunto, dizemos que este conjunto está ABERTO neste elemento.

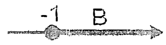
b) Quando um elemento extremo pertence ao conjunto, dizemos que este conjunto está FECHADO neste elemento.

c) O símbolo ∞ significa INFINITO. Assim +∞ significa um número infinitamente grande, enquanto que –∞ representa um número infinitamente pequeno, e por serem inatingíveis, por convenção, estarão sempre abertos.

Exemplos:

a) 

$A = \{x \in R \mid 2 < x \leq 5\} = (2,5] =]2,5]$

b) 

$B = \{x \in R \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty) = [-1, +\infty[$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Escreva os conjuntos por extensão.
a) A = {x|x é vogal}
b) B = {x|x é um número par positivo}
c) C = {x|x é capital da Bahia}
d) D = {x|x é um número primo, positivo e par}
e) E = {x|x é cor da bandeira nacional iniciada pela letra P}

2) Escreva os conjuntos por compreensão.
a) A = {norte, sul, leste, oeste}
b) B = {1,3,5,7}
c) C = {cabeça, tronco, membros}
d) D = {1,2,3,4,6,12}

3) Assinale os itens em que encontramos números racionais.
a) 2
b) –4
c) 1,32
d) π
e) 3,212121...
f) 4,001761943...
g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
h) –1,5
i) 3,1415926

4) Utilize os símbolos $\in$, $\notin$, $\supset$, $\not\supset$, $\subset$ ou $\not\subset$ corretamente, em:
a) 2 __ {1,2}
b) 3 __ {1,2}
c) Ø __ {2,3}
d) {1,2} __ {1, 2,3}
e) {1} __ {1, 2}
f) {1,2,3} __ {1, 3}
g) Ø __ { Ø, 1}
h) {1} __ {{1}, 2, 3}
i) {0} __ {{0}, 1, 2}
j) {1, {2}} __ {1, {2}, 3}
l) {{1, 2}} __ {{1}, {2}, {1, 2}}
m) {Ø, {1}} __ {0, {{1}}, 2}
n) {0} __ {0, {0}, Ø}
o) {2, 3} __ {2, 3}

5) Complete com $\in$ ou $\subset$:
a) 1 __ {1,2}
b) 1 __ {1}
c) {1,2} __ {1,2,3}
d) {1} __ {1,2,3}
e) {1} __ {0, {1}}
f) Ø __ {Ø,{1}}
g) {1} __ {1, {1}}
h) {{{ }}} __ {{{{ }}}}

6) Assinale a afirmativa falsa:
a) $\sqrt{4} \in \{x \in N \mid 2 < x < 4\}$
b) $-2 \notin \{x \in Z \mid -2 < x < 1\}$
c) $-\sqrt{2} \notin \{x \in Q \mid -2 < x < \sqrt{2}\}$
d) $\sqrt[3]{-8} \in \{x \in Z \mid -3 < x < 1\}$

7) Se A={0, {0}, Ø, {Ø}}, assinale a afirmativa FALSA.
a) $Ø \in A$
b) $Ø \subset A$
c) $\{0\} \in A$
d) $\{0\} \subset A$
e) $\{0, Ø\} \in A$

8) Sendo A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 3, 4}, C = {1, 4} e D = {0, 2, 5}, calcule:
a) $C \cup D$
b) $A \cup B \cup D$
c) $A \cap B$
d) $C \cap D$
e) $B - C$
f) $C - A$
g) $B - A$
h) $D - C$
i) C_A^B
j) C_B^C
l) C_A^D
m) C_A^C
n) $A \Delta B$
o) $B \Delta C$
p) $C \Delta D$
q) $(A \cup C) \cap B$
r) $(B \cup D) \cap C$
s) $(A - B) \cup (B \cap C)$
t) $(B - A) \cap (D - C)$
u) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
v) $(C - B) \cap (D - A)$
x) $(A \cup B) \cup (C \cap D)$
z) $(B - C) \cap (C - B)$

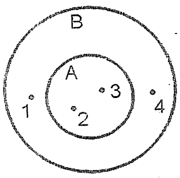
9) Sejam os conjuntos A = {a, b, c, d} e B = {f, b, d, g}, então A – B é:
a) {a, g}
b) {a, f}
c) {a, d}
d) {a, c}

10) Sejam os conjuntos A = {1,2,3,4}, B = {2,4,6,8} e C={3,4,5,6}, determinar $(A \cap B) \cap C$.
a) {1,4}
b) {2,6}
c) {4,5}
d) {4}

11) Dados os conjuntos X = {1, 2}, Y = {0, 1, 2} e Z = {2, 4}, qual a alternativa que representa a expressão cujo resultado é N = {1,2}?
a) $(X \cap Y) \cup Z$
b) $X \cap Y \cap Z$
c) $(X \cup Y) \cap Z$
d) $Ø \cup (X \cap Y)$

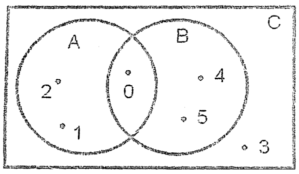
12) Calcular:
a) $N \cup Z$
b) $Z \cap N$
c) $Z - N$
d) $N - Z$
e) $Z \cap Q$
f) $N \cap Q$
m) $R - I$
n) $N \cup Z \cup Q \cup I \cup R$
o) $N \cap Z \cap Q \cap R$
p) $Z_+ \cap N$
q) $Z_- \cap N$

13) Considerando o diagrama abaixo, determine:
a) A
b) B
c) $A \cup B$
d) $A \cap B$
e) $A - B$
f) $B - A$
g) C_B^A
h) C_A^B



14) Considerando o diagrama abaixo, determine:
a) A
b) B

c) C
d) $A \cap B \cap C$
e) $A - B$
f) $C - B$
g) $A - C$
h) C_C^A



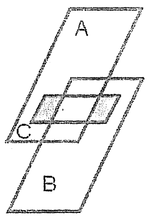
15) Considere os conjuntos:
$A = \{x \in IR \mid 2 \leq x < 7\}$
$B = \{x \in IR \mid 4 \leq x \leq 9\}$
$C = \{x \in IR \mid 5 < x < 10\}$
Determine, em forma de "intervalos", os conjuntos:
a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $A \cup B$
d) $A - B$
e) $A - C$
f) $(A \cup B) - C$

16) Dados os conjuntos A = [1, 6], B =]0, 3] e C =]2, 5[, determine:
a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cap C$
d) $A \cap B \cap C$
e) $A - B$
f) $B - C$
g) C_A^C

17) Em relação ao número π, é **VERDADE** que:
a) Seu valor exato é 3,14.
b) Trata-se de um número racional.
c) Sua representação decimal é uma dízima periódica.
d) 3,14 é seu valor aproximado, sendo seu valor exato 3,141592.
e) Nenhuma divisão de dois números inteiros tem quociente igual a π.

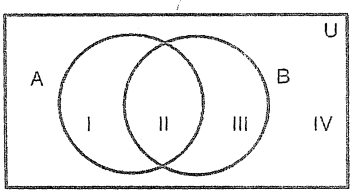
18) Sejam P e Q dois conjuntos tais que $P \cup Q = Q$ e $P \cap Q = P$. É correto afirmar-se:
a) $P \in Q$
b) Q contém o conjunto P
e) Q é subconjunto de P
d) P e Q são conjuntos iguais

19) Considerando a figura plana no desenho a seguir, é **CORRETO** afirmar que a região negritada pode ser representada por:

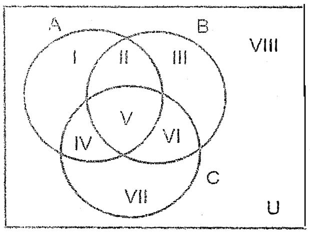


a) $(A \cap B) - C$
b) $(A \cup B) - C$
c) $(A - B) \cup C$
d) $C - (A \cup B)$
e) $C - (A \cap B)$

20) No diagrama abaixo temos que n(A)=10, n(B)=15, $n(A \cap B) = 3$, n(U)=30. Determine os números de elementos das regiões I, II, III e IV.



21) No diagrama abaixo temos que $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(A \cap B) = 11$, $n(A \cap C) = 9$, $n(B \cap C) = 13$, n(A) = 22, n(B) = 22, n(C) = 19 e n(U) = 36. Determine os números de elementos das regiões I, II, III, IV, V, VI, VII e VIII.



22) Considere três conjuntos A, B e C, tais que: n(A) = 28, n(B) = 21, n(C) = 20, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Assim sendo, o valor de $n[(A \cup B) \cap C]$ é:
a) 3
b) 10
c) 20
d) 21
e) 24

23) Em uma turma há 36 alunas, das quais 25 usam brincos, 13 usam pulseira e 8 usam brincos e pulseira. Pergunta-se:
a) Quantas usam brincos e não usam pulseira?
b) Quantas usam brincos ou pulseira?
c) Quantas não usam brincos nem pulseira?

24) Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de TV que habitualmente assistem, obteve-se o resultado seguinte: 280 pessoas assistem o canal A, 270 pessoas assistem o canal B e 70 assistem outros canais distintos de A e B. Determine o número de pessoas que assistem o canal A e não assistem o canal B.

25) Em uma barbearia observou-se que o número de bigodudos é igual ao número de carecas sem bigode, e que o número de bigodudos cabeludos é o dobro do número de carecas bigodudos. Se 10% das pessoas presentes são cabeludos sem bigodes, qual o percentual de carecas presentes nesta barbearia?

26) Depois de uma briga de "n" malucos em um hospício, verificou-se que:
- 10 malucos perderam os olhos
- 11 malucos perderam os braços
- 6 malucos perderam as pernas
- 5 malucos perderam os olhos e os braços
- 3 malucos perderam os olhos e as pernas
- 4 malucos perderam as pernas e os braços
- somente dois malucos perderam simultaneamente os olhos, os braços e as pernas.

Sabendo que todos os malucos tiveram alguma perda, pergunta-se:
a) Quantos malucos brigaram?
b) Quantos tiveram urna única perda?
c) Quantos tiveram duas perdas?
d) Quantos tiveram apenas duas perdas?
e) Quantos perderam os olhos ou os braços?

27) Numa comunidade constituída de 1800 pessoas, há três programas de tevê favoritos: esporte(E) novela(N) e humorismo(H) A tabela a seguir indica quantas pessoas assistem a esses programas.

Programas	E	N	H	EeN	NeH	EeH	E, N e H
Número de telespecta-dores	400	1200	1080	220	800	180	100

Através desses dados, verifique:
a) o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas;
b) o número de pessoas da comunidade que assistem a pelo menos um dos três programas.

28) Quantos subconjuntos apresenta o conjunto A = {1, {1}, 2}?

29) Quantos subconjuntos não vazios tem o conjunto A = {0, 3}?

30) Um conjunto A tem 64 subconjuntos. Logo A pode ser:
a) A = {x| x é vogal}
b) A = {x| x é estado do Brasil}
c) A = {x| é ímpar positivo menor que 6}
d) A = {x| é letra do alfabeto}
e) A = {x| é ímpar positivo menor que 12}

31) Quantos conjuntos X satisfazem a $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

32) Sabendo-se que A = {0, 1,2,3 }, A ∪ B = {0, 1,2,3,4,5} e A ∩ B = {0,3}, então, o conjunto B é expresso por:
a) {0, 3, 4}
b) {0, 3, 5}
c) {0, 3, 4,5}
d) {0, 1, 4, 5}

33) Se A ∩ B = {2,3}, B ∩ C = {3,4}, B ∪ C = {2,3,4,6} e A ∪ B = {2,3,4,5}, determine o resultado de (B – C) ∩ A.

34) Considere os conjuntos A, B, e C, tais que A – B = {1, 4}, B – C = {0, 5}, B ∩ C = {2, 3}, A ∩ B = {2, 5} e B ∪ C = {0, 1, 2, 3, 5}. Determine o resultado de $C^{C}_{A \cup B}$.

35) Três caixas etiquetadas estão sobre uma mesa. Uma delas contém apenas canetas: outra apenas lápis, e há uma que contém lápis e canetas. As etiquetas são "lápis", "canetas" e "lápis e canetas", porém nenhuma caixa está com a etiqueta correta. É permitida a operação: escolher uma caixa e dela retirar um único objeto. O número mínimo de operações para colocar corretamente as etiquetas é:
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.

QUESTÕES DE CONCURSOS

36) **(EPCAR)** Sabendo-se que a, b, c, d representam algarismos maiores que zero e que a < b e c < d, então,
a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$
b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{c}{d}$
c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ *ou* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$
d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ *ou* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{c}{d}$

37) **(CN)** Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.
I. A condição a × b × c > 0 garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
II. Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que b > 0, é verdade que –b < a < b.
III. Admitindo que b > c, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

38) **(EPCAR)** Considere as alternativas abaixo e marque a correta.
a) Se a e b são números irracionais, então $\frac{\alpha}{\beta}$ é, necessariamente, irracional.
b) Se **a** e **b** são números naturais não nulos, M(a) é o conjunto dos múltiplos naturais de **a** e M(b) é o conjunto dos múltiplos naturais de **b**, então M(b) ⊃ M(a) se, e somente se, **a** é divisor de **b**.
c) Se $\alpha = \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{3+\sqrt{3}}$, então $\alpha \in ([R-Q]) \cap [Z \cup Q]$
d) Se A é o conjunto dos divisores naturais de 12, B é o conjunto dos divisores naturais de 24 e C é o conjunto dos múltiplos positivos de 6 menores que 30, então $A-(B \cap C)=A-C$

39) **(EPCAR)** Analise as sentenças abaixo marcando **(V)** para verdadeiro e **(F)** para falso.
( ) $1,\overline{65} \in [(IR \cup IN)-(IR \cap Q)]$
( ) $31,23459 \in [(Z \cup Q) - \phi]$
( ) $IN \subset [(IR \cap IN) \cap (Q \cap Z)]$
( ) $Z \supset [(Z \cup IN)-(IR \cap Z_-)]$
( ) $[(IR \cup Q)-(IR \cap Q)] \supset \{\pi, \sqrt{2}, \frac{5}{7}\}$
A sequência correta é:
a) F, V, V, V, F
b) V, F, V, F, V
c) V, V, F, V, V
d) F, F, V, F, F

40) **(CM)** Relativamente aos intervalos reais
A =]– 3, 1[, B =]1, 4], C = [–1, 3] e D = [– 3, 2[.
são feitas as seguintes afirmativas:
I. (B ∩ C) ∩ (A∪D) =]1, 2[
II. (D – A) – B = {– 3, 1}
III. C – (A ∪ B) = {1}
IV. $C_D^{(A \cap C)}$ = [–3, –1[∪ [1, 2[
Pode-se, então, afirmar que:
a) Todas as afirmativas dadas estão corretas.
b) Apenas três das afirmativas dadas estão corretas.
c) Apenas duas das afirmativas dadas estão corretas.
d) Apenas uma das afirmativas dadas está correta.
e) Todas as afirmativas dadas estão erradas.

41) **(CM)** Se A = {1, {9}, 9, 2}, assinale a afirmação errada:
a) 1 ∈ A
b) 9 ∈ A
c) {9} ∈ A
d) {9} ⊂ A
e) 2 ⊂ A

42) **(CM)** Sendo M = {{a}, {b}, {a,b}}, podemos afirmar que:
a) {a} ⊂ M
b) {a} ∈ M
c) {a} ∩ {b} ⊄ M
d) a ∈ M
e) {a} ∪ {b} ⊂ M

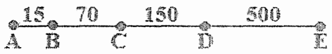
43) **(CM)** Sejam A e B conjuntos quaisquer. A ∪ B=A ∩ B, se e somente se:
a) A = ∅
b) A B
c) A - B
d) A ∪ B
e) A ∩ B

44) **(CM)** Quantos números racionais da forma $\frac{k}{17}$, sendo k um número natural, existem entre 1 e 100, excluindo os números 1 e 100?
a) 1680
b) 1681
c) 1682
d) 1683
e) 1684

45) **(CEFET)** Manuela dividiu um segmento de reta em cinco partes iguais e depois marcou as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ nas extremidades, conforme a figura abaixo. Em qual dos pontos Manuela deverá assinalar a fração $\frac{2}{5}$?

a) A
b) B
c) C
d) D

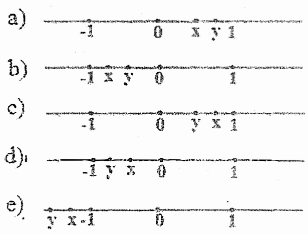
46) **(EPCAR)** Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância **d** entre todos eles fosse a mesma e a maior possível.
Se **x** representa o número de vezes que a distância **d** foi obtida pelo agricultor, então **x** é um número divisível por:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

47) **(CM)** Sabendo que os números racionais A e B são tais que 1 < A < B. A representação dos números $x = \frac{1}{A}$ e $y = \frac{1}{B}$ na reta numérica é:

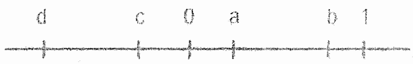


48) **(CM)** O intervalo da reta numérica compreendido entre -72 e -18 foi dividido em 9 partes iguais, como mostrado na figura abaixo:

O número inteiro que corresponde ao ponto A assinalado nesta reta numérica é:

a) -60
b) -54
c) -45
d) -42
e) -36

49) **(EPCAR)** Na reta real abaixo estão representados os números reais a, b, c, d, zero e 1



Analise os itens abaixo, classificando-os em **(V)** verdadeiros ou **(F)** falsos.

(01) a < bc

(03) 0 < ab < 1

(04) $\sqrt{d^2} > \sqrt{c^2}$

(06) c + d - b < a

(08) $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} > 1$

A soma dos números associados aos itens verdadeiros é um número do intervalo

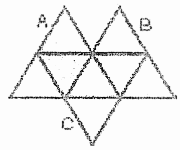
a) [1, 5]
b) [6, 11]
c) [12, 17]
d) [18, 22]

50) **(CEFET)** O índice de massa corporal, que é encontrado dividindo-se o peso em kg pelo quadrado da altura em m, é uma das formas para conhecer a faixa de peso ideal de uma pessoa. Em que faixa se encontra quem pesa 64 kg, tendo 1,6 m de altura?

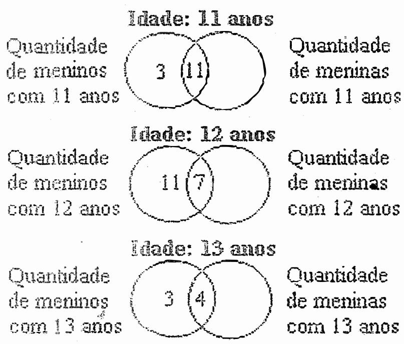
a) índice menor que 15 – magreza excessiva
b) índice ∈ [15, 20[– magro
c) índice ∈ [20, 25[– relação ideal
d) índice ∈ [25, 30[– sobre-peso
e) índice ∈ [30, 40] – obeso

51) **(CM)** No diagrama abaixo, onde os conjuntos A, B e C são representados pelos triângulos maiores, a parte sombreada corresponde ao conjunto:

a) $A \cap C$
b) $A \cap (B - C)$
c) $(A \cap C) - B$
d) $(A \cap B) \cap C$
e) $(A \cap B) - C$



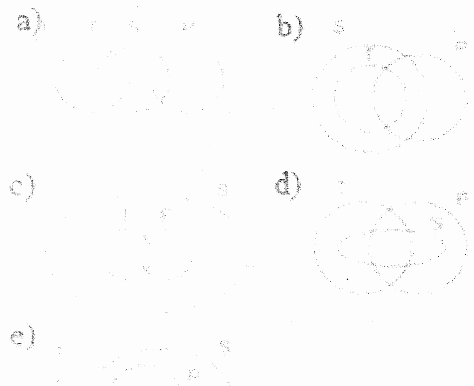
52) **(CM)** Realizamos um estudo sobre as idades que os alunos da 5ª série do Ensino Fundamental do CM de 2004 apresentavam até 30/09. A partir desse estudo construímos os conjuntos das quantidade de alunos por idade, mostrados abaixo:



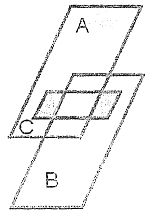
Com base nas informações acima é correto afirmar que:

a) O total de meninos da 5ª série é 17.
b) 22 alunos (meninos e meninas) tem 11, 12 ou 13 anos de idade.
c) O conjunto que representa o total de meninas da 5ª série é um conjunto vazio.
d) O total de alunos (meninos e meninas) da 5ª série é 61.

53) **(ENEM)** Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P.
O diagrama que pode representar esses conjuntos é:



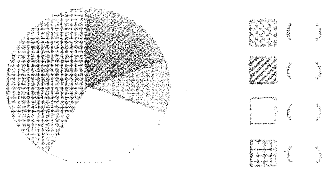
54) **(CM)** Considerando a figura plana no desenho ao lado, é **CORRETO** afirmar que a região negritada pode ser representada por:



a) $(B - C) \cup (C - A)$
b) $(A - C) \cup (B - C)$
c) $(C - B) \cup (A - C)$
d) $(C - A) \cup (B - A)$
e) $(C - B) \cup (C - A)$

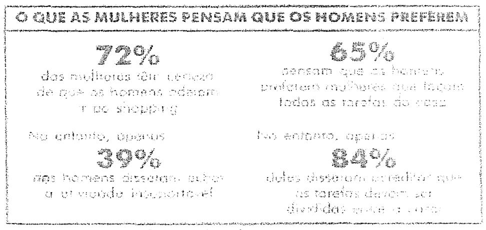
55) **(CPII)** Uma manchete do jornal O Globo de 15 de janeiro de 2006: um em cada três brasileiros já recebeu nota falsificada!
Uma pesquisa foi feita entre aqueles que receberam alguma nota falsa e revelou as seguintes atitudes:
- 5/18 das pessoas entregaram a nota ao banco;
- 1/9 das pessoas entregou a nota para a polícia;
- 5/12 das pessoas devolveram a nota para a pessoa que passou;

As demais pessoas guardaram a nota.



a) Esses dados estão representados no gráfico de pizza da figura abaixo. Complete os parênteses da legenda com a letra do grupo correspondente.
b) Se 80 pessoas, dentre as entrevistadas, entregaram a nota à polícia, quantas entregaram a nota falsa ao banco?

56) **(ENEM)** Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do século XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.



Correio Braziliense

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é:
a) inferior a 80
b) superior a 80 e inferior a 100
c) superior a 100 e inferior a 120
d) superior a 120 e inferior a 140
e) superior a 140

57) **(ENEM)** Num grupo constituído de n pessoas, das quais 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 205 dos homens jogam xadrez e 80% das mulheres não jogam xadrez, então o valor de n é:
a) 62
b) 70
c) 78
d) 84
e) 90

58) **(CN)** Numa pesquisa sobre a leitura dos jornais A e B, constatou-se que 70% leem o jornal A e65% leem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que leem os jornais A e B?
a) 35%
b) 50%
c) 65%
d) 80%
e) 95%

59) **(CEFET)** Uma das grandes paixões dos cariocas é o desfile de escolas de samba. Foram entrevistados alguns foliões com a seguinte pergunta: "Em qual ou quais escolas você irá desfilar em 2012?" e os entrevistadores chegaram a algumas conclusões de acordo com a tabela:

Escola de Samba	Número de Foliões
Mangueira	1500
Portela	1200
Salgueiro	800
Mangueira e Portela	600
Portela e Salgueiro	400
Mangueira e Salgueiro	200
Mangueira, Portela e Salgueiro	150
Nenhuma das Três	700

a) Quantos foliões foram entrevistados?
b) Quantos, dentre os entrevistados, não pretendem desfilar no Salgueiro?

60) **(EPCAR)** Para uma turma de 80 alunos do CPCAR, foi aplicada uma prova de matemática valendo 9,0 pontos distribuídos igualmente em 3 questões sobre:
1ª) FUNÇÃO
2ª) GEOMETRIA
3ª) POLINÔMIOS
Sabe-se que:
- apesar de 70% dos alunos terem acertado a questão sobre FUNÇÃO, apenas 1/10 da turma conseguiu nota 9,0;
- 20 alunos acertaram as questões sobre FUNÇÃO e GEOMETRIA;
- 22 acertaram as questões sobre GEOMETRIA e POLINÔMIOS; e
- 18 acertaram as questões sobre FUNÇÃO e POLINÔMIOS.

A turma estava completa nessa avaliação, ninguém tirou nota zero, no critério de correção não houve questões com acertos parciais e o número de acertos apenas em GEOMETRIA é o mesmo que o número de acertos apenas em POLINÔMIOS.
Nessas condições, é correto afirmar que:
a) o número de alunos que só acertaram a 2a questão é o dobro do número de alunos que acertaram todas as questões.
b) metade da turma só acertou uma questão.
c) mais de 50% da turma errou a terceira questão.
d) apenas 3/4 da turma atingiu a média maior ou igual a 5,0

61) **(ENEM)** Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1.
Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:
a) 135
b) 126
c) 118
d) 114
e) 110

62) **(EPCAR)** No concurso para o CPCAR foram entrevistados 979 candidatos, dos quais 527 falam a língua inglesa, 251 a língua francesa e 321 não falam nenhum desses idiomas. O número de candidatos que falam as línguas inglesa e francesa é:
a) 778
b) 658
c) 120
d) 131

63) **(CEFET)** Em uma pesquisa realizada com 159 entrevistados, verificou-se que:
I) dos leitores habituais de jornais, o número de homens é o dobro do número de mulheres;
II) o número de homens que não lêem jornal habitualmente supera o número de homens que lêem em 32 unidades;
III) o número de mulheres, leitoras habituais de jornais, é 23 unidades superior ao número de mulheres não leitoras.
Determine o número de mulheres entrevistadas e o número de homens que não lêem jornal.

64) **(CEFET)** Foi realizada uma pesquisa entre 800 eleitores de um certo candidato. Os resultados foram os seguintes:
270 eleitores têm menos de 25 anos; 220 têm curso superior; 220 moram na Zona Sul; 120 têm menos de 25 anos e moram na Zona Sul; 110 moram na Zona Sul e têm curso superior; 130 têm curso superior e menos de 25 anos; e 70 se enquadram nas três características. O número de eleitores que têm 25 anos ou mais, não moram na Zona Sul e não têm curso superior é:
a) 90
b) 380
c) 390
d) 400
e) 420

65) **(ENEM)** Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1° de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br
Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura fina dísel/ biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros.
b) 37,00 milhões de litros.
c) 231,25 milhões de litros.
d) 693,75 milhões de litros.
e) 888,00 milhões de litros.

66) **(ENEM)** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:
a) 1,16 metros.
b) 3,0 metros.
c) 5,4 metros.
d) 5,6 metros.
e) 7,04 metros.

67) **(ENEM)** Em uma competição de queda-de-braço, cada competidor que perde duas vezes é eliminado. Isso significa que um competidor pode perder uma disputa (uma "luta") e ainda assim ser campeão. Em um torneio com 200 jogadores, o número máximo de "lutas" que serão disputadas, até se chegar ao campeão, é:
a) 99
b) 199
c) 299
d) 399
e) 499

68) **(CN)** Num colégio verificou-se que 120 alunos não têm pai professor, 130 alunos não têm mãe professora e 5 têm pai e mãe professores. Qual o número de alunos do colégio, sabendo-se que 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professores e que não existem alunos irmãos?

69) **(CM)** Os alunos de uma turma fizeram uma prova de 3 questões. Sabe-se que 4 alunos erraram todas as questões; 5 só acertaram a primeira questão; 6 só acertaram a segunda; 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda; 10 acertaram a primeira e a terceira, 7 acertaram a segunda e a terceira e 6 acertaram todas as questões. O número de alunos dessa turma é:
a) 28
b) 34
c) 36
d) 50
e) 54

70) **(EPCAR)** Numa turma de 31 alunos da EPCAR, foi aplicada uma Prova de Matemática valendo 10 pontos no dia em que 2 alunos estavam ausentes. Na prova, constavam questões subjetivas: a primeira, sobre conjuntos; a segunda, sobre funções e a terceira, sobre geometria plana. Sabe-se que dos alunos presentes nenhum tirou zero;
11 acertaram a segunda e a terceira questões;
15 acertaram a questão sobre conjuntos;
1 aluno acertou somente a parte de geometria plana,
e 7 alunos acertaram apenas a questão sobre funções.
É correto afirmar que o número de alunos com grau máximo igual a 10 foi:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

71) **(CN)** Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais foram denominados A, B e C, não necessariamente nessa ordem. Em um grupo de 19 números reais, sabe-se que 4 são irracionais, 7 pertencem a C e 10 pertencem a A. Quantos desses números pertencem, exclusivamente, ao conjunto B?
a) 3
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

72) **(ENEM)** Se A = {-2, 3, m, 8, 15} e B = {3, 5, n, 10, 13} são subconjuntos de Z (números inteiros), e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então:
a) $n - m \in A$
b) $n + m \in B$
c) $m - n \in A \cup B$
d) $mn \in B$
e) $\{m + n, mn\} \in A$

73) **(CM)** Se M = [-1, 4], N =] - ∞, 2 [e P = [-2, 3], então o conjunto $(M - N) \cup (P \cap N)$ é:

a) [-2, 2]
b) [-1, 3]
c) [2, 3]
d) [-2, 4]
e)]-∞, 4]

74) **(CM)** Se A = [2, 5], B =]0, 3[e C = [1, 3], então C - (A ∩ B) é igual a:
a)]1, 2 [∪ {3}
b) [1,2[
c) [1, 2[∪ {3}
d)]1, 2]
e) [1,2]

75) **(CN)** Observe os conjuntos A = {3,{3},5,{5}} e B = {3,{3,5},5}. Sabendo-se que n(x) representa o número total de elementos de um conjunto X, e que P(X) é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X, pode-se afirmar que
a) n(A ∩ B) = 3.
b) n(A ∪ B) = 7.
c) n(A – B) = 2.
d) n(P(A)) = 32.
e) n(P(B)) = 16.

76) **(CN)** Sejam os conjuntos A = {1, 3, 4}, B = {1, 2, 3} e X. Sabe-se que qualquer subconjunto de A ∩ B está contido em X, que por sua vez é subconjunto de A ∪ B.
Quantos são os possíveis conjuntos X?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

77) **(CM)** São dados os conjuntos:
A = {x ∈ IN | 2 < x ≤ 4}, B = { x ∈ Z | -2 ≤ x < 2} e
C = {x ∈ Z* | –3 < x < 2}.
Se H = (A – B) ∪ (B ∩ C), então o número de subconjuntos do conjunto H é:
a) 4
b) 8
c) 16
d) 32
e) 64

78) **(CN)** Considere o conjunto dos números primos positivos menores do que 20 e o conjunto B dos divisores positivos de 36. O número de subconjuntos do conjunto diferença B – A é:
a) 32
b) 64
c) 128
d) 256
e) 512

79) **(CEFET)** Se A e B são conjuntos não vazios de maneira que:
A ∪ B = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
A – B = {3, 5, 8, 9}
B – A = {6,10}
Então A ∩ B é o conjunto:
a) {6,10}
b) ∅
c) {4,7}
d) {3,5,8,9}
e) {9}

80) **(CEFET)** Sabendo que:
A ∪ B = [–1, 6];
A ∩ B = {x ∈ R | 2 ≤ x < 5},
A ∩ C =]–1, 2],
B – A = {x ∈ R | 5 ≤ x ≤ 6} e
C – B =]–1, 2[,
podemos concluir que:
a) A = [–1, 5] e B =] 2, 6]
b) A = [–1, 5[e B = [2, 6]
c) C =]–1, 2] e A = ∅
d) A = [–1, 5[e C = [–1, 2]
e) A = [–1, 5] e B = [2, 6]

81) **(PUC)** Se A, B e A ∩ B são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos de A ∪ B
a) 10
b) 70
c) 85
d) 110
e) 170

82) **(CN)** Dados os conjuntos A, B e C, tais que n(B ∪ C) = 20, n(A ∩ B) = 5, n(A ∩ C) = 4, n(A ∩ B ∩ C) = 1 e n(A ∪ B ∪ C) = 22, O valor de n[A – (B ∩ C)] é:
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

83) **(EPCAR)** De dois conjuntos A e B, sabe-se que:
I) O número de elementos que pertencem a A ∪ B é 45;
II) 40% desses elementos pertencem a ambos os conjuntos;
III) o conjunto A tem 9 elementos a mais que o conjunto B.
Então, o número de elementos de cada conjunto é
a) n(A) = 27 e n(B) = 18
b) n(A) = 30 e n(B) = 21
c) n(A) = 35 e n(B) = 26
d) n(A) = 36 e n(B) = 27

84) **(PUC)** A e B são conjuntos. O número de elementos de A é 7 e o de A ∪ B é 9. Os valores mínimo e máximo possíveis para o número de elementos do conjunto B são, respectivamente:
a) 0 e 2
b) 0 e 9
c) 2 e 2
d) 2 e 9
e) 2 e 16

85) **(CN)** Sejam os conjuntos A = {x ∈ Z | x = 6n + 3, n ∈ Z} e B = {x ∈ Z | x = 3n, n ∈ Z}.
Então A Ç B é igual a:
a) {x ∈ Z | x é par e múltiplo de 3}
b) {x ∈ Z | x é impar e múltiplo de 3}
c) {x ∈ Z | x é múltiplo de 3}
d) {x ∈ Z | x é múltiplo de 6}
e) {x ∈ Z | x é impar}

86) **(CN)** Sejam A, B e C conjuntos tais que: A = {1,{1, 2}, {3}}, B = {1, {2}, 3} e C = {{1}, 2, 3}. Sendo X a união dos conjuntos (A – C) e (A – B), qual será o total de elementos de X?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

GABARITO

1) a) A = {a, e, i, o, u}
b) B = {2, 4, 6, 8, ...}
c) C = {Salvador}
d) D = {2}
e) E = ∅

2) a) A = {x | x é ponto cardeal}
b) B = {x | x é ímpar positivo menor do que 8}
c) C = {x | x é parte do corpo humano}
d) D = {x | x é divisor positivo de 12}

3) a; b; c; e; h; i

4) a) ∈
b) ∉
c) ⊂
d) ⊂
e) ⊂
f) ⊃
g) ∈ ou ⊂
h) ∈
i) ∈
j) ⊂
l) ⊂
m) ⊄
n) ∈ ou ⊂
o) ⊂ ou ⊃

5) a) ∈
b) ∈
c) ⊂
d) ⊂
e) ∈
f) ∈ ou ⊂
g) ∈ ou ⊂
h) ∈

6) A

7) E

8) a) {0, 1, 2, 4, 5}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
c) {1, 3, 4}
d) ∅
e) {3}
f) ∅
g) ∅
h) {0, 2, 5}
i) {2}
j) {3}
l) não está definido pois D Ë A
m) {2, 3}
n) {2}
o){3}
p){0, 1, 2, 4, 5}
q) {1, 3, 4}
r) {1, 4}
s) {1, 2, 4}
t) ∅
u) {1, 3, 4}
v) ∅
x) {1, 2, 3, 4}
z) ∅

9) D

10) D

11) D

12)

a) Z	i) ∅
b) N	j) R
c) Z^*_-	l) ∅
d) ∅	m) Q
e) Z	n) R
f) N	o) N
g) N	p) N
h) Q	q) {0}

13) a) {2, 3}
b) {1, 2, 3, 4}
c) {1, 2, 3, 4}
d) {2, 3}
e) ∅
f) { 1, 4}
g) {1, 4}
h) não está definido

14) a) {0, 1, 2}
b) {0, 4, 5}
c) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
d) {0}
e) {1, 2}
f) {1, 2, 3}
g) ∅
h){3,4,5}

15) a) [4, 7[
b)]5, 7[
c) [2, 9]
d) [2, 4[
e) [2, 5]
f) [2, 5]

16) a)]0, 6]
b) [1, 3]
c)]2, 5[
d)]2, 3]
e)]3, 6]
f)]0, 2]
g) [1, 2] ∪ [5, 6]

17) E

18) B

19) E

20) n(I) = 7
n(II) = 3
n(III) = 12
n(IV) = 8

21) n(I) = 7
n(II) = 6
n(III) = 3
n(IV) = 4
n(V) = 5
n(VI) = 8
n(VII) = 2
n(VIII) = 1

22) B

23) a) 17
b) 30
c) 6

24) 160

25) 60%

26) a) 17
b) 9
c) 8
d) 6
e) 16

27) a) 220
b) 1580

28) 8

29) 3

30) E

31) 4

32) C

33) {2}

34) {0, 4, 5}

35) B

36) C

37) D

38) D

39) A

40) A

41) E

42) B

43) E

44) C

45) B

46) D

47) C

48) B

49) D

50) D

51) C

52) D

53) D

54) E

55) a) B – D – A – C
b) 200

56) C

57) B

58) C

59) a) 3.150
b) 2.350

60) C

61) C

62) C

63) 27 e 82
64) B
65) D
66) E
67) C
68) 155
69) C
70) B
71) B
72) A
73) D
74) C
75) C
76) B
77) D
78) C
79) C
80) B
81) D
82) B
83) D
84) D
85) B
86) C

OBSERVAÇÕES

Números Inteiros

Neste capítulo vamos trabalhar as operações no conjunto Z dos números inteiros.

A escolha da letra Z para representar o conjunto dos números inteiros foi feita em alusão à primeira letra da palavra ZAHL, que significa número no vocabulário alemão.

Simétrico ou oposto de um número N

O simétrico de N é dado por – N.

Exemplos:
O simétrico de + 5 é – 5
O simétrico de – 1 é – (– 1) = + 1
O simétrico de – 8 é – (– 8) = + 8

Observação:
x e x' são simétricos se, e somente se, x + x' = 0.

Módulo ou valor absoluto de um número

É o valor do número independente do sinal que o precede.
O valor absoluto de x é representado por |x|, isto é.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:
| + 5| = 5, | + 7| = 7, | 0 | = 0, |-10| = – (– 10) = 10

Operações com números inteiros

I) Adição e subtração

– Sinais iguais
Somam-se os valores absolutos e conserva-se o sinal.

Exemplos:
– 2 – 12 = – 14   + 7 + 18 = + 25

– Sinais diferentes
Calcula-se a diferença entre os valores absolutos (maior menos o menor), e dá-se ao resultado o sinal do de maior módulo.

Exemplos:
– 4 + 12 = + (12 – 4) = + 8
+ 7 – 18 = – (18 – 7) = –11

II) Multiplicação e divisão

– Dois números
sinais iguais → positivo (+)
sinais diferentes → negativo (–)

Exemplos:
(+ 3) . (+ 5) = + 15
(– 2) . (– 4) = +8
(– 3) . (+ 6) = – 18

– Mais de dois números
Conte os números negativos:
quantidade par → positivo (+)
quantidade ímpar → negativo (–)

Exemplos:
(+ 3) . (– 4) . (+ 5) . (– 1) = + 60
2 negativos

(– 2) . (+ 3) . (– 4) . (+ 1) . (– 5) = – 120
3 negativos

III) Potenciação

A potência natural *n*, de um número inteiro *x*, é um produto de *n* fatores, todos iguais a *x*.

$$x^n = \underbrace{x \,.\, x \,.\, \ldots\ldots \,x}_{n \text{ fatores}}$$

Lê-se: "x elevado a n"

x é a base da potência
n é o expoente

No capítulo "**Potências**" faremos um estudo mais profundo a respeito deste conceito. Porém, por ora, seria interessante adiantarmos algumas propriedades que vão nos auxiliar na resolução de problemas nos capítulos que se seguem:

1) $x^a \,.\, x^b = x^{a+b}$
Ex: $2^3 \,.\, 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

2) $x^a \div x^b = x^{a-b}$
Ex: $\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$

3) $(x^a)^b = x^{a.b}$
Ex: $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

4) $x^1 = x$
Ex: $37^1 = 37$

5) $x^0 = 1$
Ex: $7894^0 = 1$

Observações:

a) Potência de expoente par, nunca é negativa.
Ex: $(+ 2)^4 = + 16$
$(- 2)^2 = + 4$
$0^6 = 0$

b) Potência de expoente impar, tem o mesmo sinal de base.
Ex: $(+ 2)^5 = + 32$
$(- 3)^3 = - 27$
$0^7 = 0$

c) $1^n = 1$, para todo n.

d) $0^n = 0$, para todo $n \neq 0$.

Cuidado!
$(-2)^6 \neq -2^6$
$(-2)^6 = +64$
$-2^6 = -64$

IV) Radiciação

Neste item vamos nos deter na obtenção de raízes exatas de números inteiros. Um estudo mais abrangente será feito no capítulo "**Radicais**".

Definição

A raiz de índice *n* de um número **A** é o número *x*, tal que $x^n = A$.

$\sqrt[n]{A} = x \Leftrightarrow x^n = A$

Ex: $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

Notações: Na raiz $\sqrt[n]{a^b}$;
* o número n é o índice, que deve ser inteiro e maior do que 1
* o número a^b é o radicando
* o número b é o expoente do radicando

Podemos simplificar uma raiz, dividindo-se o índice e o expoente do radicando pelo MDC entre eles. No caso de uma raiz exata, tal MDC será o próprio índice da raiz. Para efetuar a simplificação, devemos, em primeiro lugar, fatorar o radicando.

Ex: $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^1 = 3$

$\sqrt[5]{2^{10}.3^{15}} = 2^2 . 3^3 = 108$

Observações:

a) Quando o índice de uma raiz é 2, vamos chamá-la de **raiz quadrada**, e a colocação do índice é opcional.

Ex: $\sqrt{25} = \sqrt[2]{25} = \sqrt[2]{5^2} = 5^1 = 5$

b) Quando o índice de uma raiz é 3, vamos chamá-la de **raiz cúbica**.

Ex: $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^3 = 8$

Expressões numéricas

A resolução de uma expressão numérica está condicionada à obediência de regras bastantes rígidas. Há uma lista de prioridades que não podemos descumprir. Em seguida vamos mostrar o procedimento básico para a resolução de uma expressão numérica.

I) Prioridade de sinais

Em primeiro lugar devemos resolver as operações que estiverem no interior dos parênteses (( )), depois as operações que estiverem dentro dos colchetes ([ ]) e finalmente aquelas que estiverem no interior das chaves ({ }).

II) Prioridade de operações

Devemos seguir a ordem de resolução abaixo:

(1º) Potências e raízes.
(2º) Multiplicações e divisões.
(3º) Adições e subtrações

Atenção!!

Em um mesmo escalão de prioridade de operações não há prioridade de resolução. Assim, se em uma expressão houver uma potência e uma raiz, vamos resolver em primeiro lugar aquela operação que vier primeiro, o mesmo acontecendo com multiplicações e divisões, assim como com adições e subtrações.

Exemplos:

a) $10 \div 5 \times 2 = 2 \times 2 = 4$
b) $5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$
c) $(-11 + 7) \div 2 \times 3 = -4 \div 2 \times 3 = -2 \times 3 = -6$
d) $-5 + 4 \times 3^2 = -5 + 4 \times 9 = -5 + 36 = 31$
e) $2 + 3 . 5^2 - \sqrt{16} = 2 + 3 . 25 - 4 = 2 + 75 - 4 =$ $= 77 - 4 = 73$
f) $8 - \{4 - 3 . [1^3 - 5 . (-2)^3]\} = 8 - \{4 - 3 . [1 - 5 . (-8)]\} =$ $= 8 - \{4 - 3 . [1 + 40]\} = 8 - \{4 - 3 . 41\} = 8 - \{4 - 123\} =$ $= 8 - \{-119\} = 8 + 119 = 127$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine os valores das expressões que se seguem:

a) $-4 + 4 - 5 + 8 - 7$
b) $+8 - 7 + 3 + 4 - 1 + 2 - 9$
c) $-20 + 12 - 13 - 11 + 14$
d) $(-2) . (+3)$
e) $(-5) . (-4)$
f) $(+2) . (+7)$
g) $(-15) : (-3)$
h) $(-8) : (+4)$
i) $(+18) : (+6)$
j) $(+64) : (-16)$
k) $(-2) . (-3) . (+2) . (-1) . (-3)$
l) $(-5) . (-1) . (+3) . (-2)$
m) $(-6) . (+2) : (-2) : (-6)$
n) $(-200) : (+100) : (-2)$
o) $(-125) : (-5) : (+5) : (-5)$
p) $(-20) : (-5) . (+4)$
q) $(-64) : (-4) . (+2) : (-2)$
r) $(+12 - 4 - 5) + (-5 + 3 - 10)$
s) $(-8 - 3) - (+5 - 3) + (+8 - 10)$
t) $-1 - [-5 + 3 - (-2 - 1) - 2] + 4$
u) $\{-2 - [-3 - (-5 + 4 - 3) - 2] + 1\}$
v) $\{2 - 4 . [-3 - (-8 : 4 . 2 - 4) - 2] - 1\}$
w) $-5 + (-8 + 3) - (-1 - 8 + 3)$
x) $-1 - 3 - [1 + (-4 + 3)]$
y) $(-20) : (+4) - (-8 - 4 . 2)$
z) $(-1) . (-5) . (-2) - 4 + 8 : (-2) . (4)$

2) Efetue, utilizando as propriedades das potências:
a) $(5^2)^3$
b) $\{[(-3)^2]^5\}^4$
c) $(3^2)^3$
d) 3^{2^3}
e) $2^{2^{2^3}}$
f) $[(2^2)^0]^3$
g) $2^{2^{3^{1^{2^{2^{3}}}}}}$
h) 5^0
i) 0^5
j) 1^7
k) 7^1
l) $49^2 - 7^4 + 25^4 - 5^8 + 16^3 - 2^{12} + 81^3 - 3^{12}$

3) Determine os valores das seguintes potências:
a) $(-2)^2$
b) $(-2)^3$
c) $(-2)^4$
d) $(-2)^5$
e) $(-1)^{195}$
f) $(-1)^{196}$
g) -2^5
h) -2^4

4) Efetue, utilizando as propriedades de potências: $(a \neq 0)$
a) $5^3 . 5^4$
b) $2^3 . 2$
c) $5^4 : 5^2$
d) $5^3 : 5$
e) $a^m . a^n$
f) $a^m : a^n$
g) $a^m : a^m$

5) Resolva as seguintes expressões:
a) $-5^2 - \{-3 - [-2^0 - (-5 + 3)^2]\}$
b) $-10 - \{-5 - [-1^8 - (-1-4)^0]\}$
c) $-2^3 - 3 . 5^2 + 4.3$
d) $(-4)^2 . (-3) + (-2)^0 . 5 - (-6) . (-8)$
e) $(25 - 36 : 9) - \{[(10 - 25 : 5)^2 - (-3^3 + 6 . 4)] - (6 + 2 . 5)\}$

6) Determinar o simétrico ou oposto dos números:
a) -3
b) 11
c) -1784
d) 0

7) Determinar o módulo ou valor absoluto dos números:
a) -18
b) 73
c) -817
d) 0

8) Determine o antecessor e o sucessor dos números:
a) 8
b) – 5
c) 0
d) x
e) 4x + 3
f) 5 – 2x

9) Quanto vale a diferença entre a raiz quadrada do sucessor do número 15 e o quadrado do antecessor do número – 3?

10) Quanto vale o quociente entre o sucessor do antecessor do sucessor do número – 17 e o módulo do simétrico do oposto do antecessor do número – 7?

11) O produto de três números inteiros é 20. Determine o produto dos simétricos desses números.

12) O produto de seis números inteiros é 120. Determine o produto dos opostos desses números.

13) Sabendo-se que x e y (x > y) são dois números simétricos, determine:
a) a soma de x com y;
b) o quociente entre x e y;
c) a soma do sucessor de x com o sucessor de y;
d) a diferença entre os módulos de x e y;
e) o quociente entre os módulos de x e y;
f) o quociente entre o antecessor de y e o sucessor de x.

14) Quanto vale a soma do simétrico do oposto do número – 4 com o módulo do simétrico de – 7?

15) Determine o valor do quádruplo do produto do valor absoluto do número – 6 pelo simétrico da metade do quadrado de 8.

16) Em Araruama às 13 h os termômetros marcavam 32°. Já às 18 h a temperatura era de 21°. Qual a variação sofrida pela temperatura?

17) Um freezer A mantém uma substância à temperatura de – 4° C, enquanto que um freezer B conserva a mesma substância a – 11° C. Em qual dos freezeres a substância está mais gelada?

18) Na construção de um prédio, o engenheiro responsável projetou uma distância de três metros entre as portas destinadas aos elevadores de dois andares consecutivos. Tomando o andar térreo como origem, uma pessoa que vá do térreo até o sétimo andar, depois dai até o segundo subsolo (garagem) e finalmente até o terceiro andar, percorreu 'coordenadas' respectivamente iguais a:
a) 7 m, – 2 m, 3 m
b) 21 m, – 6m, 9 m
c) 21 m, 6 m, 9 m
d) – 2 m, 3 m, 7 m
e) – 6 m, 9 m, 21 m

19) Observe o "quadrado mágico" abaixo.

1	8	3
6	4	a
c	d	b

Ele é mágico porque somando–se os números na horizontal, na vertical ou na diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Os valores de a e b são, respectivamente:
a) 0 e 5
b) 0 e 7
c) 2 e 7
d) 5 e 0
e) 7 e 2

QUESTÕES DE CONCURSOS

20) **(CAP-UFRJ)** Calcule o valor da expressão

$$\sqrt{15-\sqrt{32+\sqrt{25-\sqrt{81}}}}\ .$$

21) **(CEFET)** O produto de três números é p. O produto das metades desses números é:
a) 2p
b) p/2
c) p/4
d) p^2
e) p/8

22) **(CEFET)** Dois carros partem às 9h30min de duas cidades A e B, respectivamente, distantes entre si 430 km, dirigindo-se um ao encontro do outro com velocidades diferentes. O que parte de A faz o percurso a 80 km/h e o que parte de B a 70 km/h. Qual a distância entre eles às 13 horas?
a) 35 km
b) 70 km
c) 95 km
d) 105 km
e) 110 km

23) **(CN)** Numa prova de vinte questões, valendo meio ponto cada uma, três questões erradas anulam uma certa. Qual é a nota de um aluno que errou nove questões em toda essa prova?
a) Quatro.
b) Quatro e meio.
c) Cinco.
d) Cinco e meio.
e) Seis e meio.

24) **(EPCAR)** Se $A = \frac{-5^3 - 6^2}{-7^2}$ e $B = \frac{(-5)^3 + (-6)^2}{(-7)^2}$,

determine o valor de K na expressão $A - B = \frac{K}{49}$.

GABARITO

1) a) -4
b) 0
c) -18
d) -6
e) +20 ou 20
f) +14 ou 14
g) + 5 ou 5
h) -2
i) +2 ou 2
j) – 4
k) +36 ou 36
l) -30
m) -1
n) +1 ou 1
o) -1
p) +16 ou 16
q) -16
r) -9
s) -15
t) +4 ou 4
u) 0
v) -11
w) -4
x) -4
y) +11 ou 11
z) -30

2) a) 5^6
b) 3^{40}
c) 3^6
d) 3^8
e) 2^{256}
f) 1
g) 2^8
h) 1
i) 0
j) 1
k) 7
l) 0

3) a) 4
b) -8
c) 16
d) -32
e) -1
f) 1
g) -32
h) -16

4) a) 5^7
b) 2^4
c) 5^2
d) 5^2
e) a^{m+n}
f) a^{m-n}
g) a^0

5) a) -27
b) -7
c) -71
d) -91
e) +9 ou 9

6) a) 3
b) -11
c) 1784
d) 0

7) a) 18
b) 73
c) 817
d) 0

8) a) 7 e 9
b) -6 e -4
c) -1 e 1
d) x – 1 e x + 1
e) 4x + 2 e 4x + 4
f) 4 – 2x e 6 – 2x

9) -12

10) -2

11) -20

12) 120

13) a) 0
b) -1
c) 0
d) 0
e) 1
f) -1

14) 3

15) -768

16) -11°

17) No freezer B.

18) B

19) C

20) 3

21) E

22) C

23) A

24) 250

OBSERVAÇÕES

Expressões Algébricas

Termo algébrico

Chama-se termo algébrico a qualquer indicação de produto entre incógnitas (letras) ou números e incógnitas. O termo algébrico é composto de um coeficiente (número) e uma parte literal.

Exemplos:

a) $2xy \to$ termo algébrico
$2 \to$ coeficiente
$xy \to$ parte literal

b) $-\frac{1}{2}x^2yz \to$ termo algébrico
$-\frac{1}{2} \to$ coeficiente
$x^2yz \to$ parte literal

Expressão algébrica

É composta por um ou mais termos algébricos unidos por operações de soma e subtração.

Exemplos:

a) $2x^2 + 3x + 5y$
b) $3x^2y + 5z - 3$

Valor numérico de uma expressão algébrica

Chamamos de valor numérico de uma expressão algébrica, o valor obtido quando atribuímos às incógnitas valores pré-estabelecidos.

Exemplos:

a) Seja $5xy + 3x^2 + 5y + 1$
Para $x = 1$ e $y = 2$, o valor numérico da expressão acima é:
$5.1.2 + 3.1^2 + 5.2 + 1 = 10 + 3 + 10 + 1 = 24$

b) O valor numérico da expressão $3x^2y - 4xy^2$, para $x = 2$ e $y = -1$ é:
$3.2^2.(-1) - 4.2.(-1)^2 = 3.4.(-1) - 4.2.1 = -12 - 8 = -20$

Monômio

Chamamos um termo algébrico também de monômio.

Exemplos:

$2x^2y$; $\frac{1}{2}x^2yz$; 5

Grau de um monômio

Se todos os expoentes das variáveis forem inteiros e não negativos, grau do monômio será a soma desses expoentes, desde que seu coeficiente seja diferente de zero. Em caso contrário seu grau não está definido.

Exemplos:

$5x^3y^2z$ é do sexto grau
$5^3x^4y^5$ é do nono grau
3 é do grau zero
$0x^3y^4$ não tem grau definido

Podemos ainda, definir grau em relação a uma variável ou a um determinado conjunto de variáveis.

Exemplos:

$8x^3y^5z^4$ em relação a x é do 3° grau, em relação a x e z é do 7° grau.

Monômios semelhantes

São aqueles que apresentam a mesma parte literal (letras e expoentes iguais).

Exemplos:

a) $5x^2yz$ e $-7x^2yz$
b) $3xy^2z$ e $-8xy^2z$
c) $-4x^3$ e $12x^3$

Operações com monômios

1) Adição e subtração

Só podemos somar ou subtrair monômios semelhantes, bastando para isso conservar a parte literal e somar ou subtrair os coeficientes.

Exemplos:

a) $3x^2y + 5x^2y - 6x^2y = 2x^2y$
b) $7xy^2 + 4xy - 3xy + 11xy^2 = 18xy^2 + xy$

2) Multiplicação e divisão

Para efetuarmos produto ou divisão de monômios, multiplicamos ou dividimos os coeficientes, e multiplicamos ou dividimos as partes literais

Exemplos:

a) $(2x^3y^3).(3x^2y) = 6x^5y^4$
b) $(12x^6z^4) \div (6x^2z^2) = 2x^4z^2$

Classificação das expressões algébricas

As expressões algébricas, se classificam em:

$$\begin{cases} \text{Racionais} \to \begin{cases} \text{Inteiras} \\ \text{Fracionárias} \end{cases} \\ \text{Irracionais} \end{cases}$$

Uma expressão algébrica é **racional**, quando não aparece variável embaixo de radical ou elevada a expoente fracionário.

Uma expressão algébrica é **irracional**, quando aparece variável sob radical ou elevada a expoente fracionário.

Uma expressão algébrica é **racional inteira**, quando não aparece variável em denominador ou elevada a expoente negativo.

Uma expressão algébrica é **racional fracionária**, quando aparece variável em denominador ou elevada a expoente negativo.

Exemplos:

a) $4x^5y^2 - 3y^3 \to$ expressão algébrica racional inteira
b) $4xy - \frac{3xy^2}{z^3} \to$ expressão algébrica racional fracionária
c) $4x^3 - 2\sqrt[3]{xy} \to$ expressão algébrica irracional.
d) $3x^2y + 4xy^{-3} \to$ expressão algébrica racional fracionária.
e) $4xy^3 + 2xz^2 - 4xy^{1/3} \to$ expressão algébrica irracional.

Grau de uma expressão algébrica racional inteira

Grau de uma expressão algébrica racional inteira é o grau do monômio de mais alto grau, cujo coeficiente seja diferente de zero.

Exemplos:

a) A expressão $x^5 + x^2y + xy$ é do quinto grau.
b) A expressão $x^2y^4 + 5x^3 + 2xy^3z^4 - z^6$ é do oitavo grau.

Expressão algébrica racional inteira homogênea

A expressão algébrica racional inteira é chamada **homogênea** quando todos os seus monômios componentes forem do mesmo grau.

Exemplos:

a) $5x^3y^2 + 4x^5 - 7xy^4$ é expressão algébrica racional inteira homogênea do 5º grau.

b) A expressão $3x^6 + x^2y^4 - 3x^5y$ é homogênea do sexto grau.

Expressão algébrica racional inteira completa

Uma expressão algébrica de grau n é dita completa, quando possui termos de todos os graus desde 0 até n.

Exemplos:

a) A expressão $5x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ é completa do 3º grau.

b) A expressão $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ é completa do 4º grau.

Polinômios

As expressões algébricas racionais inteiras são também chamadas de **polinômios**, sendo as expressões algébricas de dois termos algébricos chamados de binômios e as expressões algébricas de três termos chamadas de trinômios. Estudaremos preferencialmente a partir de agora polinômios com uma única variável.

Raiz de um polinômio

Denominamos **raiz** de um polinômio a uma variável, a qualquer valor da variável que torne o valor numérico do polinômio igual a zero. O número de raízes de um polinômio é igual ao seu grau.

Exemplos:

a) O polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 27$ tem quatro raízes, pois é do quarto grau. Uma delas vale 3, pois $P(3) = 3^4 - 2.3^3 - 27 = 0$

b) Se o número -5 é raiz do polinômio $-2x^2 - 3x + k$, determine o valor de k.

Resolução:

Se o número -5 é raiz do polinômio, o seu valor numérico vale zero. Então:

$-2 . (-5)^2 - 3 . (-5) + k = 0$

$-2 . 25 + 15 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 35$

Polinômios idênticos

Dois polinômios são idênticos quando possuem o mesmo grau e apresentam os coeficientes dos termos de mesmo grau respectivamente iguais.

O símbolo que indica identidade é $^\circ$.

Exemplo:

Os polinômios $A(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3$ e $B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ são idênticos. Determine os valores de a, b, c e d.

Resolução:

Pelo exposto anteriormente, além de terem o mesmo grau devem apresentar os coeficientes dos termos de mesmo grau iguais. Logo:

$a = 3, b = -4, c = 0$ e $d = 3$

Polinômio identicamente nulo (P.I.N.)

Um polinômio é dito **identicamente nulo**, quando se anula para qualquer valor da variável. Daí, temos que todos os seus coeficientes são iguais a zero.

Exemplos:

a) $0x^7 + 0x^5 + 0x^2 + 0x$

b) $0x^3 + 0x^2 + 0$

Observações importantes:

1. Como qualquer valor da variável anula o polinômio, todo PIN possui infinitas raízes.

2. O grau de qualquer PIN não é definido, pois não há coeficientes diferentes de zero.

Operações com polinômios

1) Adição e subtração de polinômios

Para somar ou subtrair polinômios, basta adicionar ou subtrair os termos semelhantes.

Exemplos:

Sendo $P(x) = x^2 + 5x + 1$ e $Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4$,

Calcule:

a) $P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 0x^3 + x^2 + 5x + 1 \\ + & \underline{Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4} \\ & 3x^3 - 4x^2 + 8x - 3 \end{array}$$

b) $P(x) - Q(x)$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 0x^3 + x^2 + 5x + 1 \\ - & \underline{Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4} \\ & -3x^3 + 6x^2 + 2x + 5 \end{array}$$

2) Multiplicação

a) Polinômio por monômio

Multiplicamos cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplo:

$(2x^3 - 3x^2 + x + 1) . (3x^2) = 6x^5 - 9x^4 + 3x^3 + 3x^2$

b) Polinômio por polinômio

Multiplicamos cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro, em seguida reduzimos os termos semelhantes.

Exemplo:

$(3x^2 + 2x + 1) . (2x^2 - 3x - 2) =$

$$\begin{array}{rr} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \times & \underline{2x^2 - 3x - 2} \\ & -6x^2 - 4x - 2 \\ & -9x^3 - 6x^2 - 3x \quad \\ & \underline{6x^4 + 4x^3 + 2x^2 \qquad\quad} \\ & 6x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 7x - 2 \end{array}$$

3) Divisão

Dados dois polinômios D(x) e d(x) de graus p e q respectivamente, tais que $p\ ^3\ q\ ^3\ 1$, dividir D(x) por d(x) é achar dois polinômios Q(x), de grau $(p - q)$ e R(x), de grau $(q - 1)$, no máximo, tais que $D(x)\ ^\circ\ d(x) . Q(x) + R(x)$.

Para efetuarmos a divisão, o polinômio D(x) deve estar ordenado decrescentemente e completo. O polinômio d(x) basta estar ordenado decrescentemente. Efetuamos então a divisão do 1º termo do dividendo pelo 1º termo do divisor. O resultado será o 1º termo do quociente. Multiplicamos então o 1º termo encontrado do quociente por todos os termos do divisor, colocando o resultado com sinal trocado embaixo, termo a termo do dividendo D(x). Somamos então os termos semelhantes e repetimos o método até obtermos um resto R(x) de grau menor que o do divisor d(x).

Exemplo:

$D(x) = 5x^2 + 3x + 2$ (dividendo)

$d(x) = x + 3$ (divisor)

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 + 3x + 2 & x + 3 \\ \hline -5x^2 - 15x & \underbrace{5x - 12}_{Q(x)} \\ \hline -12x + 2 & \\ \underline{12x + 36} & \\ \underbrace{38}_{R(x)} & \end{array}$$

Cálculos
1º) $5x^2 \div x = 5x$ (1º termo do quociente)
2º) $5x \cdot x = 5x^2 \rightarrow$ trocando o sinal: $-5x^2$
$5x \cdot 3 = 15x \rightarrow$ trocando o sinal: $-15x$
3º) $-12x \div x = -12$ (2º termo do quociente)
4º) $-12 \cdot x = -12x \rightarrow$ trocando o sinal: $+12x$
$-12.3 = -36 \rightarrow$ trocando o sinal: $+36$

Teorema D´Alembert

"O resto da divisão do polinômio P(x) pelo binômio $ax + b$ é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)$."

Isto é, o valor que anula o divisor $\left(-\frac{b}{a}\right)$, quando substituído no dividendo, $P\left(-\frac{b}{a}\right)$, nos fornece o resto.

É importante ressaltar, que tal teorema só é válido quando o divisor é do 1º grau.

Exemplo:
Seja determinar o resto de divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ pelo polinômio $x - 2$.

Resolução:
Em primeiro lugar devemos calcular a raiz do divisor, igualando-o a zero.
$x - 2 = 0$
$x = 2$

Então, o resto desejado será obtido substituindo-se o valor da raiz encontrada na variável do polinômio P(x).

$R = P(2) = 2^3 + 2.2^2 + 1 = 17$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Assinale em que opções abaixo encontramos um polinômio.
a) $A(x) = 4x^7 - 12x^5 + 3x - 1$
b) $B(x) = \sqrt[3]{5} \cdot x^6 - \frac{2}{3} \cdot x^4 + x - 11$
c) $C(x) = 5\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2$
d) $D(x) = 12$
e) $E(x) = 3x^{-1/2} + 8x^{-2/3} + 7x$
f) $F(x) = 0x^2 + 0x$
g) $7x^3 - 12x^4 + 3x^{1/2}$
h) $\left(\frac{1}{2}\right)x^5 - 4x^2 + 3x^6$
i) $\sqrt[3]{5}x^2 - \frac{3}{5}x^4 - 7x^3$
j) $x^4 - x^{-3} + x^2$
l) $0x^4 + 3x^2 + 0x$
m) $0x^7 + 0x^2$
n) -2

2) Classifique as expressões algébricas abaixo em racional inteira, racional fracionária ou irracional:
a) $\frac{16ax^2}{9}$
b) $ax^3 + bx^2 + cx + d$
c) $\sqrt{2}x + b$
d) $\sqrt{xy} + xy^2$
e) $\frac{\sqrt{x}}{y}$
f) $10y^3 + 9y^2 + 4$
g) $\frac{ax + by + c}{mx + n}$
h) $\frac{7x + 11y + 15z}{4x^2 + 13z^2}$

3) Efetuar:
a) $(-3x^2 \cdot y) \cdot (2x^5yz)$
b) $(8xy^3) \cdot \left(\frac{-3x^2y}{4}\right)$
c) $\left(-\frac{2}{5}xy^2z\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x^3y^2\right)$
d) $\left(\frac{1}{2}x^3y^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}xz^2\right)$
e) $(12x^6y^2z) \div (-6x^4y)$
f) $(-15x^5yz^2) \div (-5x^5yz)$
g) $\left(-\frac{2}{3}x^6yz^2\right) \div \left(-\frac{1}{5}x^5y^2z^2\right)$
h) $(-3xy^2) \cdot (x^2y + xy^3 - y)$
i) $(-x^3) \cdot (x^2y - 5xy - 3x)$
j) $(5x^3 + 2x^2 + x - 1) \cdot (-2x)$
k) $(x^3 - 4x) \cdot (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)$
l) $(x^2 - 3x + 1) \cdot (2x^2 - x + 2)$
m) $(-3x^3 + 2x^2 - 1) \cdot (x^2 - x)$
n) $(4x^2y) \cdot \left(-\frac{2xy^4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{15x^5}{8}\right)$
o) $(-4x^3y^4) \div (6xy^3)$
p) $\left(-\frac{2x^2y^3}{5}\right) \div \left(-\frac{3xy^4}{8}\right)$
q) $(5x^4y^2) \cdot (-2xy^3) + (7x^2y^3) \cdot (-2x^3y^2) + (-20x^5y^5)$
r) $\left(-\frac{4}{5}x^5y\right) \div \left(\frac{2}{5}x^6z^2\right)$
s) $(3x^3 + x^2 - 3x - 1) \div (-1 + x^2)$
t) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$
u) $(11x^2 + 4x^3 - 7x + 1) \div (3x - 1 + x^2)$
v) $(3x^4 + 10x^3 - 17x^2 + 6x) \div (4x - 3 + x^2)$
x) $(2y^2 + 3 + 4y^5 - 2y) \div (2 - 3y + y^3)$

4) Determine o grau de cada um dos polinômios abaixo.
a) $A(x) = 7x^5 - 12x^4 - 13$
b) $B(x) = 3x^2 - 11x^7 + 12x + 4$
c) $C(x) = 5x^6 + 0x^8 + 0x - 3$

d) $D(x) = -4$
e) $E(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x$

5) O polinômio $4x^3y^2 + 5xyz^4 - 3x^{2m}y^3z$ é do décimo grau. Determine o valor de m.

6) Determine o valor numérico das expressões:

a) $4xy^3$, para $x = y = 2$

b) $3x^2 - 4y^2 - 1$, para $x = -1$ e $y = -2$

c) $\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4}$, para $x = -3$ e $y = 1$

d) $2a^4b^3 - 3a^3b - 2a^3 + b^2 + 4a^2b^5$, para $a = 1$ e $b = -1$

e) $4x^3y^2 - x^2y + 5x^4y^3 - 2x^2y^2$, para $x = y = -1$

f) $4x^3y + 3x^2y - 4xy^3$, para $x = 2$ e $y = -2$

g) $y^4 - 3xy^3 + 7x^2y^2 - 4x^3y$, para $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -2$

7) Se $a = -1$ e $b = -2$, o valor de $a^3b^2 - a^2b^3$ será:
a) -12
b) 8
c) 4
d) -4

8) Qual o valor numérico do polinômio, dado abaixo, para $x = \frac{1}{3}$ e $y = -2$?

$$4x^3 - 6y + 12x^2 - 10xy$$

a) $\frac{544}{27}$
b) $\frac{184}{27}$
c) $-\frac{104}{27}$
d) $-\frac{464}{27}$

9) Sendo $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$, o valor numérico da expressão $\frac{(x+y)^2 . (x-y)^2}{x^2 - y^2}$ é:
a) 4
b) -2
c) 3
d) $\frac{5}{2}$

10) Sendo $A = 2x^2 - x + 1$ e $B = 3x^2 + 2x - 2$, determine:
a) $A + B$
b) $A - B$
c) $2A + 3B$
d) $3A - 2B$

11) Dados os polinômios $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x - 2$, $B(x) = 4x^4 + 2x^2 - 12x - 2$ e $C(x) = x^2 + 1$, determine o resultado de:
a) $A(x) + B(x)$
b) $B(x) - A(x)$
c) $A(x) - 2.C(x)$
d) $A(x) . C(x)$
e) $[C(x)]^2$

12) Sendo $A = 4x^3 - 2x^2 + 3$, $B = x^4 - 4x^3 + 3x$ e $C = -3x^4$, determine o resultado de:
a) $A + B + C$
b) $A - C + 2B$
c) $2A - 3B + 4C$
d) $3B + C - A$
e) $A - [2B + (C - B) + (A - 2C)]$
f) $2B - \{3C - [4 . (A - B) + 2 . (A - 2C)]\}$

13) Qual é o polinômio que somado a $7x^2 - 8x - 4$ dá como resultado $x^3 - 2x^2 + 6$?

14) Qual o polinômio que subtraído de $-3x^3 - 2x + 6$ dá como resultado $x^4 + 2x$?

15) Qual o polinômio que devemos subtrair de $3x^2 - 4xy + 5y$ para obtermos $-x^2 + 2xy - y$?
a) $4x^2 - 6xy + 6y$
b) $-4x^2 + 6xy - 6y$
c) $4x^2 - 4xy - 6y$
d) $-4x^2 + 6xy + 6y$

16) Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x + 1$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + x + 1$.

17) Qual o polinômio que dividido por $2x^2 - 3x$ dá quociente $3x - 1$ e resto $2x + 3$?
a) $6x^3 + 11x^2 + 3$
b) $6x^3 - 11x^2 + 5x + 3$
c) $6x^3 + 11x^2 - 3x$
d) $6x^3 - 11x^2 + 3x$

18) Dividindo $P_1 = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ por $P_2 = x^2 + x - 3$, obtemos um quociente P_3 e um resto P_4. O valor numérico de P_4 para $x = 13$ é:
a) 85
b) 53
c) 5
d) 39
e) 15

19) Dada a expressão algébrica $\frac{a + 2b}{a^2 - 2ab + b^2}$, calcule o valor numérico da expressão para:
a) $a = 2$ e $b = -3$
b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$
c) $a = -10$ e $b = 10$

60) A expressão $x^3 - 4mx^2 - 3x$ tem o valor numérico igual a 22, para $x = -2$. Determine o valor de m.

21) Para que o valor de k, a expressão $\frac{5x^3y^2 - kxy + 2}{x^2y^3}$ tem valor numérico $\frac{37}{27}$, quando $x = -1$ e $y = -3$?

22) Verifique se os números -1, 2, 4 e 5 são raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 + 21x^2 - 67x + 60$.

23) Dentre os números 1, 2 e 3, qual(is) é(são) raiz(es) do polinômio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12$?

24) Determine os valores de a,b e c para que os polinômios $P(x) = 5x^3 + 12x^2 - 4$ e $Q(x) = (a+3)x^4 + 5x^3 + (b+c).x^2 + b - c$ sejam idênticos.

25) Os polinômios $A(x) = 7x^4 + 6x^2 - 1$ e $B(x) = ax^4 + (a+b).x^3 + (a+b+c).x^2 + a + b + c + d$ são idênticos. Determine os valores de a, b, c, e d.

26) *O polinômio* $P(x) = ax^2 + (b - 6).\ x + b + c$ é identicamente *nulo*. Determine os valores de a, b e c.

27) O polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se anula para cinco valores de x. Determine o valor da soma $a + b + c + d$.

28) O produto de quatro raízes do polinômio $Q(x) = ax^3 + (b - 3)x^2 + (c + 1).\ x + 4 - d$, vale 24. Determine os valores de a, b, c e d.

29) Determine o valor do resto das divisões abaixo, sem efetuá-las.
a) $(3x^3 - x^2 + x + 1) \div (x - 1)$
b) $(x^4 - 2x^2 - 2) \div (x + 2)$
c) $(6x^2 + 4x - 2) \div (3x - 1)$

30) Determine o resto da divisão de $4x^9 + 7x^8 + 4x^3 + 3$ por $x + 1$.

31) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ pelo polinômio $d(x) = x^3 - x$, é:
a) $5x$
b) $5x^2 - 5x + 1$
c) $x^{27} + x$
d) 5
e) -1

32) Qual o valor do resto da divisão $(m^4 + n^4) \div (m + n)$, sendo $(m + n) \neq 0$?
a) $\dfrac{2n^4}{m+n}$
b) $2n^4$
c) $\dfrac{n^4}{m+n}$
d) n^4

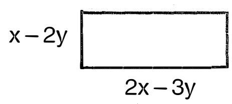
33) Determine o valor de x de modo que o número –3 seja raiz do polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + 2x + 15$.

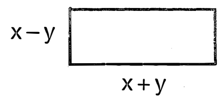
34) Determine o valor de k, de modo que –2 seja raiz do polinômio $P(x) = 7x^3 - 12x^2 + 3x - 5k$.

35) O polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x + a$ é divisível por $D(x) = x - 2$. Determine o valor de a.

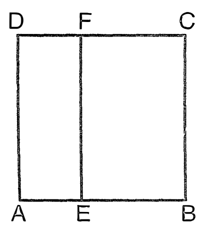
36) Determine o valor de k para que o resto da divisão do polinômio $5x^4 - 3x^2 + kx - 1$ por $x + 2$ seja – 3.

37) Determine as expressões algébricas que dão o perímetro e a área dos retângulos abaixo:

a) 

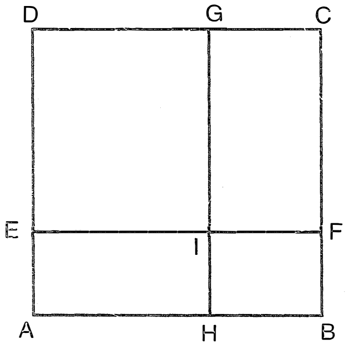
b) 

38) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado x, enquanto que no retângulo AEFD, o lado AE vale y.



Determine o perímetro e a área dos polígonos:
a) ABCD
b) AEFD
c) EBCF

39) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado m + n. Traçam-se os segmentos EF e GH, paralelos aos lados desse quadrado. Sabendo-se que CG = m – n e BF = m – 2n, determine o perímetro e a área dos polígonos:
a) ABCD
b) AHGD
c) HBCG
d) AHIE
e) HBFI
f) IFCG
g) EIGD



40) Os números naturais x e y estão relacionados pela igualdade $y = \dfrac{3x+38}{x-3}$. A soma de todos os valores possíveis de x é:
a) 12
b) 56
c) 54
d) 100
e) 68

QUESTÕES DE CONCURSOS

41) **(CM)** A soma de um polinômio P com o polinômio $3x^4 - 2x^3 + 7x^2$ igual a $5x^3 - 15x^2 + x$. A soma dos coeficientes do polinômio P é:
a) -12
b) -14
c) -15
d) -16
e) -17

42) **(CEFET)** Dê o resultado da divisão de $x^4 + 2x^2 - 5x - 7$ por $x - 2$.

43) **(CM)** Dividindo-se o resultado de $(-2{,}5\,x^3y^2 + 2{,}3\,x^3y^2 - 0{,}4\,x^3y^2)^2$ por $0{,}4\,x^2y^4$ obtém-se:
a) $0{,}09\,x^4$
b) $0{,}9\,x^3$
c) $0{,}9\,x^4$
d) $0{,}9\,x^3y$
e) $0{,}9\,x^4y$

44) **(CEFET)** O MDC entre dois números M e N é $2^a \cdot 3 \cdot 5^b \cdot 7^c$. Sendo $N = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7^6$ e $M = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7^2$, se $W = \dfrac{ab}{c}$, então o produto $(2x^2 + x - 1) \cdot Wx$ é igual a:
a) $20x^3 + 10x^2 - 10x$;
b) $10x^2 + 5x^2 - x$;
c) $20x^2 + 10x - 10$;
d) $10x^3 + 5x^2 - 5x$;
e) $12x^2 + 6x^2 - 6x$.

45) **(CN)** Sabendo-se que a equação $x^2(x^2 + 13) - 6x(x^2 + 2) + 4 = 0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau, a soma de duas das suas raízes reais distintas é igual a
a) -3
b) -2
c) -1
d) 2
e) 3

46) **(CN)** Sejam $p(x) = 2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ e $q(x) = x^2 + x + 1$. Tomando r(x) como sendo o resto na divisão de p(x) por q(x), o valor de r(2) será:
(a) -8
(b) -6
(c) -4
(d) -3
(e) -2

47) **(EPCAR)** O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x + 1$ é um número:
a) ímpar menor que 5
b) par menor que 6
c) primo maior que 5
d) primo menor que 7

48) **(UERJ)** A estatura de um adulto do sexo feminino pode ser estimada, através das alturas de seus pais, pela expressão:

$$\frac{(y-13)+x}{2}$$

Considere que x é a altura da mãe e y a do pai, em cm. Somando–se ou subtraindo-se 8,5 cm da altura estimada, obtém–se, respectivamente, as alturas máxima e mínima que a filha adulta pode atingir. Segundo essa fórmula, se João tem 1,72 m de altura e sua esposa tem 1,64 m, sua filha medirá, no máximo:
a) 1,70 m.
b) 1,71 m.
c) 1,72 m.
d) 1,73 m.

49) **(ENEM)** Sendo $n \geq 0$, qual a soma dos vários valores de n que tornam a fração $F = (n + 1)/(n - 3)$ um número INTEIRO POSITIVO?
a) 5
b) 7
c) 8
d) 10
e) 16

50) **(UERJ)** Considere o conjunto formado pelos inteiros p para os quais $\frac{p^2+5}{p+2}$ também é um número inteiro. Quantos elementos possui esse conjunto?

51) **(CN)** Dado o número $N = [(2009)^{40} - 1]^{40} - 2010$, analise as afirmativas a seguir.
I – N é divisível por 2008.
II – N é divisível por 2009.
III – N é divisível por $2009^{40} - 2010$.

Com base nos dados apresentados, podemos concluir que:

a) apenas a afirmativa I é verdadeira
b) apenas a afirmativa II é verdadeira
c) apenas a afirmativa III é verdadeira
d) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
e) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras

GABARITO

1) a; b; d; f; h; i; l; m; n.

2) a) E . A . R . I.
b) E . A . R . I.
c) E . A . R . I.
d) E . A . I.
e) E . A . I.
f) E . A . R . I.
g) E . A . R . F.
h) E . A . R . F.

3) a) $-6x^7y^2z$
b) $-6x^3y^4$
c) $-\frac{4}{25}x^4y^4z$
d) $-\frac{3}{10}x^4y^2z^2$
e) $-2x^2yz$
f) 3z
g) $\frac{10x}{3y}$
h) $-3x^3y^3-3x^2y^5 + 3xy^3$
i) $-x^5y + 5x^4y + 3x^4$
j) $-10x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x$
k) $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 14x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x$
l) $2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 2$
m) $-3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 + x$
n) $3x^8y^5$
o) $-\frac{2x^2y}{3}$
p) $\frac{16x}{15y}$
q) $-44x^5y^5$
r) $-\frac{2y}{xz^2}$
s) $3x - 1$
t) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
u) $4x - 1$
v) $3x^2 - 2x$
x) $q = 4y^2 + 12$
$r = -6y^2 + 34y - 21$

4) a) 5
b) 7
c) 6
d) 0
e) não está definido

5) 3

6) a) 64
b) -14
c) 5
d) -4
e) -10
f) -24
g) 10

7) C
8) A
9) B

10) a) $5x^2 + x - 1$
b) $-x^2 - 3x + 3$
c) $13x^2 + 4x - 4$
d) $-7x + 7$

11) a) $4x^4 + 3x^3 - 5x - 4$
b) $4x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 19x$
c) $3x^3 - 4x^2 + 7x - 4$
d) $3x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 4x^2 + 7x - 2$
e) $x^4 + 2x^2 + 1$

12) a) $-2x^4 - 2x^2 + 3x + 3$
b) $5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 6x + 3$
c) $-15x^4 + 20x^3 - 4x^2 - 9x + 6$
d) $-16x^3 + 2x^2 + 9x - 3$
e) $-4x^4 + 4x^3 - 3x$
f) $19x^4 + 32x^3 - 12x^2 - 6x + 18$

13) $x^3 - 9x^2 + 8x + 10$
14) $-x^4 - 3x^3 - 4x + 6$
15) A
16) $-x + 2$ $\frac{4}{25}$
17) B
18) B
19) a)

b) 42

c) $\frac{1}{40}$

20) $-\frac{3}{2}$
21) -2
22) Raízes: 4 e 5
23) 2 e 3
24) a = -3; b = 4; c = 8
25) a = 7; b = -7; c = 6; d = -7
26) a = 0; b = 6; c = -6
27) 0
28) a = 0; b = 3; c = -1; d = 4

29) a) 4
b) 6
c) 0

30) 2
31) A
32) B
33) -2
34) -22
35) -8
36) 35

37) a) $2p = 6x - 10y$ e $S = 2x^2 - 7xy + 6y^2$
b) $2p = 4x$ e $S = x^2 - y^2$

38) a) $2p = 4x$ e $S = x^2$
b) $2p = 2x + 2y$ e $S = xy$
c) $2p = 4x - 2y$ e $S = x^2 - xy$

39) a) $2p = 4(m + n)$ e $S = (m + n)^2$
b) $2p = 2m + 6n$ e $S = 2mn + n^2$
c) $2p = 4m$ e $S = m^2 - n^2$
d) $2p = 2m$ e $S = 2mn - 4n^2$
e) $2p = 4m - 6n$ e $S = m^2 - 3mn + 2n^2$
f) $2p = 2m + 4n$ e $S = 3mn - 3n^2$
g) $2p = 10n$ e $S = 6n^2$

40) C
41) E
42) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 7$
$R(x) = 7$

43) C
44) A
45) E
46) E
47) C
48) A
49) E
50) 6
51) E

OBSERVAÇÕES

Produtos Notáveis

Existem alguns produtos de polinômios que, pelo fato de aparecerem frequentemente nos cálculos com expressões algébricas, recebem a denominação de produtos notáveis. São eles:

I) Quadrado da soma
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Exemplos:
a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2 . x . 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
b) $(4x^3 + 2y^2)^2 = (4x^3)^2 + 2 . 4x^3 . 2y^2 + (2y^2)^2 =$
$= 16x^6 + 16x^3y^2 + 4y^4$

II) Quadrado da diferença
$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Exemplos:
a) $(x - 5)^2 = x^2 - 2 . x . 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
b) $(2xy - 3z^4)^2 = (2xy)^2 - 2 . 2xy . 3z^4 + (3z^4)^2 =$
$= 4x^2y^2 - 12xyz^4 + 9z^8$

III) Produto da soma pela diferença
$(x + a) . (x - a) = x^2 - a^2$

Exemplos:
a) $(x + 3) . (x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
b) $(x^2 + 2y) . (x^2 - 2y) = (x^2)^2 - (2y)^2 = x^4 - 4y^2$

IV) Produto de Stevin
$(x + a) . (x + b) = x^2 + (a + b) . x + ab$

Nota: O produto de Stevin é utilizado no produto de dois binômios que possuem um termo comum.

Exemplos:
1) $(x + 2) . (x + 5) = x^2 + (2 + 5) . x + 2.5 = x^2 + 7x + 10$
2) $(4x^2 - 2y) . (4x^2 + 6y) = (4x^2)^2 + (-2y + 6y) . 4x^2 + (-2y) . 6y =$
$= 16x^4 + 16x^2y - 12y^2$

V) Quadrado de um trinômio
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Exemplos:
1) $(x + 2y + z)^2 = x^2 + (2y)^2 + z^2 + 2 . x . 2y + 2x . z + 2 . 2y . z =$
$= x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$

2) $(x^3 - y^2 + 3z)^2 = (x^3)^2 + (-y^2)^2 + (3z)^2 + 2 . x^3 . (-y^2) + 2 . x^3 . 3z + 2 . (-y^2) . 3z = x^6 + y^4 + 9z^2 - 2x^3y^2 + 6x^3z - 6y^2z$

VI) Cubo da Soma
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Exemplos:
1) $(x + 2)^3 = x^3 + 3 . x^2 . 2 + 3 . x . 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
2) $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 . (2a)^2 . 3b + 3 . 2a . (3b)^2 + (3b)^3 =$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

VII) Cubo da diferença
$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

Exemplos:
1) $(x - 3)^3 = x^3 - 3 . x^2 . 3 + 3 . x . 3^2 - 3^3 =$
$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
2) $(y^2 - 2a^5)^3 = (y^2)^3 - 3 . (y^2)^2 . 2a^5 + 3 . y^2 . (2a^5)^2 - (2a^5)^3 =$
$= y^6 - 6a^5y^4 + 12a^{10}y^2 - 8a^{15}$

Casos especiais:
1) $(x + a) . (x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$

Exemplos:
a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$
b) $(a^3 + 3y) . (a^6 - 3a^3y + 9y^2) = (a^3)^3 + (3y)^3 = a^9 + 27y^3$

2) $(x - a) . (x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$

Exemplos:
a) $(x - 3) . (x^2 + 3x + 9) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27$

b) $(x^2 - 2y^3) . (x^4 + 2x^2y^3 + 4y^6) = (x^2)^3 - (2y^3)^3 = x^6 - 8y^9$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Desenvolva os produtos notáveis.

1) $(a + b)^2$

2) $(x + 1)^2$

3) $(x + 6)^2$

4) $(x + 5)^2$

5) $(2x + 3)^2$

6) $(4 + 3x)^2$

7) $(3 + 2x)^2$

8) $(2a + 3b)^2$

9) $(3x^2 + 4y^3)^2$

10) $(3x^2 + 2)^2$

11) $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$

12) $\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}\right)^2$

13) $\left(\frac{x}{2} + 4\right)^2$

14) $\left(\frac{5m}{2} + 6z\right)^2$

15) $\left(\frac{3a^2}{4} + \frac{5b^4}{3}\right)^2$

16) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2$

17) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$

18) $(xy + 3)^2$

19) $(x^3y^2z^4 + 2a)^2$

20) $(3^a + 5^a)^2$

21) $(2^x + 2^{2x})^2$

22) $(a - b)^2$

23) $(x-1)^2$

24) $(x-4)^2$

25) $(3-m)^2$

26) $(m-3)^2$

27) $(2x-3)^2$

28) $(1-2x)^2$

29) $(5a^2-2b^3)^2$

30) $(4x^4-3y^5)^2$

31) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

32) $\left(\frac{x}{3}-2\right)^2$

33) $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2$

34) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^3}{2}\right)^2$

35) $\left(a-\frac{3}{a}\right)^2$

36) $(-x+2)^2$

37) $(-5-a^4)^2$

38) $(-7b^3-2a^3)^2$

39) $\left(\frac{-x^3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2$

40) $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)^2$

41) $(mn-4)^2$

42) $(x^4y^5z-3m)^2$

43) $(5^x-4^x)^2$

44) $(2^{2x}-2^x)^2$

45) $(a+b)\circ(a-b)$

46) $(7+x)\circ(7-x)$

47) $(2-m)\circ(2+m)$

48) $(x+1)\circ(x-1)$

49) $(2x+3y)\circ(2x-3y)$

50) $(4x-3y)\circ(4x+3y)$

51) $(2x+y)\circ(2x-y)$

52) $(3a+5b)\circ(3a-5b)$

53) $(x^2+y^2)\circ(x^2-y^2)$

54) $(x^n+y^n)\circ(x^n-y^n)$

55) $(3+x^3)\circ(3-x^3)$

56) $(1+x)\circ(1-x)\circ(1+x^2)\circ(1+x^4)$

57) $\left(\frac{3x^2}{5}+\frac{2y^3}{7}\right)\circ\left(\frac{3x^2}{5}-\frac{2y^3}{7}\right)$

58) $\left(\frac{4x^3}{5}+\frac{3y^2}{2}\right)\circ\left(\frac{4x^3}{5}-\frac{3y^2}{2}\right)$

59) $\left(\frac{7m^2}{4c}+\frac{5a^4}{3b^5}\right)\circ\left(\frac{7m^2}{4c}-\frac{5a^4}{3b^5}\right)$

60) $(x^2y^3+6)\circ(x^2y^3-6)$

61) $(2^x+3^x)\circ(2^x-3^x)$

62) $(x+3)\circ(x+2)$

63) $(x-5)\circ(x-3)$

64) $(x-5)\circ(x+2)$

65) $(x-3)\circ(x+2)$

66) $(x+3)\circ(x+7)$

67) $(x+5)\circ(x-2)$

68) $(x-3)\circ(x-1)$

69) $(x+2y)\circ(x-3y)$

70) $(2a+5)\circ(2a+3)$

71) $(x^2+4)\circ(x^2+5)$

72) $(x^3-2)\circ(x^3+7)$

73) $(3m^3+4)\circ(3m^3-2)$

74) $(a^2bc^3+1)\circ(a^2bc^3-6)$

75) $\left(\frac{x}{3}+4\right)\circ\left(\frac{x}{3}+2\right)$

76) $\left(\frac{4a^2}{5}+\frac{1}{3}\right)\circ\left(\frac{4a^2}{5}-\frac{16}{3}\right)$

77) $\left(\frac{a}{b}-b\right)\circ\left(\frac{a}{b}+3b\right)$

78) $(5-3m^2)\circ(5+7m^2)$

79) $(4m+1)\circ(3-4m)$

80) $(5-z^3)\circ(z^3+7)$

81) $(2^x + 3) \cdot (2^x + 1)$

82) $(3^x + 1) \cdot (3^x - 10)$

83) $(x^n + 5) \cdot (x^n - 6)$

84) $(x + y + z)^2$

85) $(7 + a + x)^2$

86) $(2 - b - 3y)^2$

87) $(3x - 2y - z)^2$

88) $(2x + 3y + 5z)^2$

89) $(-a + b - 2c)^2$

90) $(a + b + c) \cdot (a + b - c)$

91) $(a - b + c) \cdot (a + b + c)$

92) $(x + y + z) \cdot (-x + y + z)$

93) $(m + n + p) \cdot (m - n - p)$

94) $(a + b)^3$

95) $(x + 2)^3$

96) $(x + 1)^3$

97) $(x + 2y)^3$

98) $(2x + 3)^3$

99) $(3 + k^4)^3$

100) $(3x + 2y)^3$

101) $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^3$

102) $\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{2}\right)^3$

103) $(3m^2 + 2p^3)^3$

104) $(2^a + 3^b)^3$

105) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3$

106) $(a^2b^3 + 2c^4)^3$

107) $(a - b)^3$

108) $(x - 2)^3$

109) $(x - 1)^3$

110) $(2x - y)^3$

111) $(3x - 2y)^3$

112) $(2x^3 - y^2)^3$

113) $(2 - m^3)^3$

114) $(2a^3 - 5p^4)^3$

115) $\left(\frac{3x}{2} - 2\right)^3$

116) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)^3$

117) $\left(-\frac{x}{3} - 1\right)^3$

118) $(3^x - 4^y)^3$

119) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$

120) $(2m^2n^4 - 3p^5)^3$

121) $(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$

122) $(x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$

123) $(x^3 + 2) \cdot (x^6 - 2x^3 + 4)$

124) $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)$

125) $(x^n + y^n) \cdot (x^{2n} - x^n y^n + y^{2n})$

126) $(a^x + b^y) \cdot (a^{2x} - a^x b^y + b^{2y})$

127) $(2^x + 3^x) \cdot (4^x - 6^x + 9^x)$

128) $(x^2y^5 + 4) \cdot (x^4y^{10} - 4x^2y^5 + 16)$

129) $(a - 3) \cdot (a^2 + 3a + 9)$

130) $(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

131) $(x - 5y) \cdot (x^2 + 5xy + 25y^2)$

132) $(a^5 - 1) \cdot (a^{10} + a^5 + 1)$

133) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)$

134) $(x^a - y^b) \cdot (x^{2a} + x^a y^b + y^{2b})$

135) $(5^x - 2^x) \cdot (25^x + 10^x + 4^x)$

136) $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$

137) $(m^3b^2 - 2c) \cdot (m^6b^4 + 2m^3b^2c + 4c^2)$

II) Escreva as expressões abaixo em suas formas mais simplificadas.

138) $(2a + b)^2 - (a - b)^2$

139) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$

140) $(m + n) \cdot (m - n) - (m - n)^2$

141) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1)$

142) $(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^4 + 16)$

143) $(x+y)\circ(x^2+y^2)\circ(x-y)$

144) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\circ(\sqrt{x}-\sqrt{y})\circ(x+y)$

145) $(4-x)^2-(x-1)\circ(x-7)$

146) $(a+b)^2-(a+b)\circ(a-b)-2ab+2(a-b)^2-4b^2$

147) $(a-b+c)^2-(a+b)^2-(a-c)^2$

148) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(c-2a)^2-(c+2b)^2-4(a+b)\circ(a-b)$

149) $(x+y)\circ(x^2-xy+y^2)-(x\sqrt{x}-y\sqrt{y})\circ(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})$

150) $(m+n)\circ(m^2-mn+n^2)-(m-n)\circ(m^2+mn+n^2)$

III) Questões objetivas

151) Qual o valor de m de modo que o desenvolvimento $(x^m+y)^2$, seja um polinômio do 10º grau em x?
a) 10
b) 5
c) 3
d) $\frac{5}{2}$

152) Qual o deve ser o valor de m de modo que x^4+4x^2+m seja o quadrado de uma soma em que $4x^2$ é o duplo produto dos termos dessa soma?
a) 4
b) 2
c) $4x^3$
d) 2x

153) Sabendo–se que $9x^4-Bx+4x^2$ é um trinômio quadrado perfeito, então B pode ser igual a:
a) $-12x^3$
b) $12x^3$
c) $-12x^2$
d) 0

154) No desenvolvimento $(2x+A)^2=B-12xy^3+C$, temos:
a) $A=3y^3$, $B=4x^2$ e $C=9y^9$
b) $A=-3y^3$, $B=-4x^2$ e $C=9y^6$
c) $A=3y^3$, $B=4x^2$ e $C=9y^6$
d) $A=-3y^3$, $B=4x^2$ e $C=9y^6$

155) Que termo devemos adicionar à expressão $4x^8-6x^4y+9y^2$ para que ela represente o quadrado de uma soma?
a) $6x^4y$
b) $12x^4y$
c) $18x^4y$
d) $24x^4y$

156) Para que a igualdade $(x+3b^2)^2=16a^6+y+z$ se verifique, podemos ter:
a) $x=4a^6$, $y=12a^3b^2$ e $z=6b^4$
b) $x=4a^3$, $y=12a^3b^2$ e $z=9b^4$
c) $x=4a^3$, $y=24a^3b^2$ e $z=6b^4$
d) $x=4a^3$, $y=9b^4$ e $z=24a^3b^2$

157) As expressões $A=36x^{10}+36x^5$, $B=\frac{x^6}{4}-6x^3$ e $C=25x^2y^{14}+20xy^7$, tornam-se trinômios quadrados perfeitos se a eles adicionarmos, respectivamente, os números a, b e c. Então podemos afirmar que a soma a + b + c é:
a) zero
b) um número primo
c) um número par
d) quadrado de um número natural.

158) Sabendo–se que $10947836^2=x^2+y^2$, o valor de 10947839 . 10947833 é:
a) $x+y$
b) x^2-y^2
c) x^2+y^2-9
d) $\sqrt{x^2+y^2}$

159) A soma dos valores absolutos dos algarismos do produto 1.000.100 × 999.900 vale:
a) 2
b) 9
c) 38
d) mais do que 40

160) Sendo $a^2+b^2=x$ e $ab=y$, então $(a+b)^2$ é igual a:
a) x^2
b) $x+y$
c) $x-2y$
d) x^2+2y
e) $x+2y$

161) Se $x+\frac{1}{x}=3$, então o valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$ é:
a) 9
b) 18
c) 27
d) 54

162) Se $a+\frac{1}{a}=5$, o valor de $a^2+\frac{1}{a^2}$ é:
a) 27
b) 25
c) 23
d) 21

163) Sabendo-se que $m^2+\frac{1}{m^2}=18$, então o valor de $m-\frac{1}{m}$ é:
a) 0
b) 2
c) 4
d) 6

QUESTÕES DE CONCURSOS

164) **(CEFET)** Qual das afirmativas abaixo está errada?
a) $(-a-b)^2=(a+b)^2$
b) $(-a+b)^2=(a-b)^2$
c) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$
d) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2+ab$
e) das afirmativa acima uma está errada

165) **(CM)** Considere $A=x+2y$ e $B=x-2y$. É verdadeiro afirmar que:
a) $A^2=x^2+4xy+4y^2$
b) $B^2=x^2-4xy-4y^2$
c) $AB=x^2+4xy$
d) $A^2-B^2=8xy+8y^2$

166) **(CM)** Se (2x - 1) é um quadrado perfeito, a expressão do quadrado perfeito imediatamente inferior a (2x - 1) será:
a) $2x-\sqrt{2x-1}$
b) $2x-2\sqrt{2x-1}$
c) $2x-\sqrt{2x-1}+1$
d) $2x-\sqrt{2x-1}-1$
e) $2x-2$

167) **(CEFET)** Simplificando a expressão , $\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$ onde $h \neq 0$, obtemos:
a) $2x+h-2$
b) $2x-2$
c) $2x+h$
d) $2x-2h+2$
e) $2x$

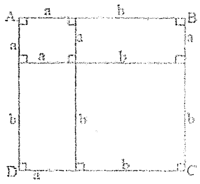
168) **(CEFETEQ)** Sendo $a+b=4$ e $a-b=2$, calcule o valor de a^2-b^2.

169) **(CAP-UFRJ)** Sabendo que $a^2+b^2=13$ e que $\frac{2}{3}ab=-4$, determine o valor de $(a+b)^2$

170) **(CM)** Se x é um número real tal que $x+\frac{1}{x}=5$, então o valor numérico de $x^2+\frac{1}{x^2}$ é:
a) 5
b) 8
c) 10
d) 23
e) 27

171) **(CN)** A expressão
$$\frac{(x^3+y^3+z^3)^2-(x^3-y^3-z^3)^2}{y^3+z^3}$$, $x.y.z \neq 0$ é equivalente a:
a) $4.x^3$
b) $4.y.x^3$
c) $4.z.x^3$
d) $4y.z.x^3$

172) **(CN)** Qual é produto notável representado, geometricamente, na figura abaixo, na qual ABCD é um retângulo?
a) a^3+b^3
b) $(a+b)^3$
c) $(a+b)^2$
d) $(a^2+b^2)^2$
e) $(a+b)^4$



173) **(CN)** Se $m+n+p=6$, $m.n.p=2$ e $m.n+m.p+n.p=11$, podemos dizer que o valor de $\frac{m}{n.p}+\frac{n}{m.p}+\frac{p}{m.n}$ é:
a) 1
b) 3
c) 7
d) 18
e) 22

174) **(CN)** Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de q^2+6q é sempre igual a
a) $\frac{p^2r^2+9}{4}$
b) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$
c) p^2r^2-9
d) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$
e) p^2r^2-12p

GABARITO

1) $a^2+2ab+b^2$
2) x^2+2x+1
3) $x^2+12x+36$
4) $x^2+10x+25$
5) $4x^2+12x+9$
6) $16+24x+9x^2$
7) $9+12x+4x^2$
8) $4a^2+12ab+9b^2$
9) $9x^4+24x^2y^3+16y^6$
10) $9x^4+12x^2+4$
11) $\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{3}+1$
12) $\frac{4x^2}{9}+\frac{4x}{9}+\frac{1}{9}$
13) $\frac{x^2}{4}+4x+16$
14) $\frac{25m^2}{4}+30mz+36z^2$
15) $\frac{9a^4}{16}+\frac{5a^2b^4}{2}+\frac{25b^8}{9}$
16) $x^2+4+\frac{4}{x^2}$
17) $\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}$
18) $x^2y^2+6xy+9$
19) $x^6y^4z^8+4ax^3y^2z^4+4a^2$
20) $3^{2a}+2.\,15^a+5^{2a}$
21) $2^{2x}+2^{3x+1}+2^{4x}$
22) $a^2-2ab+b^2$
23) x^2-2x+1
24) $x^2-8x+16$
25) $9-6m+m^2$
26) m^2-6m+9
27) $4x^2-12x+9$
28) $1-4x+4x^2$
29) $25a^4-20a^2b^3+4b^6$
30) $16x^8-24x^4y^5+9y^{10}$
31) $\frac{x^2}{4}-x+1$
32) $\frac{x^2}{9}-\frac{4x}{3}+4$
33) $\frac{4x^4}{9}-\frac{2x^2}{3}+\frac{1}{4}$
34) $\frac{x^4}{9}-\frac{x^2y^3}{3}+\frac{y^6}{4}$
35) $a^2-6+\frac{9}{a^2}$
36) x^2-4x+4
37) $25+10a^4+a^8$
38) $49b^6+28a^3b^3+4a^6$
39) $\frac{x^6}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{4}$
40) $\frac{m^2}{n^2}-2+\frac{n^2}{m^2}$
41) $m^2n^2-8mn+16$
42) $x^8y^{10}z^2-6mx^4y^5z+9m^2$
43) $5^{2x}-2.20^x+4^{2x}$
44) $2^{4x}-2^{3x+1}+2^{2x}$
45) a^2-b^2
46) $49-x^2$
47) $4-m^2$
48) x^2-1
49) $4x^2-9y^2$
50) $16x^2-9y^2$
51) $4x^2-y^2$
52) $9a^2-25b^2$
53) x^4-y^4
54) $x^{2n}-y^{2n}$
55) $9-x^6$
56) $1-x^8$
57) $\frac{9x^4}{25}-\frac{4y^6}{49}$
58) $\frac{16x^6}{25}-\frac{9y^4}{4}$
59) $\frac{49m^4}{16c^2}-\frac{25a^8}{9b^{10}}$
60) x^4y^6-36
61) $2^{2x}-3^{2x}$
62) x^2+5x+6

63) $x^2-8x+15$

64) $x^2-3x-10$

65) x^2-x-6

66) $x^2+10x+21$

67) $x^2+3x-10$

68) x^2-4x+3

69) $x^2-xy-6y^2$

70) $4a^2+16a+15$

71) x^4+9x^2+20

72) x^6+5x^3-14

73) $9m^6+6m^3-8$

74) $a^4b^2c^6-5a^2bc^3-6$

75) $\frac{x^2}{9}+2x+8$

76) $\frac{16a^4}{25}-4a^2-\frac{16}{9}$

77) $\frac{a^2}{b^2}+2a-3b^2$

78) $25+20m^2-21m^4$

79) $-16m^2+8m+3$

80) $-z^6-2z^3+35$

81) $2^{2x}+2^{x+2}+3$

82) $3^{2x}-3^{x+2}-10$

83) $x^{2n}-x^n-30$

84) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

85) $49+a^2+x^2+14a+14x+2ax$

86) $4+b^2+9y^2-4b-12y+6by$

87) $9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz$

88) $4x^2+9y^2+25z^2+12xy+20xz+30yz$

89) $a^2+b^2+4c^2-2ab+4ac-4bc$

90) $a^2+b^2-c^2+2ab$

91) $a^2-b^2+c^2+2ac$

92) $-x^2+y^2+z^2+2yz$

93) $m^2-n^2-p^2-2np$

94) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

95) $x^3+6x^2+12x+8$

96) x^3+3x^2+3x+1

97) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

98) $8x^3+36x^2+54x+27$

99) $27+27k^4+9k^8+k^{12}$

100) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

101) $\frac{x^3}{8}+\frac{15x^2}{4}+\frac{75x}{2}+125$

102) $\frac{8x^3}{27}+\frac{2x^2y}{3}+\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{8}$

103) $27m^6+54m^4p^3+36m^2p^6+8p^9$

104) $2^{3a}+2^{2a}.3^{b+1}+2^a.3^{2b+1}+3^{3b}$

105) $\frac{x^3}{y^3}+\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+\frac{y^3}{x^3}$

106) $a^6b^9+6a^4b^6c^4+12a^2b^3c^8+8c^{12}$

107) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

108) $x^3-6x^2+12x-8$

109) x^3-3x^2+3x-1

110) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

111) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

112) $8x^9-12x^6y^2+6x^3y^4-y^6$

113) $8-12m^3+6m^6-m^9$

114) $8a^9-60a^6p^4+150a^3p^8-125p^{12}$

115) $\frac{27x^3}{8}-\frac{27x^2}{2}+18x-8$

116) $\frac{x^6}{8}-\frac{x^4y^3}{4}+\frac{x^2y^6}{6}-\frac{y^9}{27}$

117) $-\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}-x-1$

118) $3^{3x}-3^{2x+1}.4^y+3^{x+1}.4^{2y}-4^{3y}$

119) $\frac{a^3}{b^3}-\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}-\frac{b^3}{a^3}$

120) $8m^6n^{12}-36m^4n^8p^5+54m^2n^4p^{10}-27p^{15}$

121) x^3+y^3

122) x^3+27

123) x^9+8

124) $a^3+\frac{1}{8}$

125) $x^{3n}+y^{3n}$

126) $a^{3x}+b^{3y}$

127) $2^{3x}+3^{3x}$

128) $x^6y^{15}+64$

129) a^3-27

130) x^3-8

131) x^3-125y^3

132) $a^{15}-1$

133) $\frac{x^3}{8} - 1$

134) $x^{3a} - y^{3b}$

135) $5^{3x} - 2^{3x}$

136) $x - y$

137) $m^9b^6 - 8c^3$

138) $3a^2 + 6ab$

139) $12x$

140) $2mn - 2n^2$

141) $x^8 - 1$

142) $x^8 - 256$

143) $x^4 - y^4$

144) $x^2 - y^2$

145) 9

146) $2a^2 - 4ab$

147) $-a^2 - 4ab + 4ac - 2bc$

148) 0

149) $2y^3$

150) $2n^3$

151) B

152) A

153) B

154) D

155) C

156) D

157) D

158) C

159) D

160) E

161) B

162) C

163) C

164) D

165) A

166) B

167) A

168) 8

169) 1

170) D

171) A

172) C

173) C

174) C

OBSERVAÇÕES

Fatoração

Fatorar uma expressão algébrica é transformá-la num produto de expressões mais simples.

1º Caso – Evidenciação

É aplicada quando existem um ou mais fatores comuns a todos os termos. Para isto, colocamos em evidência o MDC dos termos, isto é, os fatores comuns elevados aos menores expoentes. Consulte item "MDC entre expressões algébricas" no fim deste capítulo (lembre-se do conceito de MDC aprendido no capítulo 6).

Exemplos:

Fatorar as expressões:
a) $6x^2y^4 + 9x^3y^3 - 12x^4y^6$

Resolução:
MDC dos coeficientes = MDC (6, 9, 12) = 3
MDC das partes literais = x^2y^3

Fator evidenciado dos termos = $3x^2y^3$

Para determinarmos os termos que ficarão no interior dos parênteses, devemos dividir ordenadamente cada termo da expressão pelo fator evidenciado.

$\frac{6x^2y^4}{3x^2y^3} = 2y \quad \frac{9x^3y^3}{3x^2y^3} = 3x \quad \frac{-12x^4y^6}{3x^2y^3} = -4x^2y^3$

Finalmente:
$6x^2y^4 + 9x^3y^3 - 12x^4y^6 = 3x^2y^3 . (2y + 3x - 4x^2y^3)$

b) $28\,a^3b^2c^4 - 32\,a^5b^3 + 12\,a^2b^4c^2$

Resolução:
MDC dois coeficientes = MDC (28, 32, 12) = 4
MDC das partes literais = a^2b^2

Fator evidenciado = $4a^2b^2$

Vamos obter os termos interiores aos parênteses:

$\frac{28a^3b^2c^4}{4a^2b^2} = 7ac^4 \quad \frac{-32a^5b^3}{4a^2b^2} = -8a^3b \quad \frac{12a^2b^4c^2}{4a^2b^2} = 3b^2c^2$

$28\,a^3b^2c^4 - 32\,a^5b^3 + 12a^2b^4c^2 = 4a^2b^2 . (7ac^4 - 8\,a^3b + 3b^2c^2)$

2º Caso – Agrupamento

Separamos os termos em grupos e fazemos evidenciações sucessivas:

Exemplos: Fatorar as expressões
a) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b\,(x + y) = (x + y)\,(a + b)$
b) $8xy + 4ax - 6y - 3a = 4x\,(2y + a) - 3\,(2y + a) =$
$= (2y + a)\,(4x - 3)$

3º Caso – Diferença entre dois quadrados
$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$

Exemplos: *Fatorar*
a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5) . (x - 5)$
b) $y^4 - 4a^2 = (y^2)^2 - (2a)^2 = (y^2 + 2a) . (y^2 - 2a)$

4º Caso – Trinômio quadrado perfeito
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemplos: *Fatorar*

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x + 3)^2$
b) $z^6 - 4az^3 + 4a^2 = (z^3)^2 - 2.2a.z^3 + (2a)^2 = (z^3 - 2a)^2$

5º Caso – Trinômio do 2º grau
$x^2 + Sx + P = (x + a) . (x + b)$
$S = a + b \qquad P = a . b$

Nota: Neste caso devemos encontrar dois números de soma **S** e produto **P**. Quando tal procedimento for "muito difícil", podemos resolver uma equação do 2º grau para obter tais números (Ver capítulo "EQUAÇÃO DO 2º GRAU")

Exemplos: *Fatorar*

a) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2) . (x + 3)$

$$\begin{matrix} S=5 \Rightarrow a+b=5 \\ P=6 \Rightarrow a.b=6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

b) $x^2 + 5x - 14 = (x + 7) . (x - 2)$

$$\begin{matrix} S=5 \Rightarrow a+b=5 \\ P=-14 \Rightarrow a.b=-14 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=7 \end{cases}$$

6º Caso – Soma ou diferença de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b) . (a^2 + ab + b^2)$

Exemplos: Fatore as expressões

a) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2) . (x^2 - 2x + 4)$
b) $27a^6b^3 - 1 = (3a^2b)^3 - 1^3 = (3a^2b - 1) . (9a^4b^2 + 3a^2b + 1)$

MDC entre expressões algébricas

Para obter o MDC entre expressões algébricas devemos fatorá-las, e em seguida multiplicar os fatores comuns encontrados, elevados aos menores expoentes com os quais tenham aparecido.

Exemplos:

Determine o MDC das expressões:

a) $24a^6b^3$ e $36a^2b^5c^4$

Resolução:
$24a^6b^3 = 2^3 . 3 . a^6 . b^3$

$36\,a^2b^5c^4 = 2^2 . 3^2 . a^2 . b^5 . c^4$

$MDC = 2^2 . 3 . a^2b^3 = 12a^2b^3$

b) $6x^2 + 6x - 12$, $8x^2 - 16x + 8$ e $12x^4 - 12$

Resolução:
$6x^2 + 6x - 12 = 6\,(x^2 + x - 2) = 6 . (x - 1) . (x + 2)$

$8x^2 - 16x + 8 = 8(x^2 - 2x + 1) = 8 . (x - 1)^2$

$12x^4 - 12 = 12 . (x^4 - 1) = 12 . (x^2 + 1) . (x^2 - 1) =$
$= 12 . (x^2 + 1) . (x + 1) . (x - 1)$

$MDC = 2\,(x - 1) = 2x - 2$

MMC entre expressões algébricas

Neste caso devemos fatorar as expressões dadas, e multiplicar os fatores comuns e não comuns elevados aos maiores expoentes encontrados.

Exemplos:
Determine o MMC das expressões:

a) $16\,am^3$ e $18\,a^2m^5x^4$

Resolução:
$16\,am^3 = 2^4 \,.\, a \,.\, m^3$
$18a^2m^5x^4 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, a^2 \,.\, m^5 \,.\, x^4$
$MMC = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, a^2 \,.\, m^5 \,.\, x^4 = 144a^2m^5x^4$

b) $4x^6 + 4$, $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$ e $6x^2 + 24x + 18$

Resolução:
$4x^6 + 4 = 4 \,.\, (x^6 + 1) = 4 \,.\, [(x^2)^3 + 1] = 4 \,.\, (x^2 + 1) \,.\, (x^4 - x^2 + 1)$

$2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 2 \,.\, (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 2 \,.\, (x + 1)^3$

$6x^2 + 24x + 18 = 6(x^2 + 4x + 3) = 6 \,.\, (x + 1) \,.\, (x + 3)$

$MMC = 12 \,.\, (x + 1)^3 \,.\, (x + 3) \,.\, (x^2 + 1) \,.\, (x^4 - x^2 + 1)$

Frações Algébricas

Fração algébrica é aquela cujos numeradores e denominadores são polinômios. O objetivo deste item do capítulo é lembrar que devemos, sempre que possível, simplificar ao máximo as frações algébricas. Isto é conseguido fatorando-se numerador e denominador, e efetuando as simplificações de termos que neles se repitam.

Exemplos:

a) $\dfrac{6x^2 + 42x + 60}{4x^2 - 16}$

Resolução:
Vamos em primeiro lugar fatorar o numerador e em seguida o denominador:

$6x^2 + 42x + 60 = 6 \,.\, (x^2 + 7x + 10) = 6 \,.\, (x + 2) \,.\, (x + 5)$
$4x^2 - 16 = 4 \,.\, (x^2 - 4) = 4 \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 2)$

O próximo passo é simplificarmos os coeficientes por 2 e a parte literal por x + 2, que é o fator comum.

a) $\dfrac{6x^2 + 42x + 60}{4x^2 - 16} = \dfrac{6.(x+2).(x+5)}{4.(x+2).(x-2)} = \dfrac{3.(x+5)}{2.(x-2)} =$

$= \dfrac{3x + 15}{2x - 4}$

b) $\dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{3x^3 - 3x^2 - 15x - 9} =$

$= \dfrac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{3(x^3 - x^2 - 5x - 3)} = \dfrac{2.(x+1)^3}{3.(x^3 - x^2 - 6x + x - 3)} =$

artifício

$= \dfrac{2.(x+1)^3}{3.[x.(x^2 - x - 6) + 1.(x - 3)]} =$

$= \dfrac{2.(x+1)^3}{3.[x.(x-3).(x+2) + 1.(x-3)]} =$

$= \dfrac{2.(x+1)^3}{3.\{(x-3).[x.(x+2) + 1]\}} =$

$= \dfrac{2.(x+1)^3}{3.(x-3).(x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{2.(x+1)^3}{3.(x-3).(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2.(x+1)}{3.(x-3)} = \dfrac{2x + 2}{3x - 9}$

Essa foi difícil!!!!.
Mas você chega lá, é só exercitar. Mãos à obra!

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Fatore ao máximo as expressões abaixo.

1) $5x + 20y$

2) $12a + 18b$

3) $4a - 2b$

4) $14x - 21y$

5) $20x + 8y + 12z$

6) $2a + 4b - 14c$

7) $mx + my$

8) $mx + mny$

9) $x^4 + x^3 - x^2$

10) $2x^5 + 3x^3 - 4x^2$

11) $6x^3 + 10x^2 - 14x + 8$

12) $18a^{11} - 24a^8 + 30a^6$

13) $54a^2b^6 + 108a^5b^8 - 81a^4b^4$

14) $14a^3b^4 - 35a^2b^5 + 133ab^6$

15) $x^3y^7 + x^4y^6 + x^5y^2$

16) $a^4b^3c^8 - a^5b^4c^6 + a^2b^7c^9$

17) $24x^2y^4 + 36x^6y^7 - 18x^5y^3$

18) $35a^3b^4c^8 + 20a^2b^5c^4 - 30a^6b^8$

19) $(a + 1)^2 \,.\, x^3 \,.\, y^4 + (a + 1) \,.\, x^4 \,.\, y^3 - (a + 1)^2 \,.\, x^2 \,.\, y^5$

20) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

21) $5^{k-1} + 5^{k-2} - 5^{k-3}$

22) $2^{m+1} + 2^{m+3} + 2^{m+4} + 2^m$

23) $2^{3k+4} + 2^{3k+3} + 2^{3k+2} - 2^{3k}$

24) $x^3 - x^2 + 5x - 5$

25) $6ax + 4ay + 3bx + 2by$

26) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$

27) $6x^3 - 12x^2 - x + 2$

28) $bx - ax + ay - by$

29) $4x^2 + 2x - 2y - 4xy$

30) $ax + bx + cy - ay - by - cx$

31) $m^3 - 2m^2x + 3mx - 6x^2$

32) $15x^2y^2 + 8xy - 6x^3 - 20y^3$

33) $4a - ab + 12 - 3b$

34) $12am + 10 - 8m - 15a$

35) $8ax - 6a - 20x + 15$

36) $a^4m^3 + b^3n^2 + b^3m^3 + a^4n^2$

37) $7a + 6b - ab - 42$

38) $5^{x+2} + 5^x - 2^{x+5} - 2^{x+4} + 2^{x+3} + 14 . 2^x$

39) $\frac{xy}{6} + \frac{5x}{3} + \frac{y}{2} + 5$

40) $\frac{2am}{15} - \frac{6bm}{35} - \frac{3bn}{28} + \frac{an}{12}$

41) $\frac{4c}{35} - \frac{cz}{10} + \frac{z}{6} - \frac{4}{21}$

42) $0{,}3x - 0{,}02xy - 0{,}4y + 6$

43) $0{,}4a - 0{,}012ab + 50 - 1{,}5b$

44) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+7} - (3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3})$

45) $m^2 + 2mn + n^2$

46) $a^2 + 4ab + 4b^2$

47) $x^2 + 6x + 9$

48) $m^2 + 10m + 25$

49) $k^2 + 14k + 49$

50) $9x^2 + 24x + 16$

51) $25k^6 + 20k^3 + 4$

52) $\frac{16m^2}{9} + \frac{16m}{15} + \frac{4}{25}$

53) $5x^2 + 60x + 180$

54) $3a^4 + 18a^2b + 27b^2$

55) $16m^{10} + 80m^5k^3 + 100k^6$

56) $\frac{9x^6}{y^4} + \frac{6x^3}{7y^2} + \frac{1}{49}$

57) $36k^8 + 4k^4 + \frac{1}{9}$

58) $0{,}04x^2 + 0{,}04xy + 0{,}01y^2$

59) $0{,}36k^6 + 0{,}6\ k^3m^2 + 0{,}25m^4$

60) $0{,}0001a^8 + 0{,}012a^4b^3 + 0{,}36b^6$

61) $\frac{9}{x^6} + \frac{30}{x^3y^4} + \frac{25}{y^8}$

62) $x^4 + 2x^2y + y^2$

63) $a^2b^6 + 2ab^3c^2 + c^4$

64) $(a+b)^2 + 2.(a+b).c^2 + c^4$

65) $(x+y)^2 + 2.(x+y).(m+n) + (m+n)^2$

66) $m^2 - 2mn + n^2$

67) $x^2 - 8x + 16$

68) $k^2 - 2x + 1$

69) $a^2 - 16a + 64$

70) $m^2 - 6m + 9$

71) $a^2b^2 - 2abc + c^2$

72) $9x^4 - 12x^2 + 4$

73) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

74) $9a^4 - 24a^2b^3 + 16b^6$

75) $-x^2 + 14x - 49$

76) $-x^8 + 3x^4 - \frac{9}{4}$

77) $-4a^6 + \frac{4a^3}{5} - \frac{1}{25}$

78) $2m^2 - 28m + 98$

79) $-27a^4 + 36a^2c^7 - 12c^{14}$

80) $\frac{75x^6}{7} - \frac{120x^3y^2}{7} + \frac{48y^4}{7}$

81) $\frac{16x^2}{25} - \frac{8x}{5} + 1$

82) $\frac{9k^2}{25} - \frac{18k}{5} + 9$

83) $\frac{4}{9} - \frac{4a}{21} + \frac{a^2}{49}$

84) $\frac{m^2}{9} - \frac{2mk}{15} + \frac{k^2}{25}$

85) $0{,}09a^2 - 3a + 25$

86) $0{,}25m^6 - 3m^3 + 9$

87) $0{,}01a^6 - 0{,}008a^3b^4 + 0{,}0016b^8$

88) $\frac{9}{x^{10}} - \frac{12}{x^5y^4} + \frac{4}{y^8}$

89) $16 - 2.4(4-x-y) + (4-x-y)^2$

90) $(m+2n)^2 - 2.(m+2n).(m-n) + (m-n)^2$

91) $(x^2+2x+1)^2 - 2.(x+1)^2.(y+1) + y^2 + 2y + 1$

92) $x^2 + (m+n).x + m.n$

93) $x^2 + 3mx + 2m^2$

94) $9x^2 + 15ax + 4a^2$

95) $x^2 + 5x + 6$

96) $x^2 - 7x + 12$

97) $x^2 + 2x - 35$

98) $x^2 + 8x + 12$

99) $x^2 - 5x + 6$

100) $x^2 + 10x + 9$

101) $x^2 + x - 12$

102) $x^2 - 2x - 15$

103) $x^2 + 3x - 28$

104) $x^2 + 11x + 24$

105) $x^2 + 3x - 18$

106) $x^4 - 29x^2 + 100$

107) $a^4 - 7a^2 + 10$

108) $2m^2 - 2m - 40$

109) $3b^2 - 30b + 63$

110) $20c^6 + 20c^3 - 120$

111) $9x^4 + 6x^2y - 3y^2$

112) $m^2 + 5mk + 4k^2$

113) $-x^2 - 5x + 14$

114) $-x^2 + 7x - 12$

115) $-x^2 - 3x + 10$

116) $4x^2 + 16x + 15$

117) $25x^2 - 10x - 3$

118) $9a^{10} - 6a^5 - 8$

119) $-49a^6 - 35a^3 + 6$

120) $x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$

121) $a^2 + \frac{9a}{5} - \frac{2}{5}$

122) $9a^2 + \frac{15a}{4} + \frac{1}{4}$

123) $4a^6 - \frac{28a^3}{3} - \frac{5}{3}$

124) $m^2 - n^2$

125) $a^2 - b^2$

126) $x^2 - y^2$

127) $m^2 - 9$

128) $y^2 - 25$

129) $4x^2 - y^2$

130) $4m^2 - 1$

131) $k^2 - x^2y^2$

132) $1000^2 - 999^2$

133) $16x^2 - 25y^2$

134) $9a^2 - 4b^2$

135) $16 - a^2$

136) $x^2 - 1$

137) $1 - k^2$

138) $100a^4 - 36b^4$

139) $64\,a^2b^2 - c^4$

140) $49\,a^4b^6 - 16m^{10}z^{18}$

141) $x^4 - a^4$

142) $x^2y^4 - 9a^6$

143) $2a^6 - 2b^4$

144) $5m^4 - 20c^{10}$

145) $-27\,m^2b^6 + 48a^4c^8$

146) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

147) $(x + 3)^2 - k^2$

148) $x^2 - 4x + 4 - k^2$

149) $a^2 + 2ab + b^2 - 100a^2b^2$

150) $a^2 - 169 - 2ab + b^2$

151) $x^2 + 8x + 16 - (y^2 - 10y + 25)$

152) $(k^4 - 4k^2 + 4) - (m^6 + 2m^3 + 1)$

153) $(x + 1)^2 - (y + 2)^2$

154) $x^2 + 2x - y^2 - 4y - 3$

155) $(x + 5)^2 - (z - 6)^2$

156) $x^2 + 10x - z^2 + 12z - 11$

157) $(a + 3)^2 - (b + 2)^2$

158) $a^2 + 4a - b^2 - 2b + 3$

159) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2$

160) $x^2 - y^2 + 6x + 8y - 7$

161) $(a - 4)^2 - (b + 7)^2$

162) $a^{2k+6} - b^{6k-4}$

163) $a^{2x} - b^{2x}$

164) $m^{4a} - k^{6a}$

165) $2\,.\,5^{x+2} - 3^{x+2} + 3^{x+4} - 3^{x+3} + 5\,.\,3^x$

166) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

167) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

168) $m^3 + 9m^2 + 27m + 27$

169) $8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$

170) $27a^6 + 135a^4 + 225a^2 + 125$

171) $64k^3 + \frac{48}{5}k^2 + \frac{12k}{25} + \frac{1}{125}$

172) $x^6 + 9x^4y + 27x^2y^2 + 27y^3$

173) $27a^{15} + 54a^{10}b^4 + 36a^5b^8 + 8b^{12}$

174) $1000000 + 30000 + 300 + 1$

175) $\frac{x^9}{8} + \frac{3x^6y^4}{20} + \frac{3x^3y^8}{50} + \frac{y^{12}}{125}$

176) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

177) $x^3 - 9x^2 + 27x^2 - 27$

178) $m^3 - 12m^2 + 48m - 64$

179) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

180) $64a^3 - 96a^2 + 48a - 8$

181) $125m^{12} - 75m^8 + 15m^4 - 1$

182) $\frac{x^3}{64} - \frac{3x^2y}{80} + \frac{3xy^2}{100} - \frac{y^3}{125}$

183) $\frac{a^9}{8} - \frac{a^6b^4}{4} + \frac{a^3b^8}{6} - \frac{b^{12}}{27}$

184) $\frac{m^{15}}{27} - \frac{2m^{10}n^3}{21} + \frac{4m^5n^6}{49} - \frac{8n^9}{343}$

185) $8000000 - 120000 + 600 - 1$

186) $a^3 + b^3$

187) $x^3 + y^3$

188) $m^3 + 8$

189) $a^3 + 64$

190) $8x^3 + 1$

191) $64a^6 + 27b^9$

192) $x^6 + 1$

193) $\frac{m^6}{27} + \frac{a^{12}}{8}$

194) $\frac{125x^3}{8} + \frac{y^9}{27}$

195) $x + 1$

196) $a^9 + 1$

197) $a^3 - b^3$

198) $x^3 - y^3$

199) $x^3 - 8$

200) $m^3 - 125$

201) $125x^3 - 64y^3$

202) $27m^3 - 8n^3$

203) $\frac{8a^3}{125} - 1$

204) $\frac{27x^3}{125} - \frac{64y^3}{343}$

205) $\frac{1}{m^6} - \frac{n^9}{8}$

206) $x^6 - 1$

207) $x^9 - 1$

208) $x^3 - 2x^2 + 1$

209) $x^6 + 2x^4 - 1$

210) $a^4 - 2a^3 + 1$

II) Determine o MDC e o MMC entre:

211) 36, 48 e 30

212) x^4, x^6 e x^8

213) $18x^3$, $24x^5$ e $60x^4$

214) a^2b^3, ab^5 e a^4b^2

215) $a^3b^4c^5$, a^4c^3 e b^5c^2

216) $28x^3y^2$, $20x^5y^3$ e $32xy^4$

217) $12a^4b^6x^3$, $48a^6b^2y^2$ e $60a^2b^6z$

218) $y^2 + y$ e $(y - 1)^2$

219) $x^2 - 9$, $x^2 - 7x + 12$ e $2x - 6$

220) $x^2 - y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$ e $x^2 - xy$

221) $a^2 + 2a - 8$, $2a^2 + 16a + 32$ e $6a^2 - 24$

222) $a^8 - 1$, $a^3 - 1$ e $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

223) $a^3 + a^2 + a + 1$, $a^3 + a^2$ e $a^2 - 1$

224) $2x^2 + 10x + 12$, $4x^2 - 8x - 32$ e $6x^2 + 12x$

III) Simplifique as frações algébricas a seguir:

225) $\frac{5x^3y + 10x^2y^2}{3x^2y^2 + 6xy^3}$

226) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

227) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$

228) $\dfrac{3a^2-15a}{a^2+3a-40}$

229) $\dfrac{3x^2-3}{2x^2+4x-6}$

230) $\dfrac{3a^2-6ab+3b^2}{2a^2-2b^2}$

231) $\dfrac{x-4}{16-x^2}$

232) $\dfrac{2x-6}{27-3x^2}$

233) $\dfrac{y^2+ay+by+ab}{y^2+ay+cy+ac}$

234) $\dfrac{2y^2-2b^2}{y^2+2y-by-2b}$

235) $\dfrac{-x^2+4x-3}{-x^2-5x+6}$

236) $\dfrac{-x^4+13x^2-36}{-x^2+5x-6}$

237) $\dfrac{6x^2-5x-1}{x^2-1}$

238) $\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+8x+4}$

239) $\dfrac{x^9-y^9}{x^3-y^3}$

240) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

241) $\dfrac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$

242) $\dfrac{m^8-n^8}{m^5-n^5-m^4n+mn^4}$

243) $\dfrac{a^6-2a^5+a^4}{a^5-a^3}$

IV) Efetue as operações entre as frações algébricas abaixo, simplificando o resultado ao máximo.

244) $\dfrac{m^2+3m+2}{m^2-16}\cdot\dfrac{m^2-5m+4}{m^2+m-2}$

245) $\dfrac{m^2-5m+6}{m^2-1}\cdot\dfrac{m^4-m^3}{m^4-2m^3}$

246) $\dfrac{-4a^2-8a+12}{-a^2+3a-2}\cdot\dfrac{a^2-a-2}{6a+18}$

247) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

248) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-9}\cdot\dfrac{3x+9}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x-3}{3x}$

249) $\dfrac{a^2-9}{a^2-1}:\dfrac{a+3}{5a+5}$

250) $\dfrac{m^2-1}{a^2-b^2}:\dfrac{m^2-3m+2}{3a+3b}$

251) $\dfrac{m^3-2m^2n+mn^2}{m^2+2mn+n^2}:\dfrac{m^3-mn^2}{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3}$

252) $\dfrac{y^2-4y+4}{y^2+y-6}:\dfrac{12-3y^2}{y^3+27}$

253) $\dfrac{x^2-y^2-z^2+2yz}{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}:\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2-z^2-2yz}$

254) $\dfrac{a^2y^2-b^2y^2}{2x^2-4xy+2y^2}\cdot\dfrac{4}{xy+y^2}:\dfrac{ay+by}{x^2-y^2}$

255) $\dfrac{a^2-b^2}{a+1}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2-1}$

256) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^4-x^2}{-3x^2+21x-36}:\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-6x+9}$

257) $x+3+\dfrac{9}{x-3}$

258) $2m+1+\dfrac{1}{2m-1}$

259) $x+k-\dfrac{x^2}{x-k}$

260) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}$

261) $\dfrac{4+x}{x+1}+\dfrac{3}{1-x}$

262) $\dfrac{m^2-4m+3}{m^2-1}+\dfrac{m^2+6m}{3m^2+21m+18}$

263) $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x-14} - \dfrac{1-x^2}{-x^2+6x+7}$

264) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{x^2-1}$

265) $\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \dfrac{x}{x-1}$

266) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2}{2-x} + \dfrac{4x}{x^2-4}$

267) $\dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$

268) $\dfrac{x}{a-b} + \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{2bx}{b^2-a^2}$

269) $\dfrac{x}{x+a} - \dfrac{a}{x-3a} + \dfrac{2a(x-a)}{x^2-2ax-3a^2}$

270) $\dfrac{m-1}{m+1} + \dfrac{1-m^2}{m^2-m+1} + \dfrac{3m(m-1)}{m^3+1}$

271) $\dfrac{x^2-36}{x^4-16} - \dfrac{4}{x^2+4} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$

272) $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{a}} + \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{b}} - \dfrac{x^2+2a.(b-x)+a^2-(a+b).x}{ab-(a+b).x+x^2}$

273) $\left(\dfrac{m}{2+m} - \dfrac{m}{m-2}\right) \cdot \dfrac{m+2}{4}$

274) $\dfrac{3x^2+11x-4}{-2x^2+5x-3} : \left(\dfrac{x-3}{x-1} - \dfrac{2x-10}{2x-3}\right)$

275) $\left(\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x+1}{x-2}\right) \cdot \dfrac{x^2-3x+2}{3}$

276) $\left(\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a-b}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2}{b} + 2a + b\right)$

277) $\dfrac{1-x}{x+2} \cdot \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} + \dfrac{x^4-9x^2}{x^3-27}$.

278) $\dfrac{x^2+3x+9}{x^3+6x^2+9x} : \left(\dfrac{a+b-c}{a-b+c} + 1\right)$

279) $\left(\dfrac{x+a}{x-a} - \dfrac{x-a}{x+a}\right) : \left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2} - \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$

280) $\dfrac{3-y}{2y+3} + \dfrac{y^2-y-12}{2y^2-y-3} : \dfrac{y^2-16}{y^2+5y+4}$

281) $\dfrac{a-2}{a+3} - \dfrac{a^2+3a+2}{a^2-2a-3} \cdot \dfrac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10} + \dfrac{a^3-7a^{\,2}}{a^3-9a}$

282) $\left(1-\dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{2y^3-2x^2y}{x^2-y^2} + \dfrac{x+2y}{x-2y} : \dfrac{x-3y}{x^2-5xy+6y^2}\right)$

283) $\dfrac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{y^2}}$

284) $\dfrac{x^2-1}{x} \cdot \left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right) :$

285) $\dfrac{4a^2+9b^2+c^2-12ab+4ac-6bc}{a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc} \circ \dfrac{a+2b-3c}{2a-3b+c} + \dfrac{2a^2+3b^2-c^2+5ab+ac+2bc}{a+2b-3c} \cdot \dfrac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a-b-c}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

286 **(CEFET)** Considerando as igualdades, assinale a única alternativa correta:

a) $\sqrt{x^2-4} = x-2$

b) $\dfrac{2x+3y}{2} = x+3y$

c) $\sqrt{9a} = 3\sqrt{a}$

d) $2^3 = 6$

e) $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x-1$

287) **(CM)** Na fatoração do polinômio $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$, um dos fatores é:

a) x^6y^6
b) $x^2 + y^2$
c) $x^2 + y^3$
d) $(x^2 - xy + y^2)$
e) $(x - y)^2$

288) **(PUC)** Se $x^2(1-y)^2 = y^2(1-x)^2$ e $x \neq y$, então $x + y$ será:

a) $x^2 + y^2$.
b) xy.
c) 2.
d) $2xy$.
e) $2y$.

289) **(CM)** Ao fatorarmos o polinômio $27x^2y^3z-9x^2y^2z^2+36x^3y^2z^4$, obtemos:

a) $9xy^2z(3xy-xz+4x^2z^3)$
b) $9xyz(3xy^2-xz+4x^2z^3)$
c) $3xyz(3xy^2-xz+4x^2z^3)$
d) $3xyz(3xy-xyz+4x^2z^3)$

290) **(CM)** A forma reduzida da expressão $(2x+3)^2 + 5(x+1)(x-1) - 3(x-4)^2$ é:

a) $2(3x^2 - 6x + 26)$
b) $2(3x^2 + 18x - 26)$
c) $2(3x^2 + 18x - 22)$
d) $2(3x^2 + 31)$
e) $2(3x^2 + 6x + 16)$

291) **(CM)** Na fatoração do trinômio $a^5 - 5a^3 + 4a$ aparecem os seguintes fatores:
a) $a + 2$ e $a - 3$
b) $a + 3$ e $a - 2$
c) $a + 4$ e $a - 1$
d) $a + 1$ e $a - 3$
e) $a + 2$ e $a - 1$

292) **(CN)** Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $k = a^4 - 6a + 1$. Logo, k também pode ser expresso por:
a) $3a^2 + 86a + 1$
b) $3a^2 + 84a + 1$
c) $6a^2 + 86a + 1$
d) $6a^2 + 84a + 1$
e) $9a^2 + 86a + 1$

293) **(CM)** Se a é um número real, tal que $a + a^{-1} = 5$, então o valor numérico de $a^3 + a^{-3}$ é igual a:
a) 125
b) 100
c) 110
d) 130
e) 625

294) **(CEFET)** Se $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$, então $x^3 + y^3$ é igual a:
a) 3,5
b) 3
c) 2,5
d) 2

295) **(EPCAR)** Se $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$, então $n^3 + \frac{1}{n^3}$ vale:
a) 0
b) $3\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3}$

296) **(CM)** Se $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = 5$, então $n^6 + \frac{1}{n^6}$ vale:
a) 9
b) $5\sqrt{5}$
c) 18
d) 27
e) 125

297) **(CN)** Se $x + y = 2$ e $(x^2 + y^2) / (x^3 + y^3) = 4$, então, $x \cdot y$ é igual a
a) 12/11
b) 13/11
c) 14/11
d) 15/11
e) 16/11

298) **(CM)** O maior inteiro que não excede a $\sqrt{n^2 - 10n + 29}$, para n = 20072007, é igual a:
a) 20072002
b) 20072003
c) 20072004
d) 20072005
e) 20072006

299) **(CN)** Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:
a) 41
b) 48
c) 50
d) 60
e) 72

300) **(CN)** Um aluno encontrou zero para o valor numérico da expressão $x^2 + y^2 - 2x + 5 + 4y$. Pode-se concluir que os valores pelos quais substituiu as variáveis x e y são tais que sua soma é:
a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2

301) **(CN)** Sendo $y = \frac{x + a}{x + b}$, qual é o valor numérico de y para $x = \sqrt{2}$, sabendo-se que, para todo número real $x \neq -b$, $y \cdot (x^2 - 2) = x^2 + \sqrt{2}x - 4$?
a) 0
b) 0,5
c) 0,666...
d) 1,5
e) 2

302) **(CN)** O resultado da expressão $(18700^2 + 20900^2) : (18700 \times 20900)$ é aproximadamente igual a
a) 2,01
b) 2,03
c) 2,05
d) 2,07
e) 2,09

303) **(EPCAR)** Sabendo que $y = (2010)^2 \times 2000 - 2000 \times (1990)^2$, o valor de $\frac{y}{10^7}$ é igual a:
a) 8
b) 16
c) 20
d) 32

304) **(CEFET)** Simplificando-se a fração algébrica, $\frac{6x^2 + 12x + 6}{2x^2 - 2}$ encontramos:
a) 1;
b) $\frac{3x + 1}{x - 3}$;
c) $\frac{3x - 3}{x + 1}$;
d) $\frac{3x - 3}{2x - 1}$

305) **(CEFET)** Simplifique $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

306) **(CEFET)** Simplificando a expressão a seguir
$\frac{(x^5 + 1) - (x^3 + 1)}{x^2 - 1}$, obtemos:
a) x^2
b) $x^3 + 1$
c) $x^3 - 1$
d) $x^2 + 1$
e) x^3

307) **(CM)** Se $x \neq y \neq 0$, então a expressão $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$ é equivalente a:
a) $\frac{x + y}{xy}$
b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
c) $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$

d) $\frac{x-y}{xy}$

e) x - y

308) **(CM)** Se a = 2,3 e b = 2,1 então o valor da expressão

$$\left[\left(\frac{b^{-2}-a^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right).(ab)\right]^{-1}$$ é :

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

309) **(EPCAR)** Se a e b são números reais não nulos, então, simplificando a expressão $(a^2b + ab^2) \cdot \frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$, obtém–se:

a) $a + b$
b) $a^2 + ab + b^2$
c) $a^2 + b^2$
d) $b - a$

310) **(CN)** Simplificando-se a fração $\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde a > b, obtém-se

a) $a^2 - b^2 - 2ab$.
b) $a^2 - b^2 + 2ab$.
c) $a^2 + b^2 - 2ab$.
d) $a^2 + b^2 + 2ab$.
e) $a^2 + b^2$.

311) **(CN)** Simplificando-se a fração $\frac{x(x^2+x-y)+y^2(y+1)}{x^2+y^2-xy}$, com $x^2 + y^2 - xy \neq 0$, obtém-se

a) $x - y + 1$
b) $x - y - 1$
c) $x + y - 1$
d) $1 + x + y$
e) $1 - x + y$

312) **(CM)** O resultado simplificado da expressão

$\frac{x}{x-y} \cdot \frac{y}{x+y} - \frac{1}{\frac{x}{y}-1}$, pode ser representado por:

a) $\frac{y^2}{y^2-x^2}$

b) $\frac{1-y}{x-y}$

c) $\frac{xy-x-y}{x^2-y^2}$

d) $-\frac{1}{x^2-1}$

e) $\frac{1}{x^2-1}$

313) **(CM)** Simplificando a fração algébrica

$\frac{2x^3-3x^2-27}{2x^4+3x^3-9x^2-27x-81}$, encontramos:

a) $x + 3$

b) $\frac{1}{x+3}$

c) $x - 3$

d) $\frac{1}{x-3}$

e) $\frac{x+3}{x-3}$

314) **(CN)** Simplificando a expressão abaixo, para valores de a, b e c que não anulam o denominador, obtém-se

$$\frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) $a + b + c$
e) $a - b + c$

315) **(CM)** A forma simplificada de expressão

$$\frac{a^2c-(b^2c+b^2d)+a^2d}{c(a^2+b^2)+2(abc+abd)+d(a^2+b^2)}$$ é :

a) $\frac{a+b}{ab}$

b) $\frac{c-d}{c+d}$

c) $\frac{a-b}{ab}$

d) $\frac{a-b}{a+b}$

316) **(EPCAR)** Considere os números reais a, b e x tais que
$a + b = x$
$a - b = x^{-1}$
$a \neq b \neq 0$

valor da expressão $Y = \dfrac{\frac{(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}}{\left(\frac{a^2-ab}{2a}\right)}$ é

a) 2
b) $2x^2$
c) x^2
d) $\frac{x^2}{2}$

317) **(CM)** Simplificando-se a fração $\frac{4x^2-12xy+9y^2}{20x^2-45y^2}$ obtém-se $\frac{2x-3y}{D}$. A expressão correspondente a D é:

a) $4x - 9y$
b) $10x + 15y$
c) $4x - 3y$
d) $10x - 15y$
e) $5x - 9y$

318) **(PUC)** Para a, b, c distintos, o valor da expressão:
$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$ é:

a) $a + b + c$.
b) sempre 0.
c) abc.
d) $3(a + b + c)$.
e) $\frac{1}{a+b+c}$.

319) **(CN)** Simplifique ao máximo a expressão:

$$\frac{x^3-x}{(x-y).(x-z)}+\frac{y^3-y}{(y-z).(y-x)}+\frac{z^3-z}{(z-x).(z-y)}.$$

320) **(CEFETEQ)** Determinar o valor da soma (a + b + c), considerando as seguintes informações:
1ª) a, b e c, são números primos distintos com a > b, todos positivos.
2ª) $x = a^2bc^2$ e $y = ab^2$
3ª) mdc(x, y) = 21 e mmc(x, y) = 1764

321) **(CM)** Sendo $M = \left(\frac{x^2y^2}{a}\right)\left(\frac{ab^2}{x}\right)\left(\frac{a}{by^3}\right)$,

$N = \frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$ e P o m.m.c. de $(a^2 - ab)$ e $(a^2b - b^3)$, então, $\frac{2M}{NP}$ é:

a) $\frac{2x}{y(a-b)}$

b) $\frac{2x}{y(a-b)}$

c) $\frac{2x^2}{y(a-b)}$

d) $\frac{2x}{y^2(a-b)}$

e) $\frac{x}{y(a-b)}$

322) **(CM)** O valor da expressão $\frac{2003^3+2004^3}{2004^2-2003 \cdot 2004+2003^2}$ é:
a) 1
b) 4007
c) 2
d) -1
e) -4007

323) **(CM)** Simplificando a expressão $\frac{(x+y-z)\cdot(x^2-y^2-2yz-z^2)}{(x+y+z)\cdot(x^2-2xz+z^2-y^2)}$ para valores de x, y e z que não anulam o denominador, obtém-se:
a) -1
b) 1
c) x+y+z
d) x+y-z
e) x-y-z

324) **(CN)** Seja $P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013$. O resto r(x) da divisão de P(x) por $d(x) = x^4 + 1$ é tal que r(-1) é:
a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

GABARITO

1) $5(x + 4y)$
2) $6(2a + 3b)$
3) $2(2a - b)$
4) $7(2x - 3y)$
5) $4(5x + 2y + 3z)$
6) $2(a + 2b - 7c)$
7) $m(x + y)$
8) $m(x + ny)$
9) $x^2(x^2 + x - 1)$
10) $x^2(2x^3 + 3x - 4)$
11) $2(3x^3 + 5x^2 - 7x + 4)$
12) $6a^6(3a^5 - 4a^2 + 5)$
13) $27a^2b^4(2b^2 + 4a^3b^4 - 3a^2)$
14) $7ab^4(2a^2 - 5ab + 19b^2)$
15) $x^3y^2(y^5 + xy^4 + x^2)$
16) $a^2b^3c^6(a^2c^2 - a^3b + b^4c^3)$
17) $6x^2y^3(4y + 6x^4y^4 - 3x^3)$
18) $5a^2b^4(7ac^8 + 4bc^4 - 6a^4b^4)$
19) $(a + 1).\ x^2y^3 \cdot [(a + 1) \cdot xy + x^2 - (a + 1) \cdot y^2]$
20) $13 \cdot 3^x$
21) $29 \cdot 5^{k-3}$
22) $27 \cdot 2^m$
23) $27 \cdot 2^{3k}$
24) $(x - 1).(x^2 + 5)$
25) $(3x + 2y)(2a + b)$
26) $(x - 2)(4x^2 + 3)$
27) $(x - 2)(6x^2 - 1)$
28) $(a - b)(y - x)$
29) $2.(2x + 1).(x - y)$
30) $(a + b - c).(x - y)$
31) $(m^2 + 3x).(m - 2x)$
32) $(5y^2 - 2x).(3x^2 - 4y)$
33) $(a + 3).(4 - b)$
34) $(4m - 5).(3a - 2)$
35) $(2a - 5).(4x - 3)$
36) $(m^3 + n^2).(a^4 + b^3)$
37) $(a - 6).(7 - b)$
38) $26.(5^x - 2^x)$
39) $\left(\frac{x}{3}+1\right).\left(\frac{y}{2}+5\right)$

40) $\left(\frac{2m}{5}+\frac{n}{4}\right).\left(\frac{a}{3}-\frac{3b}{7}\right)$

41) $\left(\frac{c}{5}-\frac{1}{3}\right).\left(\frac{4}{7}-\frac{z}{2}\right)$

42) $(0,1x + 2).(3 - 0,2y)$

43) $(0,04a + 5).(10 - 0,3b)$

44) $5.(27.2^x - 8.3^x)$ ou $1080.(2^{x-3} - 3^{x-3})$

45) $(m + n)^2$

46) $(a + 2b)^2$

47) $(x + 3)^2$

48) $(m + 5)^2$

49) $(k + 7)^2$

50) $(3x + 4)^2$

51) $(5k^3 + 2)^2$

52) $\left(\frac{4m}{5}+\frac{2}{5}\right)^2$

53) $5.(x + 6)^2$

54) $3.(a^2 + 3b)^2$

55) $4.(2m^5 + 5k^3)^2$

56) $\left(\frac{3x^3}{y^2}+\frac{1}{7}\right)^2$

57) $\left(6k^4+\frac{1}{3}\right)^2$

58) $(0,2x + 0,1y)^2$

59) $(0,6k^3 + 0,5m^2)^2$

60) $(0,01a^4 + 0,6b^3)^2$

61) $\left(\frac{3}{x^3}+\frac{5}{y^4}\right)^2$

62) $(x^2 + y)^2$

63) $(ab^3 + c^2)^2$

64) $(a + b + c^2)^2$

65) $(x + y + m + n)^2$

66) $(m - n)^2$

67) $(x - 4)^2$

68) $(k - 1)^2$

69) $(a - 8)^2$

70) $(m - 3)^2$

71) $(ab - c)^2$

72) $(3x^2 - 2)^2$

73) $(5x - 3y)^2$

74) $(3a^2 - 4b^3)^2$

75) $-(x - 7)^2$

76) $-\left(x^4-\frac{3}{2}\right)^2$

77) $-\left(2a^3-\frac{1}{5}\right)^2$

78) $2.(m - 7)^2$

79) $-3.(3a^2 - 2c^7)^2$

80) $\frac{3}{7}.(5x^3 - 4y^2)^2$

81) $\left(\frac{4x}{5}-1\right)^2$

82) $9.\left(\frac{k}{5}-1\right)^2$

83) $\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{7}\right)^2$

84) $\left(\frac{m}{3}-\frac{k}{5}\right)^2$

85) $(0,3a - 5)^2$

86) $(0,5m^3 - 3)^2$

87) $(0,1a^3 - 0,04b^4)^2$

88) $\left(\frac{3}{x^5}-\frac{2}{y^4}\right)^2$

89) $(x + y)^2$

90) $9n^2$

91) $(x^2 + 2x - y)^2$

92) $(x + m).(x + n)$

93) $(x + m).(x + 2m)$

94) $(3x + a).(3x + 4a)$

95) $(x + 2).(x + 3)$

96) $(x - 3).(x - 4)$

97) $(x + 7).(x - 5)$

98) $(x + 2).(x + 6)$

99) $(x - 2).(x - 3)$

100) $(x + 1).(x + 9)$

101) $(x + 4).(x - 3)$

102) $(x - 5).(x + 3)$

103) $(x + 7).(x - 4)$

104) $(x + 3).(x + 8)$

105) $(x + 6).(x - 3)$

106) $(x + 5).(x + 2).(x - 5).(x - 2)$

107) $(a + \sqrt{5}).(a + \sqrt{2}).(a - \sqrt{5}).(a - \sqrt{2})$

108) $2.(m - 5).(m + 4)$

109) $3.(b - 3).(b - 7)$

110) $20.(c^3 + 3).(c^3 - 2)$

111) $3.(x^2 + y).(3x^2 - y)$

112) $(m + k).(m + 4k)$

113) $-(x + 7).(x - 2)$

114) $-(x - 3).(x - 4)$

115) $-(x - 2).(x + 5)$

116) $(2x + 3).(2x + 5)$

117) $(5x - 3).(5x + 1)$

118) $(3a^5 - 4).(3a^5 + 2)$

119) $-(7a^2 - 1).(7a^3 + 6)$

120) $\left(x - \frac{2}{3}\right).\left(x + \frac{1}{3}\right)$

121) $\left(a - \frac{1}{5}\right).(a + 2)$

122) $(3a + 1).\left(3a + \frac{1}{4}\right)$

123) $(2a^3 - 5).\left(2a^3 + \frac{1}{3}\right)$

124) $(m + n).(m - n)$

125) $(a + b).(a - b)$

126) $(x + y).(x - y)$

127) $(m + 3).(m - 3)$

128) $(y + 5).(y - 5)$

129) $(2x + y).(2x - y)$

130) $(2m + 1).(2m - 1)$

131) $(k + xy).(k - xy)$

132) $(1000 + 999).(1000 - 999)$

133) $(4x + 5y).(4x - 5y)$

134) $(3a + 2b).(3a - 2b)$

135) $(4 + a).(4 - a)$

136) $(x + 1).(x - 1)$

137) $(1 + k).(1 - k)$

138) $4.(5a^2 + 3b^2).(5a^2 - 3b^2)$

139) $(8ab + c^2).(8ab - c^2)$

140) $(7a^2b^3 + 4m^5z^9).(7a^2b^3 - 4m^5z^9)$

141) $(x^2 + a^2).(x + a).(x - a)$

142) $(xy^2 + 3a^3).(xy^2 - 3a^3)$

143) $2.(a^3 + b^2).(a^3 - b^2)$

144) $5.(m^2 + 2c^5).(m^2 - 2c^5)$

145) $3.(4a^2c^4 + 3mb^3).(4a^2c^4 - 3mb^3)$

146) $4ab$

147) $(x + 3 + k).(x + 3 - k)$

148) $(x - 2 + k).(x - 2 - k)$

149) $(a + b + 10ab).(a + b - 10ab)$

150) $(a - b + 13).(a - b - 13)$

151) $(x + y - 1).(x - y + 9)$

152) $(k^2 + m^3 - 1).(k^2 - m^3 - 3)$

153) $(x + y + 3).(x - y - 1)$

154) $(x + y + 3).(x - y - 1)$

155) $(x + z - 1).(x - z + 11)$

156) $(x + z - 1).(x - z + 11)$

157) $(a + b + 5).(a - b + 1)$

158) $(a + b + 3).(a - b + 1)$

159) $(x + y - 1).(x - y + 3)$

160) $(x + y - 1).(x - y + 7)$

161) $(a + b + 3).(a - b - 11)$

162) $(a^{k+3} + b^{3k-2}).(a^{k+3} - b^{3k-2})$

163) $(a^x + b^x).(a^x - b^x)$

164) $(m^{2a} + k^{3a}).(m^{2a} - k^{3a})$

165) $50.(5^x + 3^x)$

166) $(a + b)^3$

167) $(x + 2)^3$

168) $(m + 3)^3$

169) $(2k + 1)^3$

170) $(3a^2 + 5)^3$

171) $\left(4k + \frac{1}{5}\right)^3$

172) $(x^2 + 3y)^3$

173) $(3a^5 + 2b^4)^3$

174) 101^3

175) $\left(\frac{x^3}{2} + \frac{y^4}{5}\right)^3$

176) $(a - b)^3$

177) $(x - 3)^3$

178) $(m - 4)^3$

179) $(2x - 3)^3$

180) $(4a - 2)^3$

181) $(5m^4 - 1)^3$

182) $\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{5}\right)^3$

183) $\left(\frac{a^3}{2}-\frac{b^4}{3}\right)^3$

184) $\left(\frac{m^5}{3}-\frac{2n^3}{7}\right)^3$

185) 199^3

186) $(a + b).(a^2 - ab + b^2)$

187) $(x + y).(x^2 - xy + y^2)$

188) $(m + 2).(m^2 - 2m + 4)$

189) $(a + 4).(a^2 - 4a + 16)$

190) $(2x + 1).(4x^2 - 2x + 1)$

191) $(4a^2 + 3b^3).(16a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)$

192) $(x^2 + 1).(x^4 - x^2 + 1)$

193) $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{a^4}{2}\right).\left(\frac{m^4}{9}-\frac{a^4m^2}{6}+\frac{a^8}{4}\right)$

194) $\left(\frac{5x}{2}+\frac{y^3}{3}\right).\left(\frac{25x^2}{4}-\frac{5xy^3}{6}+\frac{y^6}{9}\right)$

195) $\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)$

196) $(a + 1).(a^2 - a + 1).(a^6 - a + 1)$

197) $(a - b).(a^2 + ab + b^2)$

198) $(x - y).(x^2 + xy + y^2)$

199) $(x - 2).(x^2 + 2x + 4)$

200) $(m - 5).(m^2 + 5m + 25)$

201) $(5x - 4y).(25x^2 + 20xy + 16y^2)$

202) $(3m - 2n).(9m^2 + 6mn + 4n^2)$

203) $\left(\frac{2a}{5}-1\right).\left(\frac{4a^2}{25}+\frac{2a}{5}+1\right)$

204) $\left(\frac{3x}{5}-\frac{4y}{7}\right).\left(\frac{9x^2}{25}+\frac{12xy}{35}+\frac{16y^2}{49}\right)$

205) $\left(\frac{1}{m^2}-\frac{n^3}{2}\right).\left(\frac{1}{m^4}+\frac{n^3}{2m^2}+\frac{n^6}{4}\right)$

206) $(x +1).(x - 1).(x^2 + x + 1).(x^2 - x + 1)$

207) $(x - 1).(x^2 + x + 1).(x^6 + x^3 + 1)$

208) $(x - 1).(x^2 - x - 1)$

209) $(x^2 + 1).(x^4 + x^2 - 1)$

210) $(a - 1).(a^3 - a^2 - a - 1)$

211) MDC = 6 e MMC = 720

212) MDC = x^4 e MMC = x^8

213) MDC = $6x^3$ e MMC = $360x^5$

214) MDC = ab^2 e MMC = a^4b^5

215) MDC = c^2 e MMC = $a^4b^5c^5$

216) MDC = $4xy^2$ e MMC = $1120x^5y^4$

217) MDC = $12a^2b^2$ e MMC = $240a^6b^6x^3y^2z$

218) MDC = 1 e MMC = $y.(y + 1).(y - 1)^2$

219) MDC = $x - 3$ e MMC = $2.(x - 4).(x - 3).(x + 3)$

220) MDC = $x - y$ e MMC = $x.(x - y)^2.(x + y)$

221) MDC = 1 e MMC = $6.(a - 2).(a + 2).(a + 4)^2$

222) MDC = $a - 1$ e MMC = $(a - 1)^3 .(a + 1).(a^2 + 1).(a^4 + 1).(a^2 + a + 1)$

223) MDC = $a + 1$ e MMC = $a^2.(a - 1).(a + 1).(a^2 + 1)$

224) MDC = $2(x + 2)$ e MMC = $12x.(x - 4).(x + 2).(x + 3)$

225) $\frac{5x}{3y}$

226) $\frac{x-3}{x+3}$

227) $\frac{x-2}{x-4}$

228) $\frac{3a}{a+8}$

229) $\frac{3(x+1)}{2(x+3)}$

230) $\frac{3.(a-b)}{2.(a+b)}$

231) $-\frac{1}{x+4}$

232) $-\frac{2}{3(x+3)}$

233) $\frac{y+b}{y+c}$

234) $\frac{2.(y+b)}{y+2}$

235) $\frac{x-3}{x+6}$

236) $(x+2).(x+3)$

237) $\frac{6x+1}{x+1}$

238) $\frac{2x-1}{3x+2}$

239) $x^6 + x^3y^3 + y^6$

240) $x - 1$

241) $\frac{a-b+c}{a+b+c}$

242) $(m^2 + n^2).(m + n)$

243) $\frac{a.(a-1)}{a+1}$

244) $\frac{m+1}{m+4}$

245) $\frac{m-3}{m+1}$

246) $\frac{2a+2}{3}$

247) $\frac{1}{a+b}$

248) $\frac{x+2}{x(x+1)}$

249) $\frac{5(a-3)}{a-1}$

250) $\frac{3(m+1)}{(a-b).(m-2)}$

251) $m - n$

252) $-\frac{y^2-3y+9}{3y+6}$

253) $\frac{x+y-z}{x+y+z}$

254) $\frac{2a-2b}{x-y}$

255) $\frac{(a+b)(a-1)}{a-b}$

256) $\frac{3-x}{3}$

257) $\frac{x^2}{x-3}$

258) $\frac{4m^2}{2m-1}$

259) $-\frac{k^2}{x-k}$

260) $\frac{12x}{x^2-9}$

261) $\frac{x^2-7}{x^2-1}$

262) $\frac{4m-9}{3m+3}$

263) $-\frac{1}{x-7}$

264) $\frac{x}{x^2-1}$

265) $\frac{x-1}{x}$

266) $\frac{x+2}{x-2}$

267) $\frac{1}{x-1}$

268) $\frac{2x}{a-b}$

269) 1

270) 0

271) $\frac{1}{x^2+4}$

272) $\frac{x-a}{b-x}$

273) $-\frac{m}{m-2}$

274) $-x - 4$

275) -1

276) $-\frac{2(a+b)}{a-b}$

277) $-\frac{3}{x+3}$

278) $\frac{a-b+c}{a-b-c}$

279) $\frac{x^2+a^2}{ax}$

280) $\frac{18y}{4y^2-9}$

281) $\frac{a-7}{a+3}$

282) $x - y$

283) 1

284) 1

285) $\frac{4a}{a+2b-3c}$

286) C

287) E

288) D

289) A

290) C

291) E

292) A

293) C

294) C

295) A

296) C

297) C

298) A

299) D

300) B

301) D

302) A

303) B

304) E

305) $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

306) E

307) B

308) C

309) B

310) A

311) D

312) A

313) B

314) A

315) D

316) B

317) B

318) B

319) $x + y + z$

320) 12

321) A

322) B

323) B

324) B

OBSERVAÇÕES

Equação do 1° grau

Sentenças matemáticas

Sentença fechada

É aquela que pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Exemplos:

a) $5 + 2 < 1 + 4 \rightarrow$ é uma sentença fechada e falsa.

b) A capital do Brasil é Brasília. → é uma sentença fechada e verdadeira.

Variável ou incógnita

É um símbolo que substitui um elemento não conhecido em uma expressão.

Exemplos:

Linguagem Corrente		*Linguagem Simbólica*
Um número mais dois	→	$x + 2$
O dobro de um número	→	$2x$
A metade de um número	→	$\frac{y}{2}$
O triplo de um número, mais um	→	$3z + 1$
O triplo de um número mais um	→	$3(t + 1)$

As letras x, y, t, z... representam qualquer número, sendo chamadas de variáveis ou incógnitas.

Sentença aberta

É aquela que não pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

Exemplos:

a) $3x + 4 = 1 \rightarrow$ é sentença aberta, pois dependemos do valor de x para classificá-la em verdadeira ou falsa.

b) $x + 3 > 4 \rightarrow$ é sentença aberta, pelo mesmo motivo anterior.

Equação do 1° grau com uma incógnita

É uma sentença aberta, relacionada pelo sinal de igual, composta por termos algébricos cujas partes literais têm todas a mesma variável, elevada a expoentes 0(zero) ou 1.

Exemplos:

a) $4x - 5 = 3$

b) $\frac{7}{5}x + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

Toda equação tem dois membros, um antes e outro depois do sinal de igualdade. Cada membro é constituído de termos. Os números que multiplicam as variáveis são chamados de coeficientes, e os números que não estão associados a variáveis são ditos termos independentes.

Exemplos:

Seja a equação: $3x + 5 = 4x - 8$, temos:

1° membro	→	$3x + 5$
2° membro	→	$4x - 8$
termos	→	$3x$; 5; $4x$ e -8
coeficientes	→	3 e 4
termos independentes	→	5 e -8

Conjunto universo e conjunto-verdade ou conjunto-solução

Conjunto Universo de uma equação é o conjunto do qual são escolhidos os valores a serem atribuídos à variável. É representado pelo símbolo U.

Quando não for citado o conjunto universo, devemos considera-lo máximo, ou seja U = R.

Conjunto-verdade ou ***conjunto-solução*** de uma equação é formado pelos elementos do conjunto *universo* que tornam a sentença verdadeira.

Podemos representar o *conjunto-verdade* ou *solução* pelas letras V ou S, respectivamente.

Exemplo:

Sendo U = N, a equação $x - 3 = 4$, tem S = {7}.

Observações:

1) Resolver uma equação é obter o seu conjunto-solução.

2) O elemento do conjunto-solução é chamado de raiz, solução ou zero da equação.

3) Equações equivalentes são aquelas que apresentam o mesmo conjunto universo e o mesmo conjunto-solução.

Exemplo:

Considerando U = Z, as equações

$x + 1 = 2$, cujo conjunto-solução é S = {1}, e

$2x + 2 = 4$, cujo conjunto-solução é S = {1}, verificamos que elas são equivalentes.

Resolução de uma equação do 1° grau

O objetivo nesse caso, é obter a raiz, o que é conseguido isolando-se a variável em um dos membros, lembrando algumas regras básicas:

I) Qualquer termo ao ser transposto para outro membro tem o seu sinal trocado. Se for positivo, torna-se negativo e vice-versa.

II) Isolada a variável em um dos membros, seu coeficiente deve ser levado para o outro membro fazendo a operação inversa da que ele fazia em relação à variável, ou seja a divisão.

III) No caso de haver fração, devemos tirar o MMC dos denominadores, o qual poderá ser abandonado, desde que ele seja tirado de ambos os membros.

Exemplos:

Seja resolver, com U = Q, as equações:

a) $x + 5 = 8$

Resolução:

$x = 8 - 5$

$x = 3$, logo S = {3}

b) $2x - 3 = 5$

Resolução:

$2x = 5 + 3$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$, logo S = {4}

c) $-4x + 1 = 6$

Resolução:

$-4x = 6 - 1$

$-4x = 5 \qquad x(-1)$

$4x = -5$

$x = -\frac{5}{4}$, logo $S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

d) $3x + 1 = 2x - 5$

Resolução:

$3x - 2x = -5 - 1$

$x = -6$, logo $S = \{-6\}$

e) $\frac{x}{2} + 4 = \frac{3x}{5} - 1$

Resolução:

MMC = 10

$$\frac{x}{2_{/5}} + \frac{4}{1_{/10}} = \frac{3x}{5_{/2}} - \frac{1}{1_{/10}}$$

$5x + 40 = 6x - 10$

$5x - 6x = -10 - 40$

$-x = -50$

$x = 50$, logo $S = \{50\}$

O número 0 (zero) e as frações

Um fator complicador para a determinação do valor de uma fração é quando um ou ambos os seus termos são iguais a zero. Vamos agora buscar uma solução definitiva para a eliminação dessa dificuldade. Basta para isto, que lembremos as próprias definições de fração e divisão. Por exemplo, o que representa a fração $\frac{6}{3}$? Significa a divisão do número 6 pelo número 3. E o que significa dividir 6 por 3? É obviamente descobrir um número que multiplicado por 3 dê 6. E que número é este? Ora bolas, é o número 2! Pois bem, vamos utilizar este raciocínio simples para o bom entendimento dos três casos "problemáticos" com os quais deparamos quando o número zero é termo de uma fração.

1° caso: Apenas o numerador vale zero

A fração é do tipo $\frac{0}{n}$, com $n \neq 0$. Assim, devemos dividir **0** por **n**, ou seja, descobrir um número que multiplicado por n dê 0. Que número é esse? Zero é claro. Então, **toda a fração cujo numerador é zero, e o denominador diferente de zero, vale zero.**

Exemplo:

$\frac{0}{3} = 0$

2° caso: Apenas o denominador vale zero

Neste caso a fração é do tipo $\frac{n}{0}$, com $n \neq 0$. Portanto, devemos dividir **n** por **0**. O que significa descobrir um número que multiplicado por 0 dê resultado $n \neq 0$. Isto é impossível! Logo, **toda fração cujo denominador é zero e o numerador é diferente de zero, é impossível de ser calculada.**

Exemplo:

$\frac{7}{0}$ é impossível

3° caso: Numerador e denominador são iguais a zero

Desta feita a fração é $\frac{0}{0}$. Daí devemos dividir 0 por 0. Assim sendo, procuramos um número que multiplicado por 0 dê o resultado 0. Com isto, concluímos que qualquer número serve, e tal fração tem infinitos valores, é indeterminada. Então, **toda fração, com numerador e denominador iguais a zero tem valor indeterminado.**

Discussão das soluções de uma equação do 1° grau

Discutir uma equação do 1° grau, é prever o tipo de raiz a ser obtida em função dos seus coeficientes.

Seja discutir a equação abaixo:

$ax + b = 0$

Vamos resolvê-la

$ax = -b$

$x = -\frac{b}{a}$

Como o valor de x é uma fração, podemos nos reportar às conclusões anteriores, nas quais verificamos que uma fração cujo denominador é zero não tem valor definido, ou é impossível ou é indeterminada. Daí, temos três casos a considerar:

1° caso:

$a \neq 0 \rightarrow$ Equação possível e determinada

A equação é compatível (possível) e possui uma única solução (determinada)

$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

2° caso:

$a = 0$ e $b \neq 0 \rightarrow$ Equação impossível

A equação é incompatível (impossível) e portanto não tem solução.

$S = \varnothing$

3° caso:

$a = 0$ e $b = 0 \rightarrow$ Equação possível e indeterminada

A equação é compatível (possível) e possui infinitas soluções (indeterminada).

$S = U$

O conjunto-solução é qualquer elemento do conjunto universo que estiver sendo utilizado.

Exemplos:

a) Discutir as soluções, em IR da equação

$(m + 1) . x - n + 3 = 0$

Resolução:

Em primeiro lugar vamos resolvê-la:

$(m + 1) . x - n + 3 = 0$

$(m + 1) . x = n - 3$

$x = \frac{n-3}{m+1} \rightarrow \begin{cases} a = m+1 \\ b = n-3 \end{cases}$

1ª Hipótese: $a \neq 0$

$m + 1 \neq 0$

$m \neq -1$

Se $m \neq -1$ e $n \in R$, a equação é possível e determinada

2ª Hipótese: $a = 0$ e $b \neq 0$

$m + 1 = 0$ e $n - 3 \neq 0$

$m = -1$ e $n \neq 3$

Se $m = -1$ e $n \neq 3$, a equação é impossível.

3ª Hipótese: $a = 0$ e $b = 0$

$m + 1 = 0$ e $n - 3 = 0$

$m = -1$ e $n = 3$

Se $m = -1$ e $n = 3$, a equação é possível e indeterminada.

b) Determine os valores de k e y de modo que seja impossível a equação $(5 - y). x + k + 1 = 0$.

Resolução:

$(5 - y) . x + 1 + k + 1 = 0$

$(5 - y) . x = -k - 1$

$x = \frac{-k-1}{5-y} \rightarrow \begin{cases} a = 5 - y \\ b = -k - 1 \end{cases}$

Para que a equação seja impossível, devemos ter:
$a = 0$ e $b \neq 0$
$5 - y = 0$ e $-k - 1 \neq 0$
$y = 5$ e $k \neq -1$

Equações fracionárias

Equação fracionária é aquela que possui variável no denominador. Muitas questões utilizadas em concursos sobre equações fracionárias recaem em equações do 2° grau. Neste capítulo iremos mostrar a resolução passo a passo, no entanto, as equações que recaírem em equações do grau 2, serão apresentadas sob a forma de exercícios no capítulo 26, já que o processo resolutório é similar ao que ora apresentaremos.

Exemplos ilustrativos:
Resolver as equações que se seguem:

a) $\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{x+3}{x-6} = 3$

Resolução:
1° Passo: Fatorar os denominadores. Note que, neste caso, os denominadores estão fatorados.

2° Passo: Calcular o MMC dos denominadores. MMC(x + 1, x - 6) = (x + 1).(x - 6)

3° Passo: Estabelecer as chamadas RESTRIÇÕES, já que não podemos correr o risco de estarmos trabalhando com uma fração de denominador zero. Por isto, devemos excluir as raízes dos denominadores, que são as mesmas do MMC, dos possíveis valores de x, já que elas tornam tais denominadores iguais a zero.

Restrições: $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \\ x - 6 \neq 0 \rightarrow x \neq 6 \end{cases}$

4° Passo: Como as restrições garantem que os denominadores são diferentes de zero, podemos então eliminá-los, resolvendo a equação obtida.

$$\frac{2x}{x+\cancel{1}\,/_{x-6}} + \frac{x+3}{x-\cancel{6}\,/_{x+1}} = \frac{3}{\cancel{1}\,/_{(x+1).(x-6)}}$$

$2x(x - 6) + (x + 3).(x + 1) = 3.(x + 1).(x - 6)$
$2x^2 - 12x + x^2 + x + 3x + 3 = 3x^2 - 18x + 3x - 18$
$3x^2 - 8x + 3 = 3x^2 - 15x - 18$
$7x = -21$
$x = -3$

Como este valor não contraria nenhuma restrição, temos que: S = {-3}

b) $\dfrac{2}{6-3x} - \dfrac{5}{6x+30} = -\dfrac{23}{3x^2+9x-30}$

1° Passo: Fatorar os denominadores.
$6 - 3x = 3.(2 - x) = -3.(x - 2)$
$6x + 30 = 6.(x + 5)$
$3x^2 + 9x - 30 = 3.(x^2 + 3x - 10) = 3.(x - 2).(x + 5)$

2° Passo: MMC dos denominadores.
MMC[-3.(x - 2); 6.(x + 5); 3.(x - 2).(x + 5)] = -6.(x - 2).(x + 5)

3° Passo:

Restrições $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \\ x + 5 \neq 0 \rightarrow x \neq -5 \end{cases}$

4° Passo: Abandonar denominadores.

$$\frac{2}{-3.(x-2)\,/_{2.(x+5)}} - \frac{5}{6.(x+5)\,/_{-(x-2)}} = -\frac{23}{3.(x-2).(x+5)\,/_{-2}}$$

$2.2.(x + 5) - 5.[-(x - 2)] = -23.(-2)$
$4x + 20 + 5x - 10 = 46$
$9x = 46 - 20 + 10$
$9x = 36$
$x = 4$ (não contraria as restrições) S = {4}

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolver em Z, as equações:

1) $x + 3 = -5$

2) $2x - 3 = 7$

3) $-x + 2 = 2x - 4$

4) $\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3}$

5) $4x + 1 = x - 3$

II) Resolva as equações em Q:

6) $3 + 2 . (x - 1) = -x + 10$

7) $5 - \{x - 3 . [1 - 4 . (x - 3)] + 2\} = 1 - x$

8) $2 . (x - 4) = 3 - 2 . (5 - x)$

9) $3 . (5 - x) - x . (-2 - 3 + 6) = -x - 3 . (x - 5)$

10) $\dfrac{1-x}{7} + \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x+8}{4} = 5 - x$

11) $3x - \dfrac{4-x}{2} - 1 = 2 . (2x - 3) + x - 3$

III) Dado U = R, determine os conjuntos - solução das equações abaixo.

12) $4x + 3 = -21$

13) $\dfrac{x}{3} + 2 = -1$

14) $5 + 2 . (x - 1) - 3\,(1 - x) = 4 + 5 . (2x - 3)$

15) $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x-1}{3} - 4 = 2x - \dfrac{2(4-x)}{3}$

16) $2\,(x - 3) = 5x - 6$

17) $\dfrac{2x-6}{2} + 5 = x + 2$

18) $6x - 8 = 3\,(2x - 2)$

19) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{19}{2}$

20) $3 . [x + 1 - 2 . (x - 3)] = 4 . \{1 - [5x - 3(1 + x)]\}$

21) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x}{2} = 4 - \dfrac{3x+1}{3}$

22) $\dfrac{4x}{3} - \{3 - [4 - 2x - (-5 + x)]\} = -\dfrac{1}{2} - [(x-2).(-3) - 4.(3-x)]$

23) $3x + 5 = x - [-x - (x + 5)]$

24) $4x - 3 . [7 - (x + 1)] = 8x - (x + 1)$

25) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2(3-x)}{4} = 5\left[x - \frac{2x+7(4x-5)}{15} - \frac{11}{60}\right]$

26) $\frac{8x+1}{3} - \frac{5-4x}{4} = -1 - \frac{4(3x-2)}{3}$

27) $\frac{\frac{\frac{x+1}{2}+1}{2}+1}{2} + \frac{2-\frac{2-\frac{x}{3}}{3}}{3} = \frac{3x-2}{9}$

IV) Valor numérico e raízes.

28) Determinar o conjunto - solução da equação do 1° grau $(m + 3)x^2 - 7x + 4 - m = 0$.

29) Quanto vale a raiz da equação do 1° grau $(k + 2)x^3 - (2m + 6) . x^2 + mx - k + 3 = 0$?

30) Resolvendo $3x - 4(x - 2) = 8$, encontramos para x o valor:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

31) Resolver a equação do 1° grau: $\frac{x}{2} - 2 = 2 - \frac{x}{2}$, sendo U = R.
a) {2}
b) {0}
c) {4}
d) {–2}

32) Que valor real "x" deve assumir para que a equação $3x - 4 . (x - 2) = 30 - 2 . (3x - 2) + x - 1$ seja verificada?
a) 3
b) 25/4
c) 4
d) 5

33) Se o valor numérico da expressão $2x + 7$ é 13, então x vale:
a) 3
b) 6
c) 4
d) 5

34) A raiz da equação $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 36$, é divisível por:
a) 2
b) 3
c) 5
d) 7

35) Na equação $(m - 3) . x + 4 . (m - 5) + 3x = 0$, temos $x = 2$. Então, o valor de m é:
a) $\frac{10}{3}$
b) $\frac{3}{10}$
c) $-\frac{10}{3}$
d) $-\frac{3}{10}$

36) O número $-\frac{11}{3}$ é raiz da equação $-3 . (x - 1) + \frac{m-x}{2} = 1$. Determine o valor de m.

37) Se o número 5 é raiz da equação $\frac{7x-a}{3} - \frac{4x+b}{2} = \frac{a-b+7}{6}$, determine o valor de $3a + 2b$.

V) Resolver em R as equações fracionárias.

38) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{18}{x^2-4}$

39) $\frac{6}{x} + \frac{x+3}{2x} = 3$

40) $\frac{4}{x-3} - \frac{9}{x-4} + \frac{3x+3}{x^2-7x+12} = 0$

41) $\frac{x+6}{x-6} = \frac{x^2+x-18}{x^2-8x+12}$

42) $\frac{4}{3x-2} - \frac{3}{3x+2} = \frac{6x+13}{9x^2-4}$

43) $\frac{3}{25-x^2} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5}$

44) $\frac{3}{3x+2} - \frac{2}{2x-3} = -\frac{13}{6x^2-5x-6}$

45) $\frac{8x-\frac{1}{3}}{3x-7} = \frac{3}{4}$

46) $\frac{0,666\ldots . x + 0,1666\ldots}{2,5 . x - 0,25} = 0,5$

47) $\frac{4}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\frac{1}{6+\frac{1}{6}}+6}$

48) $\frac{x+3}{1-x^2} - \frac{5}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

49) $\frac{2}{x+2} - \frac{5}{x-3} + \frac{3}{x+4} = 0$

50) $\frac{1}{x+3} - \frac{7}{x-1} + \frac{5}{x-2} + \frac{1}{x} = 0$

51) $\frac{3x+1}{2x+3} - \frac{4-3x}{6x-9} = \frac{8x^2-3x+2}{4x^2-9}$

52) $\frac{5-4x}{4-12x} - \frac{6-3x-9x^2}{9x^2-1} = \frac{8x-3}{6x+2}$

VI) Resolver as equações literais em x, abaixo.

53) $4x + m = 2 \circ (3x - m)$

54) $\dfrac{x+b}{3} + \dfrac{3x-b}{5} = 2b$

55) $2x \circ (b-2) - b \circ (x-2) = 1 - b$

56) $\dfrac{x}{2} - 3x + k = \dfrac{2x}{3} - 6 \circ (x - 3k)$

57) $1 - \dfrac{x+a}{a} = \dfrac{x+a}{a}$

58) $3(a + x) - 4a = 5x$

59) $mx + n = nx + m$

60) $(3 - a) \circ x = ax + 1$

61) $a^2x - 3a = 3 + x$

62) $6(p + x) = 4(q + x)$

63) $(x - 3a) \circ (x - 5a) = (x + 4a)^2$

64) $\dfrac{x}{a-3} = \dfrac{1}{a+3} - \dfrac{x}{a^2-9}$

65) $\dfrac{2(k^2x-1)}{k^2-1} = \dfrac{x-1}{k-1} + 2x$

66) $\dfrac{x}{m+n} - \dfrac{x+1}{m-n} = \dfrac{x-3}{m^2-n^2}$

67) $\dfrac{3-x}{a+2b} - \dfrac{x-1}{a+b} = \dfrac{8-3x}{a^2+3ab+2b^2}$

68) $\dfrac{x-2}{2m+4} - \dfrac{1-x}{m-3} = \dfrac{4x+3}{m^2-m-6}$

69) $\dfrac{k-x}{k} - \dfrac{m-x}{m} + 2 = \dfrac{x}{k} + \dfrac{k}{m}$

70) Qual o conjunto-verdade da equação

$\dfrac{2x(am-b)}{a^2-b^2} - \dfrac{4a}{a-b} = \dfrac{2x}{a+b}$; sendo a ¹ ± b.

VII) Equações equivalentes e identidades.

71) Assinale a opção em que encontramos um par de equações equivalentes:

a) $x^2 - 10 = 0$ e $3x - 4 = 2x - 3$

b) $\dfrac{8-x}{3} + \dfrac{x+3}{2} = x + 5$ e $-2 \circ (1 - x) + x \circ (-1 + 4) = x + 2$

c) $\dfrac{x-1}{2} + 3 \circ (4 - x) = 1$ e $3x - 1 = \dfrac{x-1}{2}$

d) $\dfrac{22x-9}{3} + \dfrac{17x-10}{5} = 87x - 5$ e $\dfrac{\frac{1-x}{2}+1}{3} = \dfrac{7-5x}{14}$

72) Chamamos de **identidade** a uma igualdade que se verifica para qualquer valor da(s) variável(is). Assim sendo, assinale, dentro as opções abaixo as identidades.

a) $(m + n)^2 = m^2 + n^2$

b) $2 \circ (a + b) = 2a + 2b$

c) $0 \circ x = 0 \circ y$

d) $\dfrac{6x+y}{3} = 2x + y$

e) $(a + b) \circ (a - b) = a^2 - b^2$

f) $2 \circ [4 - 3x - 4 \circ (2x - 5)] - 6 \circ (8 + 3x) - 4x = 0$

g) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

VIII) Discutir as equações:

73) $ax + 4 = 3x - 2a$

74) $mnx - mx - nx + x - m^2 + 1 = 0$

75) $m \circ (3 - k) \circ x = 9 - k^2$

IX) Discussão e tipos de raízes.

76) Se $(a - 2)\,x = b - 3$, determine os valores de a e b para que a equação seja:

a) POSSÍVEL DETERMINADA

b) POSSÍVEL INDETERMINADA

c) IMPOSSÍVEL

77) Discuta a equação em IR:

$\dfrac{mx}{4} - \dfrac{x-2}{m} = 1.$

78) Determine "m" na equação $3my + 7 = 2y + 14$ para que ela seja impossível.

79) Sabe-se que nenhum número real satisfaz à igualdade $(4 + k) \circ x - m + 3 = 0$. Determine os valores de k e m.

80) A igualdade $(k - 8) \circ x - 1 - m = 0$, é uma identidade. Determine os valores de k e m.

81) Determine o valor da única raiz da equação $2x - 1 = m - kx$, sabendo-se que m é o sucessor de k ($m \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}$).

82) Os números -4 e 18 são raízes da equação $(a + 7) \circ x + b - 5 = 0$. Determine o valor de a + b.

83) A equação $a^2x + b^2x + b^2 = a^2 - 2abx$ é satisfeita para infinitos valores de x. Qual a relação que deve existir entre a e b?

84) Que valor de k faz com que a equação $kx + 3 = k - 6x$ seja uma identidade?

85) Discuta a equação $k^2x - 5 = m - x$.

86) Quantas soluções possui a equação $ax - a^2 - 3x = 2$, para $a = 3$?

87) Quantas soluções possui a equação $mx + 4 = m^2 - 2x$, para $m = -2$?

88) Quantas soluções possui a equação $k^2x - k^2 - 1 = 2k - x + 2kx$, para $k = -1$?

89) Quantas soluções possui a equação $tx + m = 2 - 5x$, sabendo-se que $m \in [2,5]$ e $t \in \,]-\infty, -6]$?

90) O valor de m – n para os quais se tem $\dfrac{-14}{x^2-x-12} = \dfrac{m}{x-4} + \dfrac{n}{x+3}$ para todo $x \notin \{-3, 4\}$, é:

a) 4

b) 0

c) -4

d) 25

e) -10

91) Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \ldots\ldots + \frac{1}{2998 \times 3001}.$$

a) $\frac{1000}{3001}$

b) $\frac{1000}{2998}$

c) $\frac{1}{301}$

d) $\frac{1}{298}$

e) $\frac{1000}{5999}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

92) **(CM)** Se o número -2 é solução da equação 3 (2x + 2) + 2t (x - 6) = x, na incógnita x, então o valor da constante t é:
a) -1
b) $\frac{1000}{5999}$
c) $-\frac{1}{4}$
d) $-\frac{1}{5}$

93) **(CM)** A soma de três múltiplos consecutivos de 7 é 210. A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior destes números é:
a) 7
b) 9
c) 11
d) 14
e) 15

94) **(CEFETEQ)** Calcule o valor numérico de x na igualdade:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{12}.$$

95) **(CM)** A solução real da equação $\frac{2x-1}{5} - \frac{x+1}{3} = x - 1$, pertence ao intervalo:

a) $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

b) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right]$

c) $\left[0, \frac{1}{5}\right]$

d) $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$

e) $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$

96) **(CM)** Resolvendo a equação $\frac{y-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 3 - \frac{y}{5}$ no conjunto dos números racionais, o valor de y obtido está compreendido entre os números naturais:
a) 1 e 2
b) 2 e 3
c) 3 e 4
d) 4 e 5
e) 5 e 6

97) **(CM)** A sequência $\frac{2x}{3}, \frac{2x}{3} - 1, \frac{2x}{3} - 2, \ldots$ tem sete termos. A soma do segundo termo com o sexto termo é igual a $\frac{3}{5}$.
O valor de <u>x</u> é:
a) 3,2
b) 4,8
c) 4,95
d) 6,3
e) 7,15

98) **(CN)** A solução real da equação $\frac{7}{x-1} - \frac{8}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
a) 12
b) 14
c) 15
d) 16
e) 19

99) **(CN)** No conjunto 'R' dos números reais, qual será o conjunto solução da equação $\frac{\sqrt{3}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{2x-2} - \frac{\sqrt{3}}{2x+2}$?
a) R
b) R – (-1, 1)
c) R – [-1; 1]
d) R – {-1; 1}
e) R – [-1; 1)

100) **(CEFETEQ)** Determine o valor da expressão $(25 - 25x^2)$, sabendo que o número real x é solução da equação $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{3x-3}$ e que $x \neq \pm 1$.

101) **(CEFETEQ)** Calcule K para que a solução da equação $x - \frac{2K-3}{4} = K + \frac{K}{2}$, seja $-\frac{19}{4}$.

102) **(CN)** Sejam os polinômios $P = x^2 + 4x$ e $Q = x^2 + (3k - 1)x$. Se a razão entre P e Q é diferente de 1, necessariamente
a) $k \neq \frac{5}{3}$
b) $k \neq \frac{3}{5}$
c) $k \neq \frac{4}{3}$
d) $k \neq \frac{3}{4}$
e) k ¹ 1

103) **(CEFET)** Sejam a e b números reais para os quais a igualdade $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$ tenha solução. Determine o valor do produto a .b.

104) **(EPCAR)** Se a ¹ 0, então $\left(\frac{a}{a+y} + \frac{y}{a-y}\right) : \left(\frac{y}{a+y} + \frac{a}{a-y}\right) = -1.$
a) para todos, exceto dois valores de y.
b) só para dois valores de y.
c) para todos os valores de y.
d) para nenhum valor de y.

105) **(EPCAR)** Sobre a equação $kx - \frac{x-1}{k} = 1$, na variável x, é correto afirmar que:
a) admite solução única se $k^2 \neq 1$ e $k \in R^*$.
b) NÃO admite solução se k = 1.
c) admite mais de uma solução se k = -1.
d) admite infinitas soluções se k = 0.

106) **(CEFET)** O maior valor real que t deve assumir na equação $(x + 264)(tx - 408)(312 + tx) = 0$, de modo que esta só tenha números inteiros como raízes, é:

a) 3
b) 6
c) 12
d) 24
e) 48

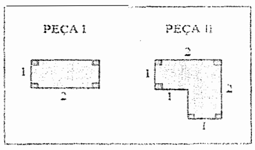
107) **(CPII)** Nas equações E_1 e E_2, x representa um número real.

E_1: $\frac{(x-1)(x-7)}{x-1} = 6$ e E_2: $(x-1)(x-7) = 6 \circ (x-1)$.

Partindo desses dados, responda:
a) x = 1 é solução de E_1? Justifique.
b) x = 1 é solução de E_2? Justifique.
c) Quais são a raízes da equação E_1?
d) Quais são a raízes da equação E_2?

108) **(CN)** Os números $\frac{(x-1)(x-7)}{x-1}$ são inteiros e positivos, com $x \in R - \{0;\ 2\}$. Nessas condições, pode-se concluir que:
a) $x < 0$
b) $0 < x < \frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2} < x < 1$
e) $\frac{2}{3} < x < 1$

109) **(CN)** Observe a ilustração a seguir.



Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadrado de lado 5, utilizando as peças acima?

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

110) **(CN)** Um funcionário usa uma empilhadeira para transportar bobinas de 70kg e de 45kg, sendo uma de cada vez. Quantas viagens com carga deverá fazer, no mínimo, para transportar exatamente uma tonelada de carga?
a) 18
b) 17
c) 16
d) 15
e) 14

GABARITO

1) $S = \{-8\}$
2) $S = \{5\}$
3) $S = \{2\}$
4) $S = \{8\}$
5) $S = \varnothing$
6) $S = \{3\}$
7) $S = \left\{\frac{41}{12}\right\}$
8) $S = \varnothing$
9) $S = Q$
10) $S = \{8\}$
11) $S = \{4\}$
12) $S = \{-6\}$
13) $S = \{-9\}$
14) $S = \left\{\frac{11}{5}\right\}$
15) $S = \{-2\}$
16) $S = \{0\}$
17) $S = IR$
18) $S = \varnothing$
19) $S = \{7\}$
20) $S = \{-1\}$
21) $S = \left\{\frac{24}{7}\right\}$
22) $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$
23) $S = IR$
24) $S = \varnothing$
25) $S = \{2\}$
26) $S = \left\{\frac{31}{92}\right\}$
27) $S = \{9\}$
28) $S = \{1\}$
29) $\frac{5}{3}$
30) A
31) C
32) B
33) A
34) B
35) A
36) $-\frac{89}{3}$
37) 3
38) $S = \{4\}$
39) $S = \{3\}$
40) $S = \{7\}$
41) $S = \{-2\}$
42) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
43) $S = \varnothing$
44) $S = IR$
45) $S = \left\{-\frac{59}{69}\right\}$
46) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
47) $S = \left\{\frac{1}{21}\right\}$
48) $S = \{0\}$
49) $S = \left\{-\frac{82}{31}\right\}$
50) $S = \left\{-\frac{3}{11}\right\}$
51) $S = \left\{-\frac{27}{11}\right\}$
52) $S = \{1\}$
53) $S = \left\{\frac{3m}{2}\right\}$
54) $S = \{2b\}$
55) $S = \left\{\frac{1-3b}{b-4}\right\}$
56) $S = \{6k\}$
57) $S = \left\{\frac{a}{2}\right\}$
58) $S = \left\{-\frac{a}{2}\right\}$
59) $\begin{cases} S = \{1\}, \text{se } m \neq n \text{ ou} \\ S = R, \text{se } m = n \end{cases}$
60) $S = \left\{\frac{1}{3-2a}\right\}$
61) $S = \left\{\frac{3}{a-1}\right\}$
62) $S = \{2q - 3p\}$
63) $S = \left\{-\frac{a}{16}\right\}$
64) $S = \left\{\frac{a-3}{a+4}\right\}$
65) $S = \left\{\frac{k-3}{k-1}\right\}$
66) $S = \left\{\frac{3-m-n}{2n+1}\right\}$
67) $S = \left\{\frac{4a+5b-8}{2a+3b-3}\right\}$
68) $S = \left\{\frac{4m+4}{3m-7}\right\}$
69) $S = \{k\}$
70) $V = \left\{\frac{2(a+b)}{m-1}\right\}$, se $m \neq 1$ e $a \neq 0$
71) D
72) b; c; e; g
73) $\begin{cases} P.D. \to a \neq 3 \\ IMP. \to a = 3 \end{cases}$

74) $\begin{cases} \text{P.D.} \rightarrow m \neq 1 \text{ e } n \neq 1 \\ \text{P.I.} \rightarrow m = 1 \\ \text{IMP.} \rightarrow m \neq \pm 1 \text{ e } n = 1 \end{cases}$

75) $\begin{cases} \text{P.D.} \rightarrow m \neq 0 \text{ e } k \neq 3 \\ \text{P.I.} \rightarrow k = 3 \text{ ou } m = 0 \text{ e } k = -3 \\ \text{IMP.} \rightarrow m = 0 \text{ e } k \neq \pm 3 \end{cases}$

76) a) a “‘ 2 e b qualquer
b) a = 2 e b = 3
c) a = 2 e b “‘ 3

77) $\begin{cases} \text{P.D.} \rightarrow m \neq \pm 2 \\ \text{P.I.} \rightarrow m = 2 \\ \text{IMP.} \rightarrow m = -2 \end{cases}$

78) $\frac{2}{3}$

79) k = -4 e m $\neq$ 3

80) k = 8 e m = -1

81) 1

82) -2

83) a = -b

84) nenhum

85) é sempre possível e determinada

86) nenhuma

87) infinitas

88) uma

89) uma

90) C

91) A

92) C

93) D

94) 13

95) B

96) C

97) C

98) A

99) D

100) 0

101) k = -2

102) A

103) 1

104) A

105) A

106) D

107) a) Não
b) Sim
c) 13
d) 1 ou 13

108) C

109) D

110) D

OBSERVAÇÕES

Problemas do 1º grau com uma incógnita

Neste item estudaremos a resolução de problemas que envolvem apenas uma incógnita elevada a expoente 1. Para isto, é necessário que o capítulo anterior (equações do 1º grau) tenha ficado bem entendido. O nosso objetivo principal será a montagem da equação, já que a sua resolução foi exaustivamente treinada anteriormente. Em seguida, vamos propor algumas situações-problema e proceder, então, a sua resolução.

Problema 1:

Uma pessoa adquire um livro com certo número de páginas. No primeiro dia leu a metade do livro, no segundo dia leu a terça parte do livro, e no terceiro dia leu as 12 páginas restantes. Quantas páginas havia neste livro?

Resolução:

Após uma leitura do enunciado verificamos que o problema deseja determinar o número de páginas do livro. Assim, esta quantidade será a nossa incógnita.

Total de páginas: x

Páginas lidas no 1º dia: $\frac{x}{2}$

Páginas lidas no 2º dia: $\frac{x}{3}$

Páginas lidas no 3º dia: 12

Podemos observar que, se somarmos os números de páginas lidas nos 1º, 2º e 3º dias, teremos o número total de páginas. Então:

$$\frac{x}{2_3} + \frac{x}{3_2} + \frac{12}{1_6} = \frac{x}{1_6}$$

$3x + 2x + 72 = 6x$

$5x + 72 = 6x$

$x = 72$

Resposta: O livro possuía 72 páginas.

Problema 2:

O dobro da idade que eu possuía há três anos, adicionado do triplo da idade que eu terei daqui a dois anos, é igual à idade que eu terei daqui a sessenta e quatro anos. Qual é a minha idade?

Resolução:

Neste caso, pedimos determinar minha idade atual. Esta será a nossa incógnita. Assim:

Idade atual: x

Idade há três anos: x – 3

Idade daqui a dois anos: x + 2

Idade daqui a sessenta e quatro anos: x + 64

Montando a equação:

$2 . (x - 3) + 3 . (x + 2) = x + 64$

$2x - 6 + 3x + 6 = x + 64$

$5x = x + 64$

$4x = 64$

$x = 16$

Resposta: Eu tenho 16 anos.

Problema 3:

Durante uma conversa entre dois matemáticos, um deles pergunta ao outro: – Que horas são? O outro responde então, sem pestanejar: – O tempo que falta para o término do dia equivale a $\frac{5}{7}$ do tempo que dele já passou.

Afinal de contas, que horas são?

Resolução:

Neste caso desejamos saber a hora no instante da pergunta. Aí está a nossa variável.

Hora atual: x

Nº de horas que faltam para terminar o dia: 24 – x

Equacionando o enunciado:

$$\frac{24 - x}{1_7} = \frac{5x}{7_1}$$

$168 - 7x = 5x$

$168 = 12x$

$x = 14$

Resposta: São 14 horas.

Problema 4:

Determine quatro números inteiros e consecutivos cuja soma seja igual a 82.

Resolução:

Se os números pedidos são consecutivos, então variam de uma unidade, um para o outro. Portanto, consideremos que os números sejam x, x + 1, x + 2 e x + 3. Vamos montar a equação:

$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 82$

$4x + 6 = 82$

$4x = 76$

$x = 19$

Resposta: Os números pedidos são 19, 20, 21 e 22.

Problema 5:

No pátio de uma escola, em um determinado momento, o número de meninos é $\frac{5}{7}$ do número de meninas. Verificou-se que, ao chegarem mais 18 meninos, os números de meninos e meninas ficaram iguais. Quantos meninos havia no inicio?

Resolução:

No início, temos:

Número de meninas: x

Número de meninos: $\frac{5x}{7}$

Após a chegada dos 18 meninos, temos:

Número de meninas: x

Número de meninos: $\frac{5x}{7} + 18$

Como as quantidades são iguais:

$$\frac{x}{1_7} = \frac{5x}{7_1} + \frac{18}{1_7}$$

$7x = 5x + 126$

$2x = 126$

$x = 63$

Número inicial de meninos: $\frac{5x}{7} = \frac{5}{7} . 63 = 45$

Resposta: Havia 45 meninos

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Escreva a expressão correspondente a:
   a) o triplo de um número
   b) o triplo de um número, mais um
   c) um número par
   d) um número ímpar
   e) o consecutivo de um número natural
   f) o consecutivo do consecutivo de um número natural.

2) A soma de dois números naturais consecutivos é 11. O produto desses números é:
   a) 13
   b) 22
   c) 30

d) 9
e) 28

3) Determine três números inteiros consecutivos cuja soma vale – 39.

4) Três números pares e consecutivos somam 138. Determine o valor do maior deles.

5) Três números naturais consecutivos são colocados em ordem decrescente. Sabe-se que o triplo do primeiro, diminuído da metade do segundo, aumentado do dobro do terceiro, dá resultado 127. Calcule-os.

6) Qual é o número cuja soma com o seu triplo é superior ao seu dobro em 28 unidades?

7) Encontre três números de soma 220, tais que o primeiro deles é ao mesmo tempo o triplo do segundo e o dobro do terceiro.

8) Encontre três números de soma 170, tais que o primeiro é o dobro do segundo e este é o triplo do terceiro.

9) A soma de três números é 180. Calcule-os, sabendo que o primeiro é o triplo do segundo e este é o dobro do terceiro.

10) Determine um número cuja metade, adicionada à sua terça parte, adicionada à sua quarta parte, dá como resultado o mesmo número adicionado de 3 unidades.

11) Antônio e Pedro têm juntos 73 figurinhas. Sabendo-se que o número de figurinhas de Antônio excede o de Pedro em 17 unidades, determine o número de figurinhas de Antônio.

12) Sílvio distribuiu certo número de convites individuais para a festa de aniversário do seu filho. No dia da festa cinco pessoas convidadas não compareceram. Após o corte do bolo, a metade dos convidados presentes foi embora. Alguns minutos depois chegaram três dos cinco convidados ausentes. Neste momento Sílvio verificou que o número de convidados presentes era inferior ao número de convites enviados em onze unidades. Quantas pessoas Sílvio convidou para esta festa?

13) Prevendo a falta d'água, enchi todas as garrafas de que dispunha e coloquei-as na geladeira. No dia seguinte utilizei $\frac{2}{7}$ das garrafas existentes. Passados dois dias, eu já havia consumido $\frac{3}{5}$ do número de garrafas restantes, quando então observei que haviam sobrado quatro garrafas.
Quantas garrafas eu enchi no início?

14) Três amigos sentaram-se à mesa de um bar para conversar, quando então possuíam todos o mesmo número de cigarros. Após certo tempo o primeiro deles fumou dois cigarros, o segundo fumou quatro cigarros e o terceiro fumou oito, ficando todos juntos com 43 cigarros. Quantos cigarros cada um possuía no inicio?

15) Juntando todas as minhas economias só posso pagar $\frac{5}{12}$ de minhas dívidas. Porém, se eu tivesse mais $ 27.600,00, eu poderia saldar $\frac{4}{5}$ dessa minha divida
Qual é a minha dívida?

16) Sortinaldo ganhou uma certa quantia na loteria esportiva e, para pagar uma promessa, doou a metade do prêmio para um asilo de velhinhos desamparados. Uma semana depois Sortinaldo ganhou o dobro do que havia ganho anteriormente, desta vez na mega-sena. Juntou então o valor deste prêmio ao que havia restado do prêmio anterior e doou a quinta parte deste total a uma obra de ajuda a crianças carentes. Verificou, após mais este ato nobre, que ele possuía ainda uma quantia igual à soma dos valores dos prêmios recebidos, menos $ 200.000,00. Quanto o nosso afortunado amigo recebeu, ao todo?

17) Um sábio passou o primeiro terço de sua vida nas ruas, mendigando; os $\frac{3}{11}$ seguintes ele passou meditando; já durante a próxima sexta parte de sua valorosa vida passou fazendo caridade para os necessitados, enquanto que os últimos quinze anos de sua existência foram dedicados à evangelização dos incrédulos.
Pergunta-se: Quantos anos viveu esse sábio?

18) Em um determinado momento de um dia, verifiquei que o triplo do tempo que faltava para o seu encerramento equivalia à quinta parte do tempo que dele já passou. Que horas eram, neste instante?

19) João submeteu-se a um exame composto por certo número de questões. Sabendo-se que ele acertou $\frac{2}{3}$ do total de questões, errou a quinta parte delas e deixou de responder às demais 16, quantas questões haviam nesta prova?

20) Um investidor vendeu um lote de ações por $ 75.000,00. Se tivesse obtido mais $ 13.000,00 na venda, o seu lucro equivaleria a $\frac{4}{7}$ do custo de tal lote. Quanto ele havia pago pelo referido lote?

21) Para enfrentar o grave problema da falta d'água em seu condomínio, o síndico resolveu recorrer à água existente na cisterna, que estava totalmente cheia. No primeiro dia os moradores utilizaram a terça parte da água existente, no segundo dia utilizaram $\frac{2}{5}$ da capacidade de cisterna e no terceiro utilizaram os 1280 litros de água restantes. Qual a capacidade desta cisterna?

22) Para fazer refresco de açaí, devemos diluir duas partes de um suco concentrado da fruta em sete partes de água. Então, para servir exatamente seis copos de refresco de 300 ml cada, qual quantidade de suco deveremos utilizar?

23) Um número possui dois algarismos, sendo que um deles é o dobro do outro. Invertendo-se a ordem desses algarismos, o número aumentou em 18 unidades. Qual era o número inicial?

24) O recorde mundial de uma certa modalidade de corrida é de 6 horas, num percurso de 42 km. Um corredor que mantém, desde o inicio, velocidade constante de 7 km/h, após percorrer 28 km, pára durante 15 minutos devido a problemas de câimbras.
Qual deverá ser a velocidade média no restante do percurso para igualar o recorde mundial?

25) Eufrásio tem 41 anos e seus três filhos têm, respectivamente, 4, 8 e 13 anos. Daqui a quantos anos os filhos juntos terão a mesma idade do pai?

26) Um pai e um filho têm hoje 65 e 27 anos, respectivamente. Há quantos anos atrás a idade de um deles era o triplo de idade do outro?

27) A soma da minha idade com aquela que eu tinha há 7 anos, com aquela que eu terei daqui a 12 anos, totaliza 128 anos. Qual será a minha idade daqui a 9 anos?

28) Interrogada sobre sua idade, responde uma menina: há 10 anos eu tinha um quinto da idade que terei daqui a dois anos. Qual a idade da menina?

29) As cidades Vai e Vem distam 400 km. Simultaneamente, partem dois ciclistas, um de Vai com destino a Vem e outro de Vem com destino a Vai, pela mesma estrada. Sabe-se que a velocidade do primeiro é 13 km/h e a do segundo é 12 km/h. A que distância da cidade de Vai eles se encontrarão?

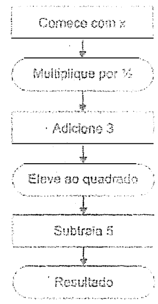
30) Um trem de passageiros parte de uma cidade X para uma cidade Y, distante 420 km, no mesmo instante em que um cargueiro parte de Y para X. Se a velocidade do trem é o dobro da velocidade do cargueiro, e o encontro dos dois dá-se após 4 horas da partida simultânea, determine a velocidade do trem.

31) Duas torneiras são abertas juntas. A primeira enche um tanque em 5 horas e a segunda um outro tanque de igual capacidade em 4 horas. No fim de quanto tempo o volume que falta para encher o segundo será igual a 1/4 do volume que falta para encher o primeiro tanque?

32) João chega todo dia a Petrópolis às 17:00h e sua mulher, que dirige com velocidade constante, chega todo dia às 17:00h à rodoviária para apanhá-lo e levá-lo para casa. Nuns determinado dia, João chega às 16:00h e resolve ir andando para casa, encontra sua mulher no caminho e volta de carro com ela, chegando a casa 10 minutos mais cedo do que de costume. Durante quanto tempo João andou a pé?

QUESTÕES DE CONCURSOS

33) **(ENEM)** Na figura ao lado, está indicada uma sequência de operações a serem efetuadas com o número obtido na operação anterior.
Se o resultado foi 44, com qual valor positivo de x se começou?



a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

34) **(PUC)** Ache sete números inteiros consecutivos tais que a soma dos primeiros quatro seja igual à soma dos últimos três.

35) **(EPCAR)** Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770.
O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

36) **(UFF)** Três números naturais e múltiplos consecutivos de 5 são tais que o triplo do menor é igual ao dobro do maior. Dentre esses números, o maior é:
a) múltiplo de 3
b) ímpar
c) quadrado perfeito
d) divisor de 500
e) divisível por 4

37) **(CM)** Se três números naturais são pares consecutivos tais que o triplo do menor é igual à soma dos outros dois, então o maior deles é igual a:
a) 10
b) 8
c) 6
d) 12
e) 14

38) **(UFRJ)** Determine os números naturais maiores do que zero que, ao serem divididos por 8, apresentam resto igual ao dobro do quociente.

39) **(CAP-UFRJ)** A soma das idades de dois irmãos é 28 anos.
Sabendo que a razão entre as idades é $\frac{3}{4}$, então o irmão mais velho tem quantos anos?

40) **(ENEM)** Um pai tem o triplo da idade de seu filho, que está com 10 anos. A soma das idades dos dois, em anos, quando o filho tiver a idade atual do pai, será:
a) 70
b) 80
c) 90
d) 100
e) 110

41) **(ENEM)** O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e , do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre
a) 4,0 m e 5,0 m
b) 5,0 m e 6,0 m
c) 6,0 m e 7,0 m
d) 7,0 m e 8,0 m
e) 8,0 m e 9,0 m

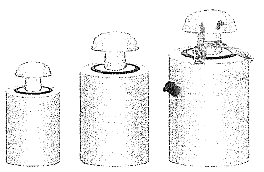
42) **(CN)** um fazendeiro repartiu seu rebanho de 240 cabeças de bois entre seus três filhos da seguinte forma: o primeiro recebeu $\frac{2}{3}$ do segundo, e o terceiro tanto quanto o primeiro mais o segundo. Qual o número de cabeças de bois que o primeiro recebeu?
a) 12
b) 30
c) 36
d) 48
e) 54

43) **(ENEM)** Na primeira fase de um concurso, os candidatos foram distribuídos em salas de 40 lugares, sendo que apenas uma delas ficou incompleta, com 25 candidatos. Na segunda fase desse concurso, o número de candidatos diminuiu em 985. Considerando-se que foram usadas ainda salas de 40 lugares, quantos candidatos ficaram em uma sala incompleta?
a) 35
b) 30
c) 25
d) 15
e) Nenhum

44) **(ENEM)** Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.
De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?
a) R$ 14,00
b) R$ 17,00
c) R$ 22,00
d) R$ 32,00
e) R$ 57,00

45) **(UERJ)** João mediu o comprimento do seu sofá com o auxilio de uma régua.
Colocando 12 vezes a régua na direção do comprimento, sobraram 15 cm da régua; por outro lado, estendendo 11 vezes, faltaram 5 cm para atingir o comprimento total. O comprimento do sofá, em centímetros, equivale a:
a) 240
b) 235
c) 225
d) 220

46) **(UERJ)** Observe ao pesos P_1, P_2 e P_3, que possuem, cada um, uma quantidade inteira em kg.



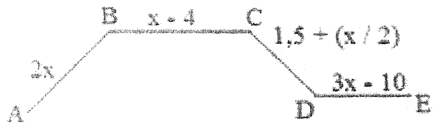
P_1 P_2 P_3

Colocando-se um, dois ou os três pesos em um mesmo prato de uma balança, pode-se equilibrar no outro, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou, no máximo, 7 kg de batatas. Entre P_1, P_2 e P_3, o mais pesado mede, em kg:
a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 9.

47) **(CEFET)** Em um estande para treinamento de tiro ao alvo, Marcos e Pedro deram um total de 400 tiros. Marcos disparou 3 tiros por minuto, Pedro deu 2 tiros por minuto e treinou 25 minutos a mais que Marcos. Durante quanto tempo Pedro treinou?
a) 1h 15 min;
b) 1h 21 min;
c) 1h 30 min;
d) 1h 35 min;
e) 1h 40 min.

48) **(CM)** Em um dia de sol, Betinho vende laranjas. descascadas e geladinhas, na praia. De madrugada, vai para a feira onde compra cada 3 laranjas a $ 0,10. Mais tarde revende, na praia, 5 laranjas por $ 0,30. No domingo passado, ao final da tarde, conseguiu vender todas as suas laranjas e ficou feliz ao constatar que a diferença entre o que ele apurou e o que ele gastou era de $ 20,00.
A quantidade de laranjas vendidas foi de:
a) 180
b) 570
c) 750
d) 810
e) 930

49) **(CM)** Luiza saiu de sua casa, localizada no ponto A, e passou pela cada de quatro de seus amigos, indicadas na figura pelos pontos B, C, D e E, separadas entre si pelas distâncias indicadas na figura.



Se a distância total percorrida por Luiza até chegar à residência indicada pela letra E é de 28 unidades de comprimento, o valor de x é um número:
a) divisível por 7
b) compreendido entre 1 e 4
c) divisível por 5
d) múltiplo de 4
e) múltiplo de 13

50) **(EPCAR)** Um estudante, preparando-se para o Exame de Admissão ao CPCAR, resolveu todas as N questões de uma prova. Ele acertou 8 das 18 primeiras e acertou $\frac{5}{6}$ das restantes.
Sabe-se que o estudante acertou 75% do total de questões da prova.
A quantidade de questões que ele errou nessa prova é um número compreendido entre:
a) 5 e 10
b) 10 e 15
c) 15 e 20
d) 20 e 25

51) **(EPCAR)** Uma bola é abandonada de uma certa altura. Até que o movimento pare, a bola atinge o solo e volta a subir repetidas vezes. Em cada subida, alcança $\frac{1}{2}$ da altura em que se encontrava anteriormente. Se, depois do terceiro choque com o solo, ela sobe 100 cm, a altura em que foi abandonada a bola é, em metros igual a:
a) 0,8
b) 1
c) 8
d) 0,5

52) **(EPCAR)** Dois jogadores, Antônio e Bernardo, em determinado jogo envolvendo 110 partidas, com 2 jogadores, fizeram um acordo e Antônio disse a Bernardo: "Cada vez que eu perder, eu lhe pagarei um valor correspondente a 1/5 de 1/3 do dobro de R$ 150,00. Entretanto, em cada vitória minha, quero que você me pague 50% a mais do valor que você receberia em cada vez que vencesse. No caso de haver empate, ninguém paga e ninguém recebe."
Bernardo concordou e os dois deram início aos jogos. Após a realização da última partida, verificou-se que em 1/11 dos jogos houve empate.
É INCORRETO afirmar que
a) se não houve prejuízo para nenhum dos dois jogadores, Bernardo deve ter vencido 20 jogos a mais que Antônio.
b) Antônio teve lucro se venceu pelo menos 31 partidas.
c) se o número de vitórias dos dois fosse o mesmo e se não houvesse empates, Antônio teria lucrado R$ 550,00.
d) se não tivesse ocorrido nenhum empate, os dois não teriam lucro nem prejuízo se Bernardo vencesse 22 partidas a mais que Antônio.

53) **(CEFET)** Outra grande paixão dos cariocas é o futebol. Na final do Campeonato Carioca de Futebol de 2001 o quadro das apostas era o seguinte:
➢ Para o Flamengo: cada R$ 175,00 apostado dava ao apostador R$ 100,00.

➢ Para o Vasco: cada R$ 100,00 apostado dava ao apostador R$ 155,00.

Assim, por exemplo, se o Flamengo fosse o vencedor do jogo uma pessoa que tivesse apostado R$ 175,00 no Flamengo teria volta seu R$ 175,00 e ainda ganharia R$ 100,00, enquanto uma pessoa que tivesse apostado R$ 100,00 no Vasco perderia seu R$ 100,00.

Supondo que uma casa de apostas tenha aceitado 51 apostas a R$ 175,00 no Flamengo, determine o número de apostas a R$ 100,00 que ela deve aceitar para que seu lucro seja o mesmo, independente de quem ganhe o jogo.

54) **(EPCAR)** Uma pessoa foi realizar um curso de aperfeiçoamento. O curso foi ministrado em x dias nos períodos da manhã e da tarde desses dias. Durante o curso foram aplicadas 9 avaliações que ocorreram em dias distintos, cada uma no período da tarde ou no período da manhã, nunca havendo mais de uma avaliação no mesmo dia. Houve 7 manhãs e 4 tardes sem avaliação. O número x é divisor natural de:

a) 45
b) 36
c) 20
d) 18

55) **(CM)** Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto que uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos; ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em $x + 3$ minutos.

Então, o tempo total gasto para encher o tanque é:

a) 12 minutos
b) 15 minutos
c) 18 minutos
d) 20 minutos
e) 24 minutos

55) **(UNIFICADO)** Considere os números inteiros; abc e bac, onde a, b e c são algarismos distintos e diferentes de zero, e a > b. A diferença abc – bac será sempre um múltiplo de:

a) 4
b) 8
c) 9
d) 12
e) 20

57) **(UFRJ)** André e Ricardo, num dado instante, partem de um mesmo ponto de uma pista circular de 1500 metros de extensão. Eles dão várias voltas na pista, sendo que André corre com o quádruplo da velocidade de Ricardo. Determine a distância percorrida por Ricardo no instante em que os dois corredores se encontram, pela primeira vez após a largada, se:

a) eles correm em sentidos opostos;
b) eles correm no mesmo sentido.

58) **(CEFETEQ)** Célio e Oliveira partem do ponto A, ao mesmo tempo, fazendo o mesmo percurso para a cidade de Santos, distante 72 km do ponto A. Célio, que anda 2 km/h a mais que Oliveira, chega a Santos, 3 horas antes. Calcular, em km/h, a velocidade média de Célio.

59) **(CN)** Três pessoas resolveram percorrer um trajeto da seguinte maneira: a primeira andaria a metade do percurso, mais 1 km, a segunda a metade do que falta, mais 2 km e, finalmente, a terceira que andaria a metade do que resta, mais 3 km. O número de quilômetros desse trajeto é:

a) menor que 20
b) maior que 19 e menor que 25
c) maior que 24 e menor que 30
d) maior que 29 e menor que 35

60) **(CN)** Quatro corredores, João, Pedro, André e Fábio combinaram que, ao final de cada corrida, o que ficasse em último lugar dobraria o dinheiro que cada um dos outros possuía. Competiram 4 vezes e ficaram em último lugar na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª corridas, respectivamente, João, Pedro, André e Fábio. Se no final da 4ª competição, cada um ficou com $ 16,00 então, inicialmente João possuía:

a) $ 5,00
b) $ 9,00
c) $ 16,00
d) $ 17,00
e) $ 33,00

61) **(CN)** Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento A-B-A-B, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

GABARITO

1) a) 3x
b) 3x + 1
c) 2x
d) 2x + 1
e) x + 1
f) x + 2
2) C
3) -14; -13; -12
4) 48
5) 29; 28; 27
6) 14
7) 120; 40; 60
8) 102; 51; 17
9) 120; 40; 20
10) 36
11) 45
12) 23
13) 14
14) 19
15) $ 72.000,00
16) $ 600.000,00
17) 66
18) 22h 30min
19) 120
20) $ 56.000,00
21) 4.800ℓ
22) 400 ml
23) 24
24) 8 hm/h
25) 8
26) 8
27) 50
28) 13 anos
29) 208 km
30) 70 km/h
31) 3h 45min
32) 55 min
33) E
34) 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15
35) A
36) A
37) A
38) 10; 20; 30
39) 16
40) B
41) D
42) D
43) E
44) D
45) C
46) B
47) D
48) C
49) A
50) D
51) C
52) B
53) 55
54) C
55) B
56) 1h 40 min
57) a) 300 m
b) 500 m
58) 8,0 km/h
59) D
60) E
61) D

Sistemas de equações do 1° grau

Um sistema é do 1° grau quando todas as variáveis de todas as equações que o compõem estão elevadas a expoentes 0 ou 1.

Resolver um sistema é encontrar os valores das variáveis que satisfazem às equações dadas simultaneamente.

Há três processos para a solução de um sistema do 1° grau.

I) Adição

O objetivo primeiro da adição é a eliminação de uma das variáveis, através da adição das equações, membro a membro. Às vezes é necessário um prévio preparo das equações, ou seja, para que a adição tenha sucesso, é preciso que os coeficientes da variável a ser eliminada, em ambas as equações, sejam simétricos. Se tal não ocorrer, cabe-nos preparar as equações, multiplicando-as por números tais que haja a simetria desejada.

Exemplos:

Seja resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$

Resolução:

Adicione as equações membro a membro:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$2x = 10 \quad \therefore \quad x=5$$

Substitua o valor de x na primeira equação:

$x+y=7$
$5+y=7$
$y=7-5 \quad \therefore \quad y=2$
$S=\{(5,2)\}$

b) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+2y=10 \end{cases}$

Resolução:

Multiplique a primeira equação por 2, de modo que os coeficientes de y nas equações fiquem simétricos:

$$\begin{cases} 4x-2y=10 \\ x+2y=10 \end{cases}$$

Adicione as equações membro a membro:

$$\begin{cases} 4x-2y=10 \\ x+2y=10 \end{cases}$$
$$5x = 20 \quad \therefore \quad x=4$$

Substitua o valor de x em uma das equações, por exemplo na segunda equação:

$x+2y=10$
$4+2y=10$
$2y=10-4$
$2y=6$
$y=3$
$S=\{(4,3)\}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x+4y=14 \end{cases}$

Resolução:

Como nenhuma das variáveis tem sinais contrários nas equações, escolhemos uma delas para eliminar. Por exemplo, eliminemos o y. É só multiplicarmos a 1ª equação pelo coeficiente de y na 2ª, e vice-versa.

$$\begin{cases} 8x+12y=28 \\ 15x+12y=42 \end{cases}$$

Como ainda não há a simetria, multipliquemos uma das equações por –1. Por exemplo, a 1ª.

$$\begin{cases} -8x-12y=-28 \\ 15x+12y=42 \end{cases}$$

Adicione as equações membro a membro:

$$\begin{cases} -8x-12y=-28 \\ 15x+12y=42 \end{cases}$$
$$7x = 14 \quad \therefore \quad x=2$$

Substitua o valor de x em uma das equações, por exemplo na primeira equação:

$2x+3y=7$
$2 \cdot 2+3y=7$
$4+3y=7$
$3y=7-4$
$3y=3$
$y=1$
$S=\{(2,1)\}$

II) Substituição

Esse processo constitui-se no isolamento de uma das variáveis em uma das equações, e sua posterior substituição na outra.

Exemplo:

Seja resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$$

Resolução:

Isolemos, por exemplo, x na primeira equação:

$x=3-y$

Substituamos esse valor de x, na segunda equação:

$2x-3y=6$
$2 \cdot (3-y)-3y=6$
$6-2y-3y=6$
$-5y=6-6$
$-5y=0 \quad \therefore \quad y=0$

Como:

$x=3-y$
$x=3-0 \quad \therefore \quad x=3$
$S=\{(3,0)\}$

III) Comparação

Nesse caso, devemos explicitar a mesma variável em ambas as equações, igualando os resultados obtidos.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$$

Resolução:

Isolemos x em ambas as equações:

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \rightarrow x=\dfrac{13-3y}{2} \\ 3x-4y=11 \rightarrow x=\dfrac{11+4y}{3} \end{cases}$$

Igualemos as expressões obtidas:

$$\frac{13-3y}{2/3}=\frac{11+4y}{3/2}$$

3 . (13 – 3y) = 2 . (11 + 4y)
39 –9y = 22 + 8y
– 9y – 8y = 22 – 39
–17y = –17 x(– 1)
17y = 17 $\therefore$ y = 1

Substituamos y em uma das expressões obtidas:

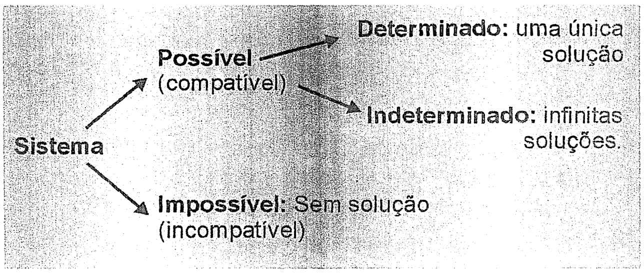
$$x=\frac{13-3y}{2}$$

$$x=\frac{13-3.1}{2} \quad \therefore \quad x=5$$

S = {(5, 1)}

Discussão das soluções de um sistema do 1° grau

Discutir um sistema é prever o seu número de soluções sem no entanto resolvê-lo. Um sistema pode ser *possível* ou *compatível*, quando tiver ao menos uma solução, ou então *impossível* ou *incompatível*, quando não admitir solução alguma. Se um sistema possível admitir uma única solução ele é chamado de *DETERMINADO*, no caso de ser satisfeito por infinitos pares, então é dito *INDETERMINADO*.



Dado um sistema do 1° grau da forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Teremos:

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ $\rightarrow$ **Sistema possível determinado**

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ $\rightarrow$ **Sistema possível indeterminado**

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ $\rightarrow$ **Sistema impossível**

Exemplos:
Discutir os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-8 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

Resolução:
a = 2 b = –5 c = –8
a' = 3 b' = 2 c' = 7

Em primeiro lugar vamos verificar se as razões $\frac{a}{a'}$ e $\frac{b}{b'}$ são iguais.

$$\frac{a}{a'}=\frac{2}{3} \qquad \frac{b}{b'}=\frac{-5}{2}$$

Como $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ o sistema é possível determinado.
(Tente resolvê-lo para exercitar)

b) $\begin{cases} 8x-6y=2 \\ 12x-9y=3 \end{cases}$

Resolução:
a = 8 b = –6 c = 2
a'= 12 b'= –9 c'= 3

$$\frac{a}{a'}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \qquad \frac{b}{b'}=\frac{-6}{-9}=\frac{2}{3} \qquad \frac{c}{c'}=\frac{2}{3}$$

Verificamos que $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, logo o sistema é possível e indeterminado.
(Tente obter algumas soluções deste sistema)

c) $\begin{cases} 6x-15y=1 \\ 8x-20y=2 \end{cases}$

Resolução:
a = 6 b = –15 c = 1
a' = 8 b'= –20 c' = 2

$$\frac{a}{a'}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \qquad \frac{b}{b'}=\frac{-15}{-20}=\frac{3}{4} \qquad \frac{c}{c'}=\frac{1}{2}$$

Já que $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, o sistema é impossível.
(Tente resolvê-lo se for capaz!)

Problemas do 1° grau com duas incógnitas

Para que possamos resolver problemas deste tipo, é necessário que consigamos montar duas equações, que obviamente são extraídas dos enunciados. Assim, teremos que obter os valores das variáveis que satisfarão simultaneamente às duas equações encontradas, ou seja, resolver um sistema. A seguir vamos apresentar alguns problemas e suas respectivas resoluções para exemplificar aquilo que acabamos de explicar.

Problema 1:
A soma de dois números é 56 e a diferença entre eles é 22. Quais são esses números

Resolução:
Vamos chamar esses números de x e y. A partir daí, podemos montar um sistema com as equações do enunciado.

$$\begin{cases} x+y=56 \\ x-y=22 \end{cases}$$

Adicionando-se as equações membro a membro:

$$+\begin{cases} x+y=56 \\ x-y=22 \end{cases}$$
$$2x = 78$$

x = 39
x + y = 56
39 + y = 56
y = 17
Resposta: Os números são 39 e 17.

Problema 2:
No pátio de uma escola há 27 veículos estacionados, mas apenas bicicletas e triciclos. Se contarmos um total de 58 rodas, quantos veículos há de cada tipo?

Resolução:
Número de bicicletas: x
Número de triciclos: y
Número total de veículos: x + y (I)

Como cada bicicleta possui duas rodas:
Número de rodas das bicicletas: 2x

Como cada triciclo possui três rodas:
Número de rodas dos triciclos: 3y

Número total de rodas: 2x + 3y (II)
Basta agora igualar as expressões (I) e (II), respectivamente, a 27 e 58.

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x + 3y = 58 \end{cases}$$

Vamos multiplicar ambos os membros da 1ª equação por – 2, adicionando-a à 2ª:

$$+\begin{cases} -2x - 2y = -54 \\ 2x + 3y = 58 \end{cases}$$
$$y = 4$$
$x + y = 27$
$x + 4 = 27$
$x = 23$
Resposta: Há 23 bicicletas e 4 triciclos.

Problema 3:
Em um programa de auditório da TVM, cada candidato responde sempre a dez perguntas. Em caso de acerto ele recebe uma certa quantidade de reais, já, em caso de erro, ele perde uma certa quantia. Se o candidato A acertou sete perguntas e recebeu $ 690,00, e o candidato B recebeu $ 520,00 ao responder corretamente a seis perguntas, pergunta-se: quanto cada candidato recebeu por resposta correta e quanto perdeu por resposta errada?
Resolução:
Valor recebido por resposta certa: x
Valor perdido por resposta errada: y

O candidato A acertou sete perguntas e errou três, então ganhou 7x e perdeu 3y. Equacionando:

$7x - 3y = 690$ (I)

O candidato B acertou seis e errou quatro perguntas, logo ganhou 6x e perdeu 4y. Equacionando:

$6x - 4y = 520$ (II)

Montando um sistema com as equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 7x - 3y = 690 \\ 6x - 4y = 520 \end{cases}$$

Vamos multiplicar a 1ª equação por 4 e a 2ª por – 3, adicionando-as a seguir:

$$+\begin{cases} 28x - 12y = 2.760 \\ -18x + 12y = -1.560 \end{cases}$$
$$10x = 1.200$$
$x = 120$
$7x - 3y = 690$
$7 . 120 - 3y = 690$
$840 - 3y = 690$
$-3y = -150$
$y = 50$
Resposta: Cada acerto vale $120,00, e cada erro vale $50,00.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas possíveis e determinados são equivalentes, quando possuem o mesmo conjunto-solução.

Exemplo:
Verifique se são equivalentes

$$S_1: \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2: \begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 5x - 3y = 11 \end{cases}$$

Aplicando as técnicas de resolução apresentadas anteriormente, podemos verificar que o conjunto-solução de ambos os sistemas é S = {(4, 3)}, portanto, S_1 e S_2 são equivalentes.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolver os sistemas abaixo, em IR^2.

1) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = -4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x + 3y = 19 \\ -3x + 4y = 26 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 5y = 47 \\ 4x - 3y = 37 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -4x - 5y = 24 \\ x + y = -5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 6 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ -x + y = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = -2 \\ \dfrac{3x}{5} + \dfrac{5y}{4} = -5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} - \dfrac{3x-y}{5} = -4 \\ \dfrac{x-y}{7} + \dfrac{2x-y}{11} = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -1 \\ \dfrac{15}{x+y} - \dfrac{7}{x-y} = 10 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{4x+2y}{7x-y} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2y-5x}{y+7} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x+y+5} = \dfrac{1}{3x+2y+1} \\ 0{,}5x + 0{,}6y = 1{,}5 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x + 4y = 13a \\ -2x - 3y = -11a \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{x-m}{n} + \dfrac{y-n}{m} = 0 \\ \dfrac{x+y-n}{m} + \dfrac{x-y-m}{n} = 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x + y = 2b \\ 3x + 2y = a + 5b \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

19) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} = 28 \end{cases}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

20) $\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{y-2} = 12 \\ \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{y-2} = 22 \end{cases}$ $(x \neq 1, y \neq 2)$

21) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

22) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{3}{x+y} = 0 \end{cases}$ $(x \neq y, x \neq -y)$

II) Classifique, sem resolver, os sistemas a seguir em possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

23) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -2 \end{cases}$

24) $\begin{cases} 10x + 8y = 5 \\ 15x + 12y = 7 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x + 9y = 6 \end{cases}$

26) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}6y = 0{,}7 \\ 0{,}9x - 0{,}2y = 1 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ -x - 3y = 6 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 4x + 6y = 7 \\ -6x - 9y = 1 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x + y = 6 \\ -2x - 2y = -12 \end{cases}$

30) $\begin{cases} 0{,}2x - 0{,}4y = 1{,}6 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

32) $\begin{cases} \dfrac{4x}{3} - \dfrac{2y}{5} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{16x}{5} - \dfrac{24y}{25} = \dfrac{6}{5} \end{cases}$

33) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{8} = 1 \\ 0{,}25x - 0{,}125y = 0{,}1 \end{cases}$

34) $\begin{cases} (m^2 - n^2) \,.\, x + (m^2 + mn - 2n^2) \,.\, y = n - m \\ (m + n) \,.\, x + (m + 2n) \,.\, y = 1, m \neq \pm n \text{ e } m \neq -2n \end{cases}$

35) $\begin{cases} (a^3 - b^3) \,.\, x + (a^3 - b^3) \,.\, y = a^2 + b^2 \\ (a^2 - ab + b^2) \,.\, x + (a^2 + ab + b^2) \,.\, y = a^2 - b^2, \end{cases}$

sendo $a \,.\, b \neq 0$

36) $\begin{cases} (p^2 + 3p + 2) \,.\, x + (p^2 - 1) \,.\, y = p^3 + 1 \\ (p + 2) \,.\, x + (p - 1) \,.\, y = p^2 - p + 1 \end{cases}$, $p \neq 1$ e $p \neq -2$

III) Discussão e sistemas equivalentes.

37) Os pares (14, a) e (–1, b) pertencem ao conjunto-solução do sistema $\begin{cases} 2x + my = 4 \\ nx - 9y = 6 \end{cases}$. Determine o valor de m – n.

38) A única solução do sistema $\begin{cases} ax+3y=4 \\ 3x+by=1 \end{cases}$ é o par (1, 2). Determine o valor de a + b

39) Sabendo-se que os sistemas $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-3y=11 \end{cases}$ e $\begin{cases} kx-y=13 \\ 4x+my=17 \end{cases}$ são equivalentes, determine o valor de k + m.

40) Sabendo-se que os sistemas $\begin{cases} 7x+ky=5 \\ 5x+3y=-7 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 4x+5y=-16 \end{cases}$ são equivalentes, determine o valor de k.

41) Discutir as soluções do sistema $\begin{cases} ax+5y=3 \\ 20x+ay=6 \end{cases}$ em função do parâmetro a.

42) Discutir as soluções do sistema $\begin{cases} 2x+my=8 \\ 3x+9y=k \end{cases}$ em função dos parâmetros m e k.

43) Discutir as soluções do sistema $\begin{cases} (m-3).x+6y=1-k \\ 6x+9y=8 \end{cases}$ em função dos parâmetros m e k.

44) Determine os valores de m e k de modo que as equações $(m+3).x+(m+1).y=3-k$ e $(m+2).x+(m-3).y=k+3$ sejam incompatíveis.

45) As equações $px - 4y - 4 = m + p - 3x$ e $x + 6y + 3m = 5 - 2p + px$ são satisfeitas por infinitos valores de x e y, simultaneamente. Determine o valor de p + m.

46) Qual deve ser a condição para que as equações $a.(x+y)+18=b-4x+c-5y$ e $a.(x+y)+4c=3b+5x+3y+7$ sejam satisfeitas por um único valor de x e um único valor de y?

47) O sistema $\begin{cases} mx+(5m+1)y=p+1 \\ 4x-3y=7-p \end{cases}$ não possui solução para que valores de m e p?

48) Determine o valor de k de modo que o sistema $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ kx+4y=k+4 \end{cases}$ seja indeterminado.

49) O sistema $\begin{cases} 4x+(m-3)y=1 \\ 9x+(2-m)y=5 \end{cases}$ é determinado. Determine o valor de m.

50) Determine os valores de a e b de modo que o sistema $\begin{cases} 7x+(a+1)y=4-b \\ 3x+(3-a)y=2b+3 \end{cases}$ seja impossível.

51) O sistema $\begin{cases} ax+7y-k=2y-3x \\ 8x-y=6-k+3ax \end{cases}$ é incompatível para que valores de a e k?

52) O sistema $\begin{cases} ty+4x-m=3+8x \\ 9x+3y+2m=3-ty \end{cases}$ é satisfeito por dois pares de valores de x e y. Determine o valor de m . t

IV) Problemas

53) A soma de dois números é 90 e o maior é o dobro do menor. Quais são esses números?

54) A soma de dois números é 24. A sexta parte do maior número, acrescida de 4, é igual à metade do menor número, aumentada de 2. Qual o menor número?
a) 4
b) 9
c) 15
d) 20

55) A soma de dois números é 329. Na divisão do maior pelo menor obtém-se 13 e o resto é o maior possível. Qual o maior número?
a) 301
b) 305
c) 303
d) 307

56) Um número é o quíntuplo de um outro e a soma de ambos igual a 420. Qual o maior número?
a) 300
b) 350
c) 400
d) 410

57) Dois números são tais que o triplo do menor, menos o maior, dá 1, e o dobro do menor é igual ao maior menos 1. Determine-os.

58) A soma de dois números é 3 e a diferença entre seus quadrados é 15. Podemos afirmar que a diferença, em módulo, entre esses números é:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

59) A diferença entre dois números naturais é 4 e a diferença entre seus quadrados é 64. O triplo do maior número, acrescido da metade do menor vale:
a) 28
b) 30
c) 33
d) 36

60) Qual é a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ cuja soma dos termos vale 100?

61) Determine uma fração equivalente a $\frac{3}{7}$ cuja diferença entre seus termos seja 20.

62) Qual é a fração equivalente a $\frac{4}{7}$ cuja diferença dos termos vale 45?

63) A soma das idades de Pedro e Aline é 17 anos. Daqui a dois anos a idade de Pedro será o dobro da idade de Aline. Quais são suas idades?

64) Uma aluna pergunta ao seu professor de matemática:
– Qual a sua idade?
Ele então responde, enigmaticamente:
– Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens.
Sabe–se que daqui a três anos a soma das idades da aluna e do professor será 97 anos.
Qual é afinal a idade do professor?

65) Carlos fez um curso de aprofundamento em matemática e português num total de 43 aulas. Sabendo–se que o número de aulas de matemática excedeu o número de

aulas de português em 13 unidades, determine o número de aulas de matemática que Carlos assistiu.

66) Um colégio possui 505 alunos, distribuídos em 18 turmas. As turmas do ensino fundamental possuem 25 alunos e as do ensino médio 30 alunos. Quantas turmas do ensino fundamental existem?

67) Uma figura geométrica é formada por triângulos e quadriláteros, num total de 11 polígonos e 40 lados. Quantas figuras há de cada tipo?

68) A pretexto de abrigo, um grupo de tatus resolveu se esconder em um certo número de tocas. Se em cada toca entrar um tatu, ficará um tatu sem toca, porém, se em cada toca entrarem dois tatus, ficarão cinco tocas sem tatus. De quantos tatus e tocas estamos falando?

69) Carmem tem em seu jardim trevos de quatro folhas e trevos de três folhas, num total de 23 trevos e 87 folhas. Quantos trevos há de cada espécie?

70) Um pedreiro empilhou 40 tijolos, alguns com 12 cm de espessura e outros com 15 cm. Quantos tijolos havia de cada tipo, já que a pilha alcançou a altura de 5,16m?

71) Um grupo de amigos gastou $ 46,00 ao beber 20 chopps e 15 pastéis no bar "Barbarense". Já em uma outra mesa houve o consumo de 15 chopps e 25 pastéis, num total de $ 51,00. Quanto pagará uma pessoa que coma um pastel e beba 2 chopps neste bar?

72) Contemplando a famosa obra de arte "Polígonos da vida", observei que nela havia apenas triângulos, quadrados e pentágonos, num total de 10 figuras e 38 lados. Se a quantidade de quadrados era igual à diferença entre as quantidades de triângulos e pentágonos, determine o número de quadrados pintados na tela.

73) Durante uma aula de Química, o professor enche um copo com água e em seguida utiliza a metade desse conteúdo em uma experiência, quando então pesa o conjunto copo/água e obtém a medida 110g. Em uma outra aula ele enche o mesmo copo com água e, desta vez, utiliza a terça parte de seu conteúdo. O peso do conjunto copo/água após a experiência mostrou 130g. Qual o peso do copo?

74) Em um avião há 100 passageiros, contando-se apenas brasileiros e mexicanos. Sabe-se que 178 passageiros não são brasileiros e 222 não são mexicanos. Quantos passageiros há nesse avião?

75) Em uma caixa há pêras e maçãs. A diferença entre a quarta parte do número de pêras e a décima quinta parte do número de maçãs é 1. Sabendo-se que o módulo da diferença entre o dobro do número de pêras e os $\frac{2}{3}$ do número de maçãs é 2, é correto afirmar–se que:
a) há mais pêras que maçãs
b) há mais maçãs que peras
c) o total de frutas é menor que 60
d) o total de frutas é maior que 65

76) Um auxiliar de laboratório dividiu 108g de uma substância em duas partes tais que o quociente entre a maior parte e a diferença que existe entre as partes seja 5g. A menor dessas duas partes, em gramas, e:
a) 46
b) 48
c) 50
d) 52

77) Num estacionamento há motocicletas e automóveis num total de 77 veículos e 218 rodas. Quantos veículos há de cada tipo?

78) Um fazendeiro da distante localidade de Curicica cria galinhas e cabritos. Fazendo-se uma contagem desses animais, verifica–se que há 300 cabeças e 1000 patas. Quantos animais há de cada espécie?

79) Num pasto há bois e galinhas num total de 51 cabeças e 134 pés. Quantos animais há de cada espécie?

80) Em um programa de TV, um candidato recebe $ 50,00 por resposta certa e perde $ 20,00 por resposta errada. Ao fim de 13 perguntas, o candidato ganhou $ 300,00. Quantas perguntas o candidato acertou?

81) Um homem tem 34 moedas em seu bolso, num total de $ 21,00. Sabendo-se que as moedas são todas de $ 1,00 ou de $ 0,50, qual o número de moedas de cada valor?

82) A soma dos dois algarismos de um número é 9. Se a ele acrescentarmos 63 unidades, o resultado terá os mesmos algarismos permutados. Qual é o número?

QUESTÕES DE CONCURSOS

83) **(CEFET)** Em física, duas fórmulas bastante usadas para um movimento uniformemente variado são $V = V_0 + at$ e $S = V_0t + \frac{1}{2}at^2$. Que expressão dá o valor de t em função de S, V e V_0?

84) **(CM)** Se a, b e c são números naturais tais que

$$\begin{cases} a+b=13 \\ a+c=17 \\ b+c=20 \end{cases}$$

, então o valor de a + b + c é:
a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

85) **(CN)**

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Observe o quadrado acima em que as letras representam números naturais distintos desde 1 até 9. Se a adição de três números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, desse quadrado, tem sempre o mesmo resultado, então a letra E representa o número:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

86) **(CM)** O par ordenado (a, b) é a solução do sistema.

$$\begin{cases} \dfrac{-7x}{8} - \dfrac{8y}{7} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{-y}{7} + \dfrac{x}{8} = \dfrac{-22}{5} \end{cases}$$

. Então, a soma a + b vale:
a) -10
b) - 9
c) - 8
d) 1
e) 120

87) **(EPCAR)** Considere os números positivos q, m e n, tais

que $\frac{m}{n+q}=2$ e $\frac{m}{n-q}=3$.
Ordenando-os, tem-se a sequência correta em:

a) $m > n > q$
b) $m > q > n$
c) $n > m > q$
d) $q > n > m$

88) **(CEFET)** A solução (x, y) do sistema abaixo, onde a ¹ 0 e b ¹ 0 é tal que:

$$\begin{cases} \frac{x}{6a}+\frac{y}{9b}=\frac{5}{18} \\ \frac{2x}{9a}-\frac{y}{6b}=\frac{1}{18} \end{cases}$$

a) $x + y = a - b$
b) $x - y = a + b$
c) $x - y = b - a$
d) $x.y = a^2 - b^2$
e) $x + y = a + b$

89) **(CEFET)** Resolvendo o sistema de equações dado abaixo, sendo x, y e z ∈ R, podemos afirmar que;

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=2 \\ \frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{8}{z}=2 \\ \frac{5}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=2 \end{cases}$$

a) $x=y$
b) $x>y$
c) $x>y>z$
d) $x<y$

90) **(CN)** Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, com $z \neq 0$, valor da expressão $\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ é:

a) 7
b) 2
c) 0
d) $-\frac{20}{7}$
e) -2

91) **(CN)** Observe o sistema de equações abaixo.

$$S_1 : \begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 2x+7y=4 \end{cases}$$

Sendo (x_1, y_1) solução de S_1, o resultado de $(6+\sqrt{2})x_1+(21+\sqrt{3})y_1$ é igual a

a) 18
b) 21
c) 24
d) 28
e) 32

92) **(CN)** $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx-ay=1 \end{cases}$

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando toda solução de um é solução do outro e vice–versa. Qual é a soma dos valores de a e b tais que os sistemas acima sejam equivalentes?
a) 1
b) 2
c) –1
d) –2
e) zero

93) **(CN)** Sobre o sistema formado por $3x + 4y = 7$ e $6x + 8x = 15$, pode-se afirmar que é
a) indeterminado.
b) determinado e $9x + 12y = 22$.
c) determinado e $x = y = 0$.
d) determinado e $x = -y \neq 0$.
e) impossível.

94) **(CN)** Sabendo-se que $2x + 3y = 12$ e que $mx + 4y = 16$ são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições?
a) Um
b) Dois
c) Três
d) Quatro
e) Infinitos

95) **(CN)** Analise as seguintes afirmativas sobre um sistema S de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas x e y.
I – S sempre terá ao menos uma solução, se os seus termos independentes são iguais a zero.
II – Se a razão entre os coeficientes de x for igual a dos de y, S terá infinitas soluções.
III – Se a razão entre os coeficientes de x for diferente da dos de y, S terá apenas uma solução.
Assinale a alternativa correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

96) **(CM)** Numa mercearia, o preço de 1 kg de maçã é o dobro do preço de 1 kg de banana. Rafael pagou um total de R$ 9,60 ao comprar 2 kg de maçã e 5 kg de banana.
Se quisermos descobrir o preço do quilo de cada uma destas frutas, o sistema que devemos resolver é:

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+5y=9{,}60 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2y+5y=9{,}60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=9{,}60 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+5y=9{,}60 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-5y=9{,}60 \end{cases}$

97) **(ENEM)** Uma pessoa retira R$ 70,00 de um banco,recebendo 10 notas, algumas de R$ 10,00 e outras de R$ 5,00. Calcule quantas notas de R$ 5,00 a pessoa recebeu.
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

98) **(CM)** Para uma determinada sessão de cinema, foram vendidos 82 bilhetes e arrecadados R$ 745,00. Sabendo-se que a entrada custa R$ 10,00 e que estudante paga meia-entrada, ou seja, R$ 5,00, o número de estudantes na sessão era:
a) 15
b) 25
c) 27
d) 67

99) **(CPII)** Uma loja de discos classificou seus CDs em dois tipos, A e B, unificando o preço para cada tipo. Quatro consumidores fizeram compras nessa loja nas seguintes condições: O primeiro comprou 5 CDs do tipo A e 2 do tipo B, gastando R$ 99,00. O segundo comprou 2 CDs do tipo A e 4 do tipo B e gastou R$ 94,00. O terceiro comprou 7 CDs do tipo A e 6 do tipo B. O quarto comprou 1 CD de cada tipo.
a) Quanto o terceiro consumidor pagou à loja?
b) Calcule quanto o quarto consumidor gastou.

100) **(CPII)** Querendo ampliar um de seus laboratórios de informática, a direção de uma escola comprou 10 microcomputadores e 3 impressoras, pagando a quantia total de R$ 16.350,00. Diante do bom desempenho das máquinas, a direção do Colégio comprou, com o mesmo fornecedor e **sem variação dos preços de cada equipamento**, mais 8 microcomputadores e 6 impressoras, pagando dessa vez R$ 14.700,00.
a)Sendo **m** o preço do microcomputador e **p** o preço da impressora, escreva um sistema de duas equações relacionando **m** e **P**.
b)Resolva o sistema determinando os valores de **m** e **p**.

101) **(CPII)** Um casal está pesquisando preços para sua festa de casamento e tem em mãos dois orçamentos, que foram fornecidos por um mesmo Buffet:

Orçamento 1
150 convidados sendo 140 adultos e 10 crianças
Preço total: R$ 12.350,00

Orçamento 2
200 convidados sendo 180 adultos e 20 crianças
Preço total: R$ 16.200,00

O casal sabe que esse Buffet cobra um valor x por adulto e um valor y por criança presente à festa. Como a lista de convidados muda a todo instante, ele decidiram calcular os valores de x e de y para não precisar consultar o Buffet a cada mudança.
a) Escreva um sistema de equações do 1° grau nas variáveis x e y que descreva a situação dada acima.
b) Determine o valor a ser pago por uma festa com 200 convidados adultos e nenhuma criança.

102) **(CPII)** Em 1998, surgiu o primeiro projeto de um carro "bicombustível", movido a álcool, gasolina ou até mesmo uma mistura dos dois combustíveis. A ideia não foi à frente, na época, devido à preferência pelos carros à gasolina.
A partir de 2003, o governo definiu que os usuários de bicombustíveis pagariam menos imposto, tendo os mesmos incentivos dos veículos a álcool. Isso estimulou o projeto e, hoje, mais da metade dos carros são "Total Flex", ou seja, saem das fábricas com o sistema bicombustível. Agora, é hora da resposta do consumidor aos veículos "inteligentes", pois ainda há controvérsias sobre o desempenho desses carros.
a)Um carro "Total Flex" foi abastecido com 30 litros de álcool e 10 litros de gasolina, num posto onde o preço do litro de álcool é R$ 1,91 e do litro de gasolina é R$ 2,67. Qual o preço médio da mistura do combustível utilizado?
b)Considere-se o feliz proprietário de um "Total Flex". Abastecendo-o no posto da esquina, você colocou 25 litros de álcool e 10 litros de gasolina e gastou R$ 71,00. Na semana seguinte, sem reajuste de preços, você volta ao mesmo posto e coloca 20 litros de álcool e 15 litros de gasolina, gastando R$ 75,00. Qual é o preço do litro de gasolina nesse posto?

103) **(UFF)** Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia $ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse, pagaria $ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu $ 50,00. Quantos arremessos ele errou?

104) **(ENEM)** Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

105) **ENEM)** Uma fábrica de confecções produziu, sob encomenda, 70 peças de roupas entre camisas, batas e calças, sendo a quantidade de camisas igual ao dobro da quantidade de calças. Se o número de bolsos em cada camisa, bata e calça é dois, três e quatro, respectivamente, e o número total de bolsos nas peças é 200, então podemos afirmar que a quantidade de batas é:
a) 36
b) 38
c) 40
d) 42
e) 44

106) **(ENEM)** Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100g de arroz, cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: http://www.embrapa.br.
Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado).

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.
Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão. Respectivamente?
a) 58 g e 456 g
b) 200 g e 200 g
c) 350 g e 100 g
d) 375 g e 500 g
e) 400 g e 89 g

107) **(CN)** Num depósito estão guardadas 300 folhas de compensado de espessuras 5,0 mm e 1,5 cm, respectivamente, formando uma pilha com 2,35 m de altura. Qual a soma dos algarismos do número que expressa a quantidade de folhas de 5,0 mm?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

108) **(CM)** Certa quantidade de provas precisam ser embaladas em envelopes. Se colocarmos 20 provas em cada envelope, sobram 15 provas; se colocarmos 25 provas em cada envelope, sobram 3 envelopes. O número de provas que precisa ser embalado é igual a:
a) 325
b) 350
c) 375
d) 400
e) 425

109) **(EPCAR)** Sr. Luiz pretende dividir a quantia de **x** reais entre seus netos. Observou que se der 50 reais para cada um, lhe faltarão 50 reais e se der 40 reais para cada um, lhe sobrarão 40 reais. Com base nisso, é correto afirmar que:
a) Sr. Luiz possui menos de 500 reais para dividir entre

seus netos.
b) Sr. Luiz tem mais de 10 netos.
c) se um dos netos do Sr. Luiz não quiser o dinheiro, os demais receberão menos de 45 reais cada um.
d) é possível que o Sr. Luiz divida a quantia x em partes iguais entre todos os seus netos, de forma que não lhe sobre nenhum centavo.

110) **(EPCAR)** Se as 156 camas de um dormitório forem distribuídas em x fileiras horizontais iguais, contendo y camas cada, sobrarão 6 camas.
Se as mesmas 156 camas forem distribuídas em (x + 5) fileiras horizontais iguais, contendo (y – 1) camas cada, ainda continuarão sobrando 6 camas.
Então, (x + y) é igual a:
a) 31
b) 30
c) 29
d) 28

111) **(EPCAR)** Um trem percorre certa distância, com velocidade constante. Se a velocidade aumentasse 20 km por hora, ele levaria3 horas a menos, e, se diminuísse 20 km por hora, ele precisaria de 5 horas a mais. A distância percorrida é um número cuja soma dos algarismos é:
a) 3
b) 5
c) 6
d) 7

112) **(EPCAR)** Duas pessoas saíram para uma caminhada e percorreram a mesma distância d. A primeira pessoa foi 10% mais veloz que a segunda. Sabe-se que t_1 e t_2 foram, respectivamente, os tempos gastos pela primeira e segunda pessoa para percorrer a distância d e que $t_1 + t_2$ 2 horas e 48 minutos.
É correto afirmar que o tempo gasto pela segunda pessoa para percorrer a distância d foi
a) 1 hora e 28 min.
b) 1 hora e 20 min.
c) 1 hora e 48 min.
d) 1 hora e 40 min.

113) **(ENEM)** O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da **média aritmética** entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastro (TA), em que TC = NV/NF, TA = NA/NV, NV é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptado).

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5. Se NA + NV = 3.600, então NF é igual a:
a) 10.000
b) 7.500
c) 5.000
d) 4.500
e) 3.000

114) **(CEFET)**Durante a temporada de 2006, o Botafogo disputou n partidas em que a razão entre o seu número de vitórias e derrotas foi 5 : 1. Se disputasse mais 6 partidas consecutivas e ganhasse todas, esta razão passaria a ser 6 : 1. Se o Botafogo empatou exatamente 18 vezes na temporada de 2006, determine n.

115) **(EPCAR)** Em uma gincana, uma das provas consistia em determinar, no menor tempo possível, o número total x de chaveiros acondicionados em uma caixa. Para tal contagem cada representante das equipes á, b e g, na sua vez, fez retiradas sucessivas dos chaveiros agrupando-os conforme o esquema a seguir.

EQUIPE	RETIRADAS DE	SOBRA NO FUNDO DA CAIXA
α	3 em 3	2 chaveiros
β	5 em 5	1 chaveiro
γ	6 em 6	2 chaveiros

Sabendo-se que nenhum candidato errou na contagem; que cada candidato, em sua vez, devolveu os chaveiros para se ajuntarem à sobra que existia no fundo da caixa e que o número x é maior que 70, porém não chega a 91, é INCORRETO afirmar que
a) o número que representa o total de chaveiros possui 4 divisores positivos.
b) se na caixa existissem mais 4 chaveiros, as três retiradas teriam sido feitas sem deixar sobras no fundo da caixa.
c) o número total de retiradas dos três participantes juntos é maior que 60.
d) se existissem mais 10 chaveiros na caixa de retiradas, eles poderiam ser agrupados exatamente em dúzias.

116) **(EPCAR)** Em certo dia, numa fábrica de chocolates, serão produzidos dois tipos de barras de chocolate: branco e escuro, totalizando 500 barras. Sabe-se que as barras de chocolate são diferentes apenas na espessura, sendo 0,6 cm a espessura de cada barra de chocolate branco e 16 mm a espessura de cada barra de chocolate escuro. Depois de prontas, as barras foram empilhadas. Sabendo-se que a pilha de chocolates formada possui 4,35 m de altura, pode-se afirmar que a diferença entre a quantidade de barras de chocolate branco e a quantidade de barras de chocolate escuro é um número cuja soma dos algarismos é igual a:
a) 7
b) 5
c) 9
d) 14

117) **(EPCAR)** Uma fábrica de aviões levantou dados sobre sua produção e verificou que foram vendidos, no ano de 2007, 140 aviões.
A fábrica produziu três modelos de aviões: A, B e C. Sabe-se que o número de aviões vendidos do modelo A é o sêxtuplo de $0,\overline{3}$ do quádruplo da metade do número de aviões vendidos do modelo C e os modelos B e C juntos, correspondem a 40% dos aviões vendidos.
Com base nessas informações, é **INCORRETO** afirmar que:
a) a quantidade de aviões vendidos do modelo A é 25% da quantidade de aviões vendidos do modelo C.
b) a quantidade de aviões dos modelos A e B vendidos é um número cuja soma dos algarismos é um número primo.
c) o modelo C foi o menos vendido.
d) a quantidade de aviões vendidos do modelo B é igual à quantidade de aviões vendidos do modelo C mais $\frac{1}{10}$ do total de aviões vendidos dos modelos A, B e C juntos.

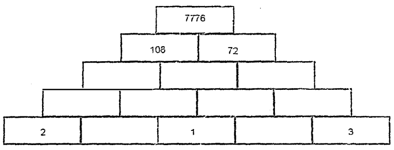
118) **(EPCAR)** Quando eu tinha a idade que você tem, a sua idade era $\frac{1}{3}$ da minha idade atual. Quando você tiver a minha idade atual, então o $\frac{1}{7}$ de 0,666... do dobro da soma de nossas idades será igual a 12 anos.

Com base nesses dados é INCORRETO afirmar que

a) Quando você nasceu, eu tinha $\frac{1}{3}$ da idade que hoje tenho.
b) A soma de nossas idades hoje é um número múltiplo de 5.
c) Quando você completou 3 anos, a minha idade, na época, era o quádruplo da sua idade.
d) Quando eu tiver o dobro de sua idade atual, você terá mais de 30 anos.

119) **(CM)** A figura abaixo mostra quinze retângulos, sendo seis numerados e nove não numerados. Cada retângulo dado está apoiado em dois outros, excluindo-se os cinco que formam a base da figura. Sabendo que o número natural em cada retângulo fora da base, é igual ao produto dos números naturais observados nos dois retângulos em que ele se apoia (Ex: 7 776 = 108 x 72), a soma dos números que estão faltando na figura é:

a) 28
b) 38
c) 48
d) 58
e) 68

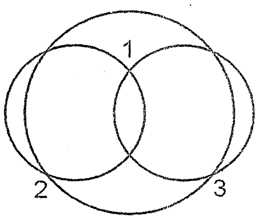


120) **(CN)** Observe o quadrado a seguir, em que as letras representam números naturais distintos desde 1 até 9. Se a adição de três números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, desse quadrado, tem sempre o mesmo resultado, então a letra e representa o número:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

a	b	c
d	e	f
g	h	i

121)**(UERJ)** Observe a figura abaixo, em que 1, 2 e 3 indicam três dos seis pontos de interseções das circunferências.



Use os número 4, 5 e 6 para indicar os outros três pontos. A soma dos quatros números que indicam os pontos de interseção de qualquer uma dessas circunferências é igual a S. O valor de S é:
a) 12
b) 14
c) 16
d) 18

122) **(EPCAR)** Luiza e Ana Beatriz possuem uma coleção de bonecas. Se Luiza tivesse $\frac{5}{6}$ da quantidade de bonecas que tem, e Ana Beatriz tivesse $\frac{1}{4}$ da quantidade de bonecas que possui, juntas teriam 3 bonecas a mais que Luiza. Mas se Luiza tivesse $\frac{4}{9}$ da quantidade de bonecas que tem e Ana Beatriz tivesse $\frac{7}{12}$ da quantidade que possui, juntas teriam 2 bonecas a menos do que Luiza.

Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) A coleção de Ana Beatriz tem maior número de bonecas que a coleção de Luiza.
b) A diferença do número de bonecas entre as duas coleções é um número primo.
c) Se Luiza der 3 bonecas para Ana Beatriz, as duas meninas terão a mesma quantidade de bonecas.
d) Juntas elas possuem menos de 100 bonecas.

123) **(EPCAR)** Dois irmãos gêmeos, Lucas e Mateus, em sua festa de aniversário, ganharam um certo número de camisas, cada um. Se Lucas der uma dessas camisas a Mateus, eles passarão a ter a mesma quantidade de camisas. Entretanto, se fosse Mateus que doasse a Lucas uma de suas camisas, este então teria o dobro do número de camisas de Mateus.
Considerando apenas as camisas recebidas de presente no aniversário, é correto afirmar que
a) Mateus ganhou 40% menos camisas do que Lucas.
b) Se x é o número de camisas de Lucas e y é o número de camisas de Mateus, então x e y são números primos entre si.
c) Os dois irmãos ganharam juntos mais de 12 camisas.
d) O número que representa a quantidade de camisas que Mateus ganhou é um número divisor de 63.

124) **(CEFET)** Um pai deixou de herança para seus filhos Aldo, Baldo e Caldo, mas determinou que, distribuída a herança:
° Aldo desse uma parte do que recebera a Baldo e a Caldo, de modo que os legados de Baldo e Caldo dobrassem;
° Depois disso, Baldo desse uma parte do que recebera a Aldo e a Caldo, de modo que os legados de Aldo e Caldo dobrassem;
° Finalmente, Caldo fizesse o mesmo, de modo que os legados de Aldo e Baldo dobrassem.
Cumpridas as determinações do pai, os filhos verificaram que cada um ficara com 160 mil reais. Qual é a soma dos algarismos do número que representa o que fora o legado original de Aldo?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

125) **(EPCAR)** A dá a B tantos reais quantos B possui e A dá a C tantos reais quantos C possui. Depois, B dá a Ae a C tantos reaisquantos cada um possui e **C**, finalmente, faz a mesma coisa. Se no final, terminam todos com 16 reais e sabendo que C começou com 50% de B mais um real, então A começou com:
a) 24 reais.
b) 26 reais.
c) 28 reais.
d) 30 reais.

126) **(CN)** Num gibi, um ser de outro planeta capturou em uma suas viagens três tipos de animais. O primeiro tinha 4 patas e 2 chifres, o segundo 2 patas e nenhum chifre e o terceiro 4 patas e 1 chifre. Quantos animais do terceiro tipo ele capturou, sabendo que existiam 227 cabeças, 782 patas e 303 chifres?
a) 24
b) 25
c) 26
d) 27
e) 30

127) **(UERJ)** Um feirante separou um número inteiro de dúzias de tangerinas (t), de maçãs (m) e de peras (p). Observou que, para cada maçã arrumada. havia 2 tangerinas. Com 90 dúzias, ele fez lotes com 6 tangerinas, lotes com 6 maçãs e lotes com 4 peras.

Colocou em cada lote, indistintamente, o preço de \$ 0.50. Arrecadou \$ 105.00 na venda de todos eles. Calcule t, m e p.

128) **(CN)** Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B . Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento A–B–A–B, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando–se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a:
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

129) **(CN)** Marta comprou petecas, bolas e bonecas, pagando por cada unidade, respectivamente, \$ 1,00, \$ 10,00 e \$ 20,00. Gastou \$ 220,00 em um total de 101 unidade desses brinquedos. Quantas petecas ela comprou?
a) 95
b) 93
c) 92
d) 91
e) 90

130) **(CN)** O conjunto dos trinta talheres de uma certa casa é constituído de garfos, facas e colheres, de aço inoxidável e aço comum. Sabe-se que:

- existem cinco facas, seis garfos e sete colheres, todos de aço comum.
- o número total de garfos é o dobro do número de facas de aço inoxidável.
- o número de facas de aço inoxidável excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço em duas unidades.

Quantas colheres tem esse conjunto de talheres?
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

131) **(CN)** O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão $\frac{x}{y}$ é dada por

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

GABARITO

1) S = {(4, 8)}
2) S = {(2, 3)}
3) S = {(3, -1)}
4) S = {(-2, 5)}
5) S = {(4, -7)}
6) S = {(1, 2)}
7) S = {(-1, -4)}
8) S = {(6, -8)}
9) S = ∅
10) S = {(0, -4)}
11) S = {(4, -3)}
12) S = {(2, 3)}
13) S = {(-2, 1)}
14) S = {(-3, 5)}
15) S = {(a, 3a)}
16) S = {(m, n)}
17) S = {(a + b, b - a)}
18) $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right\}$
19) $S = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)\right\}$
20) $S = \left\{\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)\right\}$
21) $S = \left\{\left(\frac{1}{5}, 1\right)\right\}$
22) S = {(4, 2)}
23) SPD
24) SI
25) SPI
26) SPD
27) SPD
28) SI
29) SPI
30) SPI
31) SPD
32) SPI
33) SI
34) SI
35) SPD
36) SPI
37) -9
38) -3
39) 2
40) $\frac{1}{2}$
41) $\begin{cases} a \neq \pm 10 \rightarrow SPD \\ a = 10 \rightarrow SPI \\ a = -10 \rightarrow SI \end{cases}$
42) $\begin{cases} m \neq \pm 6 \rightarrow SPD \\ m = 6 \text{ e } k = 12 \rightarrow SPI \\ m = 6 \text{ e } k \neq 12 \rightarrow SI \end{cases}$
43) $\begin{cases} m \neq 7 \rightarrow SPD \\ m = 7 \text{ e } k = -\frac{13}{3} \rightarrow SPI \\ m = 7 \text{ e } k \neq -\frac{13}{3} \rightarrow SI \end{cases}$
44) $m = -\frac{11}{3}$ e $k \neq \frac{9}{7}$
45) 0
46) a ≠ - 13
47) $m = -\frac{4}{23}$ e $p \neq -\frac{15}{11}$
48) 6
49) $m \neq \frac{35}{13}$
50) $a = \frac{9}{5}$ e $b \neq -\frac{9}{17}$
51) $a = \frac{43}{14}$ e $k \neq \frac{15}{2}$
52) 36
53) 30 e 60
54) B
55) D
56) B
57) 2 e 5
58) C
59) C
60) $\frac{40}{60}$
61) $\frac{15}{35}$
62) $\frac{60}{105}$
63) 12 e 5
64) 52 anos
65) 28
66) 7
67) 4t e 7q
68) 12 ta e 11 to
69) 18 de 4 e 5 de 3
70) 28 de 12 e 12 de 15
71) \$ 4,00
72) 2
73) 50g
74) 250
75) B
76) B
77) 32a e 45m
78) 100 e 200

79) 166 e 35g
80) 8
81) 26 de $ 0,50 e 8 de $ 1,00
82) 18
83) $t = \frac{2S}{V_0+V}$
84) C
85) E
86) C
87) A
88) E
89) D
90) A
91) C
92) A
93) E
94) E
95) D
96) D
97) C
98) A
99) a) R$ 193,00
b) R$ 30,00
100) a) $\begin{cases} 10m + 3p = 16350 \\ 8m + 6p = 14700 \end{cases}$
b) 1500 e 450
101) a) $\begin{cases} 140x + 10y = 12350 \\ 180x + 120y = 16200 \end{cases}$
b) R$ 17.000,00
102) a) R$ 2,10
b) R$ 2,60
103) 10
104) E
105) C
106) B
107) D
108) C
109) A
110) A
111) A
112) A
113) C
114) 54
115) C
116) B
117) A
118) D
119) D
120) E
121) B
122) C
123) B
124) D
125) B
126) B
127) 40, 20 e 30
128) D
129) E
130) A
131) A

OBSERVAÇÕES

Inequação do 1° grau

É toda sentença Matemática aberta que expressa uma desigualdade. Se essa inequação apresenta apenas uma variável com expoente igual a 1 é denominada inequação do 1° grau com uma variável.

Uma inequação se utiliza dos símbolos:
$>$ → maior que
$<$ → menor que
$\geq$ → maior ou igual a
$\leq$ → menor ou igual a

Exemplos:
a) $3x - 2 < 2x$

b) $\dfrac{5x-3}{4} \geq -1$

Princípios fundamentais

Partamos de uma desigualdade verdadeira: $2 < 3$

Agora multipliquemos ambos os membros por um mesmo número positivo, por exemplo, por 2: $4 < 6$

A desigualdade continua verdadeira. Multipliquemos, agora, ambos os membros por um exemplo, por –1: $-4 < -6$

O que é uma desigualdade falsa, pois: $-4 > -6$

Daí, podemos concluir que:

I) Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sinal da desigualdade não se altera.
II) Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, o sinal da desigualdade é invertido. Se for > passa a ser <, e vice–versa.

Resolução de uma inequação do 1° grau
Resolver uma inequação do 1° grau. É obter o seu conjunto-solução, explicitando a variável em um dos membros.

Exemplos:
Resolver as inequações abaixo, sendo U = R.
a) $x + 3 < 2$

Resolução:
$x < 2 - 3$
$x < -1$
$S = \{x \in R \mid x < -1\}$

b) $2x - 3 \geq 5 + 3x$

Resolução:
$2x - 3x \geq 5 + 3$
$-x \geq 8 \quad x(-1)$
$x \leq -8$
$S = \{x \in R \mid x \leq -8\}$

Representação na reta numerada

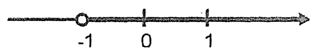
Quando resolvemos uma inequação, o seu conjunto-solução é um subconjunto de R, podendo ser, portanto, associado a um conjunto de pontos de uma reta numérica, a reta real.

Exemplos:
a) $2x - 5 \leq 3$

Resolução:
$2x \leq 3 + 5$
$2x \leq 8 \quad \therefore \quad x \leq 4$
$S = \{x \in R \mid x \leq 4\}$

b) $x + 2 < 4 + 3x$

Resolução:
$x - 3x < 4 - 2$
$-2x < 2 \quad x(-1)$
$2x > -2$
$x > -1$
$S = \{x \in R \mid x > -1\}$



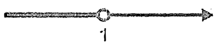
Sistemas de inequações do 1° grau

Para resolvermos um sistema de inequações do 1° grau, sugerimos ao leitor que resolva, como mostrado, cada uma das inequações em separado, marcando na reta o seu respectivo conjunto-solução. A solução será o conjunto de pontos da reta que pertencer a todos os conjuntos-solução das inequações dadas, simultaneamente.

Exemplos:
Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 2x < x + 1 \text{ (I)} \\ 3x < 4x + 3 \text{ (II)} \end{cases}$

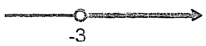
Resolução:
Vamos resolver a inequação (I):
$2x < x + 1$
$2x - x < 1$
$x < 1$



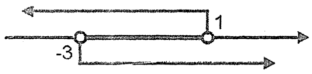
Vamos resolver a inequação (II)
$3x < 4x + 3$
$3x - 4x < 3$
$-x < 3$

Multiplicando–se ambos os membros por – 1

$x > -3$



Marcando os conjuntos-solução em uma mesma reta real, podemos verificar a região da reta pertencente simultaneamente às soluções das inequações que compõem o sistema.



$S = \{x \in R \mid -3 < x < 1\}$

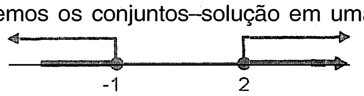
b) $\begin{cases} 7x + 1 \leq x - 5 \text{ (I)} \\ 2x - 2 \leq 5x - 8 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolução:
Vamos resolver a inequação (I):
$7x + 1 \leq x - 5$
$7x - x \leq -5 - 1$
$6x \leq -6$
$x \leq -1$

Agora, vamos resolver a inequação (II):
$2x - 2 \leq 5x - 8$
$2x - 5x \leq -8 + 2$
$-3x \leq -6$

Multiplicando–se ambos os membros por –1
$3x \geq 6$
$x \geq 2$

Marcaremos os conjuntos–solução em uma única reta.



Observamos que não existe qualquer número real que satisfaça às duas inequações ao mesmo tempo. Logo, o sistema não tem solução ou seja: **S = ∅**

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolva, em IR, as inequações abaixo.

1) $2x + 4 \leq x - 3$ $x \leq -7$

2) $5x + 3 \leq -7x + 5$ $x \leq \frac{1}{6}$

3) $2x + 1 > 3x + 2$ $x > -1$

4) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} < x + 6$

5) $\frac{2x+1}{4} - \frac{x+2}{3} \geq 3x + \frac{1}{3}$

6) $\frac{3x-2}{2} > x$

7) $\frac{1-x}{10} - \frac{1}{2} \leq \frac{3-x}{5}$

8) $\frac{2(3-2x)}{3} - \frac{4-6x}{2} > \frac{5(4-2x)}{4}$

9) $3x - 1 + 2.(4-x) \geq 5x + 3$

10) $4.(2-x) - x.(3-x) > (x-8).(x+1)$

11) $(x+1).(x-1).(x^2+1).(x^4+1) \geq x^6.\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)$

12) $(2+x).[6-(x-1).(3-x)] \leq x^2.\left(\frac{18}{x^2} + \frac{18}{x} - 2 + x\right)$

13) $(3-x).(x+4) + (x+2).(x+1) \leq \frac{14-x}{3}$

14) $(x+2).(x^2-2x+4) + (x-2).(x^2+2x+4) \leq 36 - 2x.(3+x).(3-x)$

II) Resolva as inequações a seguir, de acordo com o conjunto universo dado.

15) $x - 3 < 2$ (U = IN)

16) $3x - 6 \leq 15$ (U=IN)

17) $4 - 8x \leq 5 - 3x$ (U =IN)

18) $3(4x-8) + 2 \geq 5 - 2(3-2x)$ (U = IR)

19) $\frac{x}{2} - \frac{x-4}{3} > \frac{3}{2} + \frac{4x-5}{6}$ (U = IR)

20) $\frac{x-2}{3} - \frac{2x-2}{4} > \frac{1}{4}$ (U = Z)

III) Resolva, em IR, as inequações que se seguem.

21) $\begin{cases} 3x + 1 > 5 + 2x \\ 4 - 2x < 7 + x \end{cases}$

22) $\begin{cases} 4x - 3 > 3x - 1 \\ 3x + 1 > 4x - 4 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 4.(2-x) > 3.(x+5) \\ (x-3)^2 > (4-x).(6-x) \end{cases}$

24) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{3} < 2 \\ \frac{4-x}{3} - \frac{x-1}{4} < 2 - x \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2 - \{-x + 4.[2 - (3-x)]\} < 0 \\ \frac{x-1}{4} \leq \frac{2-x}{3} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \frac{3x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{4}{3} - \frac{4-x}{2} \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2-x}{3} \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

27) $\begin{cases} \frac{x + \frac{x+1}{2}}{3} - \frac{x - \frac{x-1}{3}}{2} \leq \frac{1}{6} \\ \frac{x}{2-\frac{1}{3}} - \frac{x}{3-\frac{1}{2}} \leq -\frac{4}{15} \end{cases}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

28) (CM) O conjunto de soluções da inequação $-4x - 10 < x - 6$ é:

a) $x > -\frac{4}{5}$

b) $x < -\frac{4}{5}$

c) $x > \frac{4}{5}$

d) $x < \frac{4}{5}$

29) (CM) O conjunto solução em da inequação $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \geq \frac{x+1}{3}$ é :

a) $\{x \in \Re \mid x \geq 1/10\}$
b) $\{x \in \Re \mid x \geq -3,5\}$
c) $\{x \in \Re \mid x \geq 7/2\}$
d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0,72\}$
e) $\{x \in \Re \mid x \leq -1/2\}$

30) (CM) O conjunto solução, em N, da inequação $\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-1}{4} > -1$, é :

a) $S = \left\{x \in \Re \,\middle|\, x < \frac{13}{7}\right\}$
b) S = {0, 1, 2}
c) S = {0, 1}
d) S = {-1, 0, 1}
e) S = {1}

31) **(CM)** O conjunto solução, em N (conjunto dos números naturais), da inequação $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{2} \leq 1$ é:
a) $S = \{x \in \Re | x \leq 4\}$
b) $S = \{x \in \Re | x < 4\}$
c) $S = \{1, 2, 3, 4\}$
d) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
e) $S = \{0, 1, 2, 3\}$

32) **(CEFETEQ)** Determine o maior número inteiro que satisfaz à inequação: $\frac{x+3}{6} - \frac{x-2}{4} > \frac{x-2}{8}$.

33) **(CEFET)** Quantos números inteiros x menores do que dez tornam verdadeira a desigualdade

$$\left(\frac{\sqrt{12}+1}{2}\right)^2 < x - \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)^2 ?$$

a) 3
b) 5
c) 8
d) 9

34) **(EPCAR)** O conjunto-solução da inequação $-3x + a > 7$ é $\{x \in IR \mid x < 2\}$. Então, tem-se necessariamente que a é um número real:
a) primo
b) menor que 2
c) par e menor que 10
d) ímpar menor que 10

35) **(CAP - UFRJ)** Qual o menor número inteiro que satisfaz à inequação $x - 6 - 2(x - 5) < 6x - 8$?

36) **(CAP - UFRJ)** Qual o maior número inteiro que satisfaz à inequação $-3(y + 4) + \frac{2y+3}{4} \geq 2$?

37) **(CEFET)** Seja x o número inteiro não nulo que satisfaz a inequação abaixo.
$4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$
O valor de x^2 é igual a:
a) 0
b) 1
c) 4
d) 9
e) 16

38) **(CEFET)** Dado U = IR, resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - 1 \leq 1 \\ x - 1 \geq -1 \end{cases}$$

39) **(CEFET)** Calcule os números inteiros que satisfaçam simultaneamente às desigualdades:
$2x - \frac{x-1}{3} > 5$ e $2x > 2 - 3(3 - x)$.

40) **(CEFETEQ)** Sendo U = Z, determinar a soma dos elementos do conjunto-solução da inequação:

$$1 \leq \frac{x}{2} + \frac{3x+26}{6} < \frac{2x+20}{3}.$$

41) **(CN)** $\sqrt{a^2 - 2ab - b^2}$, onde a e b são números positivos, a > b, é um nº real se, e somente se:
a) $\frac{a}{b} \geq 1 + \sqrt{2}$
b) $\frac{a}{b} \geq 0$
c) $\frac{a}{b} \geq \sqrt{2}$
d) $\frac{a}{b} \leq 0$
e) $\frac{a}{b} \geq 1$

42) **(CPII)** Uma empresa de assistência médica oferece dois planos, A e B.
No plano A, o segurado paga \$ 50,00 por mês e mais \$ 10,00 por consulta; no plano B, a mensalidade é de \$ 75,00, custando \$ 7,50 cada consulta. Suponha que um associado dessa empresa faça n consultas em um mês. Determine para que valores de n o plano B não será mais vantajoso, em custo, que o plano A.

43) **(CN)** Um vendedor comprou 50 camisetas por \$ 425,00. Quantas camisetas, no mínimo, deverá vender a \$ 11,00 cada, para obter lucro?
a) 37
b) 38
c) 39
d) 40
e) 41

44) **(CEFET)** O preço de cada maçã é R\$ 0,50 e de cada laranja é R\$ 0,20. Vicente quer comprar 15 frutas, mas tem em sua carteira apenas R\$ 5,00. Se ele deseja comprar o maior número de maçãs possível, podemos afirmar que o número de laranjas que Vicente irá comprar é:
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

45) **(CM)** Dois alunos do Colégio Militar, Jairo e Marcelo, disputam 100 partidas de xadrez, sem a ocorrência de empates. Sempre que Jairo vence uma partida, recebe R\$ 5,00 de Marcelo; e sempre que Marcelo vence uma partida, recebe R\$ 3,00 de Jairo. Qual o menor número de partidas que Jairo deve ganhar, para ter lucro nesta disputa?
a) 34
b) 35
c) 36
d) 37
e) 38

46) **(CEFET)** Telma e Cosme foram ao zoológico e viram a mesma quantidade de animais. Sabe-se que o triplo do número de animais vistos por Telma, menos 6 unidades, dá um resultado maior do que o número de animais que Cosme viu, acrescido de 19 unidades; e que o dobro do número de animais vistos por Telma dá um resultado maior do que o quádruplo do número visto por Cosme, diminuído de 27 unidades. Assim, Telma viu:
a) 12 animais
b) 13 animais
c) 14 animais
d) depende

47) **(CEFET)** Em uma indústria de bebidas há dois tonéis A e B, completamente vazios. Em A coloca-se uma certa quantidade inteira de litros de água; já no tonel B é colocado o mesmo número de litros, só que de vinho. Feito isto, retira-se a terça parte do conteúdo do tonel A, que é colocada no tonel B. Em seguida são colocadas 750 ml e 100 ml, respectivamente de conservantes nos tonéis A e B. Após essas operações verificam-se que em

A havia mais de 22 litros de mistura, enquanto que em B havia menos de 43 litros.
Quantos litros de água foram colocados inicialmente no tonel A?

48) **(CEFET)**Nos campeonatos de futebol, uma vitória vale três (3) pontos e um empate vale um (1) ponto. O aproveitamento de um time no campeonato é calculado pela porcentagem entre o número de pontos conquistados em relação ao máximo do número de pontos disputados. Num determinado momento de certo campeonato de futebol o time A havia conseguido uma vitória e ainda não havia perdido. Sabendo que esse desempenho conferiu ao time A um aproveitamento superior a 40%, calcule o número máximo de empates que ele pode ter conseguido até então.

GABARITO

1) $x \leq -7$

2) $x \leq \frac{1}{6}$

3) $x < -1$

4) $x > -35$

5) $x \leq -\frac{9}{34}$

6) $x > 2$

7) $x \leq 10$

8) $x > \frac{21}{8}$

9) $x \leq 1$

10) $\mathbb{R}$

11) $\varnothing$

12) $x > 0$

13) $x \leq -4$

14) $x \leq 2$

15) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

16) $S = \{0, 1, ..., 7\}$

17) $S = \mathbb{N}$

18) $x \geq \frac{21}{8}$

19) $x < \frac{4}{3}$

20) $x \leq -3$

21) $x > 4$

22) $2 < x < 5$

23) $\varnothing$

24) $x < 1$

25) $\varnothing$

26) $x \leq -\frac{10}{3}$

27) $x \leq -\frac{4}{3}$

28) A

29) C

30) C

31) D

32) 5

33) A

34) A

35) 2

36) -6

37) B

38) $0 \leq x \leq 2$

39) 3, 4, 5 e 6

40) 15

41) A

42) $n \leq 10$

43) C

44) E

45) E

46) B

47) 32

48) 8

OBSERVAÇÕES

Equação do 2° grau

Sendo *a, b* e *c* números reais e a diferente de zero, definimos a equação do 2° grau como sendo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Os números reais *a, b* e *c* são chamados de **coeficientes**.

Os valores de x que satisfazem à equação, são chamados de **raízes** ou **zeros** da equação.

Cálculo das raízes

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, a, b e c pertencentes a R e $a \neq 0$, podem ser obtidas através da fórmula de Báskara:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Assim sendo, uma das raízes é $x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, e a outra é $x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de ***DISCRIMINANTE*** da equação e é representado pela letra grega Δ. Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Discussão da natureza das raízes da equação do 2° grau

Consideremos três exemplos distintos:

1° exemplo:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\boxed{\Delta = 1 > 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Duas raízes reais e diferentes

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

2° exemplo:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$\boxed{\Delta = 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+0}{2} = 3$$

Duas raízes reais e iguais (raiz dupla)

$$x_2 = \frac{6-0}{2} = 3$$

3° exemplo:

$x^2 - x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$\boxed{\Delta = -15 < 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-15}}{2.1} \notin R$$

Duas raízes complexas

Conclusão:

$\Delta > 0$	$\Rightarrow$ duas raízes reais e diferentes
$\Delta = 0$	$\Rightarrow$ duas raízes reais e iguais
$\Delta \geq 0$	$\Rightarrow$ duas raízes reais
$\Delta < 0$	$\Rightarrow$ duas raízes complexas

Relações entre coeficiente e raízes

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c ∈ R e $a \neq 0$. Suas raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

I) Soma das raízes

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac} - b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$S = -\frac{2b}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{S = -\frac{b}{a}}$$

II) Produto das raízes

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 + b \cdot \sqrt{b^2-4ac} - b \cdot \sqrt{b^2-4ac} - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \quad \therefore \quad \boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Exemplo:

Dê a soma e o produto das raízes da equação $3x^2 - 6x + 4 = 0$

Resolução:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-6)}{3} \quad \therefore \quad S = 2$$

$$P = \frac{c}{a} \quad \therefore \quad P = \frac{4}{3}$$

III) Diferença entre as raízes

Supondo que $x_1 \geq x_2$, calculemos a diferença não negativa entre elas.

$$D = x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{D = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}}$$

Exemplo:

Determine a diferença entre as raízes da equação $2x^2 - 5x - 8 = 0$.

Resolução:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2\,(-8) = 25 + 64 = 89$

$$\Delta = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

IV) Soma dos inversos das raízes

$$S_{inv} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$$

$$\boxed{S_{inv} = \frac{S}{P}}$$

Podemos desenvolver mais ainda esta relação:

$$S_{inv} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} . \frac{a}{c}$$

$$\boxed{S_{inv} = -\frac{b}{c}}$$

Exemplo:
Determine a soma dos inversos das raízes da equação $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Resolução:

$$S_{inv} = -\frac{b}{c} = -\frac{-8}{4}$$

$$S_{inv} = 2$$

IV) Soma dos quadrados das raízes

$$S_{\square} = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \text{ (verifique!)}$$

$$\boxed{S_{\square} = S^2 - 2P}$$

Nota do autor:
Para o melhor entendimento da demonstração anterior, sugere–se uma prévia leitura do capítulo "Produtos notáveis", item "Quadrado de uma soma".

Exemplo:
Determine a soma dos quadrados das raízes da equação $5x^2 + 2x + 8 = 0$.

Resolução:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{5}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8}{5}$$

$$S_{\circ} = S^2 - 2P = \left(\frac{-2}{5}\right)^2 - 2 . \frac{8}{5} = \frac{4}{25_{/1}} - \frac{16}{5_{/5}} = \frac{4 - 80}{25}$$

$$S_{\circ} = -\frac{76}{25}$$

Principais tipos de raízes

No quadro abaixo destacamos os principais tipos de raízes e as condições para que elas ocorram.

Tipos de Raízes	Condições
Raízes simétricas	$b = 0$
Uma raiz nula	$c = 0$
Raízes nulas	$b = 0$ e $c = 0$
Raízes inversas	$c = a$

Exemplos:
a) Determine o valor de *m* para que as raízes da equação $4x^2 + (3 - m) . x - 2 = 0$ sejam simétricas.

Resolução:
Condição: $b = 0$
$3 - m = 0 \quad \therefore \quad m = 3$

b) Uma das raízes da equação $7x^2 - 4x + 3k - 1 = 0$ é nula. Determine o valor de k.

Resolução:
Condição: $c = 0$
$3k - 1 = 0$
$3k = 1 \quad \therefore \quad k = 1/3$

c) A equação $7x^2 + (m - 4) . x + 5 + k = 0$ só admite raízes nulas. Determine os valores de m e k.

Resolução:
Condição: $b = 0$ e $c = 0$
$m - 4 = 0$ | $5 + k = 0$
$m = 4$ | $k = -5$

d) Determine o valor de m de modo que a equação $3x^2 - 5x + 6m - 3 = 0$ admita raízes inversas.

Resolução:
Condição: $c = a$
$6m - 3 = 3$
$6m = 6 \quad \therefore \quad m = 1$

Raízes múltiplas

Para que uma equação do 2° grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, possua uma de suas raízes igual a k vezes a outra raiz, é necessário que seja satisfeita a relação abaixo:

$$\boxed{k.b^2 = a.c.(k + 1)^2}$$

Exemplo:
Determine o valor de m de modo que uma das raízes da equação $x^2 - 18x + m = 0$ seja o óctuplo da outra.

1ª Resolução:
Podemos resolver tal exercício sem a utilização da relação anterior. Em primeiro lugar vamos estabelecer quais são as raízes.

Raízes: x_1; $8x_1$

Podemos determinar a soma delas:

$$S = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + 8x_1 = -\frac{(-18)}{1}$$

$9x_1 = 18$
$x_1 = 2$

Já determinamos uma das raízes. Agora, basta substituir seu valor no lugar da variável da equação.
$x^2 - 18x + m = 0$
$2^2 - 18 . 2 + m = 0$
$4 - 36 + m = 0$
$m = 32$

2ª Resolução:
Vamos aplicar a relação citada.
$k . b^2 = a . c . (k + 1)^2$

Como uma raiz é o óctuplo da outra, teremos $k = 8$.
$8 . (-18)^2 = 1 . m . (8 + 1)^2$
$8 . 324 = m . 81$
$81m = 2592 \quad \therefore \quad m = 32$

Composição da equação dada as raízes

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$.

Dividindo-se ambos os termos por a, teremos:

$$\frac{a}{a}.x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\boxed{x^2 - S.x + P = 0}$$

Exemplo:

Qual a equação do 2° grau que tem raízes iguais a –2 e 6?

Resolução:

$S = -2 + 6 = 4$

$P = -2.6 = -12$

$x^2 - S.x + P = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolva as equações que se seguem, sendo U = R.

1) $x^2 = 5x$

2) $4x^2 + 32x = 0$

3) $5x^2 + 4 = 2(x + 2)$

4) $\frac{x^2}{3} - \frac{x-9}{6} = \frac{1}{3}$

5) $x^2 - 9 = 0$

6) $3x^2 = 48$

7) $(x + \frac{1}{3}).(x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

8) $x^2 + 4 = 0$

9) $6x^2 = 0$

10) $3(x-2)^2 - (x-4).(x-2) = 2(2-3x)$

11) $x^2 - 5x + 6 = 0$

12) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

13) $x^2 + 8x + 15 = 0$

14) $x^2 - 4x + 1 = 0$

15) $-x^2 + 2x + 1 = 0$

16) $x^2 - 4x + 5 = 0$

17) $x^2 - 6x + 8 = 0$

18) $x^2 - 8x + 16 = 0$

19) $x^2 - 6x + 5 = 0$

20) $x^2 + x + 2 = 0$

21) $x^2 + 5x + 6 = 0$

22) $x^2 + 3x - 4 = 0$

23) $x^2 - 14x + 49 = 0$

24) $x^2 - 6x = 0$

25) $x^2 - 2x + 3 = 0$

26) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

27) $x^2 - 8x + 14 = 0$

28) $20x^2 - 17x + 3 = 0$

29) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

30) $3x^2 + 4x + 5 = 0$

31) $(x+1)^2 - 7.(x+1) + 10 = 0$

32) $(3-x)^2 + 8.(3-x) + 12 = 0$

33) $\left(\frac{x+4}{3}\right)^2 - 2.\frac{(x+4)}{3} - 24 = 0$

34) $(x^2 - 7x + 3)^2 + 10.(x^2 - 7x + 3) + 21 = 0$

35) $(x^2 + 6x + 7)^2 - (x^2 + 6x + 7) - 2 = 0$

II) Resolver as equações literais a seguir:

36) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$

37) $3x^2 - 8ax - 3a^2 = 0$

38) $ax^2 - (2a^2 - 1)x - 2a = 0$

39) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$

40) $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$

41) $ax^2 - (a^2 + 1).x + a = 0$

42) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

43) $abx^2 - (a + b).x + 1 = 0$

44) $ax^2 - (a^2 - 2).x - 2a = 0$

45) $4x^2 - 4ax + a^2 - 1 = 0$

46) $2x^2 - kx = 0$

47) $x^2 - 2mx + m^2 - 9 = 0$

48) $x^2 - 6x + 8 + 2m - m^2 = 0$

49) $(x-a)^2 - 5a.(x-a) + 6a^2 = 0$

III) Resolva as seguinte equações fracionárias:

50) $\frac{x+4}{x-6} - \frac{2x-2}{x-7} = -2$

51) $\frac{3x}{x+3} - \frac{x+12}{x-3} = -4$

52) $\frac{4}{x+1} + \frac{3x+14}{x^2-x-2} = \frac{6-x}{x-2}$

53) $\frac{4-x}{2+x} + \frac{x-6}{x-3} = 4$

54) $\frac{8}{(x-1).(3-x)} + \frac{x+3}{x-1} = 1$

55) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{56}{(2-x).(x-4)} = 9$

56) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{(x-1).(x+3)} = 3$

57) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{3x+1}{x-1} = 0$

58) $\frac{7}{x-2} + \frac{8}{x-5} = 3$

59) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

60) $\frac{x+5}{x-5} = \frac{10}{3} - \frac{x-5}{x+5}$

61) $\frac{5}{(x-3).(x-2)} - \frac{x-7}{x-2} = -4$

62) $\frac{2x+1}{x-4} - \frac{3x-1}{x+3} = \frac{50-20x}{-x^2+x+12}$

63) $\frac{2x-a}{x+a} + \frac{4x+a}{x-a} = \frac{5x^2+10a^2}{x^2-a^2}$

64) $\frac{x^2}{x^2+3px+2p^2} + \frac{x+2p}{x+p} = \frac{x-2p}{x+2p}$

IV) Compor as equações do 2º grau de raízes:

65) 2 e – 3

66) 0 e 1

67) 0 e – 4

68) 5 e – 5

69) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$

70) $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{3}$

71) $\frac{-2}{5}$ e $\frac{1}{7}$

72) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

73) $\sqrt{2}+1$ e $\sqrt{2}-1$

74) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$

75) a e 2a

76) $-3a$ e $\frac{a}{2}$

V) Determine a soma e o produto das raízes das equações:

77) $x^2+3x=0$

78) $x^2-16=0$

79) $x^2-5x=0$

80) $x^2+2x-3=0$

81) $x^2+3x+4=0$

82) $3x^2-2x+1=0$

83) $7x^2-5x-1=0$

84) $2x^2-5ax+2a^2=0$

85) $2px^2-qx+pq=0$

86) $x^2.(4-x)=(5+x).(5-x).(2+x)$

87) $\frac{x-1}{3}.(x+2)-4x^2+\frac{2}{5}=(3-x).(x+3)-13+(x-2).x$

88) $(m^2-n^2).x^2+(m+n).x+m-n=0$

89) $2x^2+(a+b).x+\frac{a^2}{8}+\frac{ab}{4}-3b^2=0$

VI) Determine, sem resolver as equações que se seguem os sinais de suas raízes m e n ($|m| \geq |n|$).

90) $4x^2-8x+1=0$

91) $2x^2-3x-4=0$

92) $3x^2+5x+2=0$

93) $7x^2+x-3=0$

94) $5x^2-6x+4=0$

95) $x^2-20x+100=0$

96) $kx^2+(k+2).x+\frac{k}{4}+\frac{5}{k}+1=0$

97) $(k^2+1).x^2+(k^2+3).x+k^2=0$

98) $a^2.x^2-(a^2+1).x-2a^2=0$

VII) Relações entre coeficientes e raízes.

99) Dada a equação $5x^2+2x+4=0$, determine a(o):
a) soma das raízes.
b) produto das raízes.
c) soma dos quadrados das raízes.
d) soma dos inversos das raízes.

100) Com relação à equação $3x^2-8x+5=0$, determine:
a) A soma das raízes.
b) O produto das raízes.
c) A diferença das raízes.
d) A soma dos quadrados das raízes.
e) A média aritmética das raízes.
f) A média geométrica das raízes.
g) A média harmônica das raízes.
h) A soma dos inversos das raízes.
i) A soma entre os cubos das raízes.
j) A diferença entre os cubos das raízes.

101) Determine o valor de k de modo que as raízes da equação $3x^2 + (-k + 5) . x - k^2 = 0$ sejam simétricas.

102) Apenas uma das raízes da equação $5x^2 + (2 - k) . x + 4 - k^2 = 0$ é nula. Calcule k.

103) A equação $4x^2 + (m^2 - 9) . x + 3 - m = 0$ admite raízes nulas. Determine o valor de m.

104) Determine o valor de p para que a equação $(p - 1). x^2 + 5x + 3p + 6 = 0$ admita raízes inversas.

105) O número – 4 é raiz da equação $3x^2 - mx - 1 = 0$. Determine o valor de m.

106) Sendo "m" e "n" raízes da equação $x^2 - x + 2 = 0$, determine:

I) A soma dos inversos das raízes, ou seja: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

II) A soma dos quadrados das raízes, ou seja $m^2 + n^2$.

III) A soma dos cubos das raizes, ou seja $m^3 + n^3$.

107) Determine m de modo que a equação $mx^2 - 5x + 2 = 0$, tenha raízes reais.

108) Determine m de modo que a equação $9x^2 + mx + 4 = 0$ tenha raízes duplas.

109) A equação $2x^2 - 3x + 4m = 0$, não tem raízes reais. Determine o valor de m.

110) Uma das raízes da equação $2x^2 - 12x + k - 2 = 0$ excede a outra em 3 unidades. Determine o valor de k.

111) Calcule m de modo que uma das raízes da equação $2x^2 - kx - 54 = 0$ seja o quadrado da outra.

112) As raízes da equação $3x^2 - 10x + m - 2 = 0$ são inversas. Calcule m.

113) Apenas uma das raízes da equação $4x^2 + (k - 3) . x + k^2 - 9 = 0$ é nula. Determine o valor de k.

114) Uma das raízes da equação $2x^2 - 32x + k = 0$ é o triplo da outra. Determine o valor de k.

115) Uma das raízes da equação $x^2 + mx + 100 = 0$ é o quádruplo da outra. Determine o valor de m.

116) Determine "p" para que a equação $px^2 + (8 - p) x + p^2 - 64 = 0$, tenha somente uma raiz nula.

117) O produto das raízes da equação $x^2 - 1 = x - \frac{1}{4}$ é:

a) – 12
b) 3/4
c) $2\sqrt{6}$
d) – 3/4

118) Que valores reais deve assumir "m" para que a equação $3x^2 - 8x + 3m = 0$, tenha raízes reais e diferentes?

a) $m = \frac{16}{9}$

b) $m < \frac{16}{9}$

c) $m > \frac{16}{9}$

d) $m \geq \frac{16}{9}$

119) Na equação $x^2 - (m - 6) . x + 5 - m = 0$, para que as raízes sejam reais e iguais, o valor de m deve ser:
a) 4
b) 6
c) 10
d) 12

120) Dada a equação $x^2 - kx + 21 = 0$, determine o valor de k, para que uma das raízes seja o triplo da outra (U = R).

a) $\pm \sqrt{7}$
b) ± 7
c) $\pm 4\sqrt{7}$
d) ± 28

121) A equação $ax^2 + c = 0$ terá sempre raízes reais se:
a) $c > 0$ e $a < 0$
b) $c < 0$ e $a < 0$
c) $c \neq 0$ e $a \neq 0$
d) $c > 0$ e $a > 0$

122) A equação do 2º grau $x^2 - 4x + m - 1 = 0$, tem raízes reais e desiguais quando:
a) $m > 5$
b) $m < -5$
c) $m > -5$
d) $m < 5$

123) Na equação $2px^2 + 3pqx + 3q = 0$, a soma das raízes é 9 e o produto é 12. Calculando p + q, encontra-se:

a) $\frac{21}{4}$

b) $-\frac{21}{4}$

c) $-\frac{27}{4}$

d) –27

e) $\frac{27}{4}$

124) Sabendo-se que a e b são as raízes da equação $3x^2 - x + 2 = 0$, determine o valor da expressão:

$$E = a + b + a^2 + b^2 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

125) Qual o maior valor inteiro de m que torna as raízes da equação $4x^2 + 3x + m + 2 = 0$, reais?

126) A equação $(3 + a) . x^2 + 2x + 2 = 0$, não admite raízes reais. Determine o menor valor inteiro possível para a.

127) Determine o valor de k na equação $3x^2 + (k + 1)x + 3 = 0$, de modo que as médias aritmética e geométrica das raízes sejam iguais.

128) Determine o(s) valor (es) de "p" para que a equação $x^2 - 8x + p = 0$ tenha:
a) duas raízes reais e distintas
b) uma raiz dupla
c) nenhuma raiz real

129) Sabendo-se que a e b são as raízes da equação $2x^2 - 6x + 5 = 0$, determine o valor da expressão $a^a . b^b . a^b . b^a$.

130) A equação $2x^2 - 4x - 2 = 0$ tem raízes x_1 e x_2. Uma equação com raízes $2x_1$ e $2x_2$ é:
a) $4x^2 - 8x - 4 = 0$

b) $x^2 - 4x - 2 = 0$
c) $x^2 - 4x - 4 = 0$
d) $x^2 - 2x - 1 = 0$

131) Escreva uma equação do 2° grau cujas raízes são respectivamente, a média aritmética e a média geométrica entre as raízes da equação $x^2 - 6x + 16 = 0$.

132) Dê uma equação do 2° grau cujas raízes são, a média aritmética e a média harmônica das raízes da equação $3x^2 - 2x + 6 = 0$.

133) Determine a soma dos inversos das raízes da equação $2x^2 + 11x + m = 0$, sabendo-se que elas são recíprocas.

134) Dê uma equação do 2° grau cujas raízes sejam os triplos das raízes da equação $2x^2 + 3x + 7 = 0$.

135) Escreva uma equação do 2° grau cujas raízes sejam iguais às metades das raízes da equação $7x^2 + 6x + 8 = 0$.

136) Determine uma equação do 2° grau cujas raízes sejam iguais às raízes da equação $2x^2 + 5x + 3 = 0$, adicionadas de 2 unidades cada uma.

137) Sabendo-se que as raízes da equação $5x^2 + x + 2 = 0$, são m e n, escreva uma equação do 2° grau de raízes $m - 3$ e $n - 3$.

138) Determine o valor de x, sabendo-se que $(123)_x = 27$.

QUESTÕES DE CONCURSOS

139) **(EPCAR)** Considere os conjuntos:
$A = \{a \in N^* \mid a < 5\}$
$B = \{b \in Z \mid 1 < b < 5\}$
$C = \{c \in N^* \mid 2c^2 - 8c = 0\}$
$D = \{x \in N \mid x \text{ é primo e } x < 7\}$
se $A \cap E = \{3\}$ e $B \cup E = D \cup C$, então o conjunto E é igual a:
a) {3}
b) {3, 5}
c) {3, 5,7}
d) {3, 4, 5}

140) **(PUC)** Considere as soluções da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$, ou seja, aqueles números reais x tais que $|x|^2 + |x| - 6 = 0$. Então:
a) só existe uma solução.
b) a soma das soluções é um.
c) a soma das soluções é zero.
d) o produto das soluções é quatro.
e) o produto das soluções é menos seis.

141) **(CM)** Quando a fatoração do 1° membro de uma equação racional inteira de grau igual ou superior a 2 for possível, sendo nulo o 2° membro, torna-se fácil calcular as raízes dessa equação. Assim, para a equação $x^3 - 13x^2 - 2x + 26 = 0$, podemos garantir que sua maior raiz é um número:
a) inteiro, não primo
b) real, não racional
c) primo, menor que 6
d) primo, compreendido entre 6 e 12
e) primo, maior que 12

142) **(CM)** As raízes da equação fracionária $\frac{8x}{3} = \frac{12}{2x}$ são:
a) 3 e -3
b) 6 e -6
c) $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$

143) **(CM)** Os valores reais de x para os quais a expressão $\frac{1}{2x^2 + 3x - 2}$ representa um número real são:
a) $\Re - \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$
b) $\Re - \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$
c)
d) $\Re - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

144) **(CM)** Sendo a e b as raízes da equação $3x^2 - 6x + 2 = 0$, o valor de $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$:
a) 1/4
b) 1/2
c) 1
d) 5/3
e) 5/8

145) **(CM)** Sabendo-se que $\frac{x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 2y - 15}{x + y - 3} = 13$, determine x + y.
a) 3
b) 5
c) 7
d) 8
e) 11

146) **(CM)** Sabendo que na equação $2{,}0\bar{3} - \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$, p e q são números naturais, sendo p > q e p + q = 11, é correto afirmar que p vale:
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

147) **(CN)** Analise as afirmativas abaixo.
I - Dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si.
II - Se o inteiro x é múltiplo do inteiro y e x é múltiplo do inteiro z, então x é múltiplo do inteiro yz.
III - A igualdade (1/a) + (1/b) = 2/(a + b), é possível no campo dos reais.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

148) **(CN)** Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de 'N' e 'n' lados (N≠n), e com 'D' e 'd' diagonais, respectivamente, de modo que N – n = D – d. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) indeterminada.

149) **(CN)** Dada a equação: $(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 3x - 17)^2 = 0$, pode-se afirmar que, no universo dos números o seu conjunto solução
a) é vazio.
b) tem apenas um elemento.
c) tem apenas dois elementos.
d) tem apenas três elementos.
e) tem apenas quatro elementos.

150) **(CN)** Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1$$

a) $-\frac{2}{3}$
b) $-\frac{1}{3}$
c) 1
d) 2

151) **(CEFETEQ)** Resolver a equação abaixo:

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{1-x}=\frac{2x^2-4}{x^2-1} \text{ para } x \neq \pm 1.$$

152) **(CEFETEQ)** Resolver a equação algébrica abaixo, sabendo que $x \neq \pm 1$ e $x \neq \pm 4$.

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} \div \frac{x^2-5x+4}{2x+8}+\frac{3}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}.$$

153) **(CEFET)** Sobre o conjunto-verdade da equação $\left(\frac{x+y}{x.y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2.y^2}$, no universo dos números reais, podemos afirmar que:

a) é infinito
b) é vazio.
c) é unitário.
d) contém números negativos.
e) contém dízimas periódicas.

154) **(CN)** O conjunto-solução da equação: $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}}=1$ é igual a:
a) 0
b) R
c) R – {– 1, 0, 1}
d) R – {– 1, 1}
e) {0}

155) **(CPII)** A equação do 2º grau cujas raízes são iguais a $\frac{1}{3}$ e $-\frac{3}{5}$ é:
a) $15x^2 + 4x - 3 = 0$
b) $15x^2 + 3x - 4 = 0$
c) $15x^2 - 4x - 3 = 0$
d) $15x^2 + 4x + 3 = 0$

156) **(E. E. Aer)** Formar a equação do 2º grau, sendo suas raízes $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$ e $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$.
a) $25x^2 - 4x + 2 = 0$
b) $x.(25x - 20) = -2$
c) $x.(25x - 20) = 2$
d) $x = \frac{4x}{5} + \frac{2}{25}$

157) **(PUC)** Qual a equação do 2º grau cujas raízes são iguais a $-\frac{3}{4}$ e 0,9?
a) $40x^2 + 6x - 27 = 0$
b) $40x^2 - 6x - 27 = 0$
c) $x^2 + 6x - 27 = 0$
d) $x^2 - 6x + 27 = 0$

158) **(CEFET)** A equação cujas raízes são $\frac{2a}{3}$ e $-\frac{a}{3}$, é:
a) $9x^2 + 3ax - 2a^2 = 0$
b) $9x^2 - 3ax - 2a^2 = 0$
c) $9x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$
d) $-9x^2 - 3ax - 2a^2 = 0$

159) **(PUC)** Uma solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é o dobro da outra. Então,
a) $4b^2 = 9c$
b) $2b^2 = 9ac$
c) $2b^2 = 9a$
d) $b^2 = 8ac$
e) $9b^2 = 2ac$

160) **(CEFET)** Considere as definições abaixo:
I – A média aritmética simples de dois números é a metade da soma deles.
II – A média geométrica simples de dois números não-negativos é a raiz quadrada não-negativa do produto deles.
Sabendo que a média aritmética simples e a média geométrica simples de dois números r e s são respectivamente, 7,5 e 1,5, podemos afirmar que **r** e **s** são as raízes da equação:
a) $x^2 - 9x + 11{,}25 = 0$
b) $4x^2 - 60x + 9 = 0$
c) $x^2 + 9x - 11{,}25 = 0$
d) $2x^2 + 15x - 2{,}25 = 0$
e) $3x^2 - 3x + 15 = 0$

161) **(CM)** Se a média aritmética e a média geométrica de dois números reais positivos a e b, com a < b, são respectivamente 10 e 8, então o valor da expressão $\sqrt[a]{b}$, é:
a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) 1

162) **(CM)** Se a e b são as raízes da equação de 2º grau $x^2 - 4x + 2 = 0$, então qual das alternativas abaixo apresenta uma equação de 2º grau com as raízes iguais a^3 e b^3?
a) $x^2 - 32x + 8 = 0$
b) $x^2 - 36x + 8 = 0$
c) $x^2 - 40x + 8 = 0$
d) $x^2 - 48x + 8 = 0$
e) $x^2 - 64x + 8 = 0$

163) **(CEFETEQ)** A equação $x^2 - 75x + 1 = 0$, tem suas raízes representadas por a e b. Determine o valor da expressão

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

164) **(CESGRANRIO)** Sobre a equação $1983x^2 - 1984x - 1985 = 0$, a afirmativa correta é:
a) não tem raiz real
b) tem duas raízes simétricas
c) tem duas raízes reais e distintas
d) tem duas raízes positivas
e) tem duas raízes negativas

165) **(CM)** Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde a. b e c são números reais:
a) tem sempre duas raízes reais
b) tem sempre raízes simétricas
c) tem sempre raízes inteiras
d) pode ser uma equação do primeiro grau
e) jamais terá raízes iguais

166) **(EPCAR)** A equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais opostas e não–nulas. Pode-se então afirmar que:
a) $p > 0$ e $q = 0$
b) $p < 0$ e $q = 0$
c) $p = 0$ e $q > 0$
d) $p = 0$ e $q < 0$

167) **(CM)** Para quantos valores de $k \in N$, a equação $-3x^2 + 6x + 7 - k = 0$, admite raízes reais?
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

168) **(CN)** Dada a equação na variável real x : $7x - \frac{3}{x} = k$, pode-se concluir, em função do parâmetro real k, que essa equação
a) tem raízes reais só se k for um número positivo.
b) tem raízes reais só se k for um número negativo.
c) tem raízes reais para qualquer valor de k.
d) tem raízes reais para somente para dois valores de k.
e) nunca terá raízes reais.

169) **(CN)** Dada a equação do 2º grau na incógnita x : $4x^2 + kx + 3 = 0$. Quantos são os valores inteiros possíveis do parâmetro k, tais que essa equação só admita raízes racionais?
a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

170) **(CN)** O conjunto dos valores m para os quais as equações $3x^2 - 8x + 2m = 0$ e $2x^2 - 5x + m = 0$, possuem uma e apenas uma raiz real comum é:
a) unitário, de elemento positivo
b) unitário, de elemento não negativo
c) composto de 2 elementos não positivos
d) composto de 2 elementos não negativos
e) vazio

171) **(CM)** Sendo $m \in R$, considere a equação do 2º grau na variável x, abaixo indicada:
$(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + (m - 1) = 0$.
Os valores de m para que a equação tenha raízes reais e negativas são:
a) $m > 1$
b) $m < -1$ ou $m > 1$
c) $m < -1$
d) $-1 < m < 1$
e) $m \geq 1$

172) **(CM)** Se as raízes da equação $2x^2 + mx + n = 0$ são $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, então o valor da expressão $p = (m)^n$ é:
a) 16
b) 4
c) $\frac{1}{4}$
d) -8

173) **(EPCAR)** Analise as alternativas abaixo, considerando todas as equações na incógnita x, e, a seguir, marque a correta.
a) Na equação $x^2 - mx + n = 0$ $(m, n \in R)$, sabe-se que a e b são raízes reais. Logo, o valor de $(a + b) - (a - b)$ é, necessariamente, $(n - m)$.
b) Para que a soma das raízes da equação $2x^2 - 3x + p = 0$ $(p \in R)$ seja igual ao produto dessas raízes, p deve ser igual a $\frac{3}{2}$.
c) Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0$ $(m \in R)$ **NÃO** possui raízes reais, então o valor de m pode ser igual a $-\frac{3}{4}$.
d) Uma das raízes da equação $x^2 + Sx - P = 0$ $(S, P \in R)$ é o número 1, logo $(S - P)$ é igual a $- 1$.

174) **(CEFET)** Calcule a e b de modo que sejam as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$.

175) **(EPCAR)** Sejam m e n as raízes inteiras da equação $x^2 - qx + p = 0$. Sabendo-se que $m^n \cdot n^m \cdot m^m \cdot n^n = 81$, pode-se afirmar que
a) p é divisor de 4
b) m e n são ímpares.
c) pq é inteiro negativo
d) q é múltiplo de 81.

176) **(CAP-UFRJ)** Sabendo que a equação $x^2 - 12x + 16m = 0$ admite raízes cuja diferença é 4, qual o valor de m?

177) **(CEFET)** Qual a diferença das raízes da equação: $mx^2 + (m - p)x - p = 0$ $m \in R^*_+$?

178) **(CM)** A diferença entre as raízes da equação $2x^2 - 14x = 1 - m$, $U = R$, é 1. O valor de m pertence ao intervalo:
a) $]-\infty, -10]$
b) $[-10, -2]$
c) $[-2, 2[$
d) $[2, 10[$
e) $[10, +\infty[$

179) **(CM)** Sabendo que a diferença entre as raízes da equação do 2º grau dada por $x^2 + (-m + 1)x = m$ é 3, o produto dos possíveis valores de m é:
a) 8
b) 4
c) 1
d) -4
e) -8

180) **(EPCAR)** Uma professora de 8ª série colocou numa avaliação três equações do 2º grau na incógnita x para serem resolvidas. Ela observou que essas equações tinham as seguintes características:
° a primeira e a terceira equações possuem os coeficientes do termo de maior grau unitário e os coeficientes de x iguais;

- a terceira equação tinha conjunto solução {-6, 2};
- na primeira e na segunda equações o termo independente de x era o mesmo e os coeficientes do termo de maior grau eram opostos;
- a segunda equação tinha conjunto solução {1, 3}.

Com base nesses dados, é correto afirmar que a:

a) diferença entre as raízes da primeira equação é um número que pertence ao conjunto [R – Q].

b) soma dos coeficientes da primeira equação NÃO é par.

c) razão entre o termo independente de x da segunda equação e o termo independente de x da terceira é um número inteiro.

d) soma dos coeficientes da segunda equação é diferentes de zero.

181) **(CM)** Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - 7x - 49 = 0$, então o valor da expressão $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, é:

a) 7

b) $\frac{1}{7}$

c) - 49

d) - 7

e) $-\frac{1}{7}$

182) **(EPCAR)** Dada a equação $9x^2 - mx + 20 = 0$ e sabendo-se que a soma dos inversos das raízes é $\frac{63}{20}$, então m é um número divisível por:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

183) **(CEFETEQ)** A soma dos inversos das raízes da equação $(p^2 - 1)x^2 + (p + 1)x - (3p - 1) = 0$, onde $p \neq 1$, $p \neq -1$ e $p \neq \frac{1}{3}$, é igual a $\frac{1}{2}$. Determine o valor de p.

184) **(CAP-UFRJ)** Sejam a e b as raízes da equação $(m - 1)x^2 - (m + 1)x - 2 = 0$. Para que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ seja igual a $-\frac{7}{2}$, qual deverá ser o valor de m?

185) **(CN)** A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m + n" é expresso por:

a) $\frac{3abc - b^3}{a^2c}$

b) $\frac{3abc + b^3}{a^2c}$

c) $\frac{3abc - b^3}{c^2a}$

d) $\frac{abc + b^3}{c^2a}$

e) $\frac{abc - b^3}{a^2c}$

186) **(CN)** Qual é a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2º grau $x^2 - 6x + 2 = 0$?

a) $\left(6+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

b) $\left(6+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$

c) $\left(3+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

d) $\left(3+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$

e) $\left(3+3\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

187) **(CN)** Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$, com x real e $x \neq \pm 1$?

a) 16

b) 20

c) 23

d) 25

e) 30

188) **(CN)** O número $a \neq 0$ tem inverso igual a b. Sabendo-se que a + b = 2, qual é o valor de $(a^3 + b^3) . (a^4 - b^4)$?

a) 8

b) 6

c) 4

d) 2

e) 0

189) **(CN)** A média harmônica entre as raízes da equação $340x^2 - 13x - 91 = 0$, é:

a) 7

b) – 7

c) $\frac{340}{7}$

d) $\frac{1}{7}$

e) – 14

190) **(EPCAR)** Se m e n (m, n ∈ R) são raízes reais da equação $x^2 - bx + b = 0$ e b é um número natural primo, é correto afirmar que

a) (m – 2)(n – 2) é, necessariamente, um número natural ímpar.

b) $m^2 + n^2$ é, necessariamente, um número natural par.

c) $m^3 + n^3$ é, necessariamente, um número inteiro par.

d) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ é diferente da unidade.

191) **(CN)** A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é 0,25. Determine o valor de $\frac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2º grau e a > b, e assinale a opção correta.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

c) -1

d) $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$

e) $\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

192) **(CN)** A soma e o produto das raízes da equação $(x^2 - 5x + 6)^2 - 5(x^2 - 5x + 6) + 6 = 0$ são, respectivamente:
a) 6 e 8
b) 7 e 10
c) 10 e 12
d) 15 e 16
e) 15 e 20

193) **(CN)** Qual é a soma dos valores reais de x que satisfazem a equação $x^2 - 3x + 1 + (x^2 - 3x + 2)^{-1} = 1$?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

194) **(ENEM)** As medidasda hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$.
A área desse triângulo é:
a) 6
b) 10
c) 12
d) 15
e) 20

195) **(EPCAR)** As raízes da equação $(2m + 1)x^2 - (3m - 1)x + m = 0$ são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa 1. O valor de m é um número:
a) par.
b) ímpar.
c) racional não inteiro.
d) irracional.

196) **(CEFET)** O número $(121)_b$, ($b \in \mathbb{N}$) quando escrito na base 10, é quadrado perfeito para:
a) b = 10, somente
b) b = 5 e b = 10, somente
c) $2 \leq b \leq 10$
d) $b \geq 2$
e) $b \in \mathbb{N}$

197) **(CN)** O cubo de $12_{(b)}$ é $1750_{(b)}$. A base de numeração b é:
a) primo
b) ímpar não primo
c) par menor que 5
d) par entre 5 e 17
e) par maior que 17

198) **(CEFET)** No país da Matemática, todos os sistemas são escritos numa determinada base **b**. Sérgio, um de seus habitantes, compra um produto anunciado por 440 unidades monetárias, paga com uma nota de 1000 unidades monetárias e recebe de troco 340 unidades monetárias. Determine a base **b** do país da Matemática.

199) **(CN)** Sejam y e z números reais distintos não nulos tais que $\frac{4}{yz} + \frac{y^2}{2z} + \frac{z^2}{2y} = 3$. Qual é o valor de y + z?
a) -2
b) -1
c) 0
d) 2
e) 3

GABARITO

1) S = {0, 5}
2) S = {0, -8}
3) $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$
4) $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
5) S = {-3, 3}
6) S = {-4, 4}
7) $S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$
8) $S = \varnothing$
9) S = {0}
10) S = {0}
11) S = {2, 3}
12) $S = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$
13) S = {-5, -3}
14) $S = \left\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$
15) $S = \left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$
16) $S = \varnothing$
17) S = {2, 4}
18) S = {4}
19) S = {1,5}
20) $S = \varnothing$
21) S = {-3, -2}
22) S = {-4, 1}
23) S = {7}
24) S = {0, 6}
25) $S = \varnothing$
26) $S = \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$
27) $S = \left\{4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right\}$
28) $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\right\}$
29) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$
30) $S = \varnothing$
31) S = {1, 4}
32) S = {5, 9}
33) S = {-16, 14}
34) S = {1, 2, 5, 6}
35) S = {-5, -4, -2, -1}
36) S = {-a, 2a}
37) $S = \left\{-\frac{a}{3}, 3a\right\}$
38) $S = \left\{-\frac{1}{a}, 2a\right\}$
39) S = {-a-b, b-a}
40) S = {-3a, a}
41) $S = \left\{\frac{1}{a}, a\right\}$
42) S = {a + b, a – b}
43) $S = \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\}$
44) $S = \left\{-\frac{2}{a}, a\right\}$
45) $S = \left\{\frac{a+1}{2}, \frac{a-1}{2}\right\}$
46) $S = \left\{0, \frac{k}{2}\right\}$
47) S = {m- 3, m + 3}
48) S = {4 –m, m + 2}
49) S = {3a, 4a}
50) S = {4, 11}
51) S = {-2, 6}
52) S = {-2, 0}
53) $S = \left\{0, \frac{7}{4}\right\}$
54) S = {5}
55) $S = \left\{\frac{1}{2}, 6\right\}$
56) $S = \left\{-\frac{17}{6}\right\}$
57) S = {0, 3}
58) S = {3, 9}
59) S = {-3, 10}
60) S = {-10, 10}
61) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$
62) S = {-7, 7}
63) S = {-4a, 2a}
64) S = {-3p}
65) $x^2 + x - 6 = 0$
66) $x^2 - x = 0$
67) $x^2 + 4x = 0$
68) $x^2 - 25 = 0$
69) $4x^2 - 1 = 0$
70) $12x^2 + x - 1 = 0$
71) $35x^2 + 9x - 2 = 0$
72) $9x^2 - 9x + 2 = 0$
73) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$
74) $x^2 + \sqrt{3}\,x - 6 = 0$
75) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$
76) $2x^2 + 5ax - 3a^2 = 0$
77) S = -3 e P = 0
78) S = 0 e P = -16
79) S = 5 e P = 0
80) S = -2 e P = -3
81) S = -3 e P = 4
82) $S = \frac{2}{3}$ e $P = \frac{1}{3}$

83) $S = \frac{5}{7}$ e $P = -\frac{1}{7}$

84) $S = \frac{5^a}{2}$ e $P = a^2$

85) $S = \frac{q}{2p}$ e $P = \frac{q}{2}$

86) $S = \frac{25}{6}$ e $P = -\frac{25}{3}$

87) $S = \frac{7}{11}$ e $P = -\frac{56}{55}$

88) $S = \frac{1}{m-n}$ e $P = \frac{1}{m+n}$

89) $S = -\frac{a+b}{2}$ e $P = \frac{a^2 + 2ab - 24b^2}{16}$

90) $m > 0$ e $n > 0$

91) $m > 0$ e $n < 0$

92) $m < 0$ e $n < 0$

93) $m < 0$ e $n > 0$

94) não existe raiz, $\in R$

95) $m = n > 0$

96) não existe raiz $\in R$

97) $m < 0$ e $n < 0$

98) $m > 0$ e $n < 0$

99) a) $-2/5$

b) $4/5$

c) $-36/25$

d) $-1/2$

100) a) $8/3$

b) $5/3$

c) $2/3$

d) $34/9$

e) $4/3$

f) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

g) $5/4$

h) $8/5$

i) $152/27$

j) $98/27$

101) 5

102) -2

103) 3

104) $-\frac{7}{2}$

105) $-\frac{47}{4}$

106) I) $\frac{1}{2}$

II) -3

III) -5

107) $m < \frac{25}{8}$

108) ± 12

109) $m > \frac{9}{32}$

110) $\frac{31}{2}$

111) 12

112) 5

113) -3

114) 96

115) ± 25

116) -8

117) D

118) B

119) A

120) C

121) A

122) B

123) C

124) $-\frac{25}{18}$

125) -2

126) -2

127) -7

128) a) $p < 16$

b) $p = 16$

c) $p > 16$

129) $\frac{125}{8}$

130) C

131) $x^2 - 7x + 12 = 0$

132) $3x^2 - 19x + 6 = 0$

133) $-\frac{11}{2}$

134) $2x^2 + 9x + 63 = 0$

135) $7x^2 + 3x + 2 = 0$

136) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

137) $5x^2 + 31x + 50 = 0$

138) 4

139) B

140) C

141) E

142) C

143) A

144) D

145) D

146) E

147) A

148) A

149) A

150) C

151) S = {-4}

152) S = {2}

153) B

154) C

155) A

156) B

157) B

158) B

159) B

160) B

161) A

162) C

163) 5.623

164) C

165) D

166) D

167) D

168) C

169) D

170) D

171) A

172) E

173) D

174) a = 0 e b = 0 ou a = 1 e b = -2

175) B

176) 2

177) $\begin{cases} \dfrac{p+m}{m}, \text{se} \dfrac{p}{m} \geq -1 \\ -\dfrac{p+m}{m}, \text{se} \dfrac{p}{m} < -1 \end{cases}$

178) E

179) E

180) A

181) E

182) C

183) 3

184) -14 ou 4

185) A

186) A

187) D

188) E

189) E

190) C

191) E

192) C

193) D

194) A

195) A

196) D

197) D

198) 8

199) A

OBSERVAÇÕES

Problemas do 2º grau

Neste capitulo vamos estudar como equacionar e resolver problemas que recaiam em equações do grau 2. Para isso vamos nos valer de uma série de exemplos para ilustrar os métodos de resolução.

Exemplos ilustrativos:

1) Determine os valores de dois números pares positivos consecutivos cujo produto vale 168.

Resolução:

Como os números desejados são pares e consecutivos, então diferem de duas unidades.

Números: x e $x + 2$

Vamos equacionar e resolver o problema.

Produto = 168

$x \cdot (x + 2) = 168$

$x^2 + 2x = 168$

$x^2 + 2x - 168 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-168)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 672}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-2 \pm 26}{2}$$

$x = 12$ ou $x = -14$

Os números pedidos são positivos, logo:

$x = 12$ e $x + 2 = 14$

Estes são os números desejados.

2) A medida, em cm^2, da área de um quadrado excede em 21 unidades a medida, em cm, de seu perímetro. Quanto mede cada lado desse quadrado?

Resolução:

Neste problema, a incógnita é o lado. Então:

Lado = x

A área de um quadrado é igual ao quadrado de seu lado. Logo:

Área = x^2

Como os quatro lados do quadrado são congruentes, seu perímetro, que é a soma dos lados, equivale ao quádruplo de um dos lados. Dai:

Perímetro: $4x$

Como no enunciado é dito que a área excede, ou seja, tem a mais 21 unidades que o perímetro, vamos montar a equação e em seguida resolvê-la.

Área = Perímetro + 21

$x^2 = 4x + 21$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} =$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2}$$

$x = 7$ ou $x = -3$

Como o lado de um quadrado não pode ser negativo, temos que:

Lado = 7 cm

3) A diferença entre um número e o seu inverso é 7/12. Calcule esse número.

Resolução:

Número desejado = x

Inverso do número = $\frac{1}{x}$

Diferença: $\frac{7}{12}$

$$\frac{x}{\cancel{1}_{12x}} - \frac{1}{\cancel{x}_{12}} = \frac{7}{\cancel{12}_{x}}$$

$12x^2 - 12 = 7x$

$12x^2 - 7x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12)}}{2 \cdot 12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{24} = \frac{7 \pm 25}{24}$$

$$x = \frac{7 + 25}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \text{ ou } x = \frac{7 - 25}{24} = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$$

Como não foi citado o sinal do número, ambos os números, $\frac{4}{3}$ e $-\frac{3}{4}$, servem como resposta.

4) Daqui a 24 anos a minha idade será o quadrado da idade que eu tinha há 18 anos atrás. Qual é a minha idade hoje?

Resolução:

Idade atual = x

Idade daqui a 24 anos = $x + 24$

Idade há 18 anos = $x - 18$

Equacionando:

$x + 24 = (x - 18)^2$

$x + 24 = x^2 - 36x + 324$

$x + 24 - x^2 + 36x - 324 = 0$

$-x^2 + 37x - 300 = 0$

Multiplicando-se ambos os membros por – 1:

$x^2 - 37x + 300 = 0$

$$x = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300}}{2 \cdot 1} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1200}}{2}$$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{37 \pm 13}{2}$$

$x = 25$ ou $x = 12$

O valor 12 deve ser descartado, pois há 18 anos atrás eu teria idade negativa! Então, minha idade é 25 anos.

5) Um grupo de amigos fretou um ônibus para realizar uma excursão, pagando um total de $ 810,00. Este valor deveria ser rateado em partes iguais entre todos os integrantes do grupo. Invocando a sua condição de "fragilidade", as doze meninas do grupo foram dispensadas do pagamento de suas respectivas cotas, o que fez com que cada menino desembolsasse mais $ 18,00. De quantas pessoas era composto esse grupo?

Resolução:

Total de pessoas = x

Valor que cada um pagaria = $\frac{810}{x}$

Número de meninas = 12

Número de meninos = $x - 12$

Valor que cada menino pagou = $\frac{810}{x - 12}$

Vamos equacionar o problema:
Valor que cada menino pagou = valor que cada menino pagaria + 18.

$$\frac{810}{x-12} = \frac{810}{x} + 18$$

MMC dos denominadores = x . (x – 12)

$$\frac{810}{x-12_{/x}} = \frac{810}{x_{/x-12}} + \frac{18}{1_{/x.(x-12)}}$$

$$810 . x = 810 . (x - 12) + 18 . x. (x - 12)$$

Vamos dividir todos os termos por 18 para facilitar.

$45x = 45 . (x - 12) + x . (x - 12)$

$45x = 45x - 540 + x^2 - 12x$

$-x^2 + 12x + 540 = 0$

$x^2 - 12 x - 540 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.(-540)}}{2.1}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 + 2160}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{12 \pm 48}{2}$$

$x = 30$ ou $x = -18$

É óbvio que devemos descartar a opção negativa. Portanto havia 30 pessoas neste grupo.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) O produto de dois números é 44 e a soma é 15. 0 menor deles é:
a) Múltiplo de 3
b) Múltiplo de 4
c) Múltiplo de 5
d) Múltiplo de 6
e) Múltiplo de 7

2) Um número natural é o dobro do outro e a diferença entre seus quadrados é 108. A soma desses números vale:
a) 15
b) 16
c) 17
d) 18
e) 19

3) A soma dos quadrados de dois números é 10 e um deles é a terça parte do outro. A diferença entre eles vale:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

4) Encontre dois números naturais pares consecutivos cujo produto seja igual a 48.

5) Qual é o número cujo quadrado, acrescido do triplo de seu simétrico é igual a 40 unidades?

6) As dimensões de um retângulo diferem de uma unidade. Determine-as, sabendo que a área do retângulo mede $12m^2$.

7) A soma dos três quocientes das divisões do produto de três números naturais ímpares consecutivos por eles mesmos é 239. Calcule–os.

8) A diferença entre dois números positivos é igual a 3 e a diferença dos seus quadrados é 33. Calcule esses números.

9) A soma de um número natural com seu respectivo quadrado é igual a 12. Calcule esse número.

10) Calcule dois números ímpares positivos consecutivos, tais que o produto deles vale 15.

11) Três números positivos e consecutivos são tais que o quadrado do maior é igual ao quádruplo da soma dos outros dois. Determine-os.

12) Um número natural é tal que o seu quadrado, acrescido do dobro de seu simétrico dá 15. Determine-o

13) A soma de um número natural com seu inverso é igual a $\frac{17}{4}$. Determine-o

14) Um número natural somado com o seu inverso é igual ao seu dobro. Este número é:
a) Primo
b) Ímpar
c) Múltiplo de 3
d) Múltiplo de 5

15) O produto de dois números positivos vale 30. Aumentando–se um dos fatores de 2 unidades, e diminuindo–se o outro de 3 unidades, o produto diminui de 14 unidades. Quais são esses números?

16) A soma das idades de um pai e um filho é 52 anos. Dentro de dois anos, a idade do pai será o quadrado da idade do filho. Calcule as idades atuais.

17) Daqui a três anos, a idade de um menino será o quadrado da idade que ele tinha há três anos atrás. A idade desse menino não é um múltiplo de:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 6

18) Um menino plantou 600 bananeiras em linhas e colunas. O número de plantas de cada coluna é 10 menos que o dobro do número de plantas em cada linha. Quantas plantas há em cada linha?

19) Duas torneiras enchem, juntas um reservatório em duas horas, sendo que uma leva três horas a mais que a outra para enchê–lo sozinha. Então, o tempo que uma delas levará para encher sozinha o reservatório é:
a) 4h
b) 5h
c) 6h
d) 7h
e) 8h

20) Duas torneiras podem encher um tanque isoladamente em tempos que diferem de 18 minutos. Se no entanto o tanque estiver vazio e as duas torneiras forem abertas, ele demorará 12 minutos para encher totalmente. Quanto tempo cada torneira leva para encher separadamente esse tanque?

21) Vovô Jonas dividiu todo o seu dinheiro entre seus netos de modo que todos recebessem a mesma quantia. Sabe–se que se Jonas tivesse 4 netos a menos, cada um deles receberia mais $ 30,00, porém se o número de netos fosse 10 unidades a mais, cada um deles receberia menos $ 40,00. Qual foi a quantia repartida?

22) Considere o enunciado de um problema: “Um terreno retangular, de área $875m^2$ tem o comprimento excedendo em 10 m a largura. Quais são as dimensões do terreno?”.

Assinale a equação que representa o problema citado.
a) $x^2 + 10x + 875 = 0$
b) $x^2 + 875x - 10 = 0$
c) $x^2 - 10x + 875 = 0$
d) $x^2 + 10x - 875 = 0$

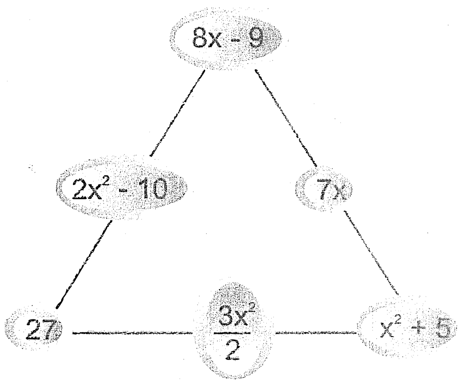
23) Um digitador foi contratado para executar certo serviço pelo qual receberia \$ 420,00. No entanto, ele gastou seis dias a mais do que havia planejado, o que fez com que ele recebesse \$ 8,00 a menos, por dia de trabalho, do que havia pensado. Em quantos dias ele executou o serviço?

24) Uma pessoa deseja comprar um dvd player cujo preço é de \$ 720.00 em certo número de prestações e sem juros. Se o crediário for feito com mais 6 prestações, o valor de cada prestação diminui de \$ 20,00. Qual o número inicial de prestações e qual o valor de cada uma delas?

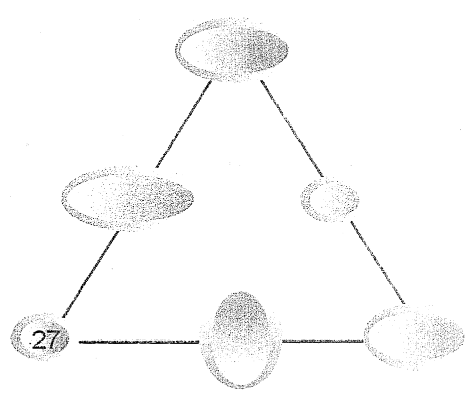
25) Uma turma de formandos resolve jantar em uma churrascaria. Na hora de pagar a conta, 4 estavam 'duros', o que onerou cada um dos outros em \$ 24,00 a mais. Quantos amigos haviam se reunido, sendo a despesa total de \$ 270,00?

26) Um grupo de amigos alugou uma van para conhecer as belezas do Rio por \$ 240,00. Porém, dois deles adoeceram e não foram ao passeio, o que fez com que cada um dos demais rapazes desembolsasse mais \$ 4,00. Quantos rapazes participaram do passeio?

27) Um pai perguntou a sua filha Luana: Quanto você tirou na prova de Matemática? Luana respondeu: "Papai, se você elevar ao quadrado a soma de minha nota com 5 e diminuir 15 desse resultado, obterá 10." Quanto Luana tirou na prova de Matemática?



a) Para começar, você deve descobrir qual é o valor de x.
b) Agora, complete o "triângulo" com os números correspondentes.



28) Em uma aula experimental, um professor divide um arame de 18 cm de comprimento em duas partes. Com cada uma das partes ele constrói um triângulo equilátero. Verifica então, que a soma das áreas dos triângulos formados vale $5\sqrt{3}$ cm². Qual a razão entre as medidas do maior e do menor pedaço em que o arame foi dividido?

29) Um professor tem a quantia de \$ 3.200,00 para adquirir latas de caviar. Para isto, resolveu pesquisar os preços de duas lojas. Na segunda loja ele obteve um desconto de \$ 40,00 por lata em relação à primeira. Com isto, ele conseguiu comprar 4 latas a mais. Quantas latas de caviar ele comprou?

QUESTÕES DE CONCURSOS

30) (ENEM) O quadrado de um número natural é igual ao seu dobro somado com 24. O dobro desse número menos 8 é igual a:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

31) (CEFETEQ) Calcule o número inteiro positivo que deve ser adicionado a cada fator do produto (5 .13), para que esse produto aumente 175 unidades.

32) (ENEM) No século 20, uma pessoa tinha x anos no ano x^2. Essa pessoa nasceu em:
a) 1878
b) 1892
c) 1912
d) 1924
e) 1932

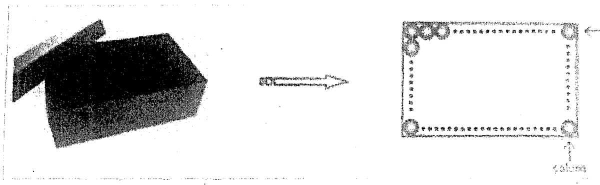
33) (EPCAR) Os números reais x tais que "o inverso do seu quadrado é igual ao inverso de sua soma com 2", constituem um subconjunto de IR cujos elementos somados igualam a:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

34 (CPII)O quadro abaixo representa todas as anotações do movimento de uma banca de jornal em um determinado dia.

Produto	Quantidade	Valor Unitário (R$)
Jornais	56	4
Revistas		
Livretos		18
Gibis	45	6

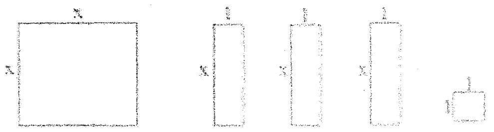
Ao fechar o caixa, o assistente do jornaleiro verificou que o faturamento total do dia foi de R$ 1.038,00. Logo após, descuidou-se e derrubou café sobre suas anotações, manchando três lacunas do quadro. O assistente precisa informar ao jornaleiro o faturamento do dia e apenas lembra que os valores das três lacunas são iguais.
a) Represente por **x** cada um dos valores correspondentes às lacunas manchadas. Descreva a situação acima por meio de uma equação reduzida do 2° grau.
b) Resolva a equação encontrada no item anterior e determine a quantidade de livretos vendidos.

35) (CPII) Uma embalagem comporta bolas de tênis, dispostas em linhas e colunas, sem nenhuma superposição, como indicado na figura.
Em cada coluna cabem quatro bolas a menos que em cada linha.

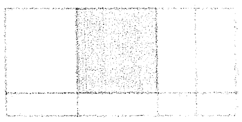


a) Chamado de x o número de bolas em cada linha, escreva uma expressão que represente o total de bolas na caixa.
b) Supondo, agora, que a caixa comporte ao todo noventa e seis bolas de tênis, determine quantas bolas são colocadas em cada coluna.

36) **(CPII)** É possível representar expressões polinomiais do segundo grau através da expressão da área de figuras geométricas planas. Para isso, consideram-se quadrados e retângulos que possuam lados medindo apenas 1 ou x unidades de comprimento, sendo x um número maior que 1. Um exemplo pode ser visto a seguir:

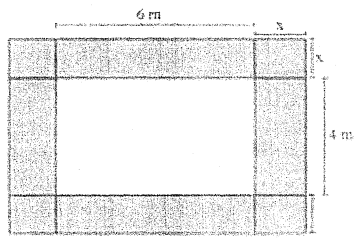


O esquema geométrico acima representa a expressão polinomial: $x^2 + 3x + 1$.
Pedro resolveu fazer uma estampa em uma de suas camisas usando essas figuras. A estampa que usou tinha o desenho abaixo:



a) Escreva a expressão polinomial simplificada que representa a área do desenho utilizado por Pedro para fazer a estampa.
b) A área do desenho feito por Pedro media 98 unidades de área. Qual era a medida x do lado do quadrado sombreado?

37) **(CPII)** O modelo ao lado representa uma piscina retangular que será construída em um condomínio. Ela terá 4 metros de largura e 6 metros de comprimento. Em seu contorno, será construída uma moldura de lajotas, representada pela área sombreada da figura ao lado.



a) Considerando que a largura da moldura mede x metros, represente a área da moldura por uma expressão algébrica.
b) Determine a medida x para que a moldura tenha área de 39 m².

38) **(CEFETEQ)** Leia atentamente o texto:
Estava uma turma de alunos dividida em dois grupos. Enquanto o quadrado da oitava parte da turma estava sentado nas carteiras, os outros doze restantes estavam em pé apresentando um seminário de História.
Com base no texto lido, determine o número total de alunos, sendo que esse número é superior a 20.

39) **(CAP-UFRJ)** Vinte pessoas em excursão, pernoitam num hotel. Os homens, pagando igualmente, despendem no total \$ 720,00, e as mulheres gastam a mesma importância. Sabendo-se que as mulheres também dividem igualmente a despesa, e que cada uma pagou \$ 30,00 menos que cada homem, quantas mulheres e quantos homens havia nesta excursão?

40) **(CN)** Um comerciante comprou k objetos idênticos por t reais, onde t é número inteiro positivo. Ele contribuiu para um bazar de caridade, vendendo dois objetos pela metade do preço de custo. Os objetos restantes foram vendidos com um lucro de seis reais por unidade. Se o lucro total foi setenta e dois reais, o menor valor possível para k é:
a) 11
b) 12
c) 15
d) 16
e) 18

41) **(EPCAR)** Um condomínio tem uma despesa de R\$ 1.200,00 por mês. Se três dos condôminos não pagam suas partes, os demais pagam um adicional de R\$ 90,00 cada um. O valor que cada condômino paga quando todos participam do rateio é, em reais:
a) 330,00
b) 240,00
c) 180,00
d) 150,00

42) **(EPCAR)** O produto de um número inteiro A de três algarismos por 3 é um número terminado em 721. A soma dos algarismos de A é
a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

43) **(EPCAR)** Um eletricista é contratado para fazer um serviço por R\$ 4.200,00. Ele gastou no serviço 6 dias a mais do que supôs e verificou ter ganhado por dia R\$ 80,00 menos do que planejou inicialmente. Com base nisso, é correto afirmar que o eletricista
a) concluiu o serviço em mais de 25 dias.
b) ganhou por dia menos de R\$ 200,00.
c) teria ganho mais de R\$ 200,00 por dia se não tivesse gasto mais 6 dias para concluir o trabalho.
d) teria concluído o serviço em menos de 15 dias de não tivesse gasto mais de 6 dias de trabalho.

44) **(EPCAR)** Um comerciante, dono de uma loja de presentes, comprou certa quantidade de miniaturas de aviões por 480 reais. Ao receber o pacote com essa mercadoria, ele separou 4 que apresentaram defeito para serem doadas e ficou com 6 para fazer parte de sua própria coleção. As miniaturas restantes foram todas vendidas a um mesmo preço unitário que correspondia a um lucro de 4 reais sobre o preço de compra de cada unidade. O comerciante, ao apurar o resultado dessa comercialização, desprezando outras despesas, concluiu que não teve nem lucro nem prejuízo.
Com base nessas informações, é correto afirmar que na transação comercial
a) Foram compradas menos de 30 miniaturas.
b) Se as miniaturas restantes tivessem sido vendidas a 20 reais cada, o comerciante teria um lucro de 25% sobre o valor total que pagou por essa compra.
c) Se o preço de custo de cada miniatura tivesse correspondido a m% do total gasto nessa compra, então $\sqrt{m} = 5$.
d) Se o comerciante tivesse vendido apenas a metade das miniaturas adquiridas, seu prejuízo seria de 30% em relação ao valor pago.

45) **(CN)** Um professor elaborou 3 modelos de prova. No 1° modelo, colocou uma equação do 2° grau; no 2° modelo, colocou a mesma equação trocando apenas o coeficiente do termo do 2° grau; no 3° modelo, colocou a mesma equação do 1° modelo, trocando apenas o termo independente. Sabendo-se que as raízes da equação do 2° modelo são 2 e 3, e que as raízes do 3° são 2 e –7, pode-se afirmar sobre a equação do 1° modelo, que:
a) não tem raízes reais.
b) a diferença entre a sua maior e a sua menor raiz é 7.
c) a sua maior raiz é 6.
d) a sua menor raiz é 1.
e) a soma dos inversos das suas raízes é $\frac{2}{3}$.

46) **(UNICAMP)** Retiram-se x litros de vinho de um barril de 100 litros e adicionam-se, ao mesmo barril, x litros de água. Da mistura resultante no barril, retiram-se outros x litros e adicionam-se outros x litros de água. Agora o barril tem 64 litros de vinho e 36 de água. Calcule o valor de x.

47) **(CN)** Um relógio indica dois minutos menos do que a hora certa e adianta t minutos por dia. Se estivesse atrasado três minutos e adiantasse $(t + \frac{1}{2})$ minutos por dia, então marcaria a hora certa exatamente um dia antes do que vai marcar. O tempo t, em minutos, que esse relógio adianta por dia está compreendido entre:

a) $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$

b) $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{9}$

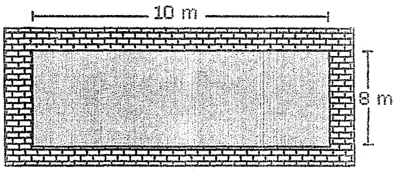
c) $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$

d) $\frac{6}{9}$ e $\frac{7}{9}$

e) $\frac{8}{9}$ e $\frac{9}{9}$

48) **(CM)** A superfície ocupada pela área da piscina da casa de Pedro tem 8 m de largura por 10 m de comprimento. Ao redor da piscina ele pretende construir uma calçada de largura constante e revesti-la com pedras, conforme a figura.
Cada metro quadrado de pedra custa R$ 18,00 e o pedreiro cobra R$ 12,00 por metro quadrado para colocar as pedras. Luiz possui o valor de R$ 1.200,00 para a conclusão da obra. Então, a largura da calçada será igual a:

a) 1 m
b) 2 m
c) 4 m
d) 5 m
e) 6 m



GABARITO

1) B
2) D
3) B
4) 6 e 8
5) -5 ou 8
6) 4 m e 3 m
7) 7; 9 e 11
8) 7 e 4
9) 3
10) 3 e 5
11) 4; 5 e 6
12) 5
13) 4
14) B
15) 6 e 5
16) 47 e 5
17) C
18) 20
19) C
20) 36 min e 18 min
21) $ 2.400,00
22) D
23) 21
24) 12 e $ 600,00
25) 9
26) 10
27) 0
28) 2
29) 20
30) C
31) 7
32) B
33) B
34) a) $x^2 + 18x - 544 = 0$
b) 16
35) a) $x^2 - 4x$
b) 8
36) a) $2x^2 + 4x + 2$
b) 6
37) a) $4x^2 + 20x$
b) 1,5 m
38) 48
39) 8 h e 12 m
40) C
41) D
42) a) 17
b) 85
43) C
44) B
45) B
46) 20
47) C
48) A

OBSERVAÇÕES

Potências

A potência de expoente **n** (n natural maior que 1) do número a, representada por a^n, é o produto de n fatores iguais a **a**.

Isto é: $a^n = \underbrace{a.a.a......a}_{\text{n fatores}}$

a ⇒ é chamada de base
n ⇒ é chamado de expoente

Exemplos:
a) $2^3 = 2.2.2 = 8$
b) $3^4 = 3.3.3.3 = 81$
c) $0^2 = 0.0 = 0$
d) $1^5 = 1.1.1.1.1 = 1$

Propriedades
1ª) Toda potência de base diferente de zero, elevada a expoente par, é positiva.

Exemplos:
a) $(+2)^2 = (+2)(+2) = 4$
b) $(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$
c) $(-2)^4 = (-2).(-2).(-2)(-2) = 16$

Cuidado!
Exemplos:
$-3^2 = -3.3 = -9$
$-2^4 = -2.2.2.2 = -16$

Observação: Nos exemplos anteriores, os expoentes estão elevando apenas o número 3 no 1º exemplo e o número 2 no 2º exemplo, já que não existem os parênteses, os quais indicariam que também o sinal estaria submetido à ação de tais expoentes.

2ª) Toda potência de base diferente de zero, elevada a expoente ímpar, tem o sinal da base.
a) $(+3)^3 = (+3).(+3).(+3) = 27$
b) $(-4)^3 = (-4).(-4).(-4) = -64$
c) $(-1)^5 = (-1).(-1).(-1).(-1).(-1) = -1$

3ª) Para multiplicarmos potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\boxed{x^a . x^b = x^{a+b}}$$

a) $2^2.2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
b) $3.3^2.3^3 = 3^{1+2+3} = 3^6$
c) $4^3.4^5.4^6 = 4^{3+5+6} = 4^{14}$

4ª) Para dividirmos potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$$

a) $2^6 \div 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$
b) $5^8 \div 5^2 = 5^{8-2} = 5^6$
c) $\frac{7^9}{7^5} = 7^{9-5} = 7^4$

5ª) Para elevarmos uma potência a um expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$\boxed{(x^a)^b = x^{a.b}}$$

Exemplos:
a) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$
b) $(3^4)^5 = 3^{4.5} = 3^{20}$
c) $[(5^2)^3]^6 = 5^{2.3.6} = 5^{36}$

Cuidado!

Na potência 2^{3^4} como não existem parênteses, o número 4 está elevando apenas o número 3 e não toda a potência 2^3, como nos exemplos anteriores. Portanto, não cabe a aplicação de 5ª propriedade. Para resolvermos tal potência, devemos começar de cima para baixo, resolvendo em primeiro lugar a potência 3^4 e em seguida elevar o número 2 ao resultado obtido, como mostramos a seguir:

$2^{3^4} = 2^{81}$

Outros exemplos:

a) $2^{2^3} = 2^8$

b) $(-1)^{2^{3^2}} = (-1)^{2^9} = (-1)^{512} = 1$

c) $-2^{3^2} = -2^9 = -512$

d) $-4^{2^5} = -4^{32}$

6ª) Qualquer número diferente de zero, elevado a zero, é igual à unidade.
Exemplos:
a) $2^0 = 1$
b) $(-5)^0 = 1$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
d) $-7^0 = -1$

7ª) Para elevarmos um produto a um expoente elevamos cada fator do produto ao expoente.

$$\boxed{(x.y)^a = x^a.y^a}$$

Exemplos:
a) $(x.y)^2 = x^2.y^2$
b) $(2.5.7)^3 = 2^3.5^3.7^3$
c) $(3.4.6)^5 = 3^5.4^5.6^5$

Consequência da 7ª Propriedade

Para multiplicarmos potências semelhantes, multiplicamos as bases e conservamos o expoente.

$$x^a.y^a = (x.y)^a$$

a) $5^3.2^3 = (5.2)^3 = 10^3 = 1000$
b) $2^2.3^2.5^2 = (2.3.5)^2 = 30^2 = 900$
c) $2^4.5^4.6^4 = (2.5.6)^4 = 60^4$

8ª) Para elevarmos um quociente a um expoente, elevamos dividendo e divisor ao expoente.

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}}$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

b) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

c) $\left(\frac{3^2.5^3}{2^4}\right)^5 = \frac{(3^2.5^3)^5}{(2^4)^5} = \frac{(3^2)^5.(5^3)^5}{2^{20}} = \frac{3^{10}.5^{15}}{2^{20}}$

Consequência da 8ª Propriedade

Para dividirmos potências semelhantes, dividimos as bases e conservamos o expoente.

$$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Exemplos:

a) $8^3 \div 4^3 = (8 \div 4)^3 = 2^3 = 8$
b) $50^2 \div 25^2 = (50 \div 25)^2 = 2^2 = 4$

c) $\dfrac{7^4}{3^4} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^4$

9ª) Todo número diferente de zero, elevado a um expoente negativo é igual ao inverso desse número elevado ao simétrico do expoente.

$$\boxed{x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a}$$

Exemplos:

a) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$

b) $5^{-3} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1^3}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

c) $(-3)^{-5} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{(-1)^5}{3^5} = -\dfrac{1}{243}$

Potências de 10

Um número é potência de 10 quando pode ser escrito na forma 10^n, onde n é um número inteiro.

Exemplos:
a) $10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000$
b) $10^5 = 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 100000$
c) $10^0 = 1$

d) $10^{-2} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 = \dfrac{1^2}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

e) $10^{-4} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^4 = \dfrac{1^4}{10^4} = \dfrac{1}{10000} = 0{,}0001$

Observando os exemplos anteriores, podemos verificar que quando o expoente de uma potência de 10 não é negativo, o resultado é um número inteiro formado pelo número 1 seguido de um número de zeros igual ao expoente.

Exemplo:
O número 10^7 será um número formado pelo número 1 seguido de 7 zeros, já que o expoente não é negativo. Então: $10^7 = 10000000$.

No caso do expoente ser negativo, o resultado da potência será um número decimal, de parte inteira nula e cuja parte decimal terá uma quantidade de algarismos igual ao simétrico do expoente da potência. Tal parte decimal será formada pelo número 1 antecedido por um número de zeros igual ao simétrico do expoente, menos uma unidade.

Exemplo:
O número 10^{-3} será um número decimal, com parte inteira nula e 3 casas decimais. A parte decimal será formada pelo número 1 precedido de 2 zeros, ou seja:
$10^{-3} = 0{,}001$.

Já aprendemos a desenvolver uma potência de 10. Agora, o nosso objetivo será escrever sob a forma de potência de 10 o número previamente desenvolvido.

1° caso: Número maior ou igual a 1
Neste caso, como analisado anteriormente, a potência terá um expoente não negativo, igual à quantidade de zeros existente.

Exemplos:
a) $100000000 = 10^8$
b) $10000 = 10^4$

2° caso: Número menor do que 1
A potência de 10, neste caso, terá um expoente negativo, simétrico da quantidade de casas decimais do número dado.
Exemplos:
a) $0{,}00001 = 10^{-5}$
b) $0{,}000000001 = 10^{-9}$
c) $0{,}1 = 10^{-1}$

Observações:
1) Podemos escrever qualquer número racional exato com o auxilio de potências de 10 (não confundir com a notação científica a ser estudada na seqüência deste capítulo).

Quando o número é inteiro devemos abandonar os zeros que estão à direita do último algarismo significativo do número, multiplicando o número obtido pelo número 10 elevado a um expoente igual ao número de zeros suprimidos. Já no caso de um número decimal exato, devemos multiplicar o número obtido quando abandonarmos a vírgula e os zeros que antecedem o 1° algarismo significativo pelo número 10 elevado ao simétrico da quantidade de casas decimais.

Exemplos:
Seja escrever os números abaixo usando potências de 10.
a) 784000

Resolução:
1° Passo: Abandonar os zeros que finalizam o número (784).
2° Passo: Multiplicá-lo pelo número 10 elevado à quantidade de zeros abandonados (3 zeros):

$$784000 = 784 \times 10^3$$

b) $12500000 = 125 \times 10^5$
c) $48 \times 10^2 = 4800$
d) 3,478
Resolução:
1° Passo: Abandonamos a vírgula: (3478)
2° Passo: Não há zeros a serem suprimidos à esquerda do 1° algarismo significativo.
3° Passo: Multiplicamos o número obtido no 1° e 2° passos pelo número 10 elevado ao simétrico da quantidade de casas decimais(3 casas):

$$3{,}478 = 3478 \times 10^{-3}$$

e) 0,00048
Resolução:
1° Passo: Abandonamos a vírgula: (000048)
2° Passo: Suprimimos os zeros a esquerda do 1° algarismo significativo: (48).
3° Passo: Multiplicamos o número obtido no 2° passo pelo número 10 elevado ao simétrico da quantidade de casas decimais(5 casas):

$$0{,}00048 = 48 \times 10^{-5}$$

f) $1{,}2043 = 12043 \times 10^{-4}$
g) $0{,}0016 = 16 \times 10^{-4}$
h) $345 \times 10^{-1} = 34{,}5$
i) $26 \times 10^{-6} = 0{,}000026$

2) O número de casas decimais de uma potência de um número decimal é igual ao número de casas decimais da base, multiplicado pelo expoente.

Exemplo:
O desenvolvimento de $(1{,}342)^5$ possuirá $3 \times 5 = 15$ casas decimais. Tente desenvolver!

Significado dos Símbolos da Potências

Houve um tempo em que o quilômetro era suficiente para expressar as distâncias que nossa imaginação nos permitia alcançar. Hoje, com os sofisticados equipamentos desenvolvidos pelo homem, o alcance das informações tomou dimensões gran[illegible] minimizam a distância até as galáxias, fazendo com que o nosso velho quilômetro passe a ser uma unidade inexpressiva. Certo é que, a cada dia, necessitamos de unidades mais adequadas para expressar medidas que outrora pareciam inimagináveis. O SI (Sistema Internacional de Medidas) estabeleceu uma série de potências de 10, com os respectivos nomes e símbolos, que iremos mostrar no quadro a seguir.

NOME	SÍMBOLO	POTÊNCIA
quilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}

Há ainda duas potências, não muito difundidas, que são o bronto e o geop, respectivamente associadas a 10^{27} e 10^{30}.

O **bit** ou dígito binário "**B**inary Digi**T**" em inglês é a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada. É chamado de binário pois pode asumir dois valores: 0 ou 1. Atualmente, em nosso mundo globalizado, onde as informações chegam até nós em um piscar de olhos, seja através dos computadores, smartphones ou das redes sociais, o que mais ouvimos são os termos: MEGA, BYTE, Mbps, entre outros nomes que há alguns anos soavam muito mal aos nossos ouvidos. Para acompanhar essa evolução, o IEC (International Electrothenical Commission) aprovou um padrão de nomes e símbolos de potências binárias, especialmente utilizadas na medição da quantidade de dados transmitidos ou armazenados. Você já imaginou a quantidade de dados que um grande provedor tem que armazenar, , contando-se conteúdos, e-mail, etc? são quantidades quase que astronômicas! Vamos à tabela de potências binárias.

NOME	SÍMBOLO	POTÊNCIA
kibi	Ki	2^{10}
mebi	Mi	2^{20}
gibi	Gi	2^{30}
tebi	Ti	2^{40}
pebi	Pi	2^{50}
exbi	Ei	2^{60}
zebi	Zi	2^{70}
yobi	Yi	2^{80}

Assim, por exemplo a notação kb é lida como sendo "quilobit" e equivale a $10^3 = 1000$ bits. Já a notação Ki é lida como sendo "kibibit", equivalendo a $2^{10} = 1024$ bits.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Nós estudamos na 1ª observação anterior, que todo número inteiro ou decimal exato (com número limitado de casas decimais), pode ser escrito com o auxílio das potências de 10.

Quando tal representação possuir apenas um *algarismo significativo* em sua parte inteira, estaremos diante da chamada **notação científica.** Esta maneira de representar *um número é muito utilizada para* escrever números muito grandes ou *muito pequenos. Devemos seguir algumas regras para* representar um número N na forma científica, *como veremos à seguir:*

1º Caso: $N \geq 10$

Devemos reescrever o número com um único algarismo na parte inteira, multiplicando-o pelo número 10 elevado ao número de algarismos da parte inteira de **N,** menos uma unidade.

Exemplo:

a) N = 476.813

Este número tem seis algarismos na sua parte inteira, logo o expoente do fator 10 será igual a 6 – 1 = 5.

Vamos reescrever o número agora com a **notação científica:**

$$N = 4{,}76813 \times 10^5$$

b) N = 325.000.000

Há nove algarismos na parte inteira, logo o expoente do fator 10 será 9 – 1 = 8. Então:

$$N = 3{,}25 \times 10^8$$

c) N = 8754,23

Neste caso, temos quatro algarismos na parte inteira, e portanto, o expoente do fator 10 será 4 – 1 = 3

$$N = 8{,}75423 \times 10^3$$

2º Caso: $0 < N < 1$

Para representar este tipo de número sob a forma de **notação científica,** devemos reescrever o número com um único algarismo significativo na parte inteira e multiplicá-lo pelo fator 10 elevado ao simétrico do número de zeros que antecedem o primeiro algarismo significativo de N (inclusive o *zero* da parte inteira).

Exemplo:

a) N = 0,000038

Existem cinco zeros antecedendo o primeiro algarismo significativo, que é o 3, logo o expoente do fator 10 será – 5, daí:

$$N = 3{,}8 \times 10^{-5}$$

b) $N = 0{,}0000000879 = 8{,}79 \times 10^{-8}$

c) $N = 0{,} 000006 = 6 \times 10^{-6}$

Observação:

Quando um número N é tal que $1 \leq N < 10$, ele já está expresso em **notação científica.**

Exemplo:

a) 4,785

b) 8,4003

Ordem de Grandeza (O.G.)

Dado um número N, escrito em **notação científica**, na forma $N = x \,.\, 10^n$ com, obviamente, $0 < x < 10$, temos que:

1º Caso: $x \geq 3{,}16$

Neste caso a ordem de grandeza de N será $\mathbf{10^{n+1}}$.

2º Caso: $x < 3,16$
A ordem de grandeza de N será 10^n.

Observação:
O número 3,16, que é a raiz quadrada por falta do número 10, é chamado de FRONTEIRA.

Exemplos:
a) $4,72 \times 10^4 \Rightarrow O.G. = 10^{4+1} = 10^5$
b) $3,12 \times 10^9 \Rightarrow O.G. = 10^9$
c) $6,403 \times 10^{-7} \Rightarrow O.G. = 10^{-7+1} = 10^{-6}$
d) $1,43 \times 10^{-4} \Rightarrow O.G. = 10^{-4}$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Desenvolva as potências abaixo, simplificando ao máximo suas respostas.

1) 5^3

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$

3) 10^5

4) $(0,2)^5$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

6) $(+10)^3$

7) $(-0,1)^4$

8) $(-1)^{50}$

9) 2^4

10) 2^5

11) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

12) $(0,1)^2$

13) $(-2)^4$

14) $(-0,2)^2$

15) $(-2)^3$

16) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

17) $\left(-\frac{1}{x}\right)^5$

18) 3^3

19) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

20) 1^8

21) $(0,01)^2$

22) $(+3)^4$

23) 0^3

24) $(+3)^5$

25) $(-0,1)^3$

26) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5$

27) $(-1)^2 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^4$

28) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-6}$

29) 3^{-2}

30) -3^{-2}

31) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

32) $x^{-3} \cdot x^{-2}$

33) $x^6 \cdot x^5 \cdot x^{-3}$

34) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$

35) $a^{-1} \div a^{-3}$

36) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$

37) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^{-3}$

38) $x^a \cdot x^b \cdot x^c$

39) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

40) $(-0,1)^2 \cdot (-0,1)^{-3} \cdot (-0,1)^3$

41) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$

42) $(-0,2)^3 \cdot (-0,2)^2 \cdot (-0,2)^{-5}$

43) $x^a \div x^{-b} \div x^{-c}$

44) $x^{-3} \div x^{-4} \div x^{-2}$

45) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

46) $(-0,2)^{-2} \div (-0,2)$

47) $(-1)^5 \div (-1)^{-3}$

48) $\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-3} \cdot x^5}{x^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{-2}}$

49) $\dfrac{0,25^{-3} \cdot 0,2^{-2}}{(0,444...)^{1/2}}$

50) $[(-2)^3]^2$

51) -3^{2^3}

52) $(-0,7)^0$

53) $2^{5^{0^{4^6}}}$

54) $(x^2 \cdot y^3 \cdot z)^m$

55) $50^3 \cdot 2^3$

56) $2^{15} \cdot (0,125)^{15} \cdot 4^{15}$

57) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

58) $\left(\dfrac{x^2 \cdot y^3}{z^4}\right)^7$

59) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \div \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$

60) 3^{-1}

61) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$

62) -5^{-2}

63) $\dfrac{2^{-3} \cdot 5^{-1}}{3^{-2}}$

64) $(3^2)^3$

65) $\{[(-1)^2]^3\}^5$

66) 2^{4^3}

67) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^0$

68) $(a \cdot b \cdot c)^3$

69) $(x^2 \cdot y)^3$

70) $(a^2 \cdot a^2 \cdot a^2)^5$

71) $\left(-\dfrac{2^4}{3^2}\right)^5$

72) $100^3 \div 25^3$

73) $(0,32)^5 \div (-0,16)^5$

74) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

75) $(-0,7)^{-2}$

76) $(-3)^{-4}$

77) $[(x^{-3})^{-2}]^3$

78) $\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1}\right]^{-3}$

79) -2^{2^3}

80) $(x^{-2} \cdot x^3 \cdot x^{-5})^2$

81) $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}})^6$

82) $2^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \div (0,5)^2 \cdot (0,2)^2$

83) $64^5 \div 32^5$

84) $(-24)^5 \div (-8)^5$

85) $1000^{-2} \div 125^{-2}$

86) $(-x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$

II) Representar os números abaixo, utilizando potências de 10.

87) 10.000

88) 0,0001

89) 5.000

90) 160.000

91) 0,000012

92) 1.000.000

93) 0,000001

94) 300.000

95) 0,0002

96) 0,00000235

III) Escreva os números que se seguem na forma de notação científica, dando também suas ordens de grandeza.

97) 734.000

98) 210.000.000

99) 819

100) 0,426

101) 0,000341

102) 0,00000002

103) 38,475

104) 4,93714

105) 22.900

106) 37.400

107) 0,01

108) 0,00000403

IV) Simplifique as expressões:

109) $-3^2 . (2^3 - 3^3)$

110) $-40 \div 10 \times 4$

111) $2^{-3} . [4^0 - 5. (2^{-2} + 9^{\frac{1}{2}})]$

112) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . (1{,}333...)^{-2}$

113) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 . (0{,}4)^{-3} . (0{,}2)^3$

114) $-3 - \{4 - 2^0 - [3^2 - 2^{-3} . (30 \div 6 \times 3 + 1)]\}$

115) $\frac{0{,}02 \times 30 \times 10^6}{0{,}1 \times 0{,}6 \times 10^5}$

116) $\frac{0{,}01 \times 1000}{10^{-2} \times 0{,}001 \times 10^4}$

117) $\frac{0{,}001 \times 10000}{0{,}00001 \times 100}$

118) $\frac{(0{,}01)^2 \times (1000)^4}{(0{,}0001)^{-5} \times (100)^{-7}}$

119) $\frac{(0{,}0002)^3 \times (3000)^{-2}}{0{,}000072 \times (0{,}001)^4}$

V) Aplicação das Potências:

120) Determine o valor de: $\{[(2^3)^4 : (-2)^3 . (-2)^{10}] : (-2)^{-1}\}^0$.

121) Determine o valor de: $\frac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$.

122) Resolvendo a expressão numérica

$$-4 + \left[3^2 . \frac{3}{5} - \left(0.5 + 0{,}3 \div \frac{9}{2}\right)\right]^{-1}$$, tem–se:

a) 2/7

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

d) $\frac{7}{2}$

e) 4/3

123) O valor numérico da expressão, dada abaixo, é igual a:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

a) $\frac{75}{4}$

b) $-\frac{47}{4}$

c) $\frac{81}{4}$

d) $-\frac{53}{4}$

124) A expressão $3^{N+2} + 3^N$ é igual a:
a) $3^2.3^N$
b) $6^{2N} + 2$
c) $3^{2(N+1)}$
d) $10. 3^N$

125) Para a = 0,2 e b = 0,1, o valor da expressão $\frac{a^2b - ab^2}{a^2b^2}$ é:
a) 0,5
b) 5
c) 10
d) 50

126) O valor de $5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5$ é:
a) 5^6
b) 5^{25}
c) 25^5
d) 25^{25}

127) Determine o valor de $\frac{2^{20} + 2^{19}}{2^{18}}$.

128) Sendo $2^k = b$, então 2^{-2+3k} vale:
a) $3b^2$
b) $-\frac{b^3}{4}$
c) $\frac{b^3}{4}$
d) $4b$
e) $2b^3$

129) O valor da expressão $\frac{4^{37} - 8^{24}}{4^{36} + 2^{73}}$ é:
a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

130) Simplificando a expressão $\frac{2^{10} - 3^6}{2^5 + 3^3}$, encontramos:
a) 59
b) 50
c) 25
d) 15
e) 5

QUESTÕES DE CONCURSOS

131) **(CM)** Se consideramos $a = 2^3 - 5 \times 2$, então o valor de a é:
a) 6
b) 2
c) -4
d) -2

132) **(CEFET)** O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a:
a) 25^{25}
b) 10^{25}
c) 100^{25}
d) 2^{25}
e) 2×25^{25}

133) (CM) Se $a = (4)^{4/3}$, $b = (4)^{5/4}$ e $c = (4)^{6/5}$, então é correto afirmar que:
a) $a > c$
b) $b < c$
c) $a < b < c$
d) $c < -a$
e) $a = b = c$

134) **(CN)** Se $x = 7^{200}$, $y = 1024^{40} . 3^{100}$ e $z = 16^{25}. 625^{50}$, pode-se afirmar que
a) $x < y < z$.
b) $x < z < y$.
c) $y < x < z$.
d) $y < z < x$.
e) $z < x < y$.

135) **(E.E.Aer)** Dados os números racionais $m = 0{,}03 . 10^{-20}$, $k = 0{,}3 . 10^{-21}$ e $p = 300 . 10^{-22}$, é correto afirmar que:
a) $m < k < p$
b) $m = k > p$
c) $k < m < p$
d) $m = k < p$

136) **(CN)** Para $x = 2013$, qual é o valor da expressão $(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}$?
a) -4
b) -2
c) 0
d) 1
e) 4

137) **(CM)** Considere o número racional $M = \dfrac{(-2)^3 - (-3)^2}{(-1)^2.\ (-1)^5}$.
Então, o valor de M é:
a) -17
b) -1
c) 0
d) 1
e) 17

138) **(CM)** Determine o valor da expressão

$$\frac{1}{2^{-4}} + (-2)^3 - \left[-2^{-4} : (-1)^4\right]^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

a) 0
b) -4
c) -8
d) -16
e) 28

139) **(CM)** Sejam $M = \dfrac{9 + 2^3 \cdot \left(-5 + \frac{3}{2}\right)}{1 - \frac{2}{3}}$.
O valor de M é igual a:
a) 101
b) $\frac{101}{6}$
c) 0
d) $\frac{57}{3}$
e) -57

140) **(CM)** O resultado da multiplicação $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)$ pode ser indicado por:
a) $0{,}2 \times 10^{-9}$
b) $0{,}8 \times 10^{-9}$
c) $0{,}5 \times 10^{-10}$
d) $0{,}8 \times 10^{-10}$
e) $0{,}9 \times 10^{-10}$

141) **(CEFET)** Sejam $x = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}0 \cdot 10 - 6)^2}{(0{,}01)^2}$ e $y = 9 \times 10^{-9} + 1 \times 10^{-11}$, pode-se afirmar que a ordem de grandeza do número xy é:
a) 10^{-9}
b) 10^{-8}
c) 10^{-7}
d) 10^{-6}

142) **(CM)** Que termos devem ser retirados da expressão $2^{-1} + 4^{-1} + 6^{-1} + 8^{-1} + 10^{-1} + 12^{-1}$ para que a soma dos restantes seja igual a 1?
a) 8^{-1} e 10^{-1}
b) 2^{-1} e 4^{-1}
c) 6^{-1} e 8^{-1}
d) 8^{-1} e 4^{-1}
e) 12^{-1} e 10^{-1}

143) **(CESGRANRIO)** Se $a^2 = 99^6$; $b^3 = 99^7$ e $c^4 = 99^8$, então $(abc)^{12}$ vale:
a) 99^{12}
b) 99
c) 99^{28}
d) 99^{88}
e) 99^{99}

144) **(UFF)** A expressão $\dfrac{8^{88} - 4^{44}}{8^{44} - 4^{22}}$ é equivalente a:
a) $2^{44} . (2^{88} + 1)$
b) $1 - 2^{88}$
c) $9 . 2^{44}$
d) $3 . (1 - 2^{88})$
e) $2^{88} . (2^{88} + 1)$

145) **(UFF)** A expressão $\dfrac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$ é equivalente a:
a) $1 + 10^{50}$
b) $\dfrac{10^{10}}{2}$
c) 10^{-10}
d) 10^{10}
e) $\dfrac{10^{10} - 1}{2}$

146) **(CEFETEQ)** Sendo
$$2^n = \left(\frac{4^{15} + 4^{15} + 4^{15} + 4^{15}}{3^{15} + 3^{15} + 3^{15}}\right) \cdot \left(\frac{6^{15} + 6^{15} + 6^{15} + 6^{15} + 6^{15} + 6^{15}}{2^{15} + 2^{15}}\right),$$
onde n é um inteiro positivo, determine o valor de n.

147) **(C. Naval)** Considere as afirmativas abaixo:
I) $2^{68} + 10^{68} = 2^{66} + (2 \times 5)^{68} = 2^{68} + 2^{68} \times 5^{68} = 4^{68} \times 5^{68} = 20^{68}$
II) $2^{68} + 10^{68} = 2^{68} + (2 \times 5)^{68} = 2^{68} + 2^{68} \times 5^{68} = 2^{136} \times 5^{68}$
III) $6^{17} + 10^{23} = (2 \times 3)^{17} + (2 \times 5)^{23} = 2^{17} \times 3^{17} + 2^{23} \times 5^{23} = (2^{17} \times 2^{23}) + (3^{17} \times 5^{23})$
Pode–se afirmar que
a) apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) apenas a afirmativa II é verdadeira.
d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) as afirmativas I, II e III são falsas.

148) **(EPCAR)** Simplificando-se a expressão

$$S = \frac{(x^{-2})^{2^{2^2}} \cdot \left[(-x-2)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[(-x^3)^{3^2}\right]^{2^3}}$$, onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$,

obtém-se:
a) $-x^{-94}$
b) x^{94}
c) x^{-94}
d) $-x^{94}$

149) **(EPCAR)** Se $x = 1{,}0\overline{62} + \dfrac{\left[(-2)^{(2\sqrt{2}+1)}\right]^{(2\sqrt{2}-1)}}{64}$, então x está compreendido entre:
a) -1 e -0,9
b) -0,9 e -0,8
c) -0,8 e -0,7
d) -0,7 e 0,6

150) **(CEFETEQ)** Calcule o valor de k para que a metade de ($2^{31} \cdot 4^{50}$) seja 4^{5k}.

151) **(CM)** A dose diária recomendada de um remédio liquido é de 40 gotas. Uma gota deste medicamento pesa, em média, 5×10^{-2} gramas.
Então, num frasco contendo 80 gramas desse remédio, temos medicamento suficiente para um tratamento de no máximo:
a) 10 dias
b) 15 dias
c) 20 dias
d) 30 dias
e) 40 dias

152) **(CEFET)** Observando a tabela abaixo, podemos dizer que a ordem de grandeza dos oceanos Pacífico, Atlântico e Glacial Ártico, respectivamente, é:

ÁREA DOS OCEANOS	
OCEANOS	ÁREA EM km²
Pacífico	179.650.000
Atlântico	92.040.000
Glacial Ártico	14.060.000

a) 10^6, 10^6 e 10^6
b) 10^7, 10^7 e 10^7
c) 10^8, 10^8 e 10^8
d) 10^8, 10^8 e 10^7
e) 10^8, 10^7 e 10^6

153) **(ENEM)** Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

1
1 2 1
1 2 3 2 1
1 2 3 4 3 2 1...

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.
A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?
a) 9
b) 45
c) 64
d) 81
e) 285

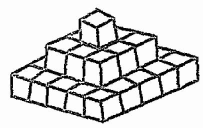
154) **(CEFETEQ)** Um ganhador da Mega Sena distribuiu todo o prêmio a três instituições de caridade da seguinte forma:
Creche Raio de Sol: 2/5 do prêmio, mais 6×10^5 reais.
Abrigo da Felicidade: 1/3 do prêmio, mais 9×10^5 reais.
Maternidade da Luz: o restante, correspondente a 33×10^5 reais.
Calcule o valor do prêmio, em milhões de reais.

155) **(CEFET)** Considere o seguinte procedimento: na primeira etapa, pegue uma folha de papel e corte-a ao meio, colocando os dois pedaços um sobre o outro. Em uma próxima etapa, corte novamente os papéis ao meio e coloque os pedaços um sobre o outro formando uma pilha de papéis. Continue fazendo isso em cada etapa: sempre cortando todos os pedaços de papel da etapa anterior ao meio e formando uma nova pilha com todos os pedaços. Se fosse possível realizar o que foi exposto, em quantas etapas, no mínimo, poderíamos formar uma pilha de papel com cerca de 200 m de altura? Considere que 100 folhas empilhadas têm 1 cm de altura e que podemos fazer a aproximação $2^{10} = 1024 \cong 10^3$.
a) 21 etapas
b) 201 etapas
c) 2001 etapas
d) infinitas etapas

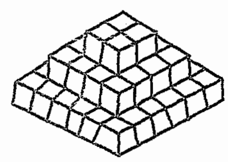
156) **(UFF)** O número N é o número 1 seguido de 100 zeros. Então, o número N^N é o número 1 seguido de:
a) 100 N zeros;
b) 102 N zeros;
c) 110 N zeros;
d) N^2 zeros;
e) N^n zeros.

157) **(CEFETEQ)** Observe as seguintes configurações de cubos idênticos:

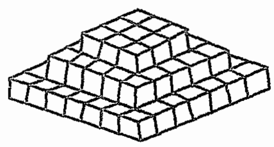
1ª



2ª



3ª



Determine a quantidade de cubos da décima configuração espacial que segue o padrão apresentado.

158) **(CM)** Dividindo $60^2 \cdot 10^{-1}$ por b obtém-se quociente 6 e resto r, sendo b e r dois números naturais. Determine a soma dos valores possíveis para b.
a) 254
b) 386
c) 408
d) 504
e) 614

159) **(CN)** Sabendo que n é natural não nulo, e que $x \# y = x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n+1} + \left(\frac{2 \# (2 \# (2 \# 2))}{((2 \# 2) \# 2) \# 2}\right)$?

a) 127
b) 128
c) 255
d) 256
e) 511

GABARITO

1) 125

2) $\frac{243}{32}$

3) 100.000

4) 0,00032

5) $1/64$

6) 1.000

7) 0,0001

8) 1

9) 16

10) 32

11) $8/125$

12) 0,01

13) 16

14) 0,04

15) -8

16) $-8/125$

17) $-1/x^5$

18) 27

19) $1/81$

20) 1

21) 0,0001

22) 81

23) 0

24) 243

25) -0,001

26) 512

27) -1

28) $\frac{15625}{64}$

29) $1/9$

30) $-1/9$

31) $\frac{125}{64}$

32) x^{-5}

33) x^8

34) $\frac{256}{390625}$

35) a^2

36) -2187

37) 81

38) x^{a+b+c}

39) $\frac{1}{64}$

40) 0,01

41) 1

42) 1

43) x^{a+b+c}

44) x^3

45) $8/125$

46) -125

47) 1

48) x^8

49) 2400

50) 64

51) -6561

52) 1

53) 2

54) $x^{2m} \cdot y^{3m} \cdot z^m$

55) 1.000.000

56) 1

57) $\frac{16}{9}$

58) $\frac{x^{14} \cdot y^{21}}{z^{28}}$

59) $16/25$

60) $1/3$

61) $25/9$

62) $-1/25$

63) $9/40$

64) 729

65) 1

66) 2^{64}

67) 1

68) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$

69) $x^6 \cdot y^3$

70) a^{30}

71) $-\frac{2^{20}}{3^{10}}$

72) 64

73) -32

74) 5

75) $\frac{100}{49}$

76) $1/81$

77) x^{18}

78) $\frac{1}{x^3}$

79) -256

80) x^{-8}

81) x^6

82) 64.000,01
83) 32
84) 243
85) 1/64
86) y – x
87) 10^4
88) 10^{-4}
89) $5 . 10^3$
90) $16 . 10^4$
91) $12 . 10^{-6}$
92) 10^6
93) 10^{-6}
94) $3 . 10^5$
95) $2 . 10^{-4}$
96) $235 . 10^{-8}$
97) $7,34 \times 10^5$ e O.G. = 10^6
98) $2,1 \times 10^8$ e O.G. = 10^8
99) $8,19 . 10^2$ e O.G. = 10^3
100) $4,26 . 10^{-1}$ e O.G. = 10^0
101) $3,41 \times 10^{-4}$ e O.G. = 10^{-3}
102) $2 . 10^{-8}$ e O.G. = 10^{-8}
103) $3,8475 . 10^1$ e O.G. = 10^2
104) $4,93714 . 10^0$ e O.G. = 10^1
105) $2,29 . 10^4$ e O.G. = 10^4
106) $3,74 . 10^4$ e O.G. = 10^5
107) $1 . 10^{-2}$ e O.G. = 10^{-2}
108) $4,03 . 10^{-6}$ e O. G. = 10^{-5}
109) 171
110) -16
111) $-61/32$
112) $8/9$
113) $2/9$
114) 1
115) 100
116) 100
117) 10^4
118) 10^2
119) $1/81$
120) 1
121) $-\frac{16}{17}$
122) E
123) C
124) D
125) B
126) A
127) 6
128) C
129) A
130) E
131) D
132) C
133) A
134) C
135) D
136) A
137) D
138) E
139) E
140) A
141) D
142) A
143) D
144) A
145) C
146) 32
147) E
148) A
149) A
150) 13
151) E
152) D
153) D
154) R$ 18.000.000,00
155) A
156) A
157) 440
158) D
159) C

OBSERVAÇÕES

Radicais

No capítulo 18 (*Números Inteiros*) tivemos o primeiro contato com os radicais. Vale lembrar que:

$\boxed{\sqrt[n]{A} = b \Rightarrow b^n = A}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Naquele capítulo, trabalhamos apenas com raízes exatas. Neste, vamos aprender as operações e propriedades.

IMPORTANTE

Gostaria de abordar um assunto que confunde muito os alunos do Ensino Fundamental e também no Médio. Você saberia me responder o valor de $\sqrt{4}$? Muitos dirão 2 ou -2. Vamos mostrar que esse resultado é incompatível com o que estudamos no capítulo 17. Você concorda que $\sqrt{4}$ é um número real? Claro que sim, não é mesmo? Como vimos no capítulo sobre conjuntos, há uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais e os pontos da reta numerada, ou seja, a cada número real está associado um único ponto e vice-versa. Portanto, se $\sqrt{4}$ fosse 2 ou - 2, o número real $\sqrt{4}$ estaria associado a dois pontos distintos na reta numerada, o que seria, no mínimo, contraditório! Assim sendo, quando trabalhamos com raízes de índices pares de números não negativos, devemos considerar a raiz aritimética, sem o respectivo sinal. Logo, temos $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ e assim por diante.

Note que na definição da raiz: $\sqrt[n]{A} = b \Rightarrow b^n = A$, lê-se, "se raiz $\sqrt[n]{A} = b$, então $b^n = A$". Cuidado com a sua recíproca: $b^n = A \Rightarrow \sqrt[n]{A} = b$, em que lemos: "se $b^n = A$, então $\sqrt[n]{A} = b$, só é válida para radicais com índices ímpares.

Poxa, Ávila, agora complicou! Não entendi nada do que você quis dizer! Calma, querido leitor, vou explicar direitinho!

Pela definição: $\sqrt{4} = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$, o que é uma definição correta!

Porém $(-2)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = -2$ é uma afirmação falsa!, pois, como dissemos, as raízes de índices pares são aritiméticas. Muitos utilizam essa recíproca para justificar essa interpretação incorreta da definição.

Expoente fracionário

Todo número elevado a um expoente fracionário é igual a um radical, cujo índice é o denominador do expoente e cujo radicando é o número elevado ao numerador do expoente.

$$\boxed{x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}}$$

Exemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

b) $(-2)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{(-2)^3} = \sqrt[7]{-8}$

c) $\sqrt[9]{x^5} = x^{\frac{5}{9}}$

Propriedades dos radicais

1ª) Para extrair a raiz de uma potência, dividimos o expoente da potência pelo índice da radical.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$

b) $\sqrt[7]{3^{14}} = 3^2 = 9$

Obs: Caso a divisão não seja exata, o quociente será o expoente do fator que sairá do radical, enquanto que o resto será o expoente do fator que ficará sob o radical.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}}$$

onde: $\begin{array}{r|l} p & n \\ \hline r & q \end{array}$

Exemplos:

a) $\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^{13}}$

b) $\sqrt[3]{2048} = \sqrt[3]{2^{11}} = 2^3\sqrt[3]{2^2} = 8\sqrt[3]{4}$

Obs: Quando o expoente do fator que se encontra no radicando é menor do que o índice, tal fator não poderá ser extraído do radical.

Exemplos:
Os radicais abaixo não admitem extração de qualquer fator.

a) $\sqrt[7]{x^6}$

b) $\sqrt[3]{4x^2y}$

2ª) A raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Observação importante:
No caso em que o índice **n** é par, os números **a** e **b** devem ser não negativos.

Exemplos:

a) $\sqrt[5]{4x^3} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{x^3}$

b) $\sqrt[3]{27x^7} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x} \cdot x^2\sqrt[3]{x} = 3x^2\sqrt[3]{x}$

3ª) A raiz de uma divisão é igual à raiz do dividendo dividida pela raiz do divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Neste caso, também é válida a observação feita na 2ª propriedade.

Exemplos:

a) $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

b) $\sqrt[5]{\frac{3x^6}{4y^3}} = \frac{\sqrt[5]{3x^6}}{\sqrt[5]{4y^3}} = \frac{x\sqrt[5]{3x}}{\sqrt[5]{4y^3}}$

4ª) Quando multiplicamos ou dividimos o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número diferente de zero, a raiz não se altera.

Exemplos:

a) $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6\div 2]{x^{4\div 2}} = \sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5\times 6]{a^{3\times 6}} = \sqrt[30]{a^{18}}$

Observações Importantes

A raiz de índice par de um número negativo não é um número real.

Exemplo Ilustrado

Supondo-se que tal procedimento fosse possível no conjunto R, teríamos, por exemplo:

$\sqrt{-4} = x$

$x^2 = -4$!

O que seria impossível no conjunto dos números reais, pois toda potência de expoente par nunca é negativa, e portanto, não há nenhum número que elevado ao quadrado, dê – 4, o que confirma a nossa observação. O número x em questão, não é um número real, e sim um número chamado de complexo, e sua determinação será objeto de estudo no Ensino Médio.

Radicais semelhantes

Chamamos de radicais semelhantes àqueles que apresentam o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplos:

São semelhantes os radicais.

a) $5\sqrt[3]{x}$ e $7\sqrt[3]{x}$

b) $-2\sqrt[4]{x^3y}$; $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}$ e $\sqrt[4]{x^3y}$

Operações com radicais

I) Adição e Subtração

Só podemos somar ou subtrair radicais semelhantes. Para isto, devemos conservar a parte irracional (radical) e operar algebricamente os coeficientes.

Exemplos:

a) $7\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = (7+4)\sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$

b) $3\sqrt[5]{a} - 8\sqrt[5]{a} = (3-8)\sqrt[5]{a} = -5\sqrt[5]{a}$

c) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (5-3+7)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

II) Multiplicação e divisão

Só podemos multiplicar ou dividir radicais que apresentem os mesmos índices. Neste caso devemos conservar o índice comum e multiplicar ou dividir os radicandos. Quando os índices forem diferentes devemos, antes de proceder tais operações. reduzi-los ao mesmo índice, como veremos em seguida às operações.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{3} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[5]{\frac{20}{5}} = \left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2$

b) $\sqrt[5]{(x^3)^2} = x\sqrt[5]{x} = \left(\sqrt[7]{2}\right)^3$

III) Potência

Para elevarmos um radical a um expoente. devemos conservar o índice e elevar o radicando a esse expoente.

Exemplos:

a) $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2 = \sqrt[5]{(x^3)^2} = \sqrt[5]{x^6} = x\sqrt[5]{x}$

b) $\left(\sqrt[7]{2}\right)^3 = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$

IV) Raiz

Para extrair a raiz de um radical, devemos conservar o radicando e multiplicar os índices.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[12]{9} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[6]{3}$

Redução de radicais ao mesmo índice

Há casos, como na multiplicação e divisão de radicais, em que é necessário que os radicais possuam os mesmos índices. Quando tal fato não ocorre, devemos reduzi-los ao mesmo índice. Para isto, devemos seguir alguns procedimentos:

1°) Calculamos o MMC entre os índices.

2°) Dividimos o MMC encontrado pelo índice de cada um dos radicais.

3°) Multiplicamos cada resultado obtido pelo expoente do respectivo radicando.

Exemplo:

Reduzir ao mesmo índice os radicais $\sqrt[3]{a^2}$. $\sqrt{a}$ e $\sqrt[4]{a^3}$

Resolução:

Calculamos o MMC dos índices:

MMC (3, 2, 4) = 12

Vamos dividir o MMC pelos índices:

$\frac{12}{3} = 4$ $\quad \frac{12}{2} = 6$ $\quad \frac{12}{4} = 3$

Vamos multiplicar o índice e o expoente de cada radicando pelos quocientes encontrados, ordenadamente:

$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3.4]{a^{2.4}} = \sqrt[12]{a^8}$

$\sqrt[2]{a^1} = \sqrt[2.6]{a^{1.6}} = \sqrt[12]{a^6}$

$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4.3]{a^{3.3}} = \sqrt[12]{a^9}$

Eureka! Aí estão os radicais com os mesmos índices.

Introdução de um fator em um radical

Já aprendemos no início do capítulo a extrair, quando possível, um fator de um radical. Agora vamos aprender como introduzir um fator em um radical. Neste caso, basta multiplicar o radicando do radical pelo fator elevado ao índice.

$$\boxed{b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.b^n}}$$

Exemplos:

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{2.3^2} = \sqrt{18}$

b) $y^2\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{x^3.y^{10}}$

Racionalização de denominadores

É matematicamente incorreto deixarmos um radical em um denominador. Por isto devemos eliminá-lo, sem no entanto alterar o valor da fração. Assim sendo, devemos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por um mesmo fator convenientemente escolhido de modo a eliminar o radical. Tal fator é chamado de ***fator racionalizante***, e o processo que permite acabarmos com o(s) radical(is) do denominador, sem alterar a fração, é chamado de ***racionalização***. Em seguida vamos abordar os três casos mais importantes.

1° Tipo: **O denominador é composto por um único radical, que tem índice 2.**

O fator racionalizante é o próprio radical.

$$\boxed{\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

2° Tipo: **O denominador é composto por um único radical de índice diferente de 2.**

O fator racionalizante, neste caso, tem o mesmo índice que o radical do denominador, porém o seu radicando é igual à base do radicando do radical do denominador elevada à diferença entre o índice e o seu expoente original.

$$\boxed{\frac{b}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{b.\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^p}.\sqrt[n]{a^{n-p}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^p.a^{n-p}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^{p+n-p}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-p}}}{a}}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{3.\sqrt[5]{x^{5-2}}}{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt[5]{x^{5-2}}} = \frac{3.\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt[5]{x^3}} = \frac{3.\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2.x^3}} = \frac{3.\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} =$

$= \frac{3.\sqrt[5]{x^3}}{x}$

Nota: É óbvio, que com a prática, o leitor poderá "pular" algumas das passagens anteriores, agilizando, com isto, o processo.

b) $\frac{5}{\sqrt[7]{8}} = \frac{5}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{5\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}.\sqrt[7]{2^4}} = \frac{5\sqrt[7]{16}}{2}$

3° *Tipo*: **O denominador é composto pela soma ou diferença de radicais de índices 2.**

Neste caso, o fator racionalizante é o conjugado do denominador, que é obtido trocando-se o sinal entre os termos que o compõem.

$$\boxed{\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{c.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{c.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}}$$

Exemplos:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5.(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$

b) $\frac{6}{\sqrt{7}+1} = \frac{6(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{6(\sqrt{7}-1)}{6} = \sqrt{7}-1$

Radical duplo

Um radical da forma $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ é chamado de ***radical duplo***. Em alguns casos ele pode ser escrito de uma forma mais simples, em outros não. Consideremos a hipótese abaixo como viável.

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \text{ com } x \ge y.$$

O nosso objetivo será determinar, se possível, os valores de x e y. Para isto, comecemos elevando ambos os membros ao quadrado.

$$(\sqrt{A+\sqrt{B}})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$A+\sqrt{B} = x+y+2\sqrt{xy}$$

$$A+\sqrt{B} = x+y+\sqrt{4xy}$$

Para que dois números irracionais sejam iguais, devemos ter as partes racionais iguais e os radicandos iguais. Daí:

$$x+y=A$$

$$4xy=B \rightarrow xy=\frac{B}{4}$$

Devemos encontrar dois números de soma A e produto $\frac{B}{4}$. Lembrando do capítulo 26 (*Equações do 2° grau*), podemos compor a equação do 2° grau:

$$x^2-S.x+P=0$$

$$x^2-A.x+\frac{B}{4}=0$$

$$x=\frac{-(-A)\pm\sqrt{(-A)^2-4.1.\frac{B}{4}}}{2.1}$$

$$x=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Fazendo-se $\sqrt{A^2-B} = C$, temos

Como $x \ge y$, concluímos que $x = \frac{A+C}{2}$ e $y = \frac{A-C}{2}$ e, portanto,

$$\boxed{\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},}$$

lembrando que $C = \sqrt{A^2-B}$.

No caso de $\sqrt{A^2-B}$ não ser exata, o radical duplo não pode ser expresso sob a forma de radicais mais simples.

Exemplos: Simplifique

a) $\sqrt{7+\sqrt{13}}$

Resolução:

A = 7 e B = 13

Então: $C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{7^2-13} = \sqrt{36} = 6$

$$\sqrt{7+\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

b) $\sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{11-\sqrt{96}}$

Resolução:

A = 11 e B = 96

Temos: $C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{11^2-96} = \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{11+5}{2}} - \sqrt{\frac{11-5}{2}} = \sqrt{8} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Processo de extração da raiz quadrada de um número

Exemplo ilustrativo:

Extrair a raiz quadrada de 21.609

1º) Dividir o número em classes de dois algarismos, a começar pela direita (a última classe à esquerda pode ter um só algarismo).

$$\sqrt{2.16.09}$$

2º) Procurar a raiz do maior quadrado contido na última classe à esquerda. Escrever esta raiz à direita do número proposto; depois subtrair o seu quadrado da classe que se opera e ao lado do resto, abaixar a classe seguinte;

$\sqrt{2.16.09}$	1
−1	$1^2 = 1$
1 16	

3º) Separar por um ponto o primeiro algarismo à direita do número assim formado e dividir a parte que resta à esquerda pelo dobro da raiz encontrada; escrevendo o quociente ao lado do dobro da raiz (tal quociente deve ser no máximo igual a 9).

$\sqrt{2.16.09}$	1
−1	$1^2 = 1$
1 1.6	1 × 2 = 2 (dobro da raiz encontrada)
	11 ÷ 2 = 5

4º) Verificar se o quociente é satisfeito: escreva o dobro da raiz acompanhada do quociente encontrado. Multiplique esse número pelo quociente. Subtraia esse produto do número que se opera.

$\sqrt{2.16.09}$	1
1	$1^2 = 1$
1 1,6	1 × 2 = 2
−125	11 ÷ 2 = 5
Não é possível	25 × 5 = 125

5º) Se a subtração for possível, o quociente é o segundo algarismo da raiz; escrever à direita do precedente; caso contrário, o quociente deve ser diminuído de uma ou várias unidades até obtermos um produto menor ou igual ao número que está sob a raiz.

$\sqrt{2.16.09}$	14
1	$1^2 = 1$
1 1,6	1 × 2 = 2
- 96	11 ÷ 2 = 5
20	25 × 5 = 125 (muito grande)
	diminui-se o quociente de uma unidade
	24 × 4 = 96 (4 é válido)

6º) Abaixar a classe seguinte ao lado do resultado da última subtração e operar sobre o número resultante, utilizando o mesmo procedimento dos itens 3º, 4º e 5º. Continuar assim até se esgotarem as classes a abaixar.

$\sqrt{2.16.09}$	147
−1	$1^2 = 1$
1.16	1 x = 2
- 96	11 ÷ 2 = 5
20 0,9	25 × 5 = 125
-20 0 9	24 × 4 = 96
0	14 x 2 = 28
	200 ÷ 28 = 7
	287 × 7 = 2009

Observações:

1) Depois de baixar uma classe e separar um algarismo à direita, pode acontecer que o número restante à esquerda seja inferior ao dobro da raiz obtida. Nesse caso, é preciso escrever um zero na raiz e baixar a classe seguinte.

2) Para se tirar a prova da extração da raiz quadrada, é preciso multiplicar por si mesmo o número encontrado como raiz e, se houver resto, somá-lo ao produto para obter o radicando.

Assim, se ***n*** é a raiz por falta de um número ***x***, e ***r*** é o resto encontrado, vale a relação:

$$\boxed{x = n^2 + r}$$

Exemplo:

Na determinação de raiz quadrada de um número, encontra-se 25 e resto 29. Qual era o número?

Resolução:

Número: x

Raiz: n = 25

Resto: r = 29

$x = n^2 + r$

$x = 25^2 + 29$

$x = 654$

Raiz quadrada com erro inferior a $\frac{1}{d}$

Obtermos a raiz quadrada de um número N **"a menos de $\frac{1}{d}$"**, é o mesmo que calculá-la com erro inferior a $\frac{1}{d}$. Para isto, devemos calcular a raiz por falta de produto N . d², dividindo o resultado por ***d***. Ou seja:

$$\boxed{\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.d^2}}{d}}$$

Exemplos:

a) Determinar $\sqrt{8}$ a menos de 0,1.

Resolução:

N = 8

$\frac{1}{d} = 0,1 = \frac{1}{10} \Rightarrow d = 10$

$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.d^2}}{d}$

$\sqrt{8} = \frac{\sqrt{8.10^2}}{10} = \frac{\sqrt{800}}{10} = \frac{28}{10} = 2,8$

Cálculos:

$\sqrt{8.00}$	2 8
− 4	$2^2 = 4$
40.0	2 × 2 = 4
384	40 ÷ 4 = 9
16	49 × 9 = 441 (9 é "grande")
	48 × 8 = 384 (8 serve)

Observação:
Como a raiz não foi exata (houve resto $\neq 0$), 28 é a **raiz por falta**, enquanto que 29 é a **raiz por excesso**.

b) Determinar o valor de $\sqrt{18112}$, com erro inferior a 4

Resolução:
N = 18112

$$\frac{1}{d} = 4 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Rightarrow d = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt{N.d^2}}{d}$$

$$\sqrt{18112} = \frac{\sqrt{18112.\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{\frac{1}{4}} = 4.\sqrt{18112.\frac{1}{16}} = 4\sqrt{1132} =$$

$= 4.33 = 132$
Cálculos:

$\sqrt{11.32}$	33
-9	$3^2 = 9$
23.2	$3 \times 2 = 6$
-189	$23 \div 6 = 3$
43	$63 \times 3 = 189$ (3 serve)

Resto máximo na extração de uma raiz quadrada

Consideremos dois números naturais consecutivos **N** e **N + 1**. Os seus quadrados são N^2 e $(N + 1)^2$, respectivamente. A diferença entre esses quadrados é $(N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1$. Portanto, se adicionarmos $2N + 1$ ao quadrado perfeito N^2, obteremos o próximo quadrado perfeito $(N + 1)^2$. Assim sendo, o maior número que podemos adicionar a N^2 sem obtermos o próximo quadrado perfeito $(N + 1)^2$, é 2N. Este é o resto máximo na extração de uma raiz quadrada.

Resto máximo = $(N + 1)^2 - N^2 - 1 = 2N$

Daí, concluímos que o resto máximo, neste caso, é o **DOBRO DA RAIZ**.

Exemplo:
Na extração da raiz quadrada por falta de um número x, encontrou-se 18 e o resto foi o maior possível. Calcule o valor de x.

Resolução:

$\sqrt{\ x\ }$	18
$\vdots$	
r	

Resto máximo = $2 \times 18 = 36$
$x = 18^2 + 36$
$x = 360$
Observação:
No caso da raiz cúbica o maior resto possível será:

Resto máximo = $(N + 1)^3 - N^3 - 1 = 3N^2 + 3N$

Exemplo:
Qual o resto máximo que podemos obter na extração da raiz cúbica de um número em que se encontra 26 como raiz?

Resolução:
Raiz: N = 26
Resto máximo = $3N^2 + 3N = 3.26^2 + 3.26 = 2106$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Simplifique os radicais, considerando a, b, c, x, y e z são números reais não negativos, $n \in N$ e $n \geq 2$.

1) $\sqrt{a^6}$

2) $\sqrt[12]{x^4}$

3) $\sqrt[5]{x^8}$

4) $\sqrt[3]{6^{12}}$

5) $\sqrt[n]{5^{2n}}$

6) $\sqrt[4]{64}$

7) $\sqrt{324}$

8) $\sqrt{2500}$

9) $\sqrt[3]{216}$

10) $\sqrt[3]{3888}$

11) $\sqrt{676}$

12) $\sqrt[3]{-64}$

13) $\sqrt[3]{2592}$

14) $\sqrt[5]{1024 \times 243}$

15) $\sqrt{0,25}$

16) $\sqrt{0,0081}$

17) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

18) $\sqrt{16 : 25}$

19) $\sqrt[3]{\frac{x^6}{y^{15}}}$

20) $\sqrt[n]{a^n : b^{3n}}$

21) $\sqrt[15]{x^3 : y^6}$

22) $\sqrt[5]{64\,x^8y^7}$

23) $\sqrt[3]{x^6 : y^{12}}$

24) $\sqrt[3]{x^3 . y^5 . z^7}$

25) $\sqrt{a^5 . b^4 . c^7}$

26) $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{12}}{z^{20}}}$

27) $\sqrt[3]{\dfrac{x^5y^6}{z^4}}$

28) $\sqrt[n]{x^{n+3}}$

29) $\sqrt[3]{3^5 + 3^5 + 3^6}$

II) Desenvolver as potências a seguir, simplificando ao máximo o resultado.

30) $25^{1/2}$

31) $8^{1/3}$

32) $16^{0,5}$

33) $(0,125)^{-1/3}$

34) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-½}$

35) $4^{3/2}$

36) $(-27)^{0,333...}$

37) $(9/4)^{½}$

38) $\left(\dfrac{16}{625}\right)^{1/4}$

39) $\left(\dfrac{125}{27}\right)^{2/3}$

III) Reduzir ao mesmo índice os seguintes radicais:

40) $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{3^2}$

41) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{3}$

42) $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[8]{x^5}$

43) $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[8]{a^7}$

IV) Efetuar as operações abaixo, simplificando ao máximo os resultados.

44) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$

45) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{18}}}$

46) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}$

47) $\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{6}$

48) $\sqrt[3]{4} . \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{9}$

49) $2\sqrt[3]{ab^2} . (-3\sqrt[3]{a^2b^3})$

50) $(6\sqrt{ax^2b}).(-3\sqrt{a^5b}).(-2\sqrt{a^3x})$

51) $\sqrt{8} . \sqrt{2}$

52) $\sqrt[5]{x^5y^4} : \sqrt[3]{x^2y}$

53) $(4\sqrt{10}) : (2\sqrt{5})$

54) $\sqrt[3]{12} . \sqrt[3]{18}$

55) $\sqrt[3]{\dfrac{54}{24}}$

56) $(\sqrt[5]{x^3y^4})^2$

57) $(\sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}})^2$

58) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

59) $\sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

60) $\dfrac{\sqrt{32}}{2} + \dfrac{\sqrt{98}}{3} - \dfrac{\sqrt{50}}{4}$

61) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

62) $4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

63) $\dfrac{5\sqrt{6}}{6} + \dfrac{3\sqrt{6}}{8} - \dfrac{2\sqrt{6}}{3} + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

64) $\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{18}$

65) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5} - \sqrt{80}$

66) $2\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{3}$

67) $\sqrt{80} + \dfrac{\sqrt{45}}{2} - \dfrac{2\sqrt{245}}{3}$

68) $\sqrt{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[4]{a^5}$

69) $\sqrt{3} . \sqrt[3]{a^2}$

70) $\sqrt{8} : \sqrt[4]{2}$

71) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{4}$

V) Introduzir os fatores nos radicais.

72) $2\sqrt{3a}$

73) $3x^2y \cdot \sqrt[3]{a}$

74) $\frac{x^2y}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{2}}$

75) $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$

76) $3a\sqrt[3]{3ab}$

77) $2a^3y\sqrt{ay}$

78) $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$

79) $a\sqrt{a\sqrt{a}}$

80) $\sqrt{2\sqrt{5}}$

81) $\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt{3}}}$

82) $x^2\sqrt{x^3\sqrt{x}}$

VI) Racionalizar os denominadores abaixo:

83) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

84) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

85) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

86) $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$

87) $\frac{8}{\sqrt[3]{4}}$

88) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

89) $\frac{4}{3\sqrt[3]{2}}$

90) $\frac{9}{\sqrt[5]{9}}$

91) $\frac{2}{3+\sqrt{3}}$

92) $\frac{8}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

93) $\frac{11}{5-\sqrt{3}}$

94) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

95) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

96) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

97) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

98) $\frac{5}{\sqrt[7]{x^3}}$

99) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

100) $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$

101) $\frac{a}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

102) $\frac{x}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

103) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}}$

104) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

105) $\frac{9}{\sqrt[3]{10}+2}$

106) $\frac{19}{4-\sqrt[3]{7}}$

107) $\frac{12}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$

108) $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

109) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

VII) Extrair as raízes quadradas dos números a seguir.

110) 2.401

111) 13.689

112) 49.284

113) 293.764

114) 11.236

115) 6.105.841

VIII) Extrair as raízes quadradas, por falta, dos números a seguir.

116) 6.679

117) 13.556

118) 91.212

119) 146.372

120) 8.457.317

IX) Escrever as raízes a seguir, sob a forma de soma ou diferença de dois radicais.

121) $\sqrt{6+\sqrt{11}}$

122) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$

123) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

124) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

125) $\sqrt{13+2\sqrt{22}}$

126) $\sqrt{20-2\sqrt{51}}$

127) $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

128) $\sqrt{a-b+\sqrt{a.(a-2b)}}$; $a > 0$ e $a > 2b$

X) Raízes, restos e erros.

129) A extração da raiz quadrada de um número deu resultado 72, com resto máximo. Qual era esse número?

130) No cálculo da raiz quadrada do número 2114, encontrou-se 45. Qual foi o resto?

131) Que resto encontramos na determinação da raiz quadrada do número 4845, que é 69?

132) Ao determinarmos a raiz quadrada do número 195, obtivemos resto máximo. Qual era esse resto?

133) Na determinação da raiz quadrada de um número N, encontra-se 26 para raiz e o resto foi o maior possível. Calcule N.

134) Determine a raiz quadrada de 288, sabendo-se que ela deixa o maior resto possível.

135) Determine a raiz quadrada de 483, com erro inferior a 0,1.

136) Calcule a raiz quadrada de 273, a menos de 0,01.

137) Determine a raiz quadrada de 916, a menos de 0,25.

138) Calcule a raiz quadrada de 47, com erro inferior a 0,125.

138) No cálculo da raiz cúbica de um número N, obteve-se o resto máximo. Sabendo-se que a raiz encontrada foi 8, calcule o valor de N.

140) Na extração da raiz cúbica de um número N, o resto obtido foi 396, que era o maior possível. Determine o valor de N.

QUESTÕES DE CONCURSOS

141) **(CN)** São dadas as afirmativas abaixo:

I) $\sqrt{(-2)^2} = -2$

II) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}} = \dfrac{\sqrt{(-1)(4)}}{\sqrt{(-1)(9)}} = \dfrac{\sqrt{-1}.\sqrt{4}}{\sqrt{-1}.\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

III) $\sqrt{(-2)^2} = -2$

IV) $\sqrt{3+2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

Assinale a alternativa correta:
a) Todas as alternativas são falsas.
b) Somente II é verdadeiral e II são verdadeiras.
c) I, II e III são verdadeiras.
d) Todas as alternativas são verdadeiras.

142) **(CPII)** O valor da expressão $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$ é:
a) 4
b) 4,5
c) 5
d) 5,5

143) **(PUC)** O valor de $\dfrac{\sqrt{1,777...}}{\sqrt{0,111...}}$ é:

a) 4,444...
b) 4
c) 4,777...
d) 3
e) 4/3

144) **(EPCAR)** A diferença $8^{0,666...} - 9^{0,5}$ é igual a:
a) -2
b) $\sqrt{2}-3$
c) $-2\sqrt{2}$
d) 1

145) **(CM)** Assinale a sentença verdadeira.
a) $1^{-2003} = (-1)^{2003}$
b) $2^{2003} + 2^{2004} = 2^{4007}$
c) $(-2)^{-2003} = 2^{2003}$
d) $\dfrac{2^{2004}}{2^{-2003}} = 2$
e) $\sqrt{(-2)^{2004}} = 2^{1002}$

146) **(CN)** Analise as afirmativas abaixo, onde A e B são números reais.

I – $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{(a+b)^2}$

II – $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{(a \cdot b)^2}$

III – $\sqrt{a^2} \div \sqrt{b^2} = \sqrt{(a \div b)^2}, b \neq 0$

Assinale a alternativa correta.
a) As afirmativas I, II e III são sempre verdadeiras.
b) Apenas a afirmativa I é sempre verdadeira.
c) Apenas as afirmativas I e II são sempre verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas I e III são sempre verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas II e III são sempre verdadeiras.

147) **(CN)** Analise as afirmativas a seguir:

I – $\left(3^{0,333...}\right)^{27} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}$

II – $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = 2-\sqrt{3}$

III – 10^{3k} tem (3k + 1) algarismos, qualquer que seja o número natural k.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa II é verdadeira
b) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
c) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras

148) **(CN)** Analise as afirmativas a seguir.

I) $9,\overline{1234} > 9,123\overline{4}$

II) $\dfrac{222221}{222223} > \dfrac{555550}{555555}$

III) $\sqrt{0,444...} = 0,222...$

IV) $2^{\sqrt[3]{27}} = 64^{0,5}$

Assinale a opção correta.
a) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

149) **(CEFET)** Determinar o valor da expressão abaixo:

$$\frac{\left(\frac{-31}{7}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

150) **(CM)** O valor da expressão

$$\frac{\left(\sqrt[3]{(-8)^{-1}}\right) \cdot \left(\sqrt{(-4)^2}\right)}{(1-0,444...)}$$ é :

a) -72/5
b) 1
c) -3,6
d) -1
e) 18/5

151) **(CEFET)** O valor da expressão $16^{3/4} \cdot (-8)^{-2/3}$ é:
a) 2
b) 4
c) 8
d) –2
e) –4

152) **(CEFET)** Racionalizando o denominador da expressão $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, obtemos:

a) $3\sqrt{6}$
b) $-2\sqrt{6} + 5$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $3 + \sqrt{6}$
e) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}$

153) **(CN)** O valor de é

a) 0
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}-2$
d) $\sqrt{2}-2$
e) 1

154) **(CM)** Resolva a expressão
$0,5^{-2} - \{0,2^{-3} - 0,1^{-2} \cdot [0,25^{-1/2} - (0,111...)^{1/2}]\}$.

155) **(CEFET)** Calcule $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0,5} + 16^{0.75} - 0,5^{-5} + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^0 \cdot 5$.

156) **(CAP-UFRJ)** Determine o valor de: $\dfrac{3}{\sqrt{\left(\dfrac{2,666...}{\frac{7}{2}-2}\right)^{-1}}}$

157) **(UNICAMP)** O valor de $-2^{-2^{-2}}$ é:
a) –16
b) 16
c) $\dfrac{1}{16}$
d) $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$
e) Impossível

158) **(CEFETEQ)** Calcule o valor da expressão $\sqrt[3]{\dfrac{(0,005)^2 \cdot 0,000075}{10}} \div (10^{-4} \cdot 2^{-1/3} \cdot 3^{1/3})$.

159) **(EPCAR)** Ao resolver a expressão numérica $\sqrt[3]{\dfrac{(25 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,000075}{10}} \div \dfrac{5\sqrt[3]{1,5}}{10^4} \cdot (-0,0010)^0$, o valor encontrado é:
a) $\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3}$
c) 1
d) 0,1

160) **(CN)** A expressão $\dfrac{(0,5)^{-2} \cdot 2^{0,333...} \cdot \sqrt[3]{16}}{(0,125)^{-3}}$ escrita como potência de base 2. tem como expoente:

a) $-\dfrac{14}{3}$
b) $-\dfrac{16}{3}$

c) -6

d) $-\dfrac{22}{3}$

e) -8

161) **(C. Naval)** Resolvendo–se a expressão:

$x = \dfrac{8^{0,666...} + 4^{3/2} + 2\sqrt{9} + 9^{0,5}}{\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-1/2}}$, encontra-se:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

162) **(EPCAR)** Escolha a alternativa FALSA.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}.\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}} = 2^{-1}$.

b) $\dfrac{0{,}333\ldots \, . \left(\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{9}}}\right)^{3}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-1/2}$

c) $\dfrac{0{,}03\,.\,10^{-30} + 0{,}3\,.\,10^{-31}}{0{,}3\,.\,10^{-32}} = \dfrac{1}{5}$

d) $(2^{-1} + 2^{-1/2})^{-2} = 12\sqrt{2} - 8$

163) **(CN)**Resolvendo–se a expressão

$\dfrac{\left\{\left[\left(\sqrt[3]{1{,}331}\right)^{12/5}\right]^{0}\right\}^{-7,2} - 1}{8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33}} \times \dfrac{1}{2^{102}}$, encontra-se:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

164) **(PUC)** Sejam a = $12(\sqrt{2} - 1)$, b = $4\sqrt{2}$ e c = $3\sqrt{3}$.
Então:
a) $a < c < b$
b) $c < a < b$
c) $a < b < c$
d) $b < c < a$
e) $b < a < c$

165) **(PUC)** Considere os três números $\dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{6(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}$ e $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$. Desses três números, qual o menor e qual o maior?

166) **(EPCAR)** Analise as expressões abaixo.

$$A = \sqrt[3]{\frac{(0{,}005)^2 \cdot (0{,}000075)}{10}}$$

$$B = -\left[\frac{(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]$$

Marque a resposta correta.
a) $A + B > 0$
b) $A . B = -1$
c) $\dfrac{A}{B} = -1$
d) $A^{-1} = B$

167) **(EPCAR)** Considere os números reais

$$x = \sqrt{2{,}\bar{7}}$$

$$y = \left(\sqrt{0{,}25} + 16^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1}$$

$$z = \frac{(-2^2)^{2^3} - \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{3^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}}}}{-\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-7}\right]^{2}}$$

É **FALSO** afirmar que:

a) $\dfrac{z}{y} < -\dfrac{3}{2}$

b) $x - y < \dfrac{1}{5}$

c) $x + z < 0$

d) $x + y + z \quad (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

168) **(EPCAR)** Analise as proposições, classificando-as em **(V)** verdadeiras ou **(F)** falsas.

( ) $\dfrac{\sqrt{9x10^{-6}}}{\sqrt{0{,}0049}} \cdot \sqrt{25x10^{3}} \cdot \sqrt[3]{-0{,}001} \cdot 0{,}1555\ldots = -0{,}0333\ldots$

( ) *Sendo* $n \in IN^*$, *então* $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}} = -0{,}5$

( ) $\dfrac{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[9]{3}} \cdot \dfrac{3^{0}}{\sqrt[3]{3^{2}}} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}}} = \sqrt{2} + 1$

A sequência correta é:
a) F, V, F
b) V, F, V
c) V, F, F
d) F, V, V

169) **(CEFET)** Simplificando a equação $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot x^2}{x^4}$ onde $x > 0$; obtém-se:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$

c) $\dfrac{1}{x}$

d) $\sqrt[6]{x^5}$

170) **(CEFET)** Sendo x um número real positivo,

$$a=\frac{2}{(x+1)^2} \text{ e } b=\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}, \text{ então } \frac{a}{b} \text{ vale:}$$

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)}$

d) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x(x+1)}$

171) **(EPCAR)** Supondo x e y números reais tais que $x^2 \neq y^2$ e $y \neq 2x$, a expressão

$$\sqrt{\frac{\frac{2x}{x+y}-\frac{y}{y-x}+\frac{y^2}{y^2-x^2}}{(x+y)^{-1}+x(x^2-y^2)^{-1}}}$$ sempre poderá ser

calculada em R se, e somente se,

a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
b) $x > 0$ e y é qualquer.
c) x é qualquer e $y \geq 0$.
d) $x \geq 0$ e y é qualquer.

172) **(EPCAR)** Considerando o conjunto dos números reais, analise as proposições abaixo, classificando-as em **(V)** verdadeiras ou**(F)** falsas.

( ) $\dfrac{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=a\sqrt[12]{a^5},(a>0)$

( ) $\dfrac{ac^{59}}{b^{20}}<0,\ b\neq 0$ *e* $a-c<0$, *então* $a<0$ *e* $c>0$

( ) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{(-a)^{-\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{6}},(a>0)$

( ) Se $a^2=99^6$ *e* $b^3=33^9$, *então* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-12}=(0,111\ldots)^{18}$

A sequência correta é:

a) F – V – F – V
b) F – V – V – V
c) V – F – V – V
d) V – V – V – F

173) **(EPCAR)** Classifique em **(V)** verdadeiro ou **(F)** falso cada alternativa abaixo:

( ) $\dfrac{\frac{m-1}{(m+1)^3}+\frac{1}{m^2-1}}{\frac{1}{(m-1)^2}+\frac{1}{(m+1)^2}}=(m-1)(m+1)^{-1}\ \forall\ m\neq 1 \text{ e } m\neq -1$

( ) $\left[\dfrac{\left(a^{4^2}\right)^{0,01}}{\left(a^{0,3}\right)^{-0,3}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^{-1}}}\right]^{-2}=\dfrac{1}{a}\ \forall\ a\neq 0$

( ) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}=\sqrt{3}$

Tem-se então a sequência:

a) V, V, V
b) V, F, V
c) F, V, F
d) F, F, F

174) **(EPCAR)** Considere os valores reais de a e b, $a \neq b$,

na expressão $p=\dfrac{(a+b)(2a)^{-1}+a(b-a)^{-1}}{(a^2+b^2)(ab^2-ba^2)^{-1}}$.

Após simplificar a expressão p e torná-la irredutível, pode-se dizer que $\sqrt{p^{-1}}$ está definida para todo.

a) $a \in R$ e $b \in R^*$
b) $a \in R$ e $b \in R_+^*$
c) $a \in R^*$ e $b \in R^*$
d) $a \in R^*$ e $b \in R_+^*$

175) **(EPCAR)** Considere os conjuntos numéricos N, Z, Q e R e analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas.

( ) Se $A=\{x \in N \mid x=6n+3, n \in N\}$ e $B=\{x \in N \mid x=3n, n \in N\}$, então $A \cup B=\{x \in N \mid x$ é múltiplo de $3\}$.

( ) Se $P=R \cap N$, $T=(N^* \cap Z) \cup Q$ e $S=N^* \cup (Z_+^* \cap Q)$, então $P \cap T \cap S = Z - Z_-$.

( ) Se $y=\sqrt[n]{\dfrac{600}{25^{n+2}-5^{2n+2}}}$ para $n \in N-\{0, 1\}$, então y é irracional.

Marque a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) V – V – F
b) F – F – V
c) V – F – F
d) F – V – V

176) **(EPCAR)** Marque a alternativa verdadeira.

a) Se $x=\sqrt[p]{\dfrac{20}{4^{p+2}+4^{p+1}}}$, $p \in N^*$, então $x \in [R-Q]$.

b) O valor de $y=\dfrac{\left(\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{3^{30}}\right)}{\left(\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{3^{30}}+\frac{1}{3^{40}}\right)}$ é tal que $y \in (Q-Z)$.

c) Se $z=\dfrac{\sqrt{\sqrt{81}}-10^2\cdot\sqrt{625\cdot 10^{-4}}}{\left(-\sqrt[4]{3}\right)^2-\sqrt{27}}$, então $z \in (R-Q)$.

d) Se $m=1,\overline{1}-\left(2^{\sqrt{2}-1}\right)^{(\sqrt{2}+1)}$, então $m < -1$.

177) **(CN)** Quantas vezes inteiras a raiz quadrada de 0,5 cabe na raiz cúbica de 10?
a) Uma.
b) Duas.
c) Três.
d) Quatro.
e) Cinco.

178) **(CM)** Racionalizando o denominador da fração

$\frac{-2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ obtemos:
a) -1
b) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$
c) $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$
d) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

179) **(CM)** O valor da expressão $\frac{\left(\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{5}}$ é:
a) $\sqrt{5}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
c) 1/5
d) $-\sqrt{5}$
e) -1/5

180) **(CEFET)** Ao simplificarmos $\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$, obtemos:
a) $\sqrt[8]{2}$
b) $\sqrt[8]{2^3}$
c) $\sqrt[4]{8}$
d) $2\sqrt[8]{2}$
e) $2\sqrt[4]{8}$

181) **(CAP-UFRJ)** Resolva a expressão $\sqrt[3]{\sqrt{512}} + \sqrt[3]{54} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{250}$, escrevendo o resultado na forma mais simples.

182) **(UNICAMP)** Racionalizando-se o denominador da fração

$\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-2}}}$, obtemos:
a) $\sqrt[n]{a}$
b) $\sqrt[n]{a^2}$
c) $\sqrt[n]{a^{n-2}}$
d) a

183) **(CN)** $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, é um número que está entre:
a) 0 e 2
b) 2 e 4
c) 4 e 6
d) 6 e 8
e) 8 e 10

184) **(CEFETEQ)** Racionalizando-se o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$, encontramos um fator racionalizante do tipo $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 1$. Determine o valor da soma a + b + 1.

185) **(CN)** O denominador racionalizado de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}$, é:
a) 10
b) 8
c) 4
d) 3
e) 2

186) **(CN)** O valor de

$$\frac{3.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)}{2.\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+1\right)^2-1\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \text{ é}$$

a) $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$
b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{24}$
c) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{30}}{24}$
d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12}$
e) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

187) **(CM)** Um engenheiro planejou uma leitora ótica que lê 5000 cartões-resposta em 10 minutos. Ele espera conseguir planejar uma segunda máquina de tal forma que ambas, operando juntas, leiam 27000 cartões-resposta em 15 minutos. Assim sendo, a segunda máquina sozinha demoraria para ler 9100 cartões-resposta em x minutos. O valor de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ é:
a) $\sqrt{5}$
b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
c) $\frac{\sqrt{6}}{11}$
d) $\frac{\sqrt{26}}{11}$
e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

188) **(CN)** Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 quilogramas (kg) do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunido x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B, resultam44000 gramas do produto, então
a) $y^x = 2^{60}$
b) $\sqrt{x\cdot y} = 5\sqrt{10}$
c) $\sqrt[10]{y^x} = 256$
d) $\sqrt[4]{x^y} = 20$
e) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 25\sqrt{\ }$

189) **(CEFET)** Observe as igualdades abaixo:

$\sqrt{2-1} = 1$
$\sqrt{(2-1)+(4-1)} = 2$
$\sqrt{(2-1)+(4-1)+(6-1)} = 3$
$\sqrt{(2-1)+(4-1)+(6-1)+(8-1)} = 4$

Dando continuidade a essas expressões, obteríamos outras

expressões idênticas, que seriam igualmente válidas...
Considerando x . IN na equação
$\sqrt{(2-1)+(4-1)+(6-1)+\ldots+(x-1)}=338$,
obtenha a raiz quadrada de x.

190) **(CM)** Determine o valor da expressão

$$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}+2\sqrt{3}$$

a) 1
b) 2
c) -1
d) -2
e) -5

191) **(CM)** Se $A=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e $B=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, então o valor da expressão (B^2 - A^2) é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

192) **(CM)** Simplificando a expressão

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}},$$

encontramos:
a) 0
b) 1
c) $2a^2$
d) $\sqrt{a^2-1}$

193) **(CM)** O valor numérico da expressão $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$, quando $a=\frac{\sqrt[3]{7}+2}{\sqrt[3]{2}}$ e $2b=\frac{2\sqrt[3]{7}-4}{\sqrt[3]{2}}$, é:
a) 28
b) 30
c) 32
d) 34
e) 35

194) **(CN)** Sabendo que $\sqrt[3]{x^2} = 1999^6$; $\sqrt{y} = 1999^4$ e $\sqrt[5]{z^4} = 1999^8$, (x > 0, y > 0 e z > 0), o valor de $(x\,.\,y\,.\,z)^{-1/3}$ é:
a) 1999^9
b) 1999^6
c) $1999^{1/9}$
d) 1999^{-6}
e) 1999^{-9}

195) **(CEFETEQ)** Considere:
$A = (5^a \times 5^a \times 5^{2a})^3$
$B = 5^{5a} \div 5^a$
$A \times B = \sqrt[7]{625}$ e

$a = \frac{1}{x}$.

Determinar o valor numérico de x.

196) **(CN)** Sabendo que $A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$,

qual é o valor de $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?
a) $\sqrt[5]{3^4}$
b) $\sqrt[7]{3^6}$
c) $\sqrt[8]{3^5}$
d) $\sqrt[10]{3^7}$
e) $\sqrt[12]{3^5}$

197) **(CN)** O valor de $\frac{(3+2\sqrt{2})^{2008}}{(7+5\sqrt{2})^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número
a) múltiplo de onze.
b) múltiplo de sete.
c) múltiplo de cinco.
d) múltiplo de três.
e) primo.

198) **(CN)** Sejam $x = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997}+(2-\sqrt{3})^{1997}}{2}$ e $y = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997}-(2-\sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}}$. O valor de $4x^2 - 3y^2$ é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

199) **(CN)** Ao extraírmos a raiz cúbica de um número N, verificamos que o resto era o maior possível e igual a 126. A soma dos algarismos de N é:
a) 11
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

200) **(CEFET)** Sabendo que N é a raiz quadrada positiva de 12345654321 e que a soma dos seus algarismos é 6, assinale, entre as opções abaixo, aquela que representa N.
a) 111111
b) 112110
c) 211011
d) 1012011
e) 1102111

201) **(CN)** O valor de $(a^2 + a^{4/3}\,.\,b^{2/3})^{1/2} + (b^2 + a^{2/3}\,.\,b^{4/3})^{1/2}$ é:
a) $(a^{2/3} + b^{3/2})^{2/3}$
b) $(a^{2/3} + b^{3/2})^{3/2}$
c) $(a^{3/2} + b^{2/3})^{2/3}$
d) $(a^{3/2} + b^{2/3})^{3/2}$
e) $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

202) **(CEFET)** O "Método das Iterações" fornece um algoritmo que calcula o valor aproximado de raízes quadradas, indicado ao lado: $\sqrt{A} \cong \frac{A+B}{2\sqrt{B}}$
Onde: A é o número que desejamos obter o valor aproximado da raiz quadrada e B é o quadrado perfeito mais próximo de A.

Por exemplo, se A = 17, teremos B = 16 e daí $\sqrt{17} \cong \frac{17+16}{2\sqrt{16}}$.
Aplicando o método acima, qual é o valor aproximado de $\sqrt{33}$
a) 5,73
b) 5,75
c) 5,77
d) 5,79

203) **(CEFET)** Qual, dentre as opções abaixo, equivale a $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$?
a) $-3+\sqrt{2}$
b) $-1,5+\sqrt{2}$
c) $1+\sqrt{2}$
d) $2+\sqrt{2}$

204) **(CEFET)** O número d = $\sqrt{3+2.\sqrt{2}} - \sqrt{3-2.\sqrt{2}}$ é um natural. Qual é esse número?

205) **(CM)** Se m = $\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}$ então sobre o valor da expressão $\frac{m^3}{2\sqrt{14}}$ é correto afirmar que:

a) é um número par
b) é um número irracional
c) é um número inteiro negativo
d) é um número primo
e) é um número racional negativo

206) **(CN)** Se $2 < x < 3$, então $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

a) 2
b) $\sqrt{x}$
c) $2\sqrt{x-1}$
d) $2\sqrt{x}$
e) 3

207) **(CN)** Se a = $\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e b = $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então a + b é igual a:

a) $\sqrt{10}$
b) 4
c) $2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{5}+1$
e) $\sqrt{3}+2$

208) **(CM)** Sendo A = $\sqrt{17-2\sqrt{30}}-\sqrt{17+2\sqrt{30}}$, o valor de $\left(A+2\sqrt{2}\right)^{2007}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

209) **(CN)** Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

a) 3,00
b) 3,95
c) 3,15
d) 3,25
e) 3,35

210) **(CN)** $\sqrt[10]{6+\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $1+\sqrt{7}$
b) $1+\sqrt{6}$
c) $1+\sqrt{5}$
d) $1+\sqrt{3}$
e) $1+\sqrt{2}$

211) **(CN)** O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5-\sqrt{3}$
b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
c) $3-\sqrt{2}$
d) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$
e) 2

GABARITO

1) a^3
2) $\sqrt[3]{x}$
3) $x\sqrt[5]{x^3}$
4) 6^4
5) 25
6) $2\sqrt{2}$
7) 18
8) 50
9) 6
10) $6\sqrt[3]{18}$
11) 26
12) -4
13) $6\sqrt[3]{12}$
14) 12
15) 0,5
16) 0,09
17) $\frac{2}{3}$
18) $\frac{4}{5}$
19) $\frac{x^2}{y^5}$
20) ab^3
21) $\sqrt[5]{xy^2}$
22) $2xy\sqrt[5]{2x^3y^2}$
23) x^2y^4
24) $xyz^2\sqrt[3]{y^2z}$
25) $a^2b^2c^3\sqrt{ac}$
26) $\frac{xy^3}{z^5}$
27) $\frac{xy^2}{z}\sqrt[3]{\frac{x^2}{z}}$

28) $x\sqrt[n]{x^3}$

29) 9

30) 5

31) 2

32) 4

33) 2

34) $\sqrt{3}$

35) 8

36) -3

37) $3/2$

38) $2/5$

39) $25/9$

40) $\sqrt[12]{25}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{729}$

41) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{625}, \sqrt[12]{27}$

42) $\sqrt[120]{x^{72}}, \sqrt[120]{x^{20}}, \sqrt[120]{x^{75}}$

43) $\sqrt[8]{a^4}, \sqrt[8]{a^6}, \sqrt[8]{a^7}$

44) $\sqrt[12]{3}$

45) $\sqrt[30]{18}$

46) $\sqrt[12]{a}$

47) $\sqrt[3]{12}$

48) $6\sqrt[3]{36}$

49) $-6ab\sqrt[3]{b^2}$

50) $36a^4bx\sqrt{ax}$

51) 4

52) $\sqrt[15]{x^5y^7}$

53) $2\sqrt{2}$

54) 6

55) $\frac{3}{2}$

56) $xy\sqrt[5]{xy^3}$

57) 10

58) $4\sqrt{2}$

59) $2\sqrt{3}$

60) $\frac{37\sqrt{2}}{12}$

61) $3\sqrt{2}$

62) $-5\sqrt{5}$

63) $\frac{17\sqrt{6}}{24}$

64) $2\sqrt{2}$

65) $-4\sqrt{5}$

66) $11\sqrt{3}$

67) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

68) $a^2\sqrt[12]{a^5}$

69) $\sqrt[6]{27a^4}$

70) $2\sqrt[4]{2}$

71) $2\sqrt[6]{\frac{27}{16}}$

72) $\sqrt{12a}$

73) $\sqrt[3]{27x^6y^3a}$

74) $\sqrt[3]{\frac{x^7y^4}{54}}$

75) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

76) $\sqrt[3]{81a^4b}$

77) $\sqrt{4a^7y^3}$

78) $\sqrt[6]{108}$

79) $\sqrt[4]{a^7}$

80) $\sqrt[4]{20}$

81) $\sqrt[12]{48}$

82) $\sqrt[4]{x^{15}}$

83) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

84) $\sqrt{3}$

85) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

86) $\sqrt[5]{81}$

87) $4\sqrt[3]{2}$

88) $\sqrt[3]{x}$

89) $\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$

90) $3\sqrt[5]{27}$

91) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

92) $8(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

93) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

94) $3 + 2\sqrt{2}$

95) $4 + \sqrt{15}$

96) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

97) $\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

98) $\frac{5\sqrt[7]{x^4}}{x}$

99) $\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}$

100) $\sqrt{6}+1$

101) $\frac{a\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x+y}$

102) $\frac{x\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$

103) $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{3}$

104) $4(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

105) $\frac{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{80}+8}{2}$

106) $\frac{16+4\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}{3}$

107) $2(\sqrt[3]{5}+1)$

108) $\sqrt[3]{4}-1$

109) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$

110) 49

111) 117

112) 222

113) 542

114) 106

115) 2471

116) 81

117) 116

118) 302

119) 382

120) 2908

121) $\sqrt{\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

122) $\sqrt{\frac{13}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$

123) $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

124) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

125) $\sqrt{11}+\sqrt{2}$

126) $\sqrt{17}-\sqrt{3}$

127) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

128) $\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a-2b}{2}}$

129) 5.328

130) 89

131) 84

132) 26

133) 728

134) 16

135) 21,9

136) 16,52

137) 30,25

138) 6,75

139) 728

140) 1.727

141) A

142) A

143) B

144) D

145) E

146) E

147) E

148) E

149) $\frac{23}{12}$

150) C

151) A

152) B

153) D

154) 137/3

155) -75/4

156) 4

157) D

158) 5

159) C

160) B

161) C

162) D

163) E

164) A

165) MAIOR: $\frac{6(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}$

MENOR: $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$

166) C

167) A

168) C

169) A

170) A

171) D

172) A

173) B

174) D

175) A

176) C

177) C

178) B

179) A

180) E

181) $-3-2\sqrt{2}$

182) B

183) B

184) 7

185) C

186) B

187) E

188) C

189) 26

190) E

191) E

192) C

193) C

194) E

195) 28

196) E

197) D

198) D

199) B
200) A
201) E
202) B
203) C
204) 2
205) D
206) A
207) D
208) A
209) C
210) D
211) B

OBSERVAÇÕES

Equações biquadradas

Uma equação biquadrada é do tipo:

$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0;}$ a, b, c $\in$ R e a $\neq$ 0

Exemplos:

a) $7x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ é uma equação biquadrada
b) $5x^4 - 3 = 0 \Rightarrow$ é uma equação biquadrada
c) $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ não é uma equação biquadrada, pois possui variável elevada a expoente ímpar.

Método de resolução

Sua resolução é feita através de uma transferência de variáveis. Devemos, para isto, utilizar os procedimentos a seguir:

1°) Substitui-se na equação x^2 por y. Logo x^4 será igual a y^2, o que a tornará uma equação do 2° grau.

2°) Em seguida resolve-se a equação do 2° grau assim obtida, determinando-se os dois valores de y.

3°) Como $x^2 = y$, então $x = \pm\sqrt{y}$.

Exemplos:
Resolver em R, as equações:
a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Resolução:
Artifício: Faça $x^2 = y \Rightarrow x^4 = y^2$
$y^2 - 10y + 9 = 0$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

como $x^2 = y$, logo:
$x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$
$x^2 = 9$ $\quad x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $\quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
S = {– 3. –1, 1, 3}

b) $x^4 - x^2 - 20 = 0$

Resolução:
Artifício: Façamos
$x^2 = y \Rightarrow x^4 = y^2$
$y^2 - y - 20 = 0$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-20)}}{2.1} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

como $x^2 = y$, temos que:
$x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$
$x^2 = 5$ $\quad x^2 = -4$
$x = \pm\sqrt{5}$ $\quad x = \pm\sqrt{-4} \notin R$

$S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

c) $9 + \frac{18}{x^2} + \frac{8}{x^4} = 0$

Resolução:
Vamos tirar o MMC dos denominadores:
MMC = x^4

$$\frac{9}{\cancel{1}/x^4} + \frac{18}{\cancel{x^2}/x^2} + \frac{8}{\cancel{x^4}/1} = 0$$

Supondo-se que $x \neq 0$, podemos abandonar os denominadores:
$9x^4 + 18x^2 + 8 = 0$

Façamos: $x^2 = y$ e $x^4 = y^2$

$9y^2 + 18y + 8 = 0$

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4.9.8}}{2.9} = \frac{-18 \pm 6}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-18+6}{18} = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3} \\ y_2 = \dfrac{-18-6}{18} = -\dfrac{24}{18} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

como $x^2 = y$:
$x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$
$x^2 = -2/3$ $\quad x^2 = -4/3$

$x = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}} \notin R$ $\quad x = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}} \notin R$

$S = \varnothing$

Observações:
a) As raízes de uma equação biquadrada são *SIMÉTRICAS* duas a duas.
b) Em decorrência do que foi apresentado acima, a soma das raízes de uma equação biquadrada vale sempre *ZERO*.
c) Esse procedimento serve para resolver qualquer equação do tipo $\mathbf{ax^{2k} + bx^k + c = 0}$, sendo k, um número positivo. Nesse caso, devemos proceder de forma análoga à mostrada, chamando x^k de **y** e x^{2k} de $\mathbf{y^2}$.

Composição da equação biquadrada, dadas as raízes

O processo de composição é bem semelhante àquele utilizado no capítulo "*Equação do 2° Grau*". Assim sendo, uma equação biquadrada de raízes ± k e ± m é da forma:

$$\boxed{x^4 - S \cdot x^2 + P = 0}$$

onde: $S = k^2 + m^2$ e $P = k^2 \cdot m^2$

Exemplo:

Compor uma equação biquadrada de raízes $\pm\sqrt{3}$ e ± 7.

Neste caso temos $k = \sqrt{3}$ e $m = 7$

Logo: $k^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ e $m^2 = 7^2 = 49$
$S = k^2 + m^2 = 3 + 49 = 52$
$P = k^2 \cdot m^2 = 3 \cdot 49 = 147$
$x^4 - S \cdot x^2 + P = 0$
$x^4 - 52x^2 + 147 = 0$

Equações irracionais

Uma equação é dita irracional quando apresenta variável sob radical ou elevada a expoente fracionário.

Cabe lembrar que, ao resolvermos uma equação irracional, é necessário que testemos os resultados obtidos de modo a verificar se eles servem ou não como soluções da equação proposta. Este teste é necessário pois, muitas vezes a resolução de uma equação irracional é feita elevando-se ambos os membros a um expoente par, o que, por certo, pode introduzir raízes estranhas à equação.

Por exemplo:
I) Suponha x = 2
II) Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, teoricamente não a alteramos:
$x^2 = 2^2$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$

III) Observe que a raiz −2 apareceu, sem no entanto satisfazer à equação primitiva do item (I), daí ser chamada de raiz estranha, e portanto ser importante a verificação dos resultados encontrados.

Exemplos:

a) Seja resolver a equação $\sqrt[5]{2x} = 2$.

Resolução:

Devemos elevar ambos os membros à 5ª potência de modo a eliminar a raiz:

$(\sqrt[5]{2x})^5 = 2^5$

$2x = 32 \quad \therefore \; x = 16 \;\Rightarrow\; S = \{16\}$

b) Resolver a equação $\sqrt{4+x} + \sqrt{x-1} = 5$.

Resolução:

Devemos isolar um dos radicais em um dos membros, e, em seguida elevar ambos os membros ao quadrado, tornando a isolar o radical obtido:

$\sqrt{4+x} + \sqrt{x-1} = 5$

$\sqrt{4+x} = 5 - \sqrt{x-1}$

$(\sqrt{4+x})^2 = (5 - \sqrt{x-1})^2$

$4 + x = 25 - 10\sqrt{x-1} + x - 1$

$10\sqrt{x-1} = 25 + x - 1 - x - 4$

$10\sqrt{x-1} = 20$

$\sqrt{x-1} = 2$

$(\sqrt{x-1})^2 = 2^2$

$x - 1 = 4 \quad \therefore \; x = 5$

Teste:

$\sqrt{4+5} + \sqrt{5-1} \overset{?}{=} 5$

$\sqrt{9} + \sqrt{4} \overset{?}{=} 5$

$3 + 2 \overset{?}{=} 5$

$5 = 5$ (Serve) $S = \{5\}$

c) Resolver a equação abaixo:

$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+4} = 7$

Resolução:

$\sqrt{3x+1} = 7 - \sqrt{x+4}$

$(\sqrt{3x+1})^2 = (7 - \sqrt{x+4})^2$

$3x + 1 = 49 - 14\sqrt{x+4} + x + 4$

$14\sqrt{x+4} = 52 - 2x$

Dividindo-se ambos os membros por 2:

$7\sqrt{x+4} = 26 - x$

$(7\sqrt{x+4})^2 = (26 - x)^2$

$49(x + 4) = 676 - 52x + x^2$

$49x + 196 = 676 - 52x + x^2$

$-x^2 + 52x - 676 + 49x + 196 = 0$

$-x^2 + 101x - 480 = 0$

$x^2 - 101x + 480 = 0$

Resolvendo-se tal equação, obtemos x = 5 ou x = 96.

Testes:

1°) x = 5

$\sqrt{3.5+1} + \sqrt{5+4} \overset{?}{=} 7$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} \overset{?}{=} 7$

$4 + 3 \overset{?}{=} 7$

$7 = 7$ Serve!!!

2°) x = 96

$\sqrt{3.96+1} + \sqrt{96+4} \overset{?}{=} 7$

$\sqrt{289} + \sqrt{100} \overset{?}{=} 7$

$17 + 10 \overset{?}{=} 7$

$27 \neq 7$ Não Serve!!!

$S = \{5\}$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolva as equações abaixo, sendo U = R.

1) $8x^4 = 0$

2) $4x^4 - 9x^2 = 0$

3) $16x^4 - 1 = 0$

4) $9x^4 - 16 = 0$

5) $6x^4 + 7x^2 = 0$

6) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

7) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

8) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

9) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

10) $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

11) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

12) $x^2 - 8 + \frac{7}{x^2} = 0$

13) $x^2 - 1 - \frac{12}{x^2} = 0$

14) $45x^{-4} - 14x^{-2} + 1 = 0$

15) $\left(\frac{a}{a+2}\right)^2 + \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

II) Compor as equações biquadradas de raízes:

16) ± 3 e ± 5

17) ± 2 e ± 7

18) ± 1 e $\pm\sqrt{5}$

19) $\pm 3k$ e $\pm 2k$

20) 0 e ± 4

21) $\pm\sqrt{5+\sqrt{2}}$ e $\pm\sqrt{5-\sqrt{2}}$

22) $\pm\sqrt{a}$ e $\pm\frac{\sqrt{a}}{a}$

III) Propriedades e discussão da natureza das raízes.

23) Quanto vale a soma das raízes da equação $x^4 - 12x^2 - 2 = 0$?

24) Qual o valor da soma das raízes de $x^2 - 3 - \frac{5}{x^2} = 0$?

25) Determine as médias aritmética e geométrica das raízes da equação: $45x^{-4} - 14x^{-2} + 1 = 0$.

26) Escreva uma equação biquadrada em que duas raízes são -4 e 6.

27) Uma das raízes da equação $x^4 - 20x^2 + k = 0$ vale -4. Calcule as demais raízes.

28) Determine os valores de k e m, de modo que a equação $x^4 + (k+1) \cdot x^2 + 2 - m = 0$, tenha duas raízes nulas e as demais reais.

29) A equação $x^4 + 5x^2 + b + 6 = 0$ tem apenas duas raízes reais para que valor(es) de b?

IV) Resolver, em IR, as equações irracionais a seguir:

30) $\sqrt{x} = 6$

31) $\sqrt[3]{x} = 2$

32) $\sqrt{3x} = 8$

33) $\sqrt[5]{2x} = 1$

34) $\sqrt[4]{3x} = 3$

35) $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2} = 0$

36) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+2} = 4$

37) $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[6]{3x-2}$

38) $\sqrt{x+\sqrt{6x+1}} = 3$

39) $\sqrt{3x-\sqrt{x-2}} = 4$

40) $x + \sqrt{x} = 12$

41) $\sqrt[3]{x} + 4 \cdot \sqrt[6]{x} - 12 = 0$

42) $\sqrt{y} - \sqrt[4]{y} = 20$

43) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{4x+9}$

44) $\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-x} = \sqrt{3x-2}$

45) $\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+4} = \sqrt{2-x}$

46) $\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

47) $[3 + (x-1)^{½}]^{½} = 2$

QUESTÕES DE CONCURSOS

48) (CM) A respeito das quatro raízes da equação $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ é correto afirmar que:
a) duas são reais e duas são inteiras
b) duas são racionais e duas são inteiras
c) as quatro são racionais
d) duas são irracionais e duas são racionais
e) as quatro são irracionais

49) (CM) O produto das raízes reais da equação $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$, é:
a) 3
b) 9/4
c) 3/2
d) 9
e) 37/4

50) (CM) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ são as raízes da equação $2x^4 + 72 = 26x^2$, então o valor da expressão $(x_1)^{x_3} + (x_2)^{x_4}$, é:
a) 0
b) 1
c) -12
d) 17
e) 3

51) (CM) Se a, b, c e d são as raízes reais da equação $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, então o valor da expressão $A = (a)^2 + (b)^2 + (c)^2 + (d)^2$ é:
a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{10}{9}$
c) $\frac{11}{9}$
d) $\frac{17}{9}$

52) (CN) Quantas raízes reais tem a equação raiz de $\sqrt{x+20} = x$?
a) Nenhuma.
b) Uma.
c) Duas, as quais são positivas.
d) Duas, as quais são negativas.
e)Duas, as quais têm sinais opostos.

53) (CN) Qual é a solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = x$?
a) $x = \frac{1}{2}$
b) $x = -1$
c) $x = 1$
d) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{1}{2}$

54) (CEFET)Luiz Felipe é aluno de uma turma do 1° do Ensino Médio no CEFET-RJ e por estar gripado, perdeu a aula de Trigonometria do seu professor de matemática na semana passada, quando seus colegas de turma aprenderam a calcular o sen15° por dois processos distintos. Ao "xerocar" o caderno de um colega, para procurar ficar com o mesmo em dia, percebeu que estava escrito *sen*15°= $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ numa linha e na outra *sen*15°= $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. O símbolo era uma falha na cópia "xerox" que mostrava uma mancha de "toner". Como a matemática é uma ciência exata, obviamente ele sabe que os resultados de 15° encontrados representam números iguais, ainda que a

primeira vista isso pareça errado. Então não precisou olhar nenhum dos cadernos dos seus colegas para concluir que no lugar da mancha deve ser colocado que número natural?

55) **(EPCAR)** O conjunto solução da equação

$-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em:

a) $\{x \in R \mid 10 < x < 18\}$
b) $\{x \in R \mid 17 < x < 25\}$
c) $\{x \in R \mid 24 < x < 32\}$
d) $\{x \in R \mid 31 < x < 39\}$

56) **(EPCAR)** Se $a \in R_+^*$ é raiz da equação na incógnita y,

$\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}=y-1$, então:

a) $0 < a < 1$
b) $1 < a < \frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{2} < a < 2$
d) $2 < a < \frac{5}{2}$

57) **(CM)** A solução real da equação

$\sqrt{x-\sqrt{2x-10}}-\sqrt{x-2}=0$ é um número:

a) par
b) múltiplo de 3
c) menor que 4
d) primo
e) múltiplo de 5

58) **(EPCAR)** Sabendo-se que existem as raízes quadradas expressas na equação (I), de variável x, dada por $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $a \in R$, e que a é a menor raiz da equação (II) dada por $x^2-x=0$, então, pode-se afirmar que o conjunto solução da equação (I) é.

a) R
b) R_+
c) R^*
d) R_+^*

59) **(CM)** Determine o conjunto solução em $\Re$ da equação irracional $\sqrt{(-x+6)^2}=3$.

a) S = {3}
b) S = {3, 27}
c) S = {1/3, 3}
d) S = {1, 3}
e) S = {3, 9}

60)**(CEFET)** Quanto à(s) raiz(es) da equação $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=2x-8$, pode-se afirmar que

a) é única e positiva.
b) não existe.
c) são infinitas.
d) é única e negativa.
e) são duas cuja soma é 10/3 .

61) **(CM)** A raiz da equação $\sqrt{9+x}+\sqrt{6+x}=3$ pertence ao conjunto

a) {-2, -1, 0}
b) {-7, -3, 2}
c) {-8, -6, 3}
d) {-10, -9, 4}
e) {-4, -5, 6}

62) **(CM)** A raiz da equação $\sqrt{x-\sqrt{2x-10}}-\sqrt{x-2}=0$ é um número:

a) par
b) múltiplo de três
c) primo
d) divisor positivo de 96
e) múltiplo de sete

63) **(CM)** A raiz da equação $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ é:

a) uma dízima periódica
b) um número natural, quadrado perfeito
c) um número racional, cujo inverso tem quatro divisores positivos
d) um número irracional
e) inexistente, em R

64) **(EPCAR)** A equação $x=\sqrt{3x+a^2+3a}$, em que x é a incógnita e $a \in R$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \subset R$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I) Possui exatamente dois elementos.
II) Não possui elemento menor que 2.
III) Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras:

a) Apenas I e II.
b) Apenas I e III.
c) Apenas II e III.
d) I, II e III.

65) **(CN)** Os números reais positivos a e b satisfazem a igualdade: $a\sqrt{(a^2+2b^2)}=b\sqrt{(9a^2-b^2)}$. Um valor possível, para $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$.
b) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.
c) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
e) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

66) **(EPCAR)** Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o terreno, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim, o elevador.

O para nos andares múltiplos de 11;
S para nos andares múltiplos 7;
C para nos andares múltiplos de 5; e
T para em todos os andares.

Todos esses elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação. Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em V (verdadeira) ou F(falsa).

(F) No último andar para apenas 1 elevador.
(V) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.
( ) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores, com exceção do próprio terreno.

Tem-se a sequência correta em

a) F – V – V
b) F – V – F

c) V – F – V
d) F – F – V

67) **(CN)** A solução de no campo dos reais é:
a) o conjunto vazio.
b) {1/2}
c) {-1/2, 1/2}
d) [1/2, + ∞[
e)]-∞, + ∞[

GABARITO

1) $S = \{0\}$
2) $S=\left\{-\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right\}$
3) $S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$
4) $S=\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$
5) $S = \{0\}$
6) $S = \{-3, -2, 2, 3\}$
7) $S = \varnothing$
8) $S = \{-1,1\}$
9) $S=\left\{-\frac{\sqrt{6}}{3},-1,1,\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$
10) $S=\left\{-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},1\right\}$
11) $S = \{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$
12) $S = \{-\sqrt{7},-1,1,\sqrt{7}\}$
13) $S = \{-2, 2\}$
14) $S = S=\{-3,-\sqrt{5},\sqrt{5},3\}$
15) $S=\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$
16) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
17) $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$
18) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
19) $x^4 - 13k^2x + 36k^4 = 0$
20) $x^4 - 16x^2 = 0$
21) $x^4 - 10x^2 + 23 = 0$
22) $ax^4 - (a^2 + 1)\,x^2 + a = 0$
23) 0
24) 0
25) MA = 0 e MG = $\sqrt[4]{45}$
26) $x^4 - 52x^2 + 576 = 0$
27) -2; 2 e 4
28) m = 2 e k < -1
29) b < - 6
30) $S = \{36\}$
31) $S = \{8\}$
32) $S = \left\{\frac{64}{3}\right\}$
33) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
34) $S = \{27\}$
35) $S = \{2\}$
36) $S = \varnothing$
37) $S = \left\{\frac{3}{4},1\right\}$
38) $S = \{4\}$
39) $S = \{6\}$
40) $S = \{9\}$
41) $S = \{64\}$
42) $S = \{625\}$
43) $S = \{10\}$
44) $S = \left\{1,\frac{5}{3}\right\}$
45) $S = \{-2\}$
46) $S = \{1\}$
47) $S = \{2\}$
48) D
49) B
50) B
51) E
52) B
53) A
54) 2
55) B
56) B
57) D
58) B
59) E
60) B
61) E
62) C
63) C
64) C
65) E
66) A
67) D

OBSERVAÇÕES

Sistemas de equações do 2° grau

Em geral este tipo de sistema é composto por uma equação do 2° grau e outra do 1°. Sua solução, na maioria dos casos, é feita pela substituição de uma das variáveis, previamente isolada na equação do 1° grau, na outra equação.

Exemplos:
Resolver os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

Resolução:
Em primeiro lugar, vamos isolar, por exemplo, a variável **x** na 1ª equação:
$x = 1 + y.$
Agora vamos substituir tal valor na 2ª equação:

$x^2 + y^2 = 13$
$(1 + y)^2 + y^2 = 13$
$1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$
$2y^2 + 2y - 12 = 0$
$y^2 + y - 6 = 0$

Resolvendo esta equação, obtemos

$\underline{y = 2}$ ou $\underline{y = -3}$

$x = 1 + y$, $x = 1 + 2$, $\underline{x = 3}$ — (3, 2) é solução

$x = 1 + y$, $x = 1 + (-3)$, $\underline{x = -2}$ — (–2, –3) é solução

S = {(–2, –3), (3, 2)}

b) $\begin{cases} a + b = 7 \\ a \cdot b = 12 \end{cases}$

Resolução:
$a + b = 7 \Rightarrow a = 7 - b$
$a \cdot b = 12$
$(7 - b) \cdot b = 12$
$7b - b^2 = 12$
$-b^2 + 7b - 12 = 0$
$b^2 - 7b + 12 = 0$

$b = 3$ ou $b = 4$

$b = 3 \downarrow$ $a = 7 - b$, $a = 7 - 3$, $a = 4 \downarrow$ (4,3) é solução

$b = 4 \downarrow$ $a = 7 - b$, $a = 7 - 4$, $a = 3 \downarrow$ (3,4) é solução

S = {(3,4), (4,3)}

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 29 \end{cases}$

Resolução:
A sugestão neste caso, já que não há nenhuma equação do 1° grau, é multiplicarmos a primeira equação por –1, adicionando-a, membro a membro, com a 2ª,

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 29 \end{cases}$

$3xy = 12$
$x \cdot y = 4$
$y = \dfrac{4}{x}$

Vamos substituir tal valor na 1ª equação dada:
$x^2 + y^2 = 17$

$x^2 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^2 = 17$

$\dfrac{x^2}{\cancel{1}} + \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{17}{\cancel{1}}$ (mmc x^2)

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Façamos $x^2 = z$ e $x^4 = z^2$

$\underline{z^2 - 17z + 16 = 0}$

$z_1 = 16$ ou $z_2 = 1$

$x^2 = z_1$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$

$x^2 = z_2$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

Como $y = \frac{4}{x}$, temos que:

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow$ (4, 1) é solução

$x = -4 \Rightarrow y = \frac{4}{-4} = -1 \Rightarrow$ (–4, –1) é solução

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{-4} = 4 \Rightarrow$ (1, 4) é solução

$x = -1 \Rightarrow y = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow$ (–1, –4) é solução

S = {(–4, –1), (–1, –4), (1, 4), (4, 1)}

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolva os sistemas abaixo:

1) $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a - b = 4 \\ a \cdot b = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2a - b = 8 \\ a \cdot b = -6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3m + 5n = 10 \\ m \cdot n = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2m + 3n = 2 \\ m \cdot n = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ a \cdot b = \dfrac{1}{48} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37 \\ x + y = 5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$

10) $\begin{cases} m^2+n^2=16 \\ 3m+2n=8 \end{cases}$

11) $\begin{cases} m-n=0 \\ m^2+n^2=0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} m^2-n^2=16 \\ m-n=8 \end{cases}$

13) $\begin{cases} a+b=8 \\ a^2-b^2=-32 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=59 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x^2-y^2=7 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=-5 \\ x-y=5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} a^2-ab+b^2=7 \\ a+b=1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2m^2+mn-n^2=-9 \\ m-n=-3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2 \\ \frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3} \end{cases}$

20) $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{17}{2} \end{cases}$

21) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1/4 \\ x-y=-9/16 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \sqrt{m}+\sqrt{n}=5 \\ m+n=13 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2a^2+b^2=9 \\ 2a^2-3b=5 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x.y=3 \\ \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{17}{10} \end{cases}$

25) $\begin{cases} m^2+n^2+2m+2n=39 \\ m+n-2mn=-17 \end{cases}$

26) $\begin{cases} a^2+b^2-a+b=2 \\ a-b+6ab=2 \end{cases}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

27) **(EPCAR)** Se $\begin{cases} a^2+b^2-a+b=2 \\ a-b+6ab=2 \end{cases}$, então xy é igual a:
a) 18
b) 9
c) –9
d) –18

28) **(UERJ)** No sistema abaixo. x e y são números reais:
$\begin{cases} 2x(x-1)+y(x-1)=4(x-1) \\ x^2+y=7. \end{cases}$
A soma de todos os valores de x que satisfazem a esse sistema é igual a:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

29) **(CM)** Se a diferença entre dois números naturais é seis e a diferença entre os seus quadrados é noventa e seis, então é correto afirmar que o (a):
a) maior dos dois números é um número par.
b) soma dos dois números é um número ímpar.
c) produto dos dois números é um número divisível por sete.
d) menor dos dois números é um número primo.
e) resto da divisão do maior número pelo menor é o número dois.

30) **(CM)** Se o par ordenado (x, y) de números reais é solução do sistema de equações $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2=3 \end{cases}$, então o valor da expressão $(x^4 - y^4)$, é:
a) $\sqrt{12}$
b) 6
c) 2
d) 8
e) 4

31) **(CM)** A raiz da equação $\sqrt{9+x}+\sqrt{6+x}=3$ pertence ao conjunto
a) {-2, -1, 0}
b) {-7, -3, 2}
c) {-8, -6, 3}
d) {-10, -9, 4}
e) {-4, -5, 6}

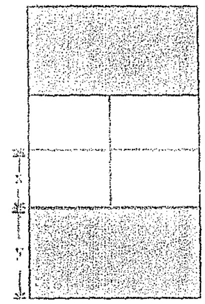
32) **(CM)** O valor da razão $\frac{x}{y}$ na solução do sistema $\begin{cases} x^2y+xy^2=70 \\ (x+y)\cdot(x^2+y^2)=203 \end{cases}$, considerando x < y, é:
a) 0,20
b) 0,25
c) 0,30
d) 0,35
e) 0,40

33) **(CPII)** Ricardo comprou um terreno para construir uma casa e, na área destinada ao lazer, resolveu construir uma quadra de tênis, com medidas não oficiais, ilustrada na figura ao lado.
A quadra de tênis, de formato retangular, pode ser dividida em quatro quadrados e dois retângulos congruentes menores (um superior e outro inferior). Considerando que

o perímetro da quadra mede 64m e que sua área é igual a 192m², resolva os itens abaixo.

a)Escreva um sistema de equações utilizando as incógnitas x e y indicadas na figura, a partir das medidas do perímetro e da área da quadra.

b)Determine as medidas possíveis para a largura e o comprimento da quadra de tênis.



34) **(CN)** Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

a) $\{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$
b) $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$
c) $\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 5\}$
d) $\{x \in R \mid 5 \leq x \leq 7\}$
e) $\{x \in R \mid 7 \leq x \leq 9\}$

35) **(CN)** Seja $a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287$. Considere que a e b são números naturais e que ab> 3. Qual é o maior valor natural possível para a expressão a + b?

a) 7
b) 11
c) 13
d) 17
e) 19

36) **(CN)** No sistema $\begin{cases} 3x - y \cdot \sqrt{3} = 0 \\ x^2 \cdot y^{-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$, a quantidade de soluções inteiras para 'x' e 'y' é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) infinita

37) **(CN)** Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2xy = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $(x^2 - y^2)^6$?

a) a^3b^6
b) a^8b^6
c) a^6b^2
d) a^3b^6
e) a^4b^6

GABARITO

1) S = {(3, 4), (4, 3)}
2) S = {(1, -3), (3, -1)}
3) $S = \left\{(-2,1), \left(\frac{1}{3}, -6\right)\right\}$
4) S = {(1, -6), (3, -2)}
5) $S = \left\{\left(\frac{10}{3}, 0\right), (0,2)\right\}$
6) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$
7) $S = \left\{\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{8}\right)\right\}$
8) S = {(-1, 6), (6, -1)}
9) S = {(-3, -4), (4, 3)}
10) $S = \left\{(0,4), \left(\frac{48}{13}, -\frac{20}{13}\right)\right\}$
11) S = {(0, 0)}
12) S = {(5, -3)}
13) S = {(2, 6)}
14) $S = \left\{(4,-3), \left(-\frac{32}{35}, \frac{153}{35}\right)\right\}$
15) $S = \left\{(-2,1), \left(-\frac{16}{7}, \frac{13}{7}\right)\right\}$
16) S = {(2, -3), (3, -2)}
17) S = {(2, -1), (-1, 2)}
18) $S = \left\{(0,3), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)\right\}$
19) $S = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)\right\}$
20) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)\right\}$
21) $S = \left\{\left(1, \frac{25}{16}\right)\right\}$
22) S = {(4, 9), (9, 4)}
23) S = {(2, 1), (-2, 1)}
24) S = {(3, 1), (-3, -1)}
25) $S = \left\{(3,4), (4,3), \left(\frac{-8+\sqrt{46}}{2}, \frac{-8-\sqrt{46}}{2}\right), \left(\frac{-8-\sqrt{46}}{2}, \frac{-8+\sqrt{46}}{2}\right)\right\}$
26) $S = \left\{(0,-2), (2,0), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{3}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{3}, \frac{-\sqrt{5}+1}{3}\right)\right\}$
27) A
28) C
29) D
30) D
31) E
32) E
33) a) $\begin{cases} 8x + 4y = 64 \\ 4xy + yx^2 = 192 \end{cases}$

b) 8 m e 24 m

34) B
35) A
36) A
37) C

Funções

Produto Cartesiano

Definição

O produto cartesiano entre dois conjuntos A e B é um conjunto de pares ordenados tais que o primeiro elemento pertence ao conjunto A, enquanto o segundo elemento pertence ao conjunto B.

Simbolicamente temos:

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {4, 2}, determine:
a) A x B = {(1, 4), (1. 2), (2, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 2)}
b) B x A = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

Observações:
1 – O número de pares que constitui o produto cartesiano de dois conjuntos é obtido através do produto entre os números de elementos dos conjuntos.

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \times n(B)}$$

2 – O produto cartesiano não é COMUTATIVO, ou seja A x B ¹ B x A. Os pares de B x A podem ser obtidos através da inversão da ordem dos elementos nos pares de A x B.

3 – A notação A^2 significa A x A.

Exemplo:
Considerando o conjunto A = {x, y}, então
A^2 = A x A = {(x, x), (x, y), (y,x), (y, y)}.

Relações e funções

Relações

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de A x B, ou seja R Î A x B.

Exemplo:
Dados A = {2,3} e B = {5}, então A x B = {(2,5), (3,5)}. Assim, teríamos como relações de A em B:

$R_1 = \varnothing$ R_2 = {(2,5)} R_3 = {(3,5)} R_4 = {(2,5), (3,5)}

Observação:
Dados A e B dois conjuntos, o número de relações de A em B pode ser obtido através de

$$\boxed{n(R) = 2^{n(A \times B)}}$$

Exemplo:
Quantas relações podemos construir de A = {a, e, i} em B = {0, 1, 2, 3}?

Resolução:
n(A) = 3
n(B) = 4
n(A x B) = 3 x 4 = 12
nº relações = $2^{n(A \times B)} = 2^{12} = 4096$

Domínio, contra-domínio e conjunto imagem.

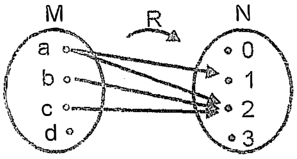
Considerando uma relação R de A em B, temos que:

I) O domínio da relação é o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares de R.
II) O contra-domínio da relação é o conjunto de chegada. É o próprio conjunto B.

III) O conjunto imagem da relação é o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares de R.

Exemplos:
a) Sendo A = {1,2,3,4}, B = {1,4,6,8,9} e R uma relação de A em B definida por R = {(1,4), (2,8), (4,8), (1,9)}, então:
Dom (R) = {1,2,4} CD(R) = B Im(R) = {4,8,9}

b) No diagrama abaixo:



Podemos observar que:
R = {(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)}
Dom (R) = {a, b, c}
CD(R) = N
Im(R) = {1, 2}

Observação:
Note que **Im ⊂ CD**, para qualquer relação.

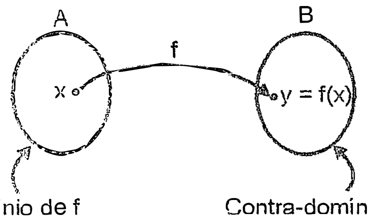
Funções

Definição

Uma relação do A e B é uma função de A em B quando ela associa a todo e qualquer elemento de A, um único elemento de B.

Notações
1) Geralmente utilizamos letras minúsculas para a representação de uma função. Por exemplo: f, g, h,....
2) Para representarmos que uma função f associa elementos de A a elementos de B, utilizamos a simbologia:

$\boxed{f: A \to B}$ lê-se: "f de A em B"

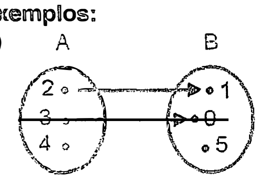


3) Finalmente, a representação normal da função f será:

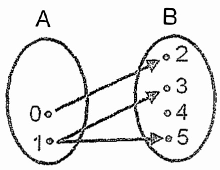
$$\boxed{\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto y \end{array}}$$

lê-se: "f de A em B que associa a cada elemento x um único elemento y"

Exemplos:
a)

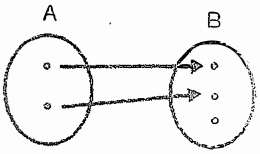


não é função pois o elemento 4 não tem imagem b)



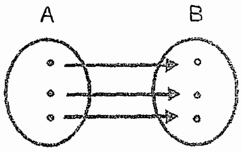
não é função pois o elemento
1 tem mais de uma imagem

c)



é função

d)



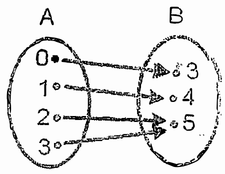
é função

Qualidades das funções

I) Função sobrejetora

É aquela em que todo e qualquer elemento do contra-domínio é imagem de ao menos um elemento do domínio. Observe que em uma função sobrejetora o conjunto imagem é igual ao contra-domínio.

Exemplo:



A função é sobrejetora pois o conjunto imagem é igual ao contra-domínio

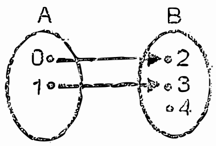
$\boxed{Im = CD = \{3, 4, 5\} = B}$

II) Função injetora

É aquela em que cada elemento do conjunto imagem é imagem de no máximo um elemento do domínio.

Exemplo:

a)



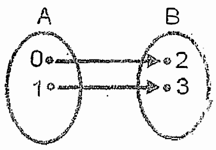
A função é injetora pois os elementos 2 e 3 do conjunto imagem estão associados a um único elemento, cada, do domínio.

III) Função bijetora

É aquela que é simultaneamente sobrejetora e injetora.

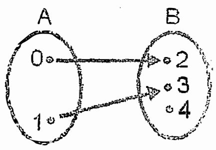
Exemplos:

a)



A função é sobrejetora e injetora, logo é bijetora.

b)



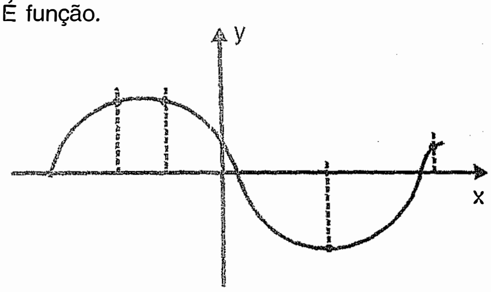
A função não é sobrejetora, logo não é bijetora.

Gráfico de uma função

Um gráfico pode representar uma função se toda reta vertical intersectá-lo no máximo em um ponto. Se houver ao menos uma reta vertical que seccione o gráfico em mais de um ponto, indica que há um valor de x associado a mais de um valor de y, ou seja, existe um x com mais de uma imagem, o que implica que tal gráfico não pode representar uma função.

Exemplos:

É função.



O gráfico abaixo não é de função, pois o elemento x_1 possui duas imagens distintas y_1 e y_2.

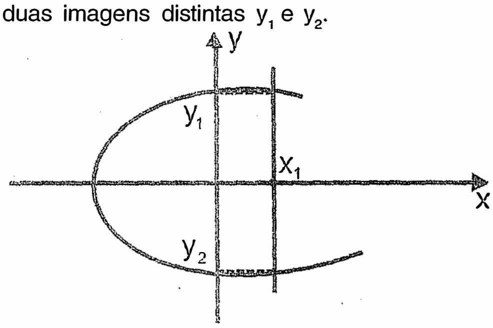
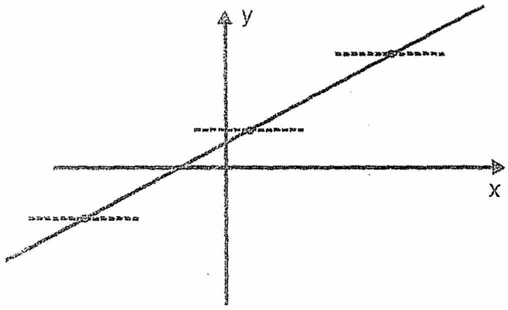


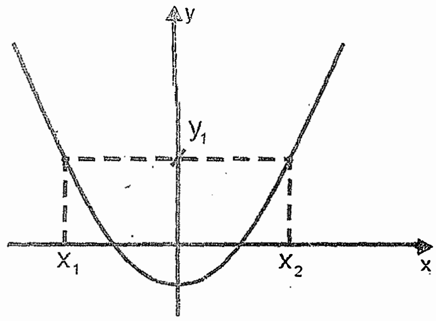
Gráfico de uma função injetora

Dado o gráfico de uma função, esta será injetora se toda e qualquer reta horizontal intersectá-lo no máximo em um ponto, pois em caso contrário haveria um valor de y associado a mais de um valor de x, o que contraria a definição de função injetora.

Exemplos:



É função injetora.



Não é função injetora, pois o elemento y_1 é imagem dos valores distintos x_1 e x_2.

Principais funções reais

1) Função constante

É toda função real de variável real que associa a todo número real um outro real, constante.

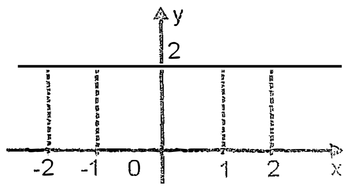
$\boxed{f(x) = c \text{ ou } y = c}$, $c \in R$

Exemplo:

Seja construir o gráfico da função:

$y = f(x) = 2$

x	y = f (x)
–2	f (–2) = 2
–1	f (–1) = 2
0	f (0) = 2
2	f (2) = 2



Importante:

O gráfico de toda função constante é uma reta paralela ao eixo das abcissas.

II) Função afim

É toda função real de variável real definida por:

$\boxed{y = f(x) = a.x + b}$, $a \in R^* \wedge b \in R$

A função afim também é conhecida como função do 1° grau. Em seguida vamos analisar alguns aspectos importantes do gráfico de uma função afim.

a) O gráfico de uma função afim é uma reta.

b) Na função afim, o número **a** (coeficiente de x) é chamado de **coeficiente angular** da reta e representa a tangente do ângulo que a reta forma com o semi-eixo x positivo, enquanto que o número **b** (termo independente) é chamado de **coeficiente linear** da reta, sendo a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

c) A reta representativa de uma função afim, intersecta o eixo horizontal na raiz da função ($x = -\frac{b}{a}$).

d) Para valores de x à direita da raiz, a função assume o mesmo sinal de a.

e) Para valores de x à esquerda da raiz, a função assume sinal contrário ao de a.

f) Quando a > 0 a função é crescente.

g) Quando a < 0 a função é decrescente.

h) A função afim é injetora. O domínio da função afim é o conjunto R e como Im = CD = R ela é sobrejetora. Dai, a função afim é bijetora.

Exemplo:

$y = f(x) = 2x - 3$

$a = 2 \rightarrow$ coeficiente angular ($tg\ \theta = 2$)

$b = -3 \rightarrow$ coeficiente linear

Como o gráfico é uma reta, necessitamos de dois de seus pontos, os quais serão obtidos atribuíndo-se valores para x ou y.

Façamos x = 0, logo:

$y = 2x - 3$

$y = 2.0 - 3 \quad \therefore \quad y = -3$

Então o ponto (0, – 3) pertence à reta.

Façamos, desta feita. y = 0. teremos:

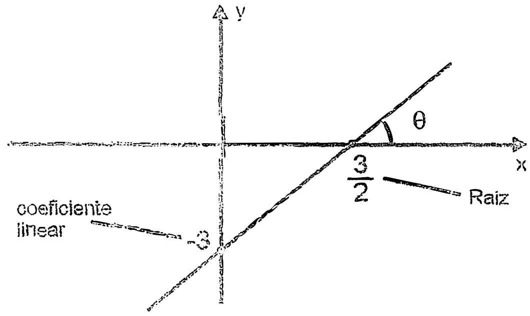
$y = 2x - 3$

$0 = 2x - 3$

$3 = 2x \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2}$

Logo, o ponto ($\frac{3}{2}$,0) pertence à reta.

Agora marquemos os pontos. O gráfico será a reta que os contiver:



Note que para valores de x à direita da raiz ($x = \frac{3}{2}$), a reta passa acima do eixo x, é positiva, tem o mesmo sinal de a (a = 2), ao passo que para valores de x á esquerda da raiz, a reta passa abaixo do eixo x, é negativa, tem sinal contrário ao de a. ou seja:

$f(x) > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2} \quad f(x) = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \quad f(x) < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$

Observe que a função é crescente, pois a > 0.

III) Função linear

E toda função afim cujo coeficiente linear vale zero. É definida por

$\boxed{y = f(x) = a.x}$; $a \in R^*$

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem.

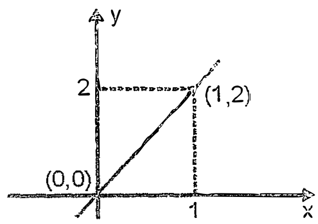
Exemplo:

$y = f(x) = 2x$

$a = 2 \rightarrow$ coeficiente angular

$b = 0 \rightarrow$ coeficiente linear

x	y = 2x
0	0 → (0, 0) ∈ reta
1	2 → (1, 2) ∈ reta



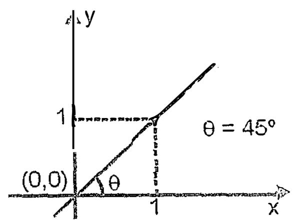
IV) Função identidade

É a função linear cujo coeficiente angular vale 1. É definida por

$\boxed{y = f(x) = x}$

O gráfico da função identidade é uma reta que passa pela origem e é a bissetriz dos quadrantes ímpares (1° e 3°).

x	y = x
0	0 → (0, 0) ∈ reta
1	1 → (1, 1) ∈ reta



V) Função quadrática ou trinômio do 2º grau

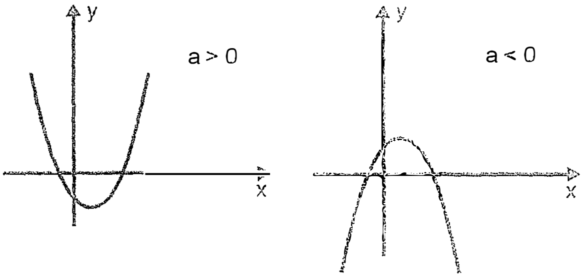
É a função definida por:

$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Na construção gráfica, devemos ressaltar 4 aspectos importantes:

1) Concavidade

É a "abertura" da parábola, a qual estará voltada para cima quando $a > 0$ ou voltada para baixo, no caso de $a < 0$.



2) Interseção com o eixo horizontal

A parábola secciona o eixo horizontal nas raízes do trinômio. Temos a considerar três casos distintos.

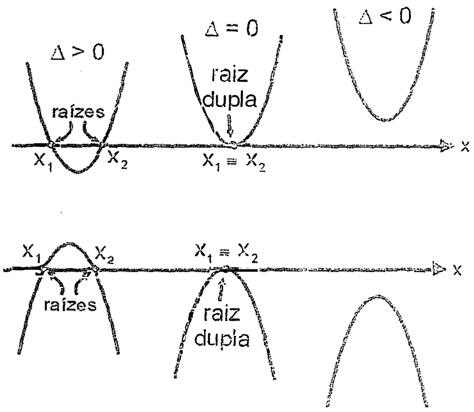
a) $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 raízes diferentes
$\rightarrow$ parábola secante ao eixo horizontal;

b) $\Delta = 0 \rightarrow$ 2 raízes reais iguais (raiz dupla)
$\rightarrow$ parábola tangente ao eixo horizontal;

c) $\Delta < 0 \rightarrow$ 2 raízes complexas
$\rightarrow$ parábola não toca o eixo horizontal.

$\boxed{a > 0}$

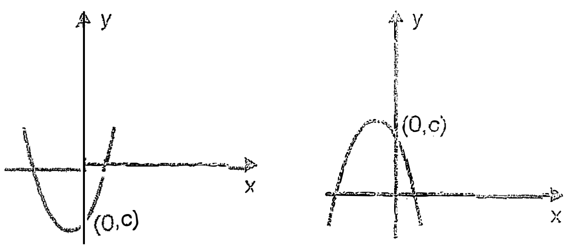
$\boxed{a < 0}$



3) Interseção com o eixo vertical

A parábola corta o eixo vertical no ponto (0,c)

$\boxed{a > 0}$ $\boxed{a < 0}$



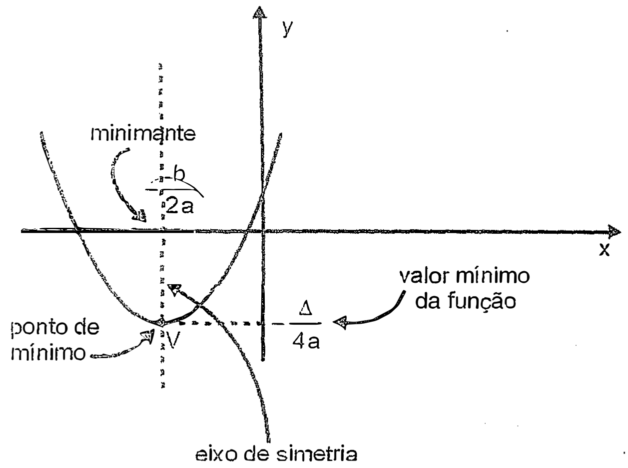
4) Vértice

É o ponto "extremo" da parábola. Sua abscissa é dada por $-\dfrac{b}{2a}$ e a ordenada vale $-\dfrac{\Delta}{4a}$.

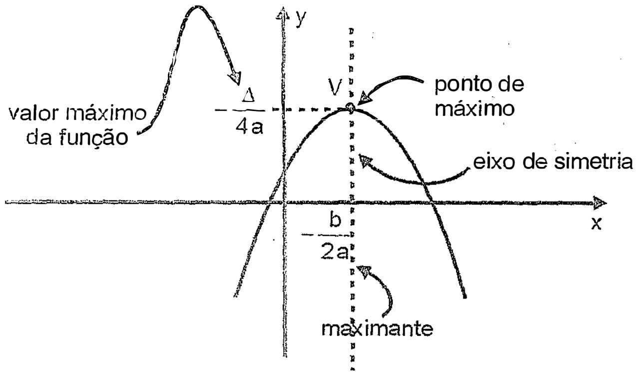
$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Observações:

a) Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Assim, o vértice é o seu "ponto mais baixo", sendo chamado de **PONTO DE MÍNIMO**. Sua abscissa $(-\dfrac{b}{2a})$ é chamada de **MINIMANTE**, e sua ordenada $(-\dfrac{\Delta}{4a})$ é o **VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO.**



b) Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo, Assim, o vértice é o seu "ponto mais alto", sendo chamado de **PONTO DE MÁXIMO.** Sua abscissa $(-\dfrac{b}{2a})$ é chamada de **MAXIMANTE**, e sua ordenada $(-\dfrac{\Delta}{4a})$ é o **VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO**.



c) A reta perpendicular ao eixo "x" que passa pelo vértice é chamada de **EIXO DE SIMETRIA**, que é definido pela equação $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemplo:

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

1) Concavidade

$a = 1 > 0 \rightarrow$ concavidade voltada para cima

2) Interseção com o eixo "x" (RAÍZES)

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ e $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$

3) Interseção com eixo y
A parábola intersecta o eixo "y" no ponto (0,c). Logo:
(0, –3)

4) Vértice
Como a concavidade está voltada para cima, o vértice é **PONTO DE MÍNIMO**.

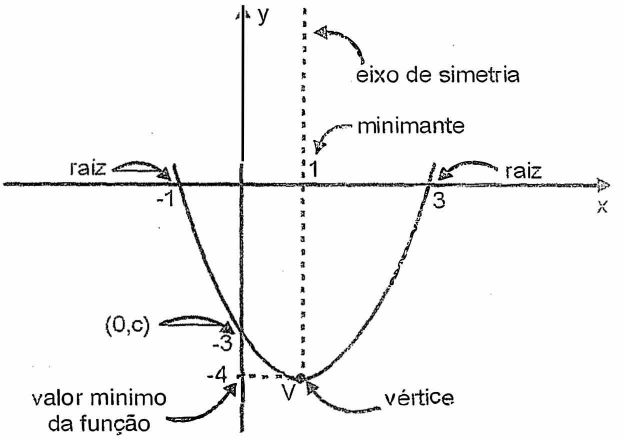
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.1} = 1 \rightarrow \text{MINIMANTE}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{(-2)^2 - 4.1.(-3)}{4.1} = -\frac{16}{4} = -4 \quad \text{VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO}$$

$$\boxed{V = (1, -4)}$$

5) Eixo da simetria

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{x = 1}$$



Variação do sinal do trinômio do 2° grau

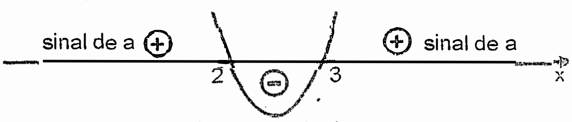
Considerando a função f(x) = ax² + bx + c, a, b, c ∈ R e a ≠ 0, para valores de x entre as raízes, a função assume sinal contrário ao de a, ao passo que para valores de x exteriores às raízes, o trinômio assume o mesmo sinal de a.

Exemplos:
a) Estude a variação do sinal da função
$f(x) = x^2 - 5x + 6$

Resolução:
Cálculo das raízes
$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$



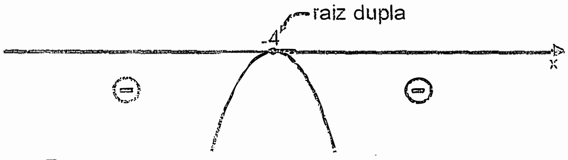
Resposta:
$f(x) > 0 \Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$
$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
$f(x) < 0 \Rightarrow 2 < x < 3$

b) Estude a variação do sinal da função
$f(x) = -x^2 - 8x - 16$.

Resolução:
Cálculo das raízes
$-x^2 - 8x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.(-1).(-16)}}{2.(-1)} = \frac{8 \pm 0}{-2}$$

$$x_1 = x_2 = -4$$



Resposta:
$f(x) < 0 \rightarrow -x \neq -4$
$f(x) = 0 \rightarrow x = -4$
$f(x) > 0 \rightarrow \nexists\, x \in R$

Interpretação geométrica das soluções de um sistema de equações do 1° grau

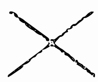
No capítulo "Sistemas do 1° Grau" aprendemos a fazer a discussão das raízes. Estudamos que, dado um sistema

$$\begin{cases} a_1 . x + b_1 . y = c_1 \\ a_2 . x + b_2 . y = c_2 \end{cases},$$

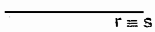
ele pode ser possível e determinado $\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$, possível e indeterminado $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right)$ ou impossível $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$.

Agora, após o estudo das funções do 1° grau, podemos analisar essa discussão segundo uma outra ótica. Vimos que o gráfico de uma função do 1° grau é uma reta. Assim, a representação de um sistema envolve duas retas. Resolver um sistema, como sabemos, é descobrir as soluções comuns, que satisfaçam a ambas as equações simultaneamente. Portanto, analiticamente falando, a(s) solução(ões) de um sistema é(são) dada (s) pelo(s) pontos(s) em que as retas, que representam as equações que o compõem, se intersectam. Em um plano, duas retas, classificadas com relação ao número de pontos de interseção, podem ocupar três posições: **concorrentes** (uma única interseção), **paralelas distintas** (sem ponto de interseção), **paralelas coincidentes** (infinitos pontos de interseção). Fazendo um paralelo com a discussão de um sistema, podemos concluir que:

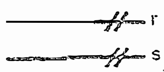
1° caso:
SISTEMA POSSÍVEL DETERMINADO → 1 solução → Retas concorrentes →



2° caso:
SISTEMA POSSÍVEL INDETERMINADO → Infinitas soluções → Retas paralelas coincidentes →



3° caso:
SISTEMA IMPOSSÍVEL → Sem solução → Retas paralelas distintas →



Exemplos:
Interprete geometricamente as soluções dos sistemas:

1) $\begin{cases} 10x + 14y = 9 \\ 15x + 21y = 6 \end{cases}$

Resolução:

Temos $\begin{cases} a_1 = 10, b_1 = 14, c_1 = 9 \\ a_2 = 15, b_2 = 21, c_2 = 6 \end{cases}$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \rightarrow \text{Sistema impossível}$$

Como não há solução, as retas representativas das equações do sistema não se encontram, são PARALELAS DISTINTAS.

2) $\begin{cases} 43x - 18y = 6 \\ 16x + 23y = -4 \end{cases}$

Resolução:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{43}{16}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = -\frac{18}{23}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \text{Sistema possível determinado}$$

Como a solução é única, as retas cortam-se em um único ponto, logo são CONCORRENTES.

3) $\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ 8x + 12y = 16 \end{cases}$

Resolução:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \rightarrow \text{Sistema possível indeterminado}$$

Como há infinitas soluções, as retas encontram-se em infinitos pontos, portanto são PARALELAS COINCIDENTES.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Considerando os conjuntos A = {0, 1, 3}, B = {2,5} e C = {7}, determine:
a) $A \times B$
b) $C \times B$
c) $C \times A$
d) B^2
e) C^2

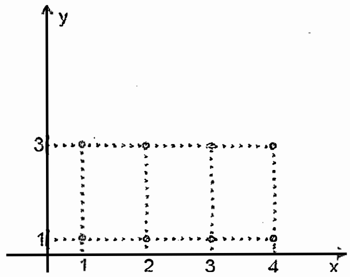
2) Dados os conjuntos A = [1, 3], B = [2,5), C = (3, 6) e D = {1, 2, 3}, representar graficamente:
a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $A \times C$
d) $C \times B$
e) $A \times D$
f) $D \times C$
g) $(C - B) \times A$
h) $(A \cap B) \times C$
i) $(A - D) \times (B \cup C)$

3) Um conjunto A tem 8 elementos. Sendo B um conjunto tal que A x B tenha 40 elementos, então B pode ser o conjunto:
a) {1}
b) {0, 1}
c) {2, 3, 4}
d) {3, 4, 5, 6}
e) {a, e, i, o, u}

4) Sendo A e B dois conjuntos tais que A x B tem 21 elementos, então:
a) A pode ter 2 elementos;
b) A pode ter 3 elementos;
c) A pode ter 4 elementos;
d) A pode ter 5 elementos;
e) Nada se pode afirmar.

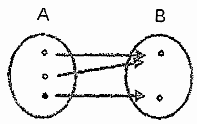
5) Dê o domínio, imagem e contra-domínio da relação de A = {1,2,3,4} em B = {0,1,2,4.5,7}, definida por R = {(1,0), (1,1), (2,4). (3,7)}.

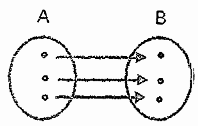
6) O gráfico abaixo representa uma relação R. Dê o domínio e imagem de R.

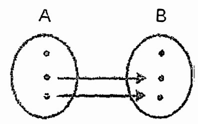


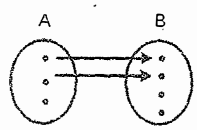
7) Sendo A {1,4,5} e B = {2,4,7}, assinale a afirmativa em que há uma relação de B em A.
a) {(1,2), (5,7)}
b) {(4,2)}
c) {(4,4), (5,5)}
d) {(2,1), (2,4), (5,7)}
e) ∅

8) Verifique quais dos diagramas abaixo representam funções, classificando-as então.

a)


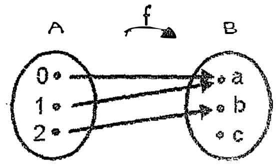
b)


c)


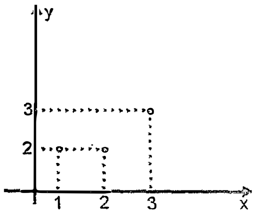
d)


9) Determine o domínio e a imagem das funções definidas a seguir:
a) f = {(1,2), (2,3), (4,2)}

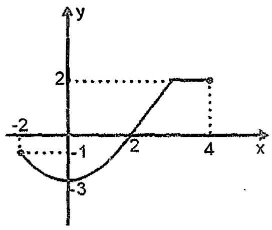
b)



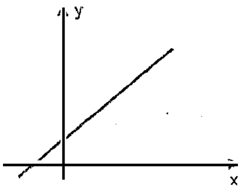
c)



d)



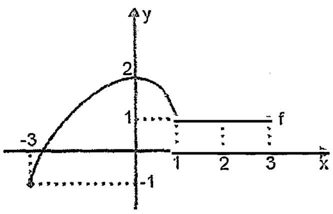
e)

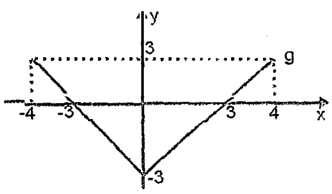


10) Dadas as funções $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x^2 - 2$, determine o valor de:

a) $f(2)$
b) $f(-1)$
c) $f(3/2)$
d) $f(0)$
e) $g(0)$
f) $g(1)$
g) $g(\sqrt{2})$
h) $g(-1)$
i) $g(-2/3)$
j) $f(-3) \cdot g(-3)$
k) $\dfrac{f(-4)}{g(2\sqrt{6})}$
l) $[g(3)]^{f(1/2)}$

11) Dados os gráficos a seguir, complete:

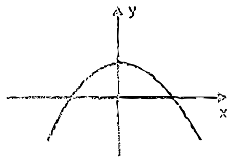




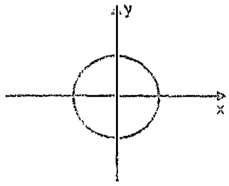
a) $f(2) = ...$
b) $f(....) = 2$
c) ..... $(3) = 0$
d) $f(2,8) = ...$
e) $g(4) = g\ (.....)$
f) $f(g(0)) = ...$

12) Assinale dentre os gráficos abaixo quais podem representar uma função:

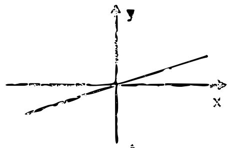
a)



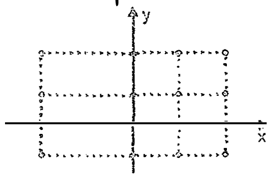
b)



c)

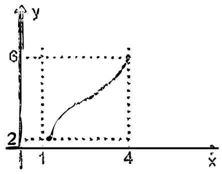


d)

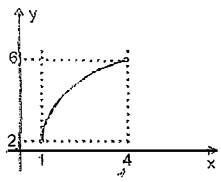


13) As relações abaixo são de $A = [1,4]$ em $B = [2,6]$. Reconheça as funções, classificando-as a seguir:

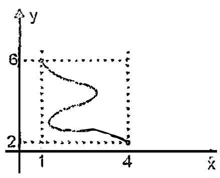
a)



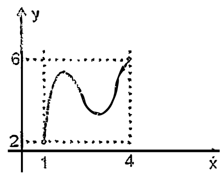
b)



c)



d)



14) Uma função f é constante. Se $f(\pi) = \pi$, então $f(2)$ vale:

a) π
b) 2π
c) π^2
d) $\pi + 2$
e) 2

15) Determine os domínios das funções:

a) $y = 2x + 3$
b) $f(x) = 4x^5 - 6x^2 - 3x + 1$
c) $y = \dfrac{5}{7 - x}$
d) $g(x) = \sqrt[4]{2x+3}$
e) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

f) $y = \dfrac{x+3}{x^2+3x-4}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[6]{3-x}$

h) $g(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+7}$

i) $h(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$

j) $y = \dfrac{x+5}{\sqrt[5]{x^2+4x-12}}$

k) $f(x) = \sqrt[4]{2x+3} - \dfrac{2}{7-x}$

l) $g(x) = \dfrac{x-2}{x(x-1)(x-2)}$

m) $h(x) = \sqrt[8]{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+5}}$

n) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$

16) Uma função real f é definida por $f(x) = 2x^2 + 1$. Determine o valor de $f(-1)$.

17) Uma função real f é definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \text{ é par} \\ -x^2, \text{se } x \text{ é impar} \end{cases}$.

Determine o valor de $f(1) - f(2)$.

18) Dada a função $f(x + 1) = 3x - 1$, determine o valor de $f(2)$.

19) Sendo $f(3x - 2) = x^2 + 1$, determine $f(4)$.

20) Sabendo-se que $f(4x - 1) = 8x + 5$, determine:
a) $f(x)$
b) $f(2)$

21) Sendo $f(x) = ax + b$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$, determine o valor de $f(-3)$.

22) O gráfico de uma função afim f(x), passa pelos pontos (1, 4) e (2, 3). Determine o valor de f (5).

23) O gráfico de uma função linear passa pelo ponto (2, 6). Em que ponto dá-se a interseção do gráfico dessa função com a função y = 3?

24) Uma função real f é tal que $f\left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{f(x)}{4}$.

Se f (32) = 400, determine o valor de f (2).

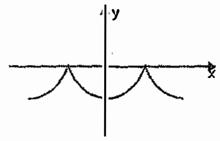
25) Uma função f (x) é tal que $f(a - b) = \dfrac{f(a)}{f(b)}$. Sabendo que f (1) = 4, determine o valor de f(–1).

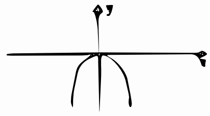
26) Dada uma função real de variável real tal que

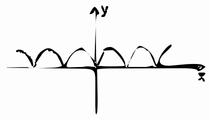
$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ -x^2 + 3, \text{se } x \in [0,2], \\ 8, \text{se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

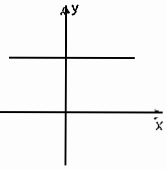
determine o valor de $f(2) - 3f(-4) + f(3)$.

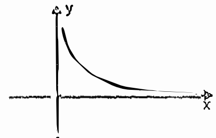
27) Considere uma função g (x) real de variável real tal que a equação $g(x) = x^2$ é satisfeita por apenas dois valores distintos de x. Qual dos gráficos a seguir pode representar g?

a)


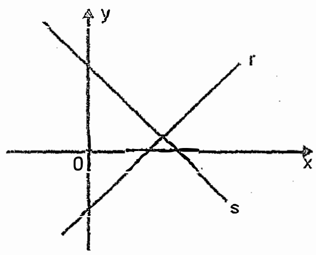
b)


c)


d)


e)


28) As retas r e s abaixo, poderiam representar as equações do sistema:



a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 4y = -8 \\ 3x + 6y = -12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 10x + 15y = 30 \end{cases}$

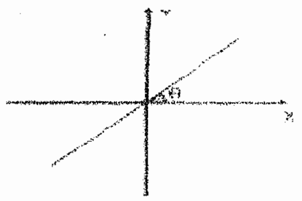
e) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

29) **(EPCAR)** Dados os conjuntos A = {– 1, 0, 1, 2} e B = {0,1,2, 3, 4}, assinale dentre as relações seguintes, a alternativa que representa uma função de A em B.
a) {(– 1, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)}
b) {(– 1, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 2)}
c) {(0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 4)}
d) {(– 1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}

30) **(EPCAR)** Um ponto do plano cartesiano tem coordenadas (x + 3y, –x – y) ou (4 + y, 2x + y), em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nestas condições, x^y é igual a:
a) –8
b) – 6
c) 1
d) 9

31) **(CEFET)** No plano cartesiano a seguir, a reta r passa pela origem e forma um ângulo θ com o eixo x. Escolhendo um ponto P (a, b) qualquer da reta r, e considerando θ = 40°, podemos afirmar que:



a) Se P pertence ao 1° quadrante, então a = b.
b) Se P pertence ao 3° quadrante, então a < b.
c) a = b independente de qual quadrante estiver P.
d) Se P pertence ao 3° quadrante, então a > b.

32) **(CM)** Se f: $\Re$ - {-1} $\to \Re$ é definida por f (x) = $\frac{x^2-1}{x+1}$, então f ($\sqrt{2}$) é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) +1
d) -1
e) $-\sqrt{2}$

33) **(CEFET)** Considere a equação $y = \frac{1+2x}{1-3x}$:
a) Escreva x em função de y;
b) Considerando $x = \frac{t-1}{3t+2}$, escreva y em função de t.

34) **(CM)** Se uma função real é definida por f (x) = ax + b, com {a, b} $\subset \Re^*$, f (2) = 5 e f (3) = 7, então o valor de a + b é igual a:
a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

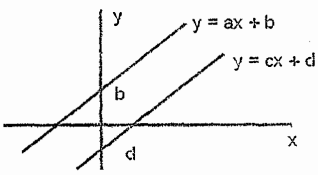
35) **(CN)** Um sistema de três equações do 1°grau com duas incógnitas é determinado. Logo, um sistema formado por apenas duas dessas equações:
a) é determinado
b) é indeterminado
c) é impossível
d) pode ser impossível ou determinado
e) pode ser indeterminado ou determinado

36) **(CN)** $S: \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x+2y=9 \\ ax+by=c \end{cases}$

Observe o sistema linear S. É correto afirmar, em relação aos parâmetros reais a, b e c, que

a) quaisquer que sejam, S será possível e determinado.
b) existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.
c) quaisquer que sejam, S será possível e indeterminado.
d) existem valores desses parâmetros que tornam S indeterminado.
e) quaisquer que sejam, S será impossível.

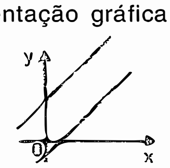
37) **(CEFET)** Considerando que duas retas paralelas e distintas são a representação gráfica do sistema $\begin{cases} y=ax+b \\ y=cx+d \end{cases}$, onde a, b, c, d $\in$ R*, podemos afirmar que:



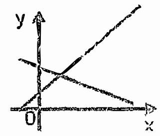
a) a = c e b $\neq$ d
b) a = mc e b = – d, onde {m} $\subset$ R – {1}
c) a = c e b = d
d) a = mc e b = nd, onde {m, n} $\subset$ R – {1}

38) **(CEFET)** Cada sistema disposto na primeira coluna possui uma correspondente representação gráfica, constante da segunda coluna.

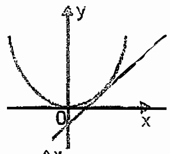
$S_1: \begin{cases} x+y=0 \\ y=x^2 \end{cases}$ ( )



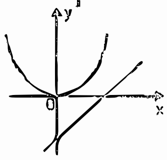
$S_2: \begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$ ( )



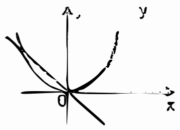
$S_3: \begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-4 \end{cases}$ ( )



$S_4: \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-1 \end{cases}$ ( )



$S_5: \begin{cases} -x+y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$ ( )

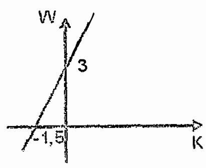


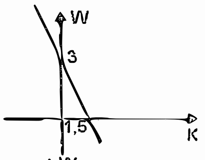
39) **(CM)** O conjunto imagem da função f: R $\to$R, definida por f(x) = x² - 10x + 41, é:
a) [-16, + ∞[
b)] - ∞, + 16[
c) [+16, +∞ [
d)]-∞, -16]
e) R

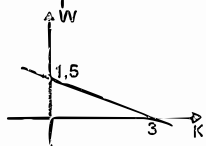
40) **(CM)** Sendo D e D_1, respectivamente, domínios das funções reais f e g, definidas por f (x) = $\sqrt{x-1}$ e g(x) = $\sqrt{\frac{x+1}{-x+2}}$, podemos afirmar que D_1 – D compreende os valores de x no intervalo:
a) [–1, 1]
b)] –1, 1]
c) [– 1, 1[
d) [1, 2[
e) [1, 2]

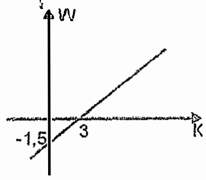
41) **(CM)** O domínio, em R, da função real definida por f (x) = $(x^2 - 3x + 2)^a + (6 + x - x^2)^b$, onde a = $\frac{1}{2}$ e b = - $\frac{1}{2}$, é:
a) {– 1, 0, 1, 2}
b)] 2, 3 [
c) [– 1, 2]
d)] – 2,1] $\cup$ [2, 3 [
e) [– 1, 1] $\cup$ {2}

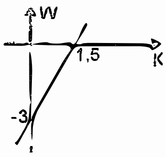
42) **(CEFET)** Entre duas grandezas K e W existe a seguinte relação: K = 2W + 3.
O gráfico que representa W em função de K é:
a)



b) 

c) 

d) 

e) 

43) **(CN)** As raízes do trinômio do 2° grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010 o valor numérico de y é 16, qual é o valor numérico de y quando x vale 1990?
a) 64
b) 32
c) 16
d) 8
e) 4

44) **(CM)** Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$ e $c > 0$, podemos concluir que o gráfico desta função:
a) Não intercepta o eixo dos x.
b) É tangente ao eixo dos x.
c) É secante ao eixo dos x e o intercepta em dois pontos, ambos de abscissa negativa.
d) É secante ao eixo dos x e o intercepta em dois pontos, ambos de abscissa positiva.
e) É secante ao eixo dos x e o intercepta em dois pontos, um de abscissa positiva e o outro, negativa.

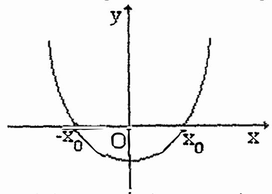
45) **(CN)** O gráfico de um trinômio do 2° grau y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio -y tem um valor
a) mínimo e raízes positivas.
b) mínimo e raízes negativas.
c) máximo e raízes positivas.
d) máximo e raízes negativas.
e) máximo e raízes sinais opostos.

46) **(CN)** Um trinômio do 2° grau tem coeficientes inteiros, distintos e não nulos. Se o termo independente for uma das suas raízes, a outra será o:
a) inverso do coeficiente do termo de 1° grau.
b) inverso do coeficiente do termo de 2° grau.
c) simétrico inverso do coeficiente do termo do 1° grau.
d) simétrico inverso do coeficiente do termo do 2° grau.
e) simétrico inverso do coeficiente do termo independente

47) **(CM)** Observe o gráfico da função do 2° grau $y = a.x^2 + b.x + c$, em x, com a, b e c reais.
Para o gráfico é correto afirmar que:

a) $a < 0$, $b = 0$, $c < 0$
b) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$
c) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$
d) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$
e) $a > 0$, $b = 0$, $c < 0$

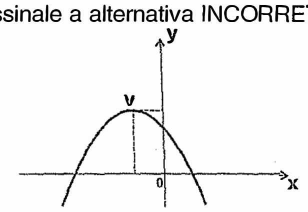
48) **(CM)** Observe a figura, que representa o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são n e - m:
Assinale a única afirmativa FALSA em relação a essa função:



a) ac é negativo
b) $b^2 - 4ac$ é positivo
c) c não é nulo
d) b é positivo
e) c é negativo

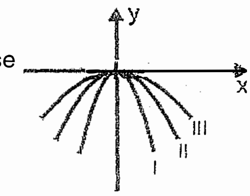
49) **(EPCAR)** Seja f a função real definida por $f(x) = ax^2 - bx + c$ e V, o vértice da parábola representada no gráfico abaixo.

Após a análise gráfica assinale a alternativa INCORRETA.



a) $a \cdot b \cdot c^2 < 0$
b) $\frac{ab^2}{c} < 0$
c) $a^2 + bc > 0$
d) $bc - a < 0$

50) **(EPCAR)** Considere o gráfico ao lado, sabendo-se que:
I é dado por $f(x) = ax^2$
II é dado por $g(x) = bx^2$
III é dado por $h(x) = cx^2$
Com base nisso, tem-se necessariamente que:



a) $a < b < c$
b) $a > bc$
c) $a > b > c$
d) $ab < c$

51) **(CEFET)** Considere a tabela abaixo:

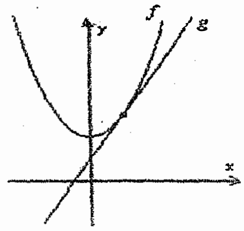
X	−2	−1	0	1	2	3
Y	12	6	2	0	0	2

Os números X e Y estão relacionados pela fórmula:
a) $Y = -6X$
b) $Y = X^2 - 8X$
c) $Y = X^2 - 3X + 2$
d) $Y = 2X^2 + 4$
e) $Y = 2X^2 - 6X + 4$

52) **(CM)** Se o trinômio $x^2 - 4x + m$ é positivo para qualquer que seja $x \in \Re$, então o menor valor inteiro que m pode assumir é:
a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

53) **(CM)** Considere a função $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^2 + ax + b$. Se o vértice da parábola $y = x^2 + ax + b$ é o ponto V (1, 4), então o valor de a + b é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

54) **(CEFET)** Na figura abaixo, os gráficos das funções reais f e g são tangentes. Sabendo que $f(x) = x^2 + 2k$ e $g(x) = 2x + k$, calcule $f(2) + g(3)$.



55) **(CN)** A expressão $x = \frac{-b \pm \sqrt{23*4}}{8}$ determine as raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$, de coeficientes inteiros positivos e raízes racionais. Sabendo-se que o símbolo * está substituindo um algarismo, qual é o menor valor numérico para esse trinômio?
a) -72
b) -144
c) -172
d) -288
e) -324

56) **(CM)** Se a e b são números reais tais que $3a + 2b = 12$, então o valor máximo do produto a . b é:
a) 8
b) 10
c) 12
d) 6
e) 16

57) **(CM)** Sendo n um número real qualquer e

$$M = \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{n^2}{12} + \frac{82-n}{3}}}$$

, o valor máximo que M poderá assumir é:
a) 3/2
b) 9
c) 1/2
d) 90
e) infinito

58) **(CN)** O produto de dois números reais x e y é igual a 150. Assim sendo, x + y NÃO pode ser igual a
a) 31,71
b) 28,27
c) 25,15
d) 24,35
e) -26,94

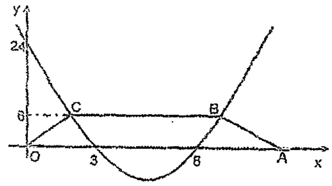
59) **(CN)** Um polinômio do 2º grau em x é divisível por $(3x - 3\sqrt{3} + 1)$ e $(2x + 2\sqrt{3} - 7)$. O valor numérico mínimo do polinômio ocorre para x igual a:
a) 19/12
b) 29/12
c) 23/12
d) 31/12
e) 35/12

60) **(CN)** Se $2x + y = 1$, com x e y reais, então o maior valor da expressão $x^2 + 3xy + y^2$ é igual a:
a) 5/4
b) 7/4
c) 13/8
d) 17/8
e) 31/16

61) **(CN)** Considere os pontos A, B e C pertencentes ao gráfico do trinômio do segundo grau definido por $y = x^2 - 8x$. Se: a abscissa do ponto A é -4; B é o vértice; a abscissa do ponto C é 12; o segmento AB tem medida d_1; e o segmento BC tem medida d_2, pode-se afirmar que
a) $d_1 + d_2 < 48$.
b) $48 < d_1 + d_2 < 64$.
c) $64 < d_1 + d_2 < 72$.
d) $72 < d_1 + d_2 < 128$.
e) $d_1 + d_2 > 128$.

62) **(CEFET)** Considere o gráfico cartesiano da função quadrática de equação $y = -x^2 - x + 2$. Os pontos A, B e C são os pontos de corte desse gráfico nos eixos coordenados. Supondo todas as medidas em centímetros, qual é a área do triângulo ABC em metros quadrados?

63) **(CM)** Dado o gráfico da função do 2º grau abaixo e sabendo que a área do trapézio **OABC** é $51m^2$, então a abscissa do vértice A pertence ao intervalo:



a)]9,5; 11,5[
b)]11,5; 13,5[
c)]13,5; 15,5[
d)]15,5; 17,5[
e)]17,5; 19,5[

64) **(CEFET)** Simplificando o radical $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$, obtém-se:
a) $(a + b)(a - b)$
b) $(a - b)^2$
c) $|a - b|$
d) $(a + b)\sqrt{2ab}$
e) $(a + b)\sqrt{-2ab}$

Nota do Autor: Não se esqueça que a raiz de índice par só está definida para números positivos. Seu valor **nunca é negativo.**
Assim, $\sqrt{4} = 2$ e não ± 2 como muitos podem supor. Portanto, $\sqrt{x^2} = x$ só é verdadeiro se soubermos que x não é negativo. Por exemplo: $\sqrt{3^2} = 3$. No entanto $\sqrt{(-5)^2} = 5$, e não -5! O que nos leva a concluir que $\sqrt{x^2} = |x|$, para todo $x \in R$.

65) **(CEFET)** Considerando a e b números reais não-nulos, analise as sentenças abaixo.

I = $(a^2 + b^3)^2 = a^4 + b^6$

II = $\frac{a - 2b}{a} = 1 - 2b$

III = $\sqrt{(2a - 3b)^2} = 2a - 3b$

IV = $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$

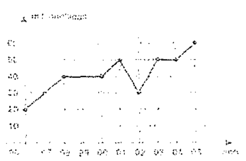
V = $\frac{3a}{7b} \cdot \frac{2b}{5a} = \frac{15a^2}{14b^2}$

O número de sentenças verdadeiras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

66) **(CN)** No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$
a) é vazio.
b) é unitário.
c) possui dois elementos.
d) possui três elementos.
e) possui quatro elementos.

67) **(CN)** A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
a) 2
b) $\sqrt{2} - 1$
c) $2 - \sqrt{2}$
d) 1
e) 0

68) **(EPCAR)** O gráfico abaixo representa, em milhares de toneladas, a produção de grãos no Brasil entre os anos de 1996 a 2005.

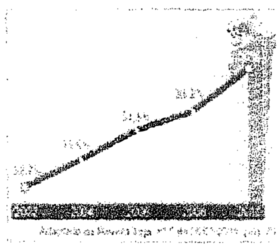


Analisando o gráfico, observa-se que a produção:
a) foi crescente entre 1997 e 2000
b) teve média de 40 toneladas ao ano.
c) a partir de 2001 foi decrescente.
d) em 2001 teve acréscimo de 25% em relação ao ano anterior.

69) **(EPCAR)** De 2002 a 2010 "a carga tributária saltou de 32,7% para 37% (...) O brasileiro médio tem de trabalhar 148 dias por ano para pagar seus impostos."

(Fonte: Revista Veja de 05/01/2011, pág. 78)

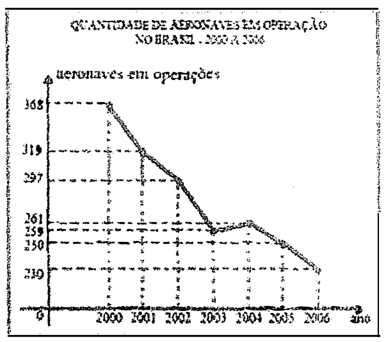
O gráfico abaixo representa o volume de tributos (em percentual) cobrados pelo governo de 2002 a 2010.



Com base nas informações do gráfico, marque a alternativa FALSA.
a) O crescimento do volume de tributos do ano de 2002 ao ano de 2004 foi maior que o do ano de 2006 ao ano de 2008.
b) Se o volume de tributos do ano 2010 é x% maior que o volume de tributos do ano de 2002, então x > 12.
c) O volume de tributos do ano de 2004 é maior que 0,9 do volume de tributos do ano de 2010.
d) Supondo que do ano de 2008 ao ano de 2011 o aumento anual do volume de tributos seja constante e que o volume de tributos do ano de 2011 seja p, então p > 38%.

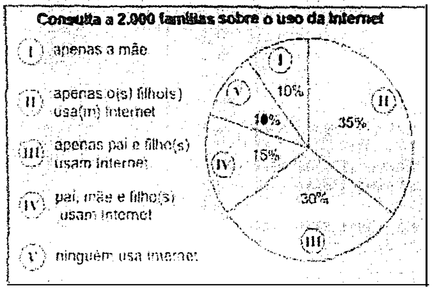
70) **(EPCAR)** "A aviação comercial cresceu 20% no Brasil desde o ano 2000. (...) Para suprir a demanda, as empresas aéreas passaram a operar no limite de sua capacidade. A política reduziu o conforto dos passageiros e se tornou uma das causas dos atrasos nos aeroportos."

Fonte: revista Veja – 14/03/2007



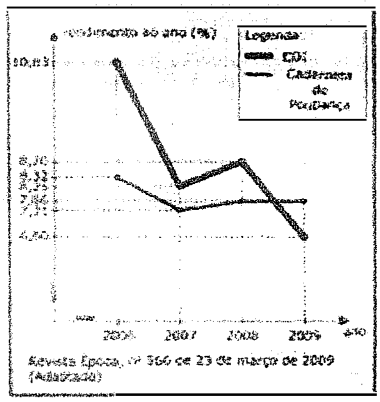
Analisando o gráfico anterior, pode-se afirmar que
a) o número de aeronaves em operação sempre diminuiu de um ano para o outro.
b) do ano de 2000 ao ano de 2001 houve uma queda de menos de 12,8% de aeronaves em operação.
c) do ano de 2000 ao ano de 2004, o número de aeronaves que não parou de operar foi de mais de 70%, em relação ao ano de 2000.
d) do ano de 2000 ao ano de 2006 o número total de aeronaves reduziu-se em 138 aeronaves.

71) **EPCAR)** O gráfico abaixo representa o resultado de uma pesquisa realizada com 2.000 famílias diferentes constituídas de pai, mãe e filho(s) a respeito do uso da Internet em suas respectivas residências.



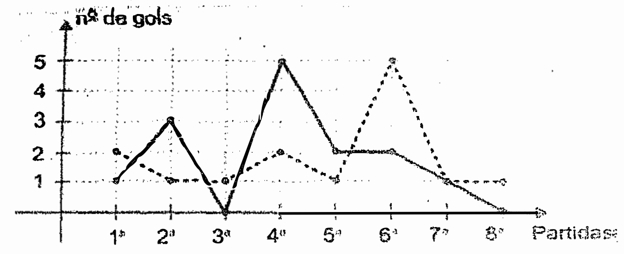
Com base nos dados acima, é possível afirmar que o número de famílias em que
a) os filhos usam Internet é menor que 700.
b) mãe e filho(s) usam Internet nunca é menor que 300.
c) pai usa Internet é, no máximo, 600.
d) pai mãe e filho(s) usam Internet é a metade do número de famílias em que apenas filho(s) usa(m) Internet.

72) **(EPCAR)** A Revista Época publicou uma reportagem em março de 2009 sobre as possíveis mudanças na Caderneta de Poupança no Brasil.
"...Antigo patinho feio das aplicações financeiras, a boa e velha Caderneta de Poupança voltou a despertar os olhares dos investidores ávidos por fazer o dinheiro render sem correr riscos."
O gráfico abaixo mostra o rendimento de dois fundos de aplicação, CDI e Caderneta de Poupança, no período entre 1° de Janeiro a 31 de dezembro de cada ano.



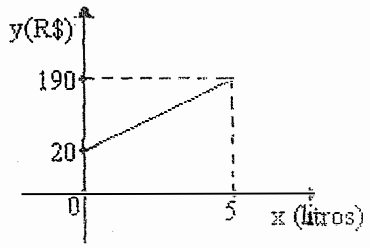
Analise o gráfico acima e classifique as proposições que seguem em (V) verdadeiras ou (F) falsas.
( ) Durante o ano de 2008, a Caderneta de Poupança teve rendimento percentual constante.
( ) A aplicação no CDI foi sempre mais vantajosa em qualquer período entre janeiro de 2006 e dezembro de 2008.
( ) No primeiro semestre de 2008, houve um momento em que era indiferente aplicar no CDI ou na Caderneta de Poupança.
Tem-se a sequência correta em:
a) V – V – F
b) V – F – V
c) V – F – F
d) F – V – F

73) **(EPCAR)** No gráfico a seguir, os pontos que estão destacados sobre as linhas contínuas representam os gols marcados e os pontos que estão destacados sobre as linhas tracejadas representam os gols sofridos por uma equipe de futebol nas 8 primeiras partidas de um determinado campeonato.



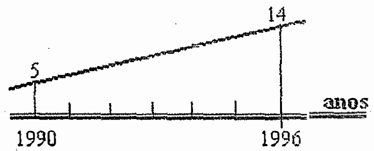
Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 2 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e zero ponto em caso de derrota, até a oitava partida a equipe terá acumulado:
a) 5 pontos
b) 6 pontos
c) 7 pontos
d) 8 pontos

74) **(CM)** O gráfico abaixo mostra como o gasto, em reais varia com a produção de óleo vegetal, em litros.



Assim, podemos afirmar que:
a) para fabricar 3 litros de óleo, a empresa gasta mais que para fabricar 5 litros de óleo
b) quando a empresa não produz nada, não gasta nada
c) se a empresa gasta R$ 170,00, então ela produz 4 litros de óleo
d) para produzir 1 litro de óleo a empresa gasta R$ 54,00
e) para produzir 2 litros de óleo a empresa gasta R$ 100,00

75) **(CM)** O gráfico a seguir mostra a produção de café, emmilhões de toneladas, na cidade de São Sebastião do Paraíso.
Usando as informações contidas no gráfico, é correto afirmar que, em 1994, a produção de café nesse município, em milhões de toneladas, foi igual a:
a) 9,5
b) 10
c) 10,5
d) 11
e) 11,5



76) **(CEFET)** João está ~~de viagem marcada para~~ os Estados Unidos e aprendeu com seu pai (que é professor de matemática), que em qualquer lugar do mundo, a numeração dos sapatos é uma função afim (também conhecida como função do 1° grau), que depende do comprimento do pé em centímetros. Consultando o caderno de viagens de um jornal, encontrou a tabela abaixo, que fazia a conversão da numeração de sapatos entre o Brasil e o Estados Unidos.

SAPATOS MASCULINOS		
BRASIL	EUA	COMPRIMENTO (cm)
40	8,5	26,4
42	10	28,0

Se João quiser trazer dos Estados Unidos um par de sapatos para presentear seu irmão mais jovem, que no Brasil calça 38 (trinta e oito), que número deve comprar de acordo com a numeracão americana?

77) **(CEFET)** Um produtor de café estabeleceu que o preço de cada saca (P), em reais, dependerá do número de sacas compradas (x), segundo a relação $P = 50 + \frac{200}{x}$. No mínimo quantas unidades (x) devem ser compradas de modo que o total a ser pago ultrapasse R$ 10.524,00?
a) 205
b) 206
c) 207
d) 208

78) **(CPII)** O preço do gás natural para um consumidor residencial na cidade do Rio de Janeiro é obtido a partir das informações:

Consumo (m^3/mês)	Tarifa (R$/$m^3$)
0 a 7	2,20
8 a 23	2,90
24 a 83	3,60
acima de 83	3,77

O consumidor paga pelo que gasta de acordo com quatro níveis de consumo:
Os sete primeiros metros cúbicos custam R$ 2,20 cada, os próximos dezesseis já custam mais caro, R$ 2,90 cada. Se o consumo for acima desses 23, mais caro fica (R$ 3,60 por cada metro cúbico)... e ainda existe mais uma faixa!
Por exemplo, se o consumo da sua casa for de 25 m³, você deverá pagar
7 x 2,20 + 16 x 2,90 + 2 x 3,60 = R$ 69,00.
a)Quanto pagará uma família cujo consumo for de 85 m³?
b)Escreva uma expressão que dê o valor pago por uma residência cujo consumo mensal, N, está entre 8 e 23 m³/mês.

79) **(CEFET)** Ao adquirir um plano de uma empresa de telefonia celular, um usuário escolheu um plano pelo qual pagaria R$ 68,00 mensais, com direito a utilizar 100 minutos em ligações, assumindo o compromisso de pagar R$ 1,02 por minuto excedente. No mês passado, o usuário utilizou nesse plano 2 horas e 15 minutos em ligações e pagou por esse serviço:
a) R$ 185,30;
b) R$ 107,30;
c) R$ 117,30;
d) R$ 103,70;
e) R$ 113,70.

80) **(EPCAR)** Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da EPCAR, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário.
Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia que depende da área pintada.
A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área x pintada (em m²)	Total y a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados a seguir, classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo.
(   ) O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.
(   ) Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250m².

( ) Pela pintura de uma área correspondente a $150m^2$ seria cobrado menos de 300 reais.

Tem-se a sequência correta em:

a) V – F – F
b) V – F – V
c) F – V – F
d) F – F – V

81) **(CPII)** O custo de uma corrida de táxi, na cidade do Rio de Janeiro, é calculado da seguinte forma:

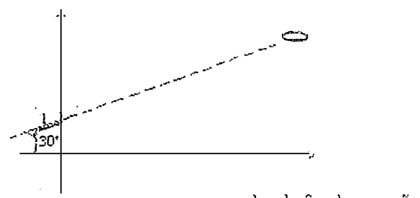
R$ 3,70 é a bandeirada (valor inicial independente da distância a ser percorrida)

R$ 0,15 para cada 100 metros percorridos, a partir dos primeiros 500 metros.

O taxímetro só muda o valor a cada 100 metros percorridos. Assim, por exemplo, se a viagem tiver sido de 780 metros, o passageiro pagará $3{,}70 + \frac{200}{100}(0{,}15)$ = R$ 4,00 (o mesmo que numa corrida de 700 metros).

a) Quanto custa uma corrida de 9,5 km?
b) Considere N um número múltiplo de 100, maior que 500, que indica quantos metros o passageiro percorre. Escreva uma fórmula que expresse o custo de uma corrida de N metros.

82) **(CM)** Em um torneio de tiro ao alvo, um competidor posiciona sua carabina conforme esquema abaixo, com o objetivo de acertar o centro de um "prato". O centro desse prato está localizado a $15\sqrt{3}$ m do eixo vertical e a 15m do eixo horizontal quando o atirador efetua um disparo, estando a ponta do cano da carabina a 1m do solo. Supondo que o projétil pode atingir instantaneamente o prato, pode-se afirmar que esse projétil:



desenho fora de proporção

a) passará 0,5m acima do centro do prato
b) atingirá o centro do prato
c) passará 1m abaixo do centro do prato
d) passará 0,5m abaixo do centro do prato
e) passará 1m acima do centro do prato

83) **(EPCAR)** Se forem comparados o número de candidatos inscritos para o Exame de Admissão ao 1° ano do CPCAR com o número de candidatos inscritos para o Exame de Admissão ao 3° ano CPCAR, é correto afirmar que:

a) no ano de 2004, a diferença entre tais valores é menor que **g**.
b) **d** é aproximadamente 30% de **m**.
c) a razão entre **f** e **a** é maior que 4.
d) **h** supera **b** num número cujo produto do algarismo das dezenas pelo algarismo das unidades é menor que 30.

84) **(EPCAR)** Considerando-se que os pontos A, B e C estão alinhados e que houve um aumento do número de candidatos inscritos para o Exame de Admissão ao 1° ano CPCAR 2009, é correto afirmar que **k** é tal que a soma de todos os seus algarismos é um número divisor de

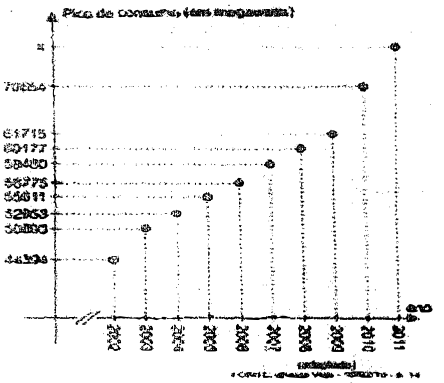
a) 91
b) 55
c) 27
d) 16

85) **(EPCAR)** "Demanda Crescente

O consumo de energia elétrica no Brasil nunca foi tão alto. Na quinta-feira passada, atingiu seu recorde histórico. O valor é muito superior ao registrado em anos anteriores."

(revista Veja – 10/02/10 – p. 71)

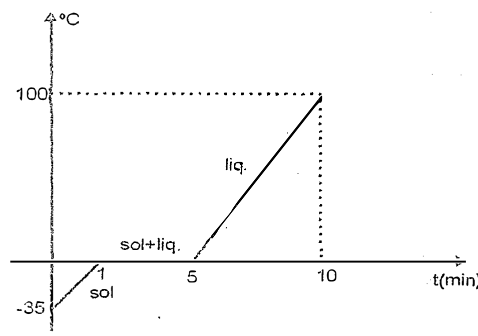
O gráfico abaixo indica o pico de consumo de energia (em megawatts) na primeira quinta-feira de fevereiro dos anos de 2002 a 2010.



Analisando-se o gráfico acima e supondo-se que em 2011, na primeira quinta-feira do mês de fevereiro, haverá um crescimento do pico de consumo de energia, proporcional ao crescimento ocorrido na primeira quinta-feira do mês de fevereiro do ano de 2009 ao ano de 2010, é correto afirmar que x é um número compreendido entre:

a) 76000 e 77000.
b) 77000 e 78000.
c) 78000 e 79000.
d) 79000 e 80000.

86) **(CEFET)** Uma panela contendo uma barra de gelo a – 35°C é colocada sobre a chapa de um fogão. Nestas condições, o gráfico mostra a evolução de temperatura da água (°C) em função do tempo (t). Assinale a única alternativa falsa.



a) O conjunto domínio da relação é [0,10];
b) O conjunto imagem da relação é [-35,100];
c) A relação é constante no intervalo [1,5];
d) A relação é crescente nos intervalos [0,1] e [5,10];
e) A relação é crescente apenas no intervalo [5,10].

87) **(CEFET)** A variação de temperatura dos corpos geralmente provoca alterações em suas dimensões. Este fato caracteriza um importante fenômeno físico: a dilatação térmica. Por exemplo, consideremos uma chapa retangular com temperatura inicial T_1 e área inicial S_1. Ao aquecermos essa chapa até a temperatura T_2, sua área passará a ser S_2. A variação de temperatura da chapa (ΔT) é dada por $\Delta T = T_2 - T_1$. A variação de sua área (ΔS) é denominada dilatação superficial e é dada por $\Delta S = S_2 - S_1$. Além disso, a dilatação superficial pode ser obtida através da formula: $\Delta S = \beta \cdot S_1 \cdot \Delta T$

Onde β consiste no coeficiente de dilatação superficial cujo valor depende do material que compõe a chapa, sua unidade de medida é $(°C)^{-1}$.

Considere que a chapa retangular acima seja de ferro com dimensões 1,00m x 4,00m. Suponha que a sua temperatura inicial seja T_1 = 20°C e, que seja aquecida até uma temperatura final T_2 = 100°C. Sabendo-se que o

coeficiente de dilatação superficial do ferro é b = 24.10^{-6} $(°C)^{-1}$, determine:
(a) A dilatação superficial sofrida pela chapa.
(b) A área da chapa após o aquecimento descrito.

88) **(CEFET)** Considere que a expressão N = - D.(D - 8)+ 1 será utilizada para o cálculo do número decentenas de indivíduos N de uma determinadaespécie, após decorridos D dias.
Pergunta-se: a partir de quantos dias a população começará a diminuir?
a) 0
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

89) **(CM)** O lucro L de uma empresa é dado por L = $-x^2 + 8x - 7$, onde x é a quantidade vendida. O lucro será positivo, se e somente se:
a) $2 < x < 5$
b) $x > 7$ ou $x < 1$
c) $0 < x < 12$
d) $x > 12$
e) $1 < x < 7$

90) **(CEFETEQ)** No Laboratório de Química Orgânica, o professor Nelson Fabiano realiza uma experiência com um material volátil. A massa (m), em gramas, vai reduzindo em função do tempo t, expresso em horas, de acordo com a equação:

$$m = -t^2 - 4t + 60.$$

Assim sendo, determine o tempo necessário para que esse material se volatilize totalmente.
Represente graficamente a situação descrita.

91) **(CM)** Em uma partida de basquete, uma bola, ao ser lançada de uma altura inicial, por um jogador, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 - at$ $(t \geq 0)$ sendo t o tempo medido em segundos e h (t) a altura da bola, em metros, no instante t. Após o lançamento, sabe-se que a bola atinge depois de 4 s a altura inicial. Dessa forma, o valor de a é:
a) -8
b) -7
c) -6,5
d) 6
e) 8

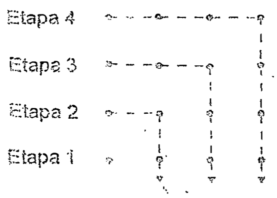
92) **(CM)** Em uma partida de beisebol, o lançador encontra-se entre o rebatedor e um muro de proteção de 4 m de altura. Feito o lançamento, o rebatedor acerta a bola, que passa sobre a cabeça do lançador, onde atinge a altura máxima de 10 m, em relação ao ponto da rebatida. Sabendo que o lançador está a 20 m do rebatedor e a 16 m do muro e que a bola descreve uma trajetória parabólica, pode-se afirmar que a bola (em relação à rebatida):
a) passará por cima do muro
b) atingirá o muro a 3,6 m de altura
c) atingirá o muro a 3,4 m de altura
d) atingirá o muro a 3,0 m de altura
e) atingirá o muro exatamente no seu topo

93) **(CM)** Uma empresa fabrica e vende aparelhos de som. Para um determinado modelo, de acordo com um levantamento feito pela área financeira, para um preço de p reais por unidade, o custo C e a receita R, em milhares de reais, são expressos, respectivamente, por $C = \frac{36}{5} - \frac{4}{5}p$ e $R = 5p - p^2$.
Quando a receita é igual ao custo acrescido de 25%, esta receita, em milhares de reais, será:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

94) **(EPCAR)** No tempo t = 0, o tanque de um automóvel está com á litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função do 2º grau em função do tempo t, em minutos.
O carro entra em movimento. Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota.
Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo $\overrightarrow{Ox}$ num único ponto de coordenadas (190,0).
Dessa forma, o número á está compreendido entre:
a) 40 e 42
b) 42 e 44
c) 44 e 46
d) 46 e 48

95) **(CEFET)** Em vitrais de igrejas, podem-se perceber várias figuras geométricas. Suponha um vitral no formato de um triângulo isósceles de 4 m de base e altura igual a 5 m. Nele deve-se inscrever outro triângulo isósceles invertido, cuja base é paralela à base do maior e cujo vértice é o ponto médio da base do primeiro. Pergunta-se:
a) Qual deve ser a área do triângulo invertido para que esta seja máxima?
b) Qual é a dimensão, em metros, da altura desse triângulo de área máxima?

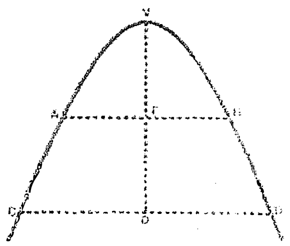
96) **(CN)** Observe a figura abaixo.



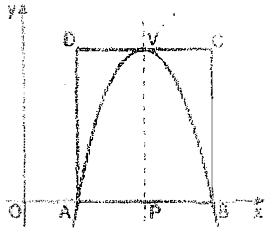
A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescentam-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que
a) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses 'n' primeiros ímpares é n^2.
b) a soma de todos os números naturais começando do 1 até 'n' é sempre um quadrado perfeito.
c) a soma dos pontos das 'n' primeiras etapas é $2n^2 - 1$.
d) cada etapa 'n' tem $3n - 2$ pontos.
e) cada etapa 'n' tem $2n + 1$ pontos.

97) **(CN)** O aluno Mauro, da 8ª série de um colégio, para resolver a equação $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ no conjunto dos números reais, observou que $x^4 = x^2 - 2x + 1$ e que o segundo membro da equação é um produto notável. Desse modo, concluiu que $(2x + 1)^2$ é igual a:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

98) **(CEFET)** A figura a seguir representa uma seção transversal de um refletor parabólico. Uma lâmpada é colocada no ponto F, situado no ponto médio do segmento $\overline{VO}$. Sabendo-se que $\overline{AB} = 10\ cm$ e $\overline{VO} = 11cm$, determine a medida do segmento $\overline{CD}$.



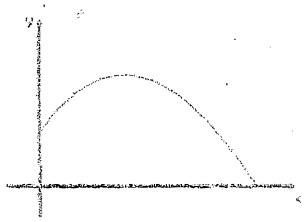
99) **(EPCAR)** Considere a parábola que representa a igualdade $y = ax^2 + bx + c$, de eixo de simetria $\overline{PV}$, e o quadrado ABCD indicados na figura abaixo.
Sabendo-se que os pontos A e B pertencem à parábola e ao eixo $\overline{OX}$ e sendo V o ponto onde a parábola tangencia o segmento $\overline{DC}$, o valor de $D = b^2 - 4ac$ é:



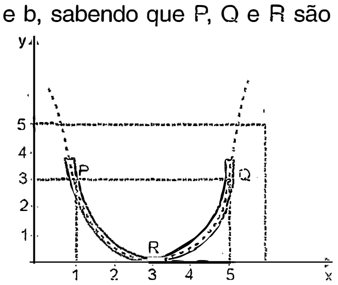
a) 4
b) 8
c) 16
d) 20

100) **(CEFET)** Um objeto é lançado do topo de um muro, de altura h, atingindo o solo após 5 segundos. A trajetória parabólica do objeto é representada pela equação $y = -0{,}5x^2 + bx + 2{,}5$ cujo gráfico está apresentado abaixo, onde y indica a altura atingida pelo objeto em relação ao solo, em metros, no tempo x, em segundos.

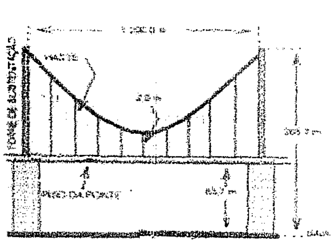
a) Calcule a altura h e o valor do coeficiente b da equação da trajetória.
b) Determine a altura máxima, em relação ao solo, atingida pelo objeto.



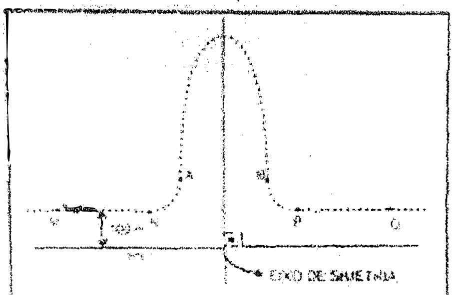
101) **(CEFET)** Na fixação de luminárias em uma parede, foi utilizado um nível de mangueira (borracha com água) que, disposto no painel, se assemelha ao gráfico de um trinômio do 2° grau de equação $y = ax^2 + bx + 27/4$. Determine a e b, sabendo que P, Q e R são pontos desse trinômio.



102) **(EPCAR)** Um cabo de suspensão de uma ponte tem a forma de uma parábola, e seu ponto mais baixo está a 2,0 m acima do piso da ponte. A distância do piso da ponte em relação à superfície da baía é de 83,7 m. O cabo passa sobre as torres de sustentação, distantes 1200,0 m entre si, numa altura de 265,7 m acima da baía e é ligado ao piso da ponte por hastes rígidas perpendiculares a ela. O comprimento de cada uma das hastes que ligam o cabo à ponte, distantes 50,0 m do centro da ponte é, em metros, igual a.



a) 1,25
b) 3,00
c) 3,25
d) 3,50

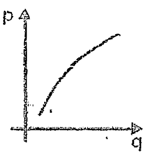


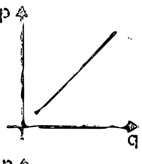
- M → início da manobra
- ● → término da manobra
- M, N, P e Q → pontos que pertencem a uma mesma reta paralela ao solo
- $\overline{MA}$ e $\overline{PB}$ representam $\frac{1}{4}$ de circunferências, cujo raio mede 100 m e são tangentes à reta que contém os pontos M, N, P e Q
- A trajetória de A até B representa um arco de parábola
- O solo e o eixo de simetria coincidem com os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$, respectivamente, do sistema cartesiano ortogonal
- $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = 300$m

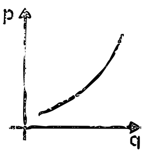
Sabendo-se que o avião "cruza" o eixo de simetria a uma distância de 200 m da reta que contém os pontos M, N, P e Q, marque a alternativa que NÃO indica, em metros, uma posição em relação ao eixo de simetria e a respectiva altura atingida pelo avião ao percorrer a trajetória indicada pelo arco de parábola do ponto A ao ponto B.
a) 10 e 296
b) 25 e 270
c) 40 e 236
d) 50 e 200

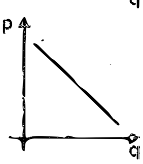
104) **(CEFET)** Duas aranhas estão sobre o plano cartesiano. A primeira está inicialmente no ponto (6,0) e pretende seguir em linha reta até o ponto (0,6). A segunda está na origem e descreve um arco de parábola de equação $y = x^2$, no 1° quadrante. Determine:
a) a equação da trajetória da 1ª aranha;
b) as coordenadas do ponto onde elas vão se encontrar.

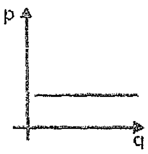
105) **(CEFET)** Um vendedor de saquinhos de amendoim anuncia o seu produto da seguinte maneira: "Um é trinta [centavos], dois é cinquenta [centavos] e cinco é um real". Num gráfico preço (p) x quantidade (q), essa situação poderia estar representada sobre uma curva semelhante a:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

106) **(CM)** As funções reais $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e $g(x) = 4x - 4$ estão esboçadas graficamente abaixo. Estudando, atentamente, os esboços dos gráficos das funções, podemos afirmar que:

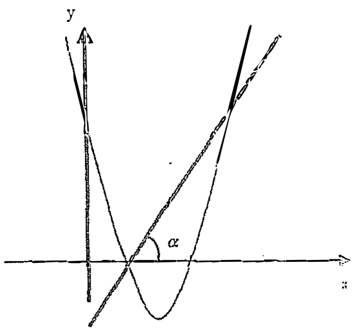
a) $\cos a = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

b) $\cos a = \dfrac{5\sqrt{13}}{9}$

c) $\cos a = \dfrac{6\sqrt{13}}{169}$

d) $\cos a = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$

e) $\cos a = \dfrac{9\sqrt{13}}{169}$



107) **(CM)** A temperatura T para o aquecimento de um forno, em graus centígrados (°C), varia em função do tempo t, em minutos (min), segundo a função definida abaixo:

$$T(t) = \begin{cases} 21t + 30, \text{se } 0 \le t \le 10 \\ t^2 + 4t + 100, \text{se } t \ge 10 \end{cases}$$

Sendo assim, o tempo necessário para que a temperatura do forno passe de 135°C para 420°C é:
a) 10 min
b) 11 min
c) 12 min
d) 13 min
e) 14 min

108) **(CN)** Se a e b são dois números reais, denotamos por min (a, b) o menor dos números a e b, isto é, min (a,b) =

$$\begin{cases} a, \text{se } a \le b \\ b, \text{se } a \ge b \end{cases}.$$

O número de soluções inteiras negativas da inequação min $(2x - 7,\ 8 - 3x) > -3x + 3$ é igual a:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

109) **(CM)** Seja f uma função na qual cada número real x está associado ao menor elemento do conjunto $C = \{x + 1, -x + 5, x^2 - 1\}$. O conjunto imagem dessa função f é:
a) $]-\infty, 3]$
b) $[-1, +\infty[$
c) $]-\infty, 2]$
d) $]-\infty, 0]$
e) $\{y \in Z / y \le 3\}$

110) (CN) Seja 'x' um número real. Define-se [x] como sendo o maior inteiro menor do que 'x', ou igual a 'x'. Por exemplo, [2, 7]; [-3, 6]; [5] são, respectivamente, 2; -4 e 5. A solução da igualdade [x] + [2x] = 6 é o intervalo [a; b). O valor de a + b é:

a) $\dfrac{15}{4}$

b) $\dfrac{9}{2}$

c) $\dfrac{11}{2}$

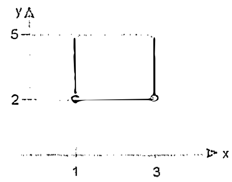
d) $\dfrac{13}{3}$

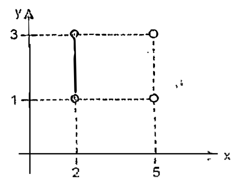
111) **(CN)** Sabe-se que $p(x) = acx^4 + b(a + c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a + c)x + ac$ é um produto de dois polinômios do 2° grau e que os números a, b, c são reais não nulos com $(b^2 - 4ac)$ positivo. Nessas condições, é correto afirmar que
a) p(x) possui apenas uma raiz real.
b) p(x) possui duas raízes reais.
c) p(x) possui três raízes reais.
d) p(x) possui quatro raízes reais.
e) p(x) não possui raízes reais.

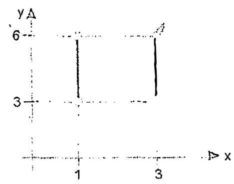
112) **(CN)** Sejam $A = [7^{2011}, 11^{2011}]$ e $B = \{x \in R \mid x = (1 - t) \times 7^{2011} + t \times 11^{2011} \text{ com } t \in [0, 1]\}$. O conjunto A – B é:
a) $A \cap B$
b) B – {112011}
c) A – {72011}
d) A
e) $\varnothing$

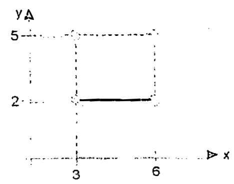
GABARITO

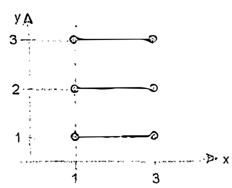
1) a) {(0, 2), (0, 5), (1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5)}
b) {(7, 2), (7, 5)}
c) {(7, 0), (7, 1), (7, 3)}
d) {(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)}
e) {(7, 7)}

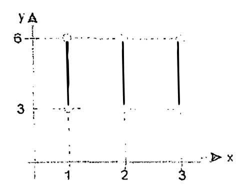
2) a)


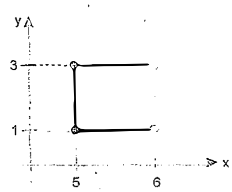
b)


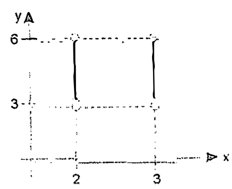
c)


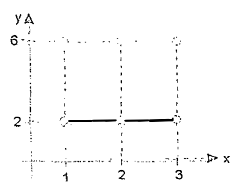
d)


e)


f)


g)


h)


i)


3) E
4) B

5) $\begin{cases} Dom = \{1,2,3\} \\ Im = \{0,1,4,7\} \\ CD = B \end{cases}$

6) $\begin{cases} Dom = \{1,2,3,4\} \\ Im = \{1,3\} \end{cases}$

7) E

8) a) Função sobrejetora
b) Função bijetora
c) Não é função
d) Não é função

9) a) Dom = {1, 2, 4}
Im = {2, 3}
b) Dom = A
Im = {a, b}
c) Dom = {1, 2, 3}
Im = {2, 3}
d) Dom = [-2, 4]
Im = [-3, 2]
e) Dom = R
Im = R

10) a) 1
b) -5
c) 0
d) -3
e) -2
f) -1
g) 0
h) -1
i) $-\frac{14}{9}$
j) -63
l) $-\frac{1}{2}$
m) $\frac{1}{49}$

11) a) 1
b) 0
c) g
d) 1
e) -4
f) -1

12) a) Sim
b) Não
c) Sim
d) Não

13) a) Não é função
b) Função bijetora
c) Não é função
d) Função sobrejetora

14) A

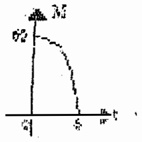
15) a) R
b) R
c) R – {7}
d) [-3, +∞[
e)]-∞, 2[
f) R – {-4, 1}
g) [1, 3]
h) R
i)]-2, 2]
j) R – {-6, 2}
k) $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[- \{7\}$
l) R – {0, 1, 2}
m)]-∞, 1 [∪]1, 4]∪]5, + ∞[
n)]2, +∞[

16) 3
17) -5
18) 2
19) 5
20) a) f(x) = 2x + 7
b) 11

21) -8
22) 0
23) (1, 3)
24) 25
25) $\frac{1}{4}$
26) -5
27) D
28) E
29) D
30) A
31) B
32) D
33) a) $x = \frac{y-1}{3y-2}$
b) y = t

34) B
35) E
36) B
37) A
38) E
39) C
40) C
41) D
42) D
43) C
44) E
45) C
46) B
47) E
48) D
49) D
50) A
51) C
52) B
53) C
54) 13
55) B
56) D
57) A
58) D
59) A
60) A
61) E
62) 0,0003 m^2
63) A
64) C
65) A
66) B
67) E
68) D
69) D
70) C
71) B
72) B
73) C
74) D
75) D
76) 7
77) C
78) a) R$ 285,34
b) 2,9N – 4,9
79) D
80) C
81) a) R$ 17,20
b) $3{,}70 + \frac{(N-500)}{100} \times 0{,}15$
82) E
83) C
84) B
85) D
86) E
87) a) $7{,}68 \times 10^{-3}$ m^2
b) ≅ 4,01 m^2

88) C
89) E



90) 6h e

91) A
92) B
93) A
94) A
95) a) 2,5 m^2
b) 2,5 m
96) A
97) C
98) $10\sqrt{2}$cm
99) C
100) a) h = 2,5m e b = 2
b) 4,5 m

101) $a = \frac{3}{4}$ e $b = -\frac{9}{2}$
102) C
103) B
104) a) y = 6 – x
b) (2, 4)
105) A
106) A
107) B
108) A
109) A
110) B
111) D
112) E

OBSERVAÇÕES

Inequação produto

É uma inequação do tipo:

$P < 0$, $P > 0$, $P \le 0$ ou $P \ge 0$, onde P é um produto de duas ou mais funções. Neste capítulo estudaremos os casos em que as funções que o compõem são do 1° ou do 2° grau.

Para resolvermos uma **inequação produto**, devemos analisar a variação do sinal de cada um dos fatores de P. Tal análise foi bastante treinada no capítulo anterior.

Recordando:

Função do 1° grau	
valores de x	**valor da função**
na raiz	zero
à direita da raiz	mesmo sinal de a
à esquerda da raiz	sinal contrário ao de a

Função do 2° grau	
valores de x	**valor da função**
nas raízes	zero
exteriores às raízes	mesmo sinal de a
entre as raízes	sinal contrário ao de a

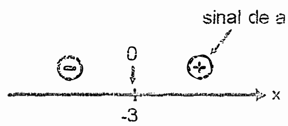
Em seguida devemos construir um quadro com os estudos dos sinais dos fatores, analisando-os simultaneamente.

Exemplo:
Resolver a inequação

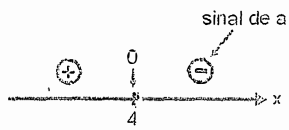
$(x + 3) . (4 - x) . (2x - 4) \le 0$

Resolução:
Vamos estudar a variação do sinal de cada fator. Para isto, não devemos esquecer de determinar a raiz de cada um deles.

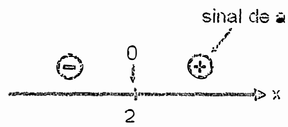
1°) $x + 3 \rightarrow a = 1$
$x + 3 = 0$
$x = -3$



2°) $4 - x \rightarrow a = -1$
$4 - x = 0$
$x = 4$



3°) $2x - 4 \rightarrow a = 2$
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = 2$



Devemos agora expressar em um mesmo quadro as variações dos sinais de todos os fatores.

		−3		2		4	
x + 3	−	0	+	+	+	+	+
4 − x	+	+	+	+	+	0	−
2x − 4	−	−	−	0	+	+	+
P	+	0	−	0	+	0	−
		−3		2		4	

Como construir o quadro acima?

Em primeiro lugar colocamos na coluna mais à esquerda do quadro os fatores envolvidos no produto, sendo que na última linha colocamos P, que representa o sinal final do produto. É dessa linha que tiraremos a solução da inequação. A seguir, na 1ª linha do quadro, marcamos as raízes de todos os fatores, em ordem crescente, descendo a partir de cada uma delas, uma linha pontilhada até a última linha, onde reescreveremos cada raiz. Feito isso, vamos reproduzir no quadro o estudo de variação dos sinais de todos os fatores. Como? É simples, por exemplo, o 1° fator, que é $x + 3$, tem raiz -3, então na direção da linha ocupada pelo fator $x + 3$, colocamos um zero abaixo de sua raiz -3, pois para este valor, devemos lembrar, o fator se anula. Como estudado na variação de seu sinal, à direita $x + 3$ é positivo (colocamos sinais + em todas as colunas à direita de sua raiz -3) e à esquerda, $x + 3$ é negativo (colocamos o sinal − em todas as colunas à esquerda de sua raiz -3). Devemos proceder de forma análoga com os demais fatores. Após marcarmos no quadro a variação dos sinais de todos os fatores, é hora de interpretá-los de forma simultânea.

Para isto, devemos seguir as regras de sinais da multiplicação em cada coluna de sinais, colocando o sinal do resultado na linha que está na direção de P. Por exemplo, na 1ª coluna de sinais temos −, + e −, nesta ordem. Pela regra de sinais, um número negativo, multiplicado por um outro positivo e por outro negativo, dá resultado positivo. Portanto devemos colocar um + na linha em que P se encontra.

Após essa coluna de sinais tem a linha pontilhada que sai da primeira raiz -3. Observamos que para $x = -3$, o fator $x + 3$ vale zero, o fator $4 - x$ é positivo e o fator $2x - 4$ é negativo. Como o produto de fatores em que um deles é zero também vale zero, colocamos sobre esta linha, na direção de P o resultado zero. E assim devemos proceder até a última coluna de sinais, quando então a variação de sinal do produto está na linha onde encontramos P. Voltando à inequação dada

$$(x + 3) . (4 - x) . (2x - 4) \le 0$$

Verificamos que queremos que o produto P seja ≤ 0, ou seja negativo ou zero. Basta destacarmos os intervalos em que P é negativo ou nulo. Assim:

$$S = \{x \in R \mid -3 \le x \le 2 \text{ ou } x \ge 4\}$$

ou

$$S = [-3, 2] \cup [4, +\infty[$$

Inequação fracionária

É uma inequação do tipo:

$$\frac{N}{D} < 0, \quad \frac{N}{D} > 0, \quad \frac{N}{D} \le 0 \text{ ou } \frac{N}{D} \ge 0$$

onde N e D são funções ou produto de duas ou mais funções.

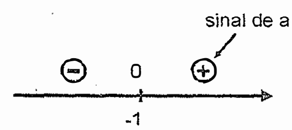
O processo de resolução de uma inequação fracionária é análogo ao de uma inequação produto. A única diferença, que requer um cuidado todo especial, é que neste caso há um denominador D, portanto não podemos nos esquecer de excluirmos suas raízes do conjunto-solução, pois as raízes do denominador o tornam igual a zero, e sabemos que é impossível resolvermos uma fração de denominador zero.

Exemplo:
Resolver a inequação

$$\frac{(x + 1) . (-x - 2)}{x^2 - 5x + 4} \ge 0$$

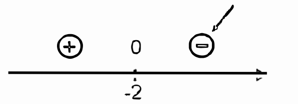
Resolução:
Estudemos a variação dos sinais

1°) $x + 1$ ® $a = 1$
$x + 1 = 0$
$x = -1$

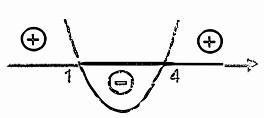


2°) $-x - 2 \Rightarrow a = -1$

$-x-2=0$
$x=-2$

sinal de a


3º) $x^2-5x+4 \Rightarrow a=1>0$
$x^2-5x+4=0$
$x=1$ ou $x=4$



CUIDADO COM AS RAÍZES DO DENOMINADOR!

Montemos o quadro de sinais:

	$x<-2$	-2		-1		1		4	$x>4$
$x+1$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$-x-2$	+	0	−	−	−	−	−	−	−
x^2-5x+4	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$F=\frac{N}{D}$	−	0	+	0	−	∄	+	∄	−

Note-se que se $x=1$ ou $x=4$ (raízes do denominador), a fração F não existe, daí utilizarmos o símbolo ∄.

$S=\{x \in R \mid -2 \le x \le -1 \text{ ou } 1<x<4\}$
Logo, ou
$S=[-2,-1] \cup]1,4[$

Inequação potência

É uma inequação em que um ou mais fatores aparecem elevados a expoentes naturais maiores ou iguais a 2. As inequações potência podem aparecer associadas a inequações produto e inequações fracionárias. Como estudar a variação do sinal de um fator elevado a um expoente? Temos dois casos a considerar:

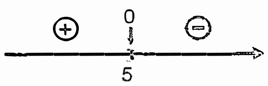
1º caso: O expoente é ímpar
Neste caso o expoente pode ser descartado, pois, uma potência de expoente ímpar tem o mesmo sinal da base, e como o interesse na resolução de uma inequação deste tipo é o sinal, o expoente ímpar é apenas um "adereço" sem importância.

Assim, a variação do sinal de uma potência de expoente ímpar é igual à variação do sinal de sua base.

Exemplo:
Estude a variação de sinal da potência $(5-x)^{93}$.

Resolução:
Como o expoente é ímpar, podemos abandoná-lo.

$5-x \rightarrow a=-1$
$5-x=0$
$x=5$



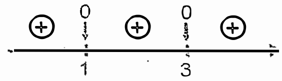
Então:

$$\begin{cases}(5-x)^{93}=0 \Rightarrow x=5\\(5-x)^{93}<0 \Rightarrow x>5\\(5-x)^{93}>0 \Rightarrow x<5\end{cases}$$

2º caso: O expoente é par
Sabemos que uma potência de expoente par nunca é negativa, pelo contrário, é sempre positiva ou nula, para o valor de x igual à sua raiz. Estendendo este conceito ao nosso estudo, podemos afirmar que o sinal de uma função elevada a expoente par é sempre positivo, exceto em sua raiz, que anula a função.

Exemplo:
Estude a variação do sinal da potência $(x^2-4x+3)^{1002}$

Resolução:
$(x^2-4x+3)^{1002}=0$
$x^2-4x+3=0$
$x=1$ ou $x=3$



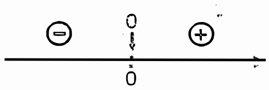
$$\text{Então: }\begin{cases}(x^2-4x+3)^{1002}=0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=3\\(x^2-4x+3)^{1002}>0 \Rightarrow \forall\, x \in R, x \ne 1 \text{ e } x \ne 3\\(x^2-4x+3)^{1002}<0 \Rightarrow \nexists\, x \in R\end{cases}$$

Agora que aprendemos a analisar a variação de sinal das potências, estamos aptos a resolver uma inequação potência. Sua resolução é semelhante à de inequações produto e fracionárias, apenas com o incremento da potência.

Exemplo:
Resolver a inequação

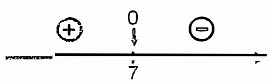
$$\frac{x\,.\,(7-x)^{73}\,.\,(-x+6)^{84}}{-x^2+4x+5} \le 0$$

Resolução:
Vamos estudar as variações de sinais:
1º) $x \rightarrow a=1$
$x=0$



2º) $(7-x)^{73}$

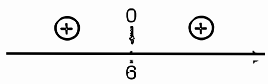
Abandonar o expoente ímpar.
$7-x \rightarrow a=-1$
$7-x=0$
$x=7$



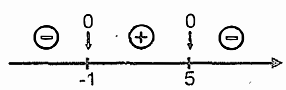
3º) $(-x+6)^{84}$

Vamos nos preocupar apenas com a raiz da base, pois como o expoente é par, o sinal nunca será negativo.

$-x+6=0$
$x=6$



4º) $-x^2+4x+5 \Rightarrow a=-1$
$-x^2+4x+5=0$
$x^2-4x-5=0$
$x=5$ ou $x=-1$



Note que embora tenhamos multiplicado ambos os membros da equação do 2º grau por -1 para facilitar o cálculo das raízes, para efeito de análise de sinais, devemos utilizar $a=-1$, do fator dado na inequação.

CUIDADO COM AS RAÍZES DO DENOMINADOR!

	$x<-1$	-1		0		5		6		7	$x>7$
x	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$(7-x)^{73}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$(-x+6)^{84}$	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$-x^2-4x+5$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	−	−
F	+	∄	−	0	+	∄	−	0	−	0	+

Então, $S = \{x \in R \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } 5 < x \leq 7\}$

ou

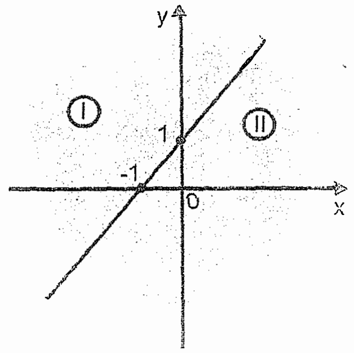
$S =]-1, 0] \cup]5, 7]$

Inequações a duas variáveis

Vamos considerar, a titulo de exemplo, a função $y = x + 1$. Tal igualdade é satisfeita para infinitos valores de x e y. São exemplos de soluções dessa equação: (–1, 0), (0, 1), (1, 2). (2, 3).... Como não poderíamos enumerar todas elas, utilizamos a representação gráfica.

Neste caso, o gráfico é uma reta, constituída pela infinidade de pontos associados aos pares anteriormente citados.

Ao construirmos o gráfico dessa função, observamos que ele divide o plano em três regiões: uma região "acima" da reta (I), uma região "abaixo" da reta (II) e a região representada pela própria reta.



Os pontos pertinentes à reta, como já observado, satisfazem à equação $y = x + 1$, enquanto que as duas outras regiões satisfarão uma à inequação $y > x + 1$ e outra à inequação $y < x + 1$. A maneira de descobrirmos qual das inequações representa cada uma das outras duas regiões é empírica, experimental. Para isto, devemos escolher um ponto qualquer que pertença a uma das duas regiões e substituir em uma das inequações. Se ela for satisfeita por esse par de valores, então a região cujo ponto escolhemos é a representação geométrica da inequação utilizada. Em caso contrário, se as coordenadas não satisfizerem à inequação, é porque a região em questão é a representação geométrica da outra inequação.

No caso do nosso exemplo, vamos escolher um ponto qualquer do plano.

Consideremos a origem, o ponto (0, 0) que podemos observar pertence à região II. As inequações dessas regiões são $y < x + 1$ e $y > x + 1$. Vamos escolher uma delas.

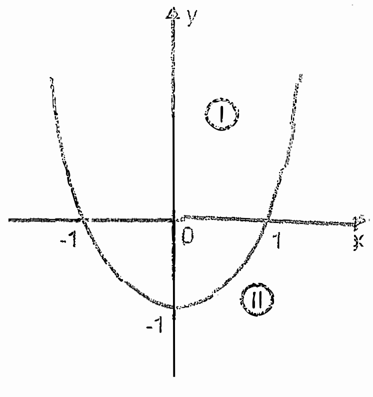
$$y < x + 1$$

Substituindo-se x = 0 e y = 0:

$$0 < 0 + 1$$

Que é uma desigualdade verdadeira. Portanto a inequação $y < x + 1$ tem como solução o conjunto de pontos da região II, enquanto que os pontos pertinentes à região I são a solução da inequação $y > x + 1$.

Vamos agora utilizar a função $y = x^2 - 1$. Seu gráfico é uma parábola, como já aprendemos a construir.



Assim como no exemplo anterior, o plano ficou dividido em três regiões: uma representa $y = x^2 - 1$, outra representa $y < x^2 - 1$ e a terceira representa a inequação $y > x^2 - 1$. Sabemos que o conjunto de pontos pertinentes à parábola é a solução da equação $y = x^2 - 1$. Para associar corretamente cada inequação à região correspondente, vamos utilizar um raciocínio análogo ao do primeiro exemplo. Escolhamos uma das inequações:

$$y < x^2 - 1$$

Vamos escolher para o "teste" o ponto (0, 1) que constatamos pertencer à região I.

Substituindo-se x = 0, e y = 1:

$$1 < 0^2 - 1,$$

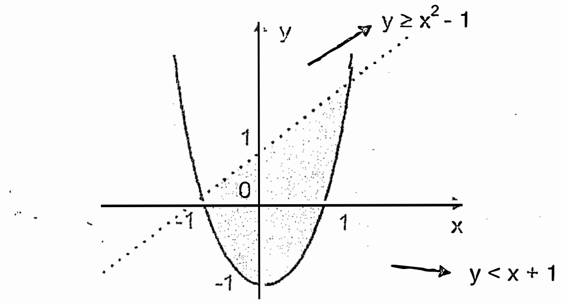
que á uma desigualdade falsa. Então, a região I é a solução da outra inequação, ou seja, da inequação $y > x^2 - 1$, e portanto a solução de inequação $y < x^2 - 1$ é o conjunto de pontos da região II.

Agora que já sabemos resolver inequações a duas variáveis, estamos aptos a resolver sistemas de inequações a duas variáveis.

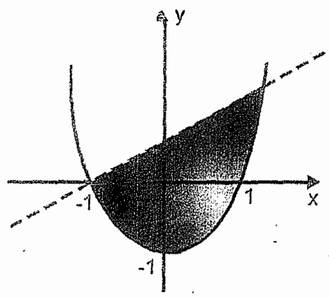
Seja resolver o sistema $\begin{cases} y < x + 1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$

Em primeiro lugar devemos resolver cada inequação em um mesmo sistema de eixos. A solução do sistema será a interseção das regiões que satisfizeram às inequações dadas, simultaneamente.

Para isto vamos aproveitar o estudo feito nos exemplos anteriores. Cabe observar que na primeira inequação $y < x + 1$ não está sendo considerada a hipótese da igualdade, logo a reta $y = x + 1$ deve ser pontilhada, pois ela não fará parte da solução. Já na segunda inequação $y \geq x^2 - 1$, como a igualdade foi considerada, a parábola $y = x^2 - 1$ será construída com linha contínua.



Então a solução do sistema é o conjunto de pontos da região sombreada na figura abaixo.



QUESTÕES PARA TREINAMENTO

I) Resolva em R as inequações:

1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

2) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

3) $-x^2 + x + 12 \le 0$

4) $4x^2 + 3x + 2 < 0$

5) $\frac{x+2}{x-3} \le 0$

6) $\frac{x^2-3x}{4-x} > 0$

7) $\frac{x-1}{2-x} \le 3$

8) $(x+4).(x-3).(2-x) < 0$

9) $x.(x+1).(x+2).(4-x) \ge 0$

10) $(x^2-1).(x^2-4x+3) \le 0$

11) $(x+6)^5 \ge 0$

12) $(x-6)^6 \ge 0$

13) $(3x-2)^{10} \le 0$

14) $(4x-7)^{15} < 0$

15) $(2x+8)^{84} < 0$

16) $\frac{(x+1)^3.(2-x)}{(x+3)^4} \ge 0$

17) $\frac{(x-3)^{72}.(5-x)^{81}}{x^{18}.(x+2)^{13}} \le 0$

II) Represente no plano, as soluções dos sistemas.

18) $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \le 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y \ge 1 \\ x-y \ge 1 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x-3y-1 \le 0 \\ x+2y \ge 4 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-y < 1 \\ 3x+2y > 12 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 2 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x < -3 \\ y > 0 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x.y \ge 0 \\ x+y \le 2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} x.y \le 0 \\ y+x^2 \le 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x.y \le 0 \\ y+x^2 \le 0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x \ge y \\ y \ge x^2-9 \end{cases}$

28) $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ y < x^2-4 \end{cases}$

QUESTÕES DE CONCURSOS

29) **(EPCAR)** Seja $y = (3x+2).(ax+b)$ onde $a > 0$ e $b < 0$. O conjunto de todos os valores reais de x, para os quais y é positivo é:

a) $x < 0$ ou $x > -\frac{b}{a}$

b) $x < -\frac{b}{a}$ ou $x > -\frac{2}{3}$

c) $-\frac{2}{3} < x < -\frac{b}{a}$

d) $x < -\frac{2}{3}$ ou $x > -\frac{b}{a}$

30) **(CEFETEQ)** Calcule a soma dos valores inteiros de x que satisfazem à inequação $(x-5).(2x+1) < 0$.

31) **(CM)** O conjunto solução em $\Re$ da inequação $\frac{1}{x-1} \le -1$ é:

a) $\{x \in \Re \mid 0 \le x < 2\}$
b) $\{x \in \Re \mid -1 \le x < 1\}$
c) $\{x \in \Re \mid 0 \le x \le 1\}$
d) $\{x \in \Re \mid -1 \le x < 0\}$
e) $\{x \in \Re \mid 0 \le x < 1\}$

32) **(CEFET)** O conjunto-solução de $\frac{2x-1}{x+2} < 1$ é:

a) $\{x \in R \mid x > 3\}$
b) $\{x \in R \mid x < -2\}$
c) $\{x \in R \mid x < -2$ ou $x > 3\}$
d) $\{x \in R \mid x < 1/2$ ou $x > 2\}$
e) $\{x \in R \mid -2 < x < 3\}$

33) **(CN)** No conjunto dos números reais, qual será o conjunto solução da inequação $\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \le 0{,}25^{\frac{1}{2}}$?

a) $\left\{x \in R \mid 0 < x \le \frac{2}{15}\right\}$

b) $\left\{x \in R \mid \frac{2}{15} < x < \frac{15}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in R \mid 0 < x \le \frac{2}{15}\right\}$

d) $\left\{x \in R \mid \frac{2}{15} < x < 0\right\}$

e) $\left\{x \in R \mid x < -\frac{15}{2}\right\}$

34) **(CM)** O conjunto solução, em R, da inequação $\frac{x^2-3}{2x+1} < 1$, é:

a) $S = \left]-\frac{1}{2}, 1+\sqrt{5}\right[$

b) $S = \left]1, -\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\right[$

c) $S = \left]1, -\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\right[- \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d) $S = \left]1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\right[$

e) $S = \left]-\infty, 1-\sqrt{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 1+\sqrt{5}\right[$

35) **(CM)** O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem à desigualdade $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x}$ é:

a) R
b) vazio
c) $\{x \in R \mid x < -1\}$
d) $\{x \in R \mid x > 1\}$
e) $\{x \in R \mid -1 < x < 0\}$

36) **(CM)** Resolvendo-se a inequação abaixo

$\frac{3-x}{x^2-3x-4} \leq 0$, obtém–se o seguinte conjunto-solução:

a) $]-\infty, -1[\cup [3, 4[$
b) $]-1, 3] \cup [4, \infty[$
c) $]-\infty, -1] \cup [3, 4]$
d) $]-1, 3] \cup]4, \infty[$
e) $]-\infty, -1[\cup]4, \infty[$

37) **(CN)** O número de soluções inteiras da inequação

$\frac{x^2-6x+10}{x^2-1} < 0$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) infinito

38) **(CEFET)** O conjunto-solução de:

$\frac{-2}{\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{x^2-1}{3}} \geq 0$, é:

a) $\{x \in IR \mid x < 0\}$
b) $\{x \in IR \mid x < 1/5 \text{ ou } x > 1\}$
c) $\{x \in IR \mid 1/5 \leq x \leq 1\}$
d) $\{x \in IR \mid x \leq 1/5 \text{ ou } x \geq 1\}$
e) $\{x \in IR \mid 1/5 < x < 1\}$

39) **(CM)** Determine o conjunto solução, em $\Re$, da inequação $\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x} \leq 0$.

a) $S = \{x \in \Re \mid 0 < x \leq 1 \text{ ou } 3 < x \leq 5\}$
b) $S = \{x \in \Re \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 5\}$
c) $S = \{x \in \Re \mid 0 \leq x < 1 \text{ ou } 3 < x \leq 5\}$
d) $S = \{x \in \Re \mid 0 \leq x < 1 \text{ ou } 3 \leq x < 5\}$
e) $S = \{x \in \Re \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

40) **(CN)** A soma de dois números reais distintos é igual ao produto desses números. O menor valor natural desse produto é igual a:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

41) **(CN)** Se o conjunto-solução da inequação

$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x+\frac{1}{x}\right) + 10 \leq 0$ é

S, então o número de elementos da interseção do conjunto S com o conjunto dos números inteiros é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

42) **(CN)** Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \leq x+1$, o número de elementos do conjunto-solução dessa inequação é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

43) **(CN)** A interseção do conjunto solução, nos reais, da inequação $\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \leq 0$ com o conjunto $\{x \in R / x < 4\}$ é dada por:

a) $\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4}$

b) $\{x \in R / x < 0\}$

c) $\left\{x \in R / x < \frac{1}{3}\right\}$

d) $\left\{x \in R / x < \frac{1}{3}\right\} \cup \{2\}$

e) $\{x \in R / x < 2\}$

44) **(CN)** O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^8}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

a) $[5; +\infty[\cup \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

b) $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty[$

c) $]-\infty; +\infty[$

d) $\left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty[$

e) $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [5; +\infty[$

45) **(CN)** Qual é o conjunto solução S da inequação:

$[(x-1) . (x-2)]^{-1} > [(x-2) . (x-3)]^{-1}$?

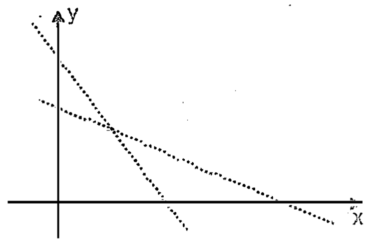
a) $S = \{x \in IR / x < 1\}$
b) $S = \{x \in IR / x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
c) $S = \{x \in IR / x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
d) $S = \{x \in IR / x < 2\}$
e) $S = \{x \in IR / 2 < x < 3\}$

46) **(CN)** Considere a equação $x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$, com parâmetro m inteiro não nulo. Se essa equação tem duas raízes reais e distintas com o número 4 compreendido entre essas raízes, então o produto de todos os possíveis valores de m é igual a:

a) -2
b) -1

c) 2
d) 4
e) 6

47) **(UERJ)** João e José têm, respectivamente, x e y moedas de \$ 1,00. Juntando essas quantias, não conseguiram os \$ 8,00 necessários para comprar dois lanches com o mesmo preço. Vanessa chegou e contribuiu com (2x) moedas de \$ 1,00. Assim, os três puderam comprar 3 daqueles lanches e ainda sobrou dinheiro. A figura abaixo é uma representação gráfica, em R^2, do sistema de inequações que soluciona esse problema.

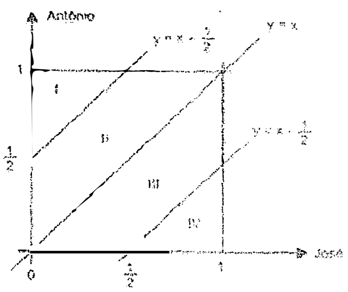


O menor número de moedas de \$ 1,00 com que Vanessa poderia contribuir para a solução deste problema é:
a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.

48) **(ENEM)** Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde:

a) à diagonal OQ
b) à diagonal PR
c) ao lado PQ
d) ao lado QR
e) ao lado OR

49) **(ENEM)** Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que $y - x \leq 1/2$ ou que $x - y \leq 1/2$.



De acordo com o gráfico e nas condições combinadas. As chances de José e Antônio viajarem juntos são de:
a) 0%
b) 25%
c) 50%
d) 75%
e) 100%

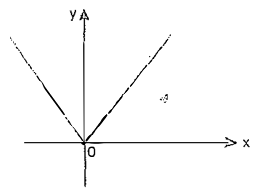
50) **(CN)** Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \leq x+1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

51) **(CN)** Se o conjunto solução da inequação

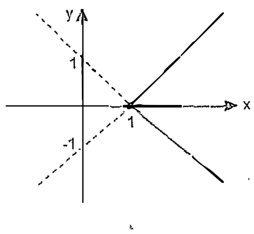
$3\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+10 \leq 0$ é S, então o número de elementos da interseção do conjunto S com o conjunto dos números inteiros é igual a
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

GABARITO

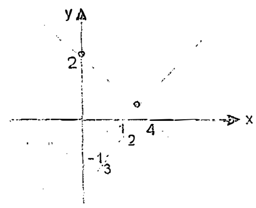
1) $S =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$
2) $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$
3) $S =]-\infty, -3] \cup [4, +\infty[$
4) $S = \varnothing$
5) $S = [-2, 3[$
6) $S =]-\infty, 0[\cup]3, 4[$
7) $S = \left]-\infty, \frac{7}{4}\right] \cup]2, +\infty[$
8) $S =]-4, 2[\cup]3, +[$
9) $S = [-2, 1] \cup [0, 4]$
10) $S = [-1, 3]$
11) $S = [-6, +\infty[$
12) $S = R$
13) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$
14) $S = \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$
15) $S = \varnothing$
16) $S = [-1, 2]$
17) $S =]-\infty, -2] \cup \{3\} \cup [5, +\infty[$
18)



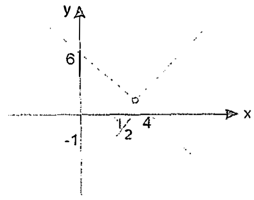
19)



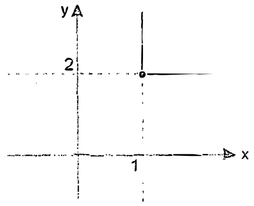
20)



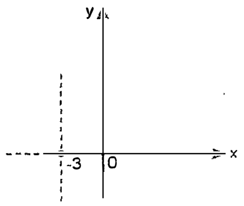
21)



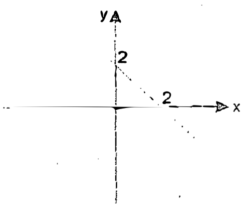
22)



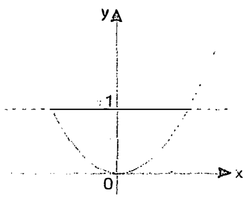
23)



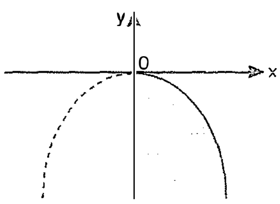
24)



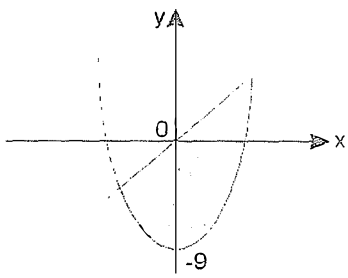
25)



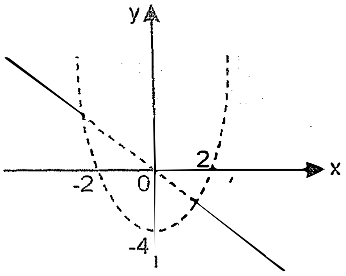
26)



27)



28)



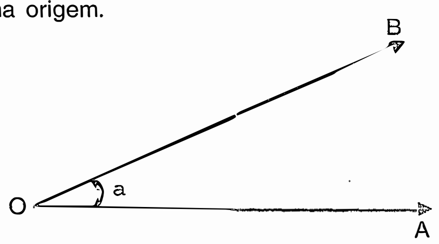
29) D
30) 10
31) E
32) E
33) B
34) E
35) E
36) D
37) B
38) E
39) A
40) D
41) B
42) C
43) D
44) E
45) C
46) D
47) C
48) A
49) D
50) C
51) B

OBSERVAÇÕES

Ângulos

Definição

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas de mesma origem.



Elementos $\begin{cases} \text{Vértice: O} \\ \text{Lados: } \overline{OA} \text{ e } \overline{OB} \end{cases}$

Nomenclatura $\begin{cases} A\hat{O}B \text{ ou } B\hat{O}A \\ \hat{\alpha} \\ \hat{O} \\ \overline{OA} \wedge \overline{OB} \end{cases}$

Sistema sexagesimal para a medição de ângulos

Unidade Padrão: Grau (°)

$1° = \frac{1}{360}$ da circunferência

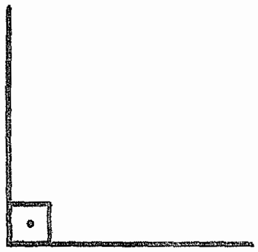
Submúltiplo $\begin{cases} \textit{Minuto} \text{ (')} \\ \textit{Segundo} \text{ ('')} \end{cases}$

Re*lações* $\begin{cases} 1° = 60' \\ 1' = 60'' \\ 1° = 3.600'' \end{cases}$

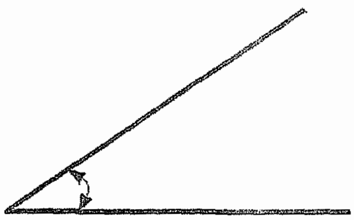
Nota: Uma circunferência possui 360°.

Tipos de ângulos

a) Reto – abertura igual a 90°.

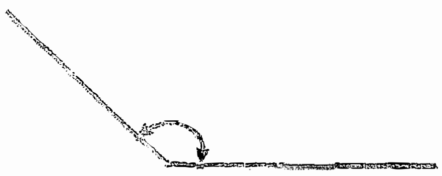


b) Agudo – abertura menor que 90°.



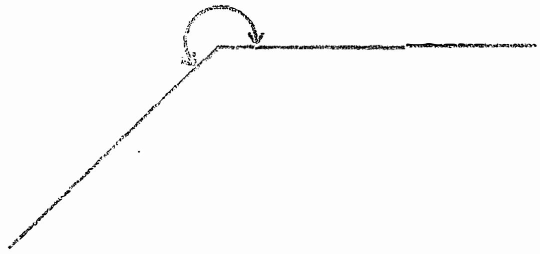
c) Raso ou meia volta – abertura igual a 180°.

d) Obtuso – abertura compreendida entre 90° e 180°.



e) Cheio, pleno ou uma volta – abertura igual a 360°.

f) Reentrante ou côncavo – abertura compreendida entre 180° e 360°.

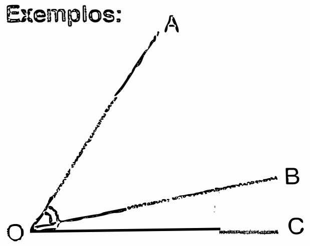


Nota: Todo ângulo positivo cuja abertura é menor que 180° é dito saliente ou convexo.

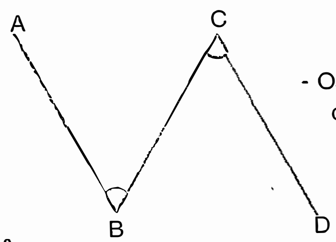
Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos quando possuem um lado comum.

Exemplos:



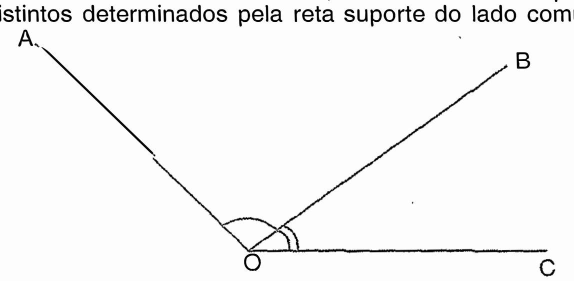
- Os ângulos AÔB e AÔC são consecutivos.
- Os ângulos AÔB e BÔC são consecutivos.
- Os ângulos AÔC e BÔC são consecutivos.



- Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são consecutivos.

Ângulos adjacentes

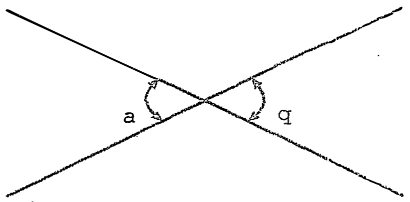
Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e os lados não comuns, chamados de lados exteriores, situados em semi-planos distintos determinados pela reta suporte do lado comum.



Nota: Dois ângulos adjacentes são ângulos consecutivos cujo lado comum está entre os não comuns.
A Ô B e B Ô C são adjacentes
A Ô B e A Ô C não são adjacentes

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são os prolongamentos dos lados do outro.



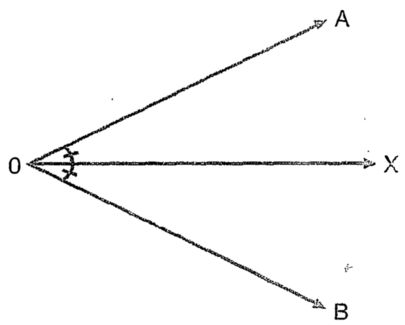
$\hat{a}$ e $\hat{q}$ são opostos pelo vértice.

Importante:

Dois ângulos o.p.v. são congruentes, daí: $\hat{a} = \hat{q}$

Bissetriz de um ângulo

É a semi-reta que parte do vértice do ângulo dividindo-o em dois outros ângulos congruentes.



$\overline{OX}$ é bissetriz de AÔB, então:

AÔX = XÔB

Complemento, suplemento e replemento

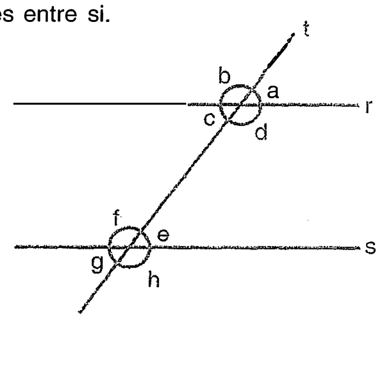
a) Dois ângulos *complementares* são aqueles cuja soma vale 90°. O *complemento* de um ângulo é o que falta à sua medida para completar 90°.

b) Dois ângulos *suplementares* são aqueles cuja soma vale 180°. O *suplemento de* um ângulo é o que falta à sua medida para completar 180°.

c) Dois ângulos *replementares* são aqueles cuja soma vale 360°. O *replemento* de um ângulo é o que falta à sua medida para completar 360°.

Retas paralelas cortadas por transversal ou secante

Na figura abaixo, supondo que a transversal t não é perpendicular às paralelas r e s, formam-se oito ângulos de soma 720°, dos quais quatro são agudos (a,c,e,g) e congruentes e quatro são obtusos (b,d,f,h), também congruentes entre si.



Nomenclatura

a) *Correspondentes*: são ângulos que ocupam posições análogas em relação às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$).

b) *Alternos internos*: são ângulos que estão em lados opostos em relação à transversal e entre as paralelas ($\hat{c}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$).

c) *Alternos externos*: são ângulos que estão em lados opostos em relação à transversal e exteriores às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$).

d) *Colaterais internos*: são ângulos que estão do mesmo lado da transversal e entre as paralelas ($\hat{c}$ e $\hat{f}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$).

e) *Colaterais externos*: são ângulos que estão do mesmo lado da transversal e exteriores às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$).

Nota: (i) Dois ângulos correspondentes ou alternos são congruentes.
(ii) Dois ângulos colaterais são suplementares.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Quantos segundos há em 5° ?

2) Quantos minutos há em 34° ?

3) Quantos segundos há em 23° 19' 43" ?

4) Quantos graus há em 255.600" ?

5) Quantos graus há em 7.080' ?

6) A transformação de 9° em segundos é:
a) 540"
b) 22400"
c) 32400"
d) 3600"
e) 100"

7) Quantos graus, minutos e segundos há em:
a) 43,16°
b) 121,34°
c) 256.784"
d) 475.241"

8) Quantos graus há em:
a) 98° 37' 12"
b) 195.372"

9) Resolver:
a) 37° 18' 42" + 11° 54' 33" + 16° 43' 29"
b) 72° 26' 39" + 27° 33' 21"
c) 52° 39' 48" - 31° 44' 59"
d) 240° - 19° 33' 42"
e) 26° 34' 58" x 5
f) 41° 58' 49" x 6
g) 125° 32' 42" :6
h) 141° 27' 33" :5

10) Determine as medidas de dois ângulos que diferem de 15° 9' 16" e têm soma igual a 80°.

11) Os ângulos $\hat{a} = 3x - 12°$ e $\hat{b} = x + 46°$ são opostos pelo vértice. Calcule-os.

12) Dois ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são opostos pelo vértice. Sabendo-se que $3\hat{a} + 2\hat{b} = 200°$, determine o valor de $\hat{a} + 3\hat{b}$.

13) Sabe-se que o ângulo $\hat{x}$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{y}$, e que os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ também são opostos pelo vértice. Se $\hat{x}+\hat{a}=100°$ e $\hat{b}-\hat{y}=40°$, determine o valor da soma $2\hat{a}+\hat{b}+3\hat{x}+\hat{y}$.

14) Dois ângulos adjacentes têm os lados exteriores perpendiculares. Calcule-os, sabendo que um deles é o óctuplo do outro.

15) Os lados não comuns de dois ângulos adjacentes proporcionais a 2,3 e 2,7, formam um ângulo reto. Determine-os.

16) Os ângulos a = 5x + 20° e b = 4x - 2° são adjacentes e têm os lados exteriores colineares. Calcule-os.

17) Em um plano, em torno de um ponto, são marcados cinco ângulos de medidas 2x + 10°, x + 30°, 2x - 10°, 4x - 20° e x + 40°. Determine a soma das medidas do menor e do maior ângulo.

18) Em um plano, em torno de um mesmo ponto, são traçados quatro ângulos respectivamente proporcionais a 5, 4, 1 e 8. Determine-os

19) Dois ângulos adjacentes têm os lados exteriores em linha reta. Sabendo que um deles é o triplo do outro, determine o complemento do menor.

20) Sobre uma reta marca-se um ponto A. A partir dele traçam-se, para o mesmo semi-plano, duas semi-retas que formam com a reta ângulos congruentes. Sabendo que o ângulo do meio é igual ao triplo da soma dos outros dois, determine a medida do maior ângulo.

21) Em um mesmo plano, em torno de um ponto são traçados quatro ângulos proporcionais a 3, 1, 4 e 2. Calcule-os.

22) A partir de um ponto, do mesmo lado de uma reta, são traçados três ângulos inversamente proporcionais a 1, 6 e 3. Calcule a medida do maior desses ângulos.

23) Determine as medidas de dois ângulos adjacentes de lados exteriores colineares que diferem de 26°.

24) Calcule o complemento de:
a) 74°
b) 31° 27'
c) 48° 50' 19"
d) 83° 36"
e) 51,82°

25) Calcule o suplemento de:
a) 36°
b) 142° 37'
c) 99° 59' 34"
d) 44° 44"
e) 131,46°

26) Calcule o replemento de:
a) 227°
b) 252° 43' 51"
c) 194,78°

27) Qual o ângulo cujo complemento vale 73° 19' 23" ?

28) Qual o ângulo cujo suplemento vale 138° 26' 39" ?

29) Qual o ângulo cujo replemento vale 248° 15' 48" ?

30) O suplemento de um ângulo vale 74° 33' 27". Calcule o replemento desse mesmo ângulo.

31) Determine o replemento do suplemento do complemento de 20°.

32) Determine o replemento do suplemento do complemento de 43° 28' 39".

33) Determine o replemento do suplemento do complemento de 31° 21' 19".

34) Determine o replemento do suplemento do complemento do replemento de 340° 21' 47" ?

35) Dois ângulos complementares são expressos por 5x - 10° e 2x + 30°. Calcule-os.

36) Os ângulos a = 7x + 3° e b = 2x - 12° são suplementares. Determine suas medidas.

37) Os ângulos m = x - 10° e n = 3x + 50° são replementares. Calcule-os.

38) Determine as medidas de dois ângulos complementares que diferem de 12°.

39) Dois ângulos suplementares são proporcionais a 5 e 13. Determine-os.

40) Os ângulos a e b são replementares. Sabendo-se que 3b - 2a = 30°, determine as medidas de a e b.

41) A soma de três ângulos é 200°. Calcule-os, sabendo que os dois primeiros são suplementares e os dois últimos são complementares.

42) A soma de três ângulos é 230°. Calcule-os, sabendo-se que os dois primeiros são suplementares e os dois últimos são complementares.

43) A soma de cinco ângulos é 550°. Calcule-os, sabendo que os dois primeiros são suplementares, os dois últimos são replementares, o segundo e o terceiro são complementares e o terceiro e o quarto são suplementares.

44) O dobro do complemento de um ângulo vale 70°. Qual é o suplemento desse ângulo?

45) Qual é o ângulo que equivale à quinta parte de seu suplemento ?

46) O dobro do suplemento de um ângulo, diminuido do triplo de seu complemento dá 150°. Calcule esse ângulo.

47) A metade do complemento de um ângulo, diminuída da terça parte do suplemento desse ângulo, aumentada da sexta parte do replemento desse mesmo ângulo dá 25°. Calcule esse ângulo.

48) A soma de dois ângulos é 150°. Calcule-os, sabendo que um deles é a quarta parte do suplemento do outro.

49) O triplo do suplemento de um ângulo, diminuído do dobro de seu complemento, dá 290°. Calcule esse ângulo.

50) A metade do complemento de um ângulo aumentada da terça parte do seu replemento diminuída da sexta parte de seu suplemento dá 95°. Calcule esse ângulo.

51) Dois ângulos são suplementares. Calcule-os, sabendo que 4/7 de um deles somado aos 3/5 do outro é igual a 104°.

52) Qual é a medida do ângulo que excede em 60° o quíntuplo do seu suplemento ?

53) Qual é o ângulo cujo dobro do suplemento é inferior ao seu replemento em 70° ?

54) Qual é o ângulo cujo complemento de sua metade tem medida equivalente ao suplemento de seu triplo?

55) Calcule a medida do ângulo cujo replemento de seu suplemento de seu complemento dá 190°.

56) Calcule a medida de um ângulo cujo replemento de seu suplemento de seu complemento de seu suplemento vale 202° 43' 18".

57) A soma de dois ângulos é 74°. Determine a soma de seus suplementos.

58) Determine as medidas de dois ângulos complementares cuja diferença de seus suplementos vale 54°.

59) O ângulo $\hat{A}$ é o dobro do ângulo $\hat{B}$, e este é o quíntuplo de $\hat{C}$. Se os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são suplementares, determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

60) Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são proporcionais a 3, 2 e 4, respectivamente. Sabendo-se que o suplemento de $\hat{B}$ vale 143° 36', determine o complemento de $\hat{A}$ e o replemento de $\hat{C}$.

61) Qual é o ângulo cuja metade do complemento de sua terça parte, diminuída da quarta parte do suplemento de seu dobro, aumentada do dobro do replemento de seu quádruplo, dá 76° ?

62) A soma de dois ângulos é 120°. Sabendo-se que o complemento do menor é o quíntuplo do complemento do maior, determine o replemento da diferença entre esses ângulos.

63) O professor de Geometria pediu que Fernanda e Flávia pensassem na medida de um ângulo agudo, cada uma. Em seguida pediu que elas somassem o replemento de cada um de seus ângulos com o dobro do suplemento dele e do resultado subtraíssem o triplo do complemento de seus respectivos ângulos. Curiosamente elas verificaram ter chegado a um mesmo resultado, embora tenham partido de ângulos diferentes. Que resultado elas encontraram?

64) A soma de dois ângulos vale 195°. Os $\frac{2}{3}$ do suplemento do menor equivalem aos $\frac{3}{7}$ do replemento do maior. Determine a razão entre as medidas do menor e do maior desses ângulos.

65) Os $\frac{3}{4}$ do suplemento de um ângulo, acrescidos dos $\frac{2}{5}$ do complemento desse ângulo, diminuídos da sexta parte do replemento desse mesmo ângulo dá 52°. Calcule esse ângulo.

66) Dois ângulos adjacentes medem 32° e 126°. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

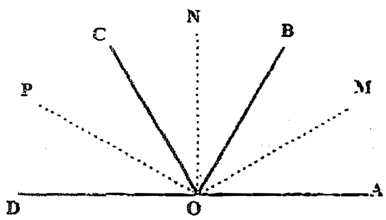
67) Dois ângulos adjacentes são complementares. Então, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é:
a) 20°
b) 30°
c) 35°
d) 40°
e) 45°

68) Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares.

69) Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes. Calcule o ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, sabendo que $B\hat{O}C$ vale 44°.

70) Considere um ângulo $A\hat{O}B$ e uma reta r, do seu plano, que contém o ponto O e está situada na região não convexa. Sabendo que $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$, são as bissetrizes dos ângulos agudos que $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ formam com r e que $A\hat{O}B = 140°$, calcule o valor do ângulo $M\hat{O}N$.
a) 130°.
b) 140°.
c) 150°.
d) 160°.
e) 170°.

71) Na figura, OM é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, ON é bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ e OP é a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$. A soma $P\hat{O}D + M\hat{O}N$ é igual a:
a) 90°
b) 45°
c) 30°
d) 60°
e) 180°



72) Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes e suas bissetrizes são $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$, respectivamente. Se a bissetriz de $M\hat{O}N$ forma 40° com $\overline{OC}$ e $A\hat{O}B$ mede 60°, calcule o valor de $B\hat{O}C$.

73) Determine o ângulo saliente formado pelos ponteiros de um relógio às:
a) 7h 18min.
b) 21,20h.

74) Determine o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4h 36min.

75) Determine o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 18,15h.

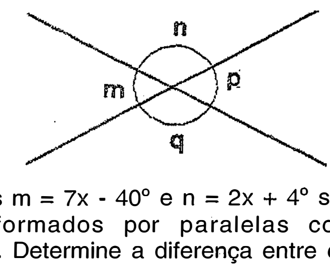
76) Quando, pela 1ª vez após 13h, os ponteiros de um relógio formarão um ângulo de 102°?

77) Entre 17h e 18h a que horas os ponteiros de um relógio estão perpendiculares?

78) Duas retas concorrentes formam dois ângulos proporcionais a 3,5 e 5,5. Determine as medidas de todos os ângulos formados.

79) Duas retas intersectam-se formando dois ângulos adjacentes tais que o dobro da medida de um deles excede em 160° o triplo de medida do outro. Determine todos os ângulos formados pelas retas.

80) Na figura abaixo, o ângulo $\hat{m}$ equivale a 1/3 do ângulo $\hat{n}$, mais a metade do ângulo $\hat{p}$. Determine a medida do ângulo $\hat{q}$.



81) Os ângulos m = 7x - 40° e n = 2x + 4° são colaterais internos formados por paralelas cortadas por transversal. Determine a diferença entre eles.

82) Duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal formando os ângulos a e b, correspondentes. Sabendo-se que 3a + 4b = 175°, determine as medidas

de todos os ângulos da figura.

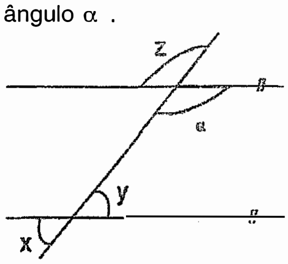
83) Os ângulos a e b são colaterais externos obtidos de paralelas cortadas por secante. Sabendo-se que a e b são, nesta ordem, inversamente proporcionais a $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{7}$, podemos afirmar que:
a) a = 140° e b = 40°
b) a = 40° e b = 140°
c) a = 60° e b = 120°
d) a = 120° e b = 60°

84) Duas paralelas cortadas por uma transversal formam uma figura na qual a soma de quatro ângulos vale 72°. Determine as medidas de todos os ângulos da figura.

85) Duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal. Um dos ângulos formados equivale à quinta parte da soma dos demais. Determine as medidas dos ângulos formados.

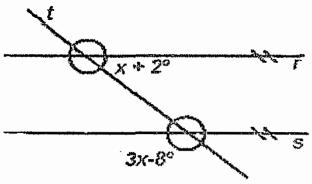
86) Determine as medidas dos ângulos obtidos quando duas retas paralelas são cortadas por uma secante, sabendo-se que dois deles diferem de 80°.

87) Na figura abaixo, tem-se $\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}=210°$. Determine a medida do ângulo α .

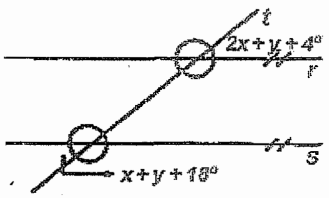


88) Considerando que na figura do exercício anterior tenhamos $3\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z}=300°$, determine o valor da expressão $3\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z}$.

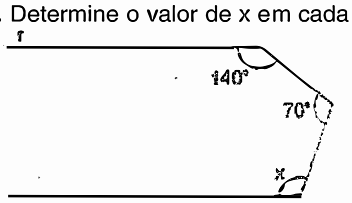
89) Nas figuras que se seguem, as retas r e s são paralelas. Determine o valor de x em cada uma.
a)



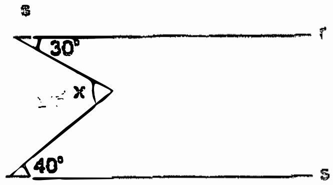
b)



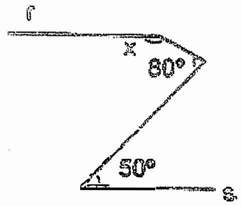
90) Nas figuras que se seguem, as retas r e s são paralelas. Determine o valor de x em cada uma delas.
a)



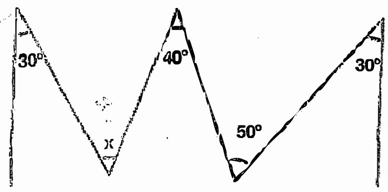
b)



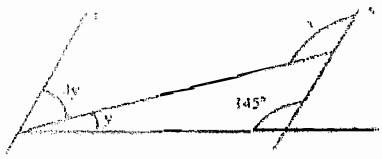
c)



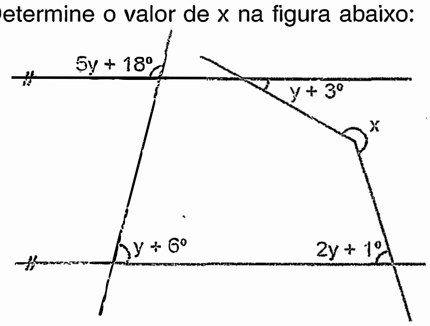
d)



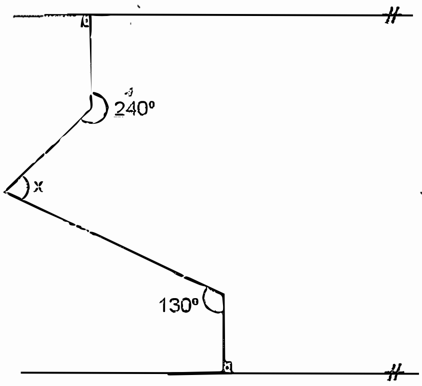
91) Sendo r // s, determine a medida do ângulo x.



92) Determine o valor de x na figura abaixo:



93) Determine o valor de x na figura:



QUESTÕES DE CONCURSOS

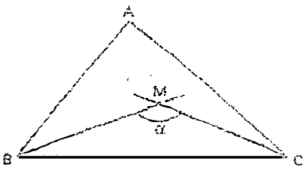
94) **(ENEM)** Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:
a) uma volta completa
b) uma volta e meia
c) duas voltas completas
d) duas voltas e meia
e) cinco voltas completas

95) **(CAP-UFRJ)** A razão entre dois ângulos adjacentes é 3 : 4 e o ângulo formado pelas suas bissetrizes mede 91°. Quanto mede o menor desses ângulos?

96) **(CN)** Sabendo-se que um grado é a centésima parte de um ângulo reto, quantos grados tem o ângulo de 45° 36' 54"?
a) 50,48333...
b) 50,58333...
c) 50,68333...
d) 50,78333...
e) 50,88333...

97) **(CM)** Se a medida b de um ângulo agudo é o dobro da terça parte de seu suplemento, então a medida b é:
a) 72°
b) 74°
c) 76°
d) 78°
e) 80°

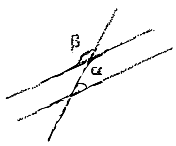
98) **(CM)** Se no triângulo ABC, da figura abaixo, as medidas dos ângulos internos B e C são, em graus, respectivamente 70° e 40° e $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$, suas bissetrizes internas, então o valor do ângulo a assinalado é:
a) 110°
b) 115°
c) 120°
d) 125°
e) 130°



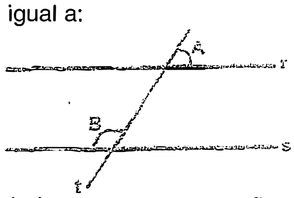
99) **(CM)** Se um relógio está marcando exatamente 4 horas, então o menor ângulo formado pelos dois ponteiros é de:
a) 90°
b) 120°
c) 135°
d) 180°

100) **(PUC)** Calcule o ângulo entre os ponteiros do relógio às 4h 20min.

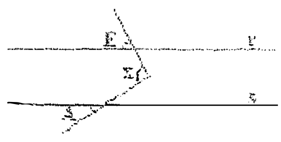
101) **(CM)** Observe a figura abaixo, que apresenta duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
Pode-se dizer, a respeito dos ângulos a e b, que:
a) $\beta = 180° + \alpha$
b) $\beta = 180° - \alpha$
c) $\beta = \alpha$
d) $\beta = 2\alpha$



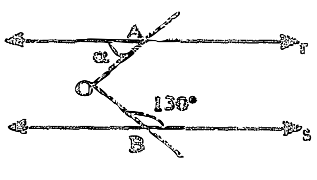
102) **(CM)** Nafigura, abaixo, as retas r e s são paralelas cortadas pela transversal t. Se o ângulo A = 4x e o ângulo B = 5x, então 2x é igual a:
a) 20°
b) 40°
c) 45°
d) 30°
e) 180°



103) **(CM)** Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas, o ângulo Â mede 20° e o ângulo Ê mede 60°.
A medida, em graus, do ângulo x é igual a:
a) 40
b) 50
c) 60
d) 70
e) 80

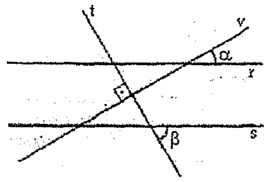


104) **(CAP-UFRJ)** As retas s e r da figura abaixo são paralelas.



Sabendo que o ângulo AÔB é reto, determine a medida do ângulo α.

105) **(CM)** Se na figura abaixo as retas r e s são paralelas, as retas v e t são perpendiculares e o ângulo b é dobro de a, então é correto afirmar que:
a) $2\beta = 60°$
b) $\alpha - \beta = 30°$
c) $2\beta - \alpha = 150°$
d) $2\alpha = 90° - \beta$
e) $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{6} = 20°$



GABARITO

1) 18.000
2) 2.040
3) 83.983
4) 71
5) 118
6) 32.400
7) a) 43° 9' 36"
b) 121° 20' 24"
c) 71° 19' 44"
d) 132° 41"
8) a) 98,62°
b) 54,27°
9) a) 65° 56' 44"
b) 100°
c) 20° 54' 49"
d) 220° 26' 18"
e) 132° 54' 50"
f) 251° 52' 54"
g) 20° 55' 27"
h) 28° 17' $30\frac{3}{5}$"
10) 47° 34' 38" e 32° 25' 22"
11) $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 75°$
12) 160°
13) 330°
14) 10° e 80°
15) 41° 24' e 48° 36'
16) 110° e 70°
17) 156°
18) 100°, 80°, 20° e 160°
19) 45°
20) 135°
21) 108°, 36°, 144° e 72°
22) 120°
23) 103° e 77°
24) a) 16°
b) 58° 33'
c) 41° 9' 41"
d) 6° 59' 24"
e) 38, 18°
25) a) 144°
b) 37° 23'
c) 80° 26'
d) 135° 59' 16"
e) 48,54°
26) a) 133°
b)107° 16' 9"
c) 165, 22°
27) 16° 40' 37"
28) 41° 33' 21"
29) 111° 44' 12"
30) 254° 33' 27"
31) 250°
32) 226° 31' 21"
33) 238° 38' 41"
34) 250° 21' 47"
35) 40° e 50°
36) 150° e 30°
37) 70° e 290°
38) 51° e 39°
39) 50° e 130°
40) 210° e 150°
41) 110°, 70° 20°
42) 140°, 40° e 50°
43) 100°, 80°, 10°, 170° e 190°
44) 125°
45) 30°
46) 60°
47) 60°
48) 140° e 10°
49) 70°
50) 60°
51) 140° e 40°
52) 160°
53) 70°
54) 36°
55) 80°
56) 112° 43' 18"
57) 286°
58) 72° e 18°
59) 300°
60) 35° 24' e 287° 12'
61) 84°
62) 320°
63) 450°
64) $\frac{3}{10}$
65) 60°
66) 79°
67) E
68) 90°
69) 22°
70) D
71) A
72) 33°20'
73) a) 111°
b) 156°

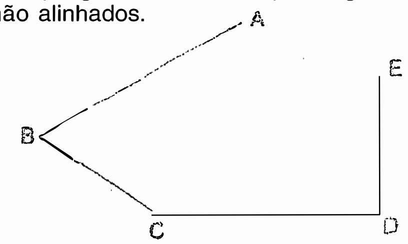
74) 78° ou 282°
75) 130° 30' ou 229° 30'
76) 13h 24min
77) 17h 10min $54\frac{6}{11}$seg ou 17h 43min $38\frac{2}{11}$seg
78) 2 de 70° e 2 de 110°
79) 2 de 40° e 2 de 140°
80) 108°
81) 76°
82) 4 de 25° e 4 de 155°
83) B
84) 4 de 18° e 4 de 162°
85) 4 de 60° e 4 de 120°
86) 4 de 50° e 4 de 130°
87) 150°
88) 180°
89) a) 46°
b) 14°
90) a) 150°
b) 70°
c) 150°
d) 50°
91) 152°
92) 204°
93) 70°
94) D
95) 78°
96) C
97) A
98) A
99) B
100) 10° ou 350°
101) B
102) B
103) E
104) 40°
105) E

OBSERVAÇÕES

Polígonos

Linha poligonal

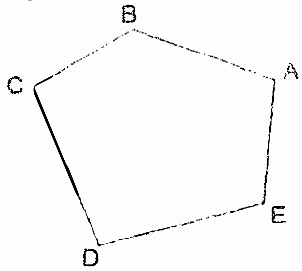
Linha poligonal é formada por segmentos consecutivos e não alinhados.



(Linha poligonal aberta)

Polígono

Polígono é a figura plana limitda por uma linha poligonal fechada.

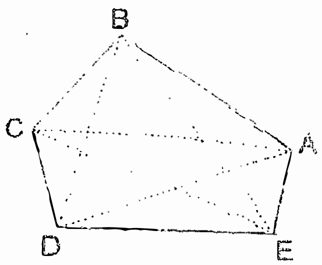


Elementos de um polígono

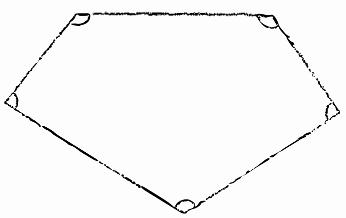
Vértices – A, B, C, D e E

Lados – $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$

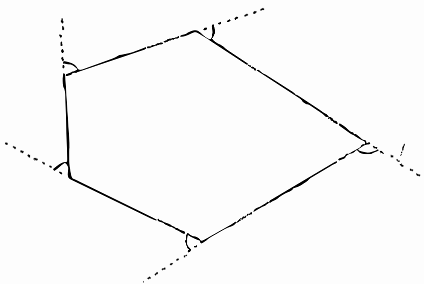
Diagonal – é todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$)



Ângulo interno – é todo ângulo formado por dois lados consecutivos e voltado para o interior do polígono.



Ângulo externo – é todo ângulo formado por um lado e o prolongamento de outro consecutivo.

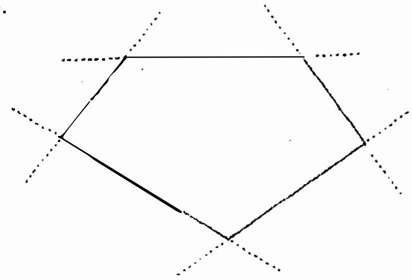


Gênero – é o número de lados do polígono.

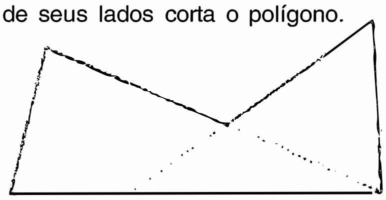
Perímetro de um polígono – é dado pela soma das medidas dos lados. O perímetro é representado por <u>2p</u> e o semiperímetro por <u>p</u>.

Classificação dos polígonos

Polígono convexo – o polígono é convexo, quando o prolongamento de qualquer um de seus lados não corta o polígono.



Polígono côncavo – quando o prolongamento de pelo menos um de seus lados corta o polígono.



Polígono equilátero – é todo polígono que apresenta os lados iguais.

Polígono equiângulo – é todo polígono que apresenta os ângulos iguais.

Polígono regular – é todo polígono equilátero e equiângulo.

Nomenclatura

É feita de acordo com o gênero do polígono:

3 lados	–	triângulo
4 lados	–	quadrilátero
5 lados	–	pentágono
6 lados	–	hexágono
7 lados	–	heptágono
8 lados	–	octógono
9 lados	–	eneágono
10 lados	–	décagono
11 lados	–	undecágono
12 lados	–	dodecágono
15 lados	–	pentadecágono
20 lados	–	icoságono

Formulário

Considerando um polígono convexo de gênero n, temos que:

Soma dos ângulos externos de um polígono convexo: $S_e = 360$.

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo: $S_i = 180\ (n-2)$

Ângulo externo: $A_e = \dfrac{360}{n}$

Ângulo interno: $A_1 = \dfrac{180(n-2)}{n}$

Número de diagonais: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Número de diagonais que partem de cada vértice: $d = n - 3$

Diagonais que passam pelo centro

O comentário que faremos a seguir refere-se exclusivamente aos polígonos regulares.

Em todo polígono regular de gênero par, o número de diagonais que passam pelo seu centro (DC) é igual à metade do número de lados. Ou seja:

$$\boxed{DC = \frac{n}{2}}$$

Podemos observar que o número de diagonais que não passam pelo centro do polígono (DÑC), pode ser obtido através da diferença entre o número total de diagonais e o número daquelas que passam pelo centro.

$$\boxed{D\tilde{N}C = D - DC}$$

Desenvolvendo o segundo membro dessa igualdade obtemos:

$$\boxed{D\tilde{N}C = \frac{n.(n-4)}{2}}$$

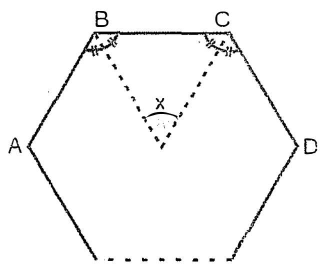
Quando o polígono regular tem gênero ímpar, nenhuma de suas diagonais, passa pelo centro. Então, nesta caso:

$$\boxed{DC = 0}$$

$$\boxed{D\tilde{N}C = \frac{n.(n-3)}{2}}$$

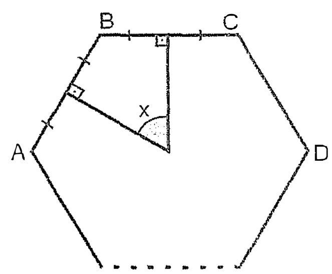
Observações Importantes

1ª) **Em todo polígono regular, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos tem a mesma medida do ângulo externo do polígono.**



$$\boxed{\hat{x} = \hat{a}_e = \frac{360}{n}}$$

2ª) **Em todo polígono regular, o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados consecutivos tem a mesma medida do ângulo externo do polígono.**



$$\boxed{\hat{x} = \hat{a}_e = \frac{360}{n}}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Considerando um hexágono regular, determine:
   a) gênero
   b) soma dos ângulos internos
   c) soma dos ângulos externos
   d) número de diagonais que partem de cada vértice
   e) número total de diagonais
   f) cada ângulo interno
   g) cada ângulo externo

2) Quanto mede cada ângulo interno de um heptágono regular ?

3) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um dodecágono regular ?

4) Quantas diagonais partem de cada vértice de um icoságono convexo ?

5) Quantas diagonais possui um undecágono convexo ?

6) Quanto vale cada ângulo externo de um octógono regular ?

7) Qual o polígono cuja soma dos ângulos internos vale 3.240° ?

8) Qual o polígono no qual, de cada vértice, partem 12 diagonais ?

9) Qual o polígono regular cujo ângulo externo vale:
   a) 30°
   b) 24°

10) Qual o polígono regular cujo ângulo interno vale:
    a) 135°
    b) 168°

11) Quanto mede cada lado de um dodecágono regular de perímetro 60 cm ?

12) Os ângulos interno e externo de um polígono regular são dados, respectivamente, por $7x - 5°$ e $3x - 15°$. Qual o perímetro desse polígono, visto que cada lado mede 4 cm ?

13) As somas dos ângulos internos e externos de um polígono convexo são, respectivamente, dadas por $10x - 80°$ e $2x + 20°$. Qual a medida de cada ângulo externo ?

14) Qual o polígono regular em que um ângulo externo equivale a 1/24 da soma de todos os ângulos internos ?

15) Um dos ângulos internos de um polígono regular é expresso por $5x - 7°$, enquanto que um ângulo externo é dado por $3x + 3°$. Com relação a esse polígono, é correto afirmar que:
    a) Ao menos uma de suas diagonais passa pelo centro.
    b) Possui 9 diagonais.
    c) A soma de seus ângulos internos é 900°.
    d) De cada um de seus vértices partem 2 diagonais.

16) Em um polígono regular, o ângulo interno excede o externo em 90°. Quanto vale a soma dos ângulos internos desse polígono ?

17) Em um polígono regular, a soma de um ângulo interno com todos os ângulos externos dá 520°. Calcule o gênero desse polígono.

18) Em um polígono convexo, a soma dos ângulos externos é inferior em 1440° à soma dos ângulos internos. Qual é esse polígono ?

19) Encontre três polígonos de gêneros consecutivos cuja soma de todos os seus ângulos internos, juntos, vale 3240°.

20) O polígono regular convexo cujo ângulo interno é 7/2 do seu ângulo externo é o:
a) icoságono
b) dodecágono
c) decágono
d) eneágono
e) octógono

21) A razão entre os ângulos internos de dois polígonos regulares é 4/5 e um deles tem o dobro do número de lados do outro. Quais são esses polígonos ?

22) Em um polígono regular, a soma de todos os ângulos internos, exceto um deles, é 2184°. Qual é o polígono ?

23) Em um polígono regular, a soma de todos os ângulos internos, exceto dois deles, vale 480°. Qual é o polígono ?

24) Em um quadrilátero convexo, os ângulos são expressos por $3x + 50°$, $4x - 20°$, $3x - 10°$ e $x + 10°$. Determine-os.

25) Os ângulos internos de um pentágono convexo são dados por $x + 25°$, $3x - 5°$, $2x + 10°$, $2x - 10°$ e $4x - 20°$. Determine-os

26) Em uma linha poligonal aberta e convexa ABCDE, o primeiro e o último segmentos que a compõem são paralelos. Se $\hat{B} = 140°$ e $\hat{D} = 120°$, determine a medida do ângulo $\hat{C}$.

27) Determine as medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo, sabendo-se que eles são proporcionais a 1, 3/2, 2/3, 7/6 e 5/3.

28) Os ângulos internos de um pentágono convexo são expressos em graus por números pares consecutivos. Determine a medida do maior ângulo.

29) Em um hexágono convexo ABCDEF, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ são paralelos. Sabendo-se que $\hat{A} = \hat{D} = 120°$, $\hat{B} = 140°$ e $\hat{E} = 130°$, determine as medidas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$,

30) Em um pentágono convexo, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ são congruentes, $\hat{A} = 100°$, $\hat{B} = 110°$ e $\hat{E} = 100°$. Determine as medidas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$, sabendo-se que a diagonal $\overline{EB}$ é paralela ao lado $\overline{DC}$.

31) Determine o perímetro de um undecágono regular de lado igual a 6 cm.

32) Os lados de um quadrilátero de perímetro 90 cm, são proporcionais a 3, 5, 6 e 4. Determine-os.

33) Um octógono regular é isoperímetro de um decágono regular de lado 4 cm. Determine a medida do lado do primeiro polígono.

34) Em um pentágono convexo ABCDE, sabe-se que $\hat{B} = 130°$, $\hat{D} = 100°$ e $\hat{E} = 60°$. Se $\overline{EC}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{E}$ e $\hat{C}$, determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

35) Qual o polígono cujo número de diagonais é o quíntuplo do número de lados ?

36) Qual o polígono cujo gênero é o dobro do número de diagonais ?

37) Qual o polígono cujo gênero é $\frac{2}{9}$ do número de diagonais ?

38) Qual o polígono cujo número de lados equivale a $\frac{2}{13}$ do número de diagonais ?

39) Qual o polígono convexo cujo número de lados equivale a $\frac{1}{6}$ do número de diagonais ?

40) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160°. Então o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo seu centro é:
a) 50
b) 60
c) 70
d) 80
e) 90

41) Quantas diagonais partem de cada vértice de um polígono regular em que a medida de um ângulo interno é igual à medida de um ângulo externo ?

42) Os ângulos externo e interno de um polígono regular são proporcionais a 2 e 7. Quanto vale a razão entre o número de diagonais que partem de cada vértice e o número total de diagonais ?

43) Encontre dois polígonos convexos de gêneros consecutivos, que possuam, juntos, 62 diagonais.

44) Qual o polígono convexo cuja soma do gênero com o total de diagonais dá 28 ?

45) Qual o polígono convexo cujo número de diagonais excede em 7 unidades o gênero ?

46) Os ângulos interno e externo de um polígono regular diferem de 132°. Quantas diagonais passam pelo centro desse polígono ?

47) Em um polígono regular, o dobro da medida de um ângulo interno excede o óctuplo da medida de um externo em um ângulo raso. Se de um dos vértices desse polígono podemos traçar x diagonais ao todo, quantas dessas x diagonais têm medidas distintas ?

48) Qual o polígono convexo no qual a terça parte do gênero, acrescida de $\frac{5}{9}$ do número total de diagonais, dá 34 ?

49) Encontre dois polígonos convexos cujos gêneros diferem de 2 unidades e cujos números totais de diagonais diferem de 17 unidades.

50) A soma dos ângulos internos de um polígono regular vale 1440°. Quantas diagonais não passam pelo centro desse polígono ?

51) A soma dos n - 2 ângulos internos de um polígono regular de gênero n é 980°. Quantas diagonais não passam pelo centro desse polígono ?

b) acertou na premissa e na primeira conclusão, mas errou na segunda conclusão.
c) acertou na premissa e na segunda conclusão, mas errou na primeira conclusão.
d) acertou na premissa e nas conclusões.
e) acertou na premissa e errou nas conclusões.

52) Considerando-se um dodecágono regular, ABCD ... LM, determine:
a) O ângulo formado pelas bissetrizes internas de $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
b) O ângulo formado pelas mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.
c) O ângulo formado pela bissetriz de $\hat{A}$ com a mediatriz de $\overline{AB}$.
d) O ângulo formado pelas bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{C}$.
e) O ângulo formado pelas mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
f) O ângulo formado pela bissetriz de $\hat{A}$ com a mediatriz de $\overline{CD}$.

53) Em um polígono regular, o ângulo interno é o dobro do ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos desse polígono. Qual o gênero do polígono ?

54) As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 20°. Quantas diagonais tem esse polígono ?

55) Em um pentágono regular ABCDE, determine a medida do ângulo $C\hat{A}D$.

56) Em um polígono ABCD..., a diagonal $\overline{AC}$ forma 20° com o lado $\overline{AB}$. Determine a medida do ângulo formado pela bissetriz interna de $\hat{B}$ com a referida diagonal.

57) Em um polígono regular ABCD..., traçam-se todas as diagonais possíveis do vértice A. O ângulo formado pela primeira com a última diagonal é igual ao dobro do ângulo externo desse polígono. Qual é esse polígono ?

58) Em um polígono regular ABCDE..., o ângulo $C\hat{A}E$ mede 30°. Determine o número de diagonais que partem de cada um de seus vértices.

59) Em um pentadecágono regular ABC...OP, calcule o ângulo $A\hat{C}F$.

QUESTÕES DE CONCURSOS

60) **(CM)** Qual é o polígono convexo cujo número de diagonais é o triplo do número de lados?
a) heptágono
b) octógono
c) eneágono
d) decágono
e) dodecágono

61) **(PUC)** Um polígono regular de n lados tem 90 diagonais. O valor de n é:
a) 10
b) 12
c) 15
d) 20
e) 21

62) **(CN)** Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida em graus, de um de seus ângulos internos é:
a) 201°
b) 167°
c) 162°
d) 150°
e) 135°

63) **(PUC)** O ângulo interno de um polígono regular de 170 diagonais é igual a:
a) 80°
b) 170°
c) 162°
d) 135
e) 81°

64) **(CM)** Qual é o número de lados de um polígono regular convexo, cuja soma dos ângulos interno é 1440°?
a) 7
b) 8
c) 8
d) 10
e) 11

65) **(CM)** A medida de um ângulo externo de um polígono convexo e regular é 40°. O número de lados deste polígono é:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

66) **(CM)** Os ângulos internos de um pentágono convexo ABCDE são expressos, em graus, por : A = (2x + 59), B = (15x - 60). C = (10x - 10), D = (5x + 30) e E = (8x + 1). O valor, em graus, do ângulo D é:
a) 95
b) 105
c) 108
d) 115
e) 120

67) **(CEFET)** Em qual dos polígonos convexos a soma dos ângulos internos mais a soma dos ângulos externos é de 1080° ?
a) Pentágono;
b) Hexágono;
c) Heptágono;
d) Octógono;
e) Eneágono.

68) **(CN)** Um aluno declarou o seguinte, a respeito de um polígono convexo P de n lados:
"Partindo da premissa de que eu posso traçar (n - 3) diagonais de cada vértice de P, então em primeiro lugar, o total de diagonais de P é dado por n . (n - 3); e, em segundo lugar, a soma dos ângulos internos de P é dada por (n - 3) . 180°"
Logo o aluno:
a) errou na premissa e nas conclusões.

69) **(CN)** Considere as afirmativas abaixo sobre um polígono regular de n lados, onde o número de diagonais é múltiplo de n.
I- O polígono não pode ter diagonal que passa pelo seu centro.
II- n pode ser múltiplo de 17.
III- n pode ser um cubo perfeito.
IV- n pode ser primo.

Assinale a alternativa correta:
a) Todas afirmativas são falsas.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.
e) Todas afirmativas são verdadeiras.

70) **(CN)** Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números n_1, n_2, n_3 ... , n_{27}, tais que $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_{27}$.
Logo este polígono:
a) tem 30 lados.
b) pode ter 54 lados.
c) pode ter 57 lados.
d) pode ter 58 lados.
e) tem um número de lados maior que 60.

71) **(PUC)** $A_1 A_2 ... A_n$ é um polígono regular convexo, de n lados, inscrito em um círculo. Se o vértice A_{15} é diametralmente oposto ao vértice A_{46}, o valor de n é:
a) 62.
b) 60.
c) 58.
d) 56.
e) 54.

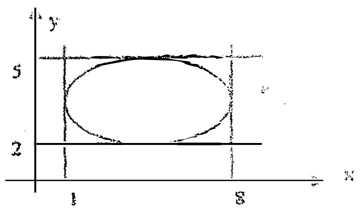
72) **(CN)** O número de polígonos regulares, tais que quaisquer duas de suas diagonais, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, é:
a) 17.
b) 18.
c) 21.
d) 23.
e) 24.

73) **(CN)** O total de polígonos cujo número n de lados é expresso por dois algarismos iguais e que seu número d de diagonais é tal que d > 26n, é:
a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

74) **(CN)** Um aluno escreveu o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados adjacentes de um polígono regular convexo de treze lados, em graus, minutos e segundos. Sendo estes últimos com uma parte inteira e outra fracionária. Assim sendo, pode-se afirmar que o número inteiro de segundos é:
a) 26
b) 28
c) 30
d) 32
e) 34

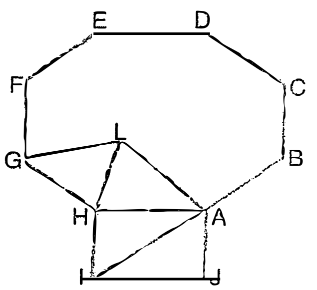
75) **(CAP - UFRJ)** Se ABCDE é um pentágono regular convexo, calcule a medida do ângulo formado pelas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$.

76) **(UERJ)** Ao observar, em seu computador, um desenho como o apresentado abaixo, um estudante pensou tratar-se de uma curva.



Porém, após aumentar muito a figura, verificou que a tal "curva" era, de fato, um polígono com o menor perímetro possível, formado por uma quantidade finita de lados, todos paralelos ao eixo x ou ao eixo y. Verificou ainda que esse polígono possuía um lado em cada uma das seguintes retas: x = 1, x = 8, y = 2 e y = 5.
Se foi utilizada a mesma unidade de comprimento em ambos os eixos, a medida do perímetro desse polígono é:
a) 10
b) 13
c) 18
d) 20

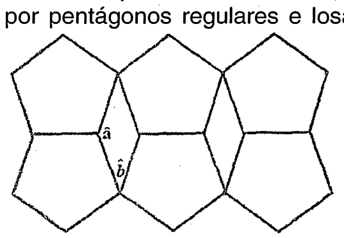
77) **(CEFET)** Os polígonos ABCDEFGH, GHL e AHIJ são regulares. Calcule o ângulo LÂI.



78) **(CN)** Quando uma pessoa caminha em linha reta uma distância x, ela gira para a esquerda de um ângulo de 60°; e quando caminha em linha reta uma distância $y = x.\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ela gira para a esquerda de um ângulo de 45°. Caminhando x ou y a partir de um ponto P, pode-se afirmar que, para qualquer que seja o valor de x, é possível chegar ao ponto P descrevendo um:
I- pentágono convexo
II- hexágono convexo
III- heptágono convexo
IV- octógono convexo

O número de assertivas verdadeiras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

79) **(COLÉGIO MILITAR)** Observe o mosaico abaixo, que é formado por pentágonos regulares e losangos:



Nesse mosaico, a diferença entre a medida do ângulo â e a metade da medida do ângulo b̂ é:
a) 144°
b) 126°
c) 108°
d) 72°
e) 36°

80) **(ENEM)** Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

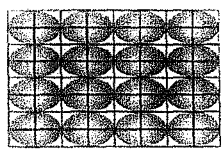


Figura 1:
Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

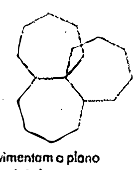


Figura 2:
Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um:

a) triângulo
b) quadrado
c) pentágono
d) hexágono
e) eneágono

81) **(CN)** Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83°, 137° e 142°. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121°?
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

GABARITO

1) a) 6
   b) 720°
   c) 360°
   d) 3
   e) 9
   f) 120°
   g) 60°

2) $128° 34' 17 \frac{1}{7}''$

3) 1800°
4) 17
5) 44
6) 45°
7) icoságono
8) pentadecágono
9) a) dodecágono
   b) pentadecágono
10) a) octógono
   b) polígono de 30 lados
11) 5cm
12) 32cm

13) $32° 43' 38 \frac{2}{11}''$

14) octógono
15) D
16) 1080°
17) 18
18) dodecágono
19) heptágono, octógono e eneágono
20) D
21) hexágono e dodecágono
22) pentadecágono
23) hexágono
24) 140°, 100°, 80° e 40°
25) 70°, 130°, 100°, 80° e 160°
26) 100°
27) 90°, 135°, 60°, 105° e 150°
28) 112°
29) 100° e 110°
30) 110° e 120°
31) 66 cm
32) 15 cm, 25 cm, 30 cm e 20 cm
33) 5 cm
34) 150°
35) polígono de 13 lados
36) quadrilátero
37) dodecágono
38) polígono de 16 lados
39) pentadecágono
40) C
41) 1

42) $\frac{2}{9}$

43) eneágono e decágono
44) octógono
45) heptágono
46) 0
47) 9
48) dodecágono
49) eneágono e undecágono
50) 30
51) 27
52) a) 30°
   b) 30°
   c) 15°
   d) 60°
   e) 60°
   f) 75°
53) 6
54) 135
55) 36°
56) 90°
57) octógono
58) 9
59) 120°
60) C
61) C
62) E
63) C
64) D
65) B
66) A
67) B
68) E
69) E
70) C
71) A
72) A
73) A
74) D
75) 36°
76) D
77) 97°30'
78) D
79) B
80) B
81) B

Triângulos

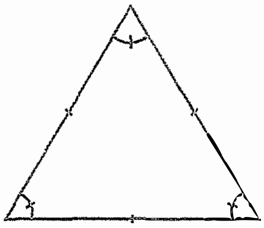
Definição

Triângulo é o polígono que possui três lados.

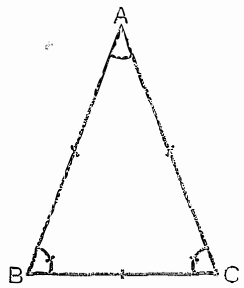
Classificação

I. Quanto aos lados

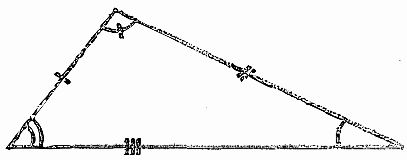
a) Eqüilátero
Apresenta os três lados e os três ângulos respectivamente congruentes.



b) Isósceles
Apresenta dois lados e dois ângulos respectivamente congruentes. Todo triângulo eqüilátero é isósceles.
Em um triângulo isósceles o lado diferente (quando existe) é chamado de base, o vértice a ele oposto é o vértice principal e os ângulos adjacentes à base, chamados de ângulos de base, são congruentes. Na figura:
Base: $\overline{BC}$.
Vértice principal: A
Ângulos da base: $\hat{B}$, $\hat{C}$

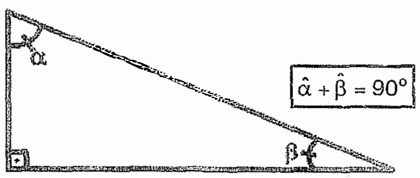


c) Escaleno
Apresenta os três lados e ângulos diferentes.



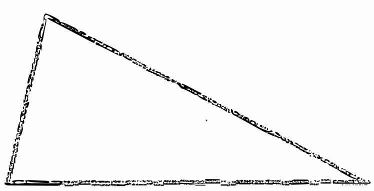
II. Quanto aos ângulos

a) Retângulo
Apresenta um ângulo reto. Os outros dois ângulos são agudos e complementares.

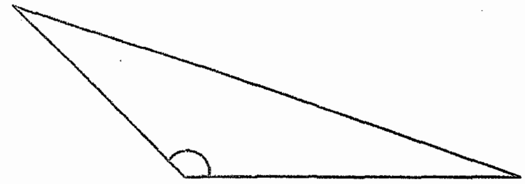


Obs.: O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois, catetos.

b) Acutângulo
Apresenta os três ângulos agudos.



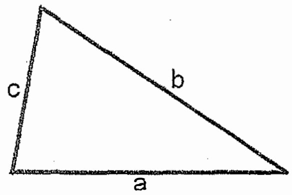
c) Obtusângulo
Apresenta um ângulo obtuso. Os outros dois ângulos são agudos.



Condições de existência de um triângulo

"A medida de cada lado de um triângulo deve ser menor que a soma e maior que o módulo da diferença dos outros dois."

$|b - c| < a < b + c$
$|a - c| < b < a + c$
$|a - b| < c < a + b$



Exemplos:

1) Verifique quais triângulos, com lados dados abaixo, existem.
a) 7, 8 e 13;
b) 5, 12 e 6;
c) 6, 6, e 6;
d) 6, 9 e 15.

Resolução:

Como conhecemos os valores dos três supostos lados, basta, ao invés de aplicarmos as duas condições, verificar se o maior "lado" é estritamente menor do que a soma dos outros dois. Em caso afirmativo o triângulo existe, em caso contrário não existe.

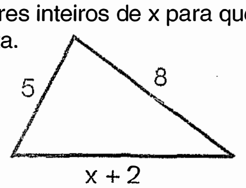
a) Maior valor = 13
$13 < 7 + 8$
O triângulo de lados 7, 8 e 13 existe.

b) Maior valor = 12
$12 > 5 + 6$
O triângulo de lados 5, 12 e 6 não existe.

c) Maior valor = 6
$6 < 6 + 6$
O triângulo de lados 6, 6 e 6 existe e é equilátero.

d) Maior valor = 15
$15 = 6 + 9$
O triângulo de lados 6, 9 e 15 não existe.

2) Determine os valores inteiros de x para que o triângulo da figura abaixo exista.



Resolução:
Como neste caso não podemos precisar qual é o maior lado, já que não sabemos o valor de x, devemos aplicar as duas condições de existência.

$$\begin{cases} x + 2 < 8 + 5 \\ x + 2 > 8 - 5 \end{cases}$$

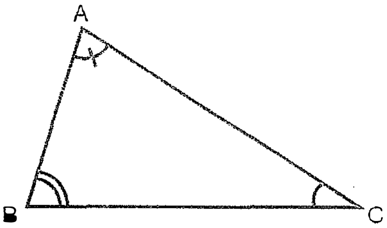
$$\begin{cases} x < 11 \\ x > 1 \end{cases}$$

Logo $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Teorema angular de Thales

"Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180°."

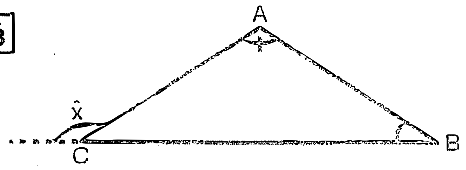
$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°}$$



Conseqüência do Teorema angular de Thales

"Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes."

$$\boxed{\hat{x}=\hat{A}+\hat{B}}$$



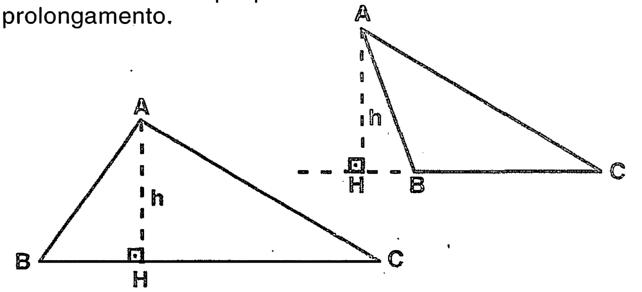
Ceviana de um triângulo

Chama-se ceviana de um triângulo qualquer reta que contém um vértice e intersecta o lado oposto ou o seu prolongamento.

Principais cevianas

Altura de um triângulo

É a ceviana perpendicular a um lado ou a seu prolongamento.



AH é altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Mediana

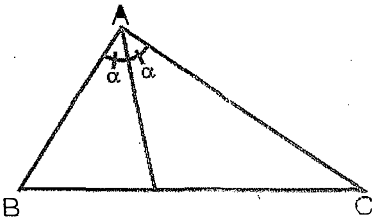
É a ceviana que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

B C

$\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

Bissetriz interna

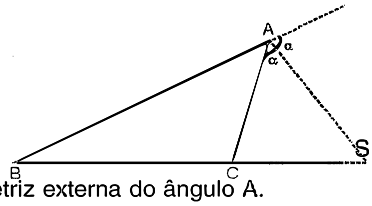
É a ceviana que divide o ângulo interno em dois ângulos adjacentes congruentes.



$\overline{AR}$ é bissetriz interna do ângulo Â.

Bissetriz externa

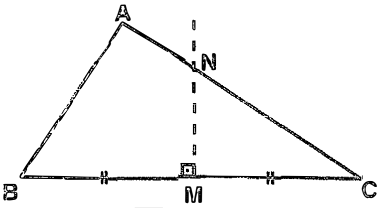
É a ceviana que divide o ângulo externo em dois ângulos adjacentes congruentes.



$\overline{AS}$ é bissetriz externa do ângulo A.

Atenção:

Mediatriz é toda reta perpendicular ao lado que contém o seu ponto médio, não necessariamente passando pelo vértice, daí não ser considerada ceviana.



$\overline{MN}$ é mediatriz do lado $\overline{BC}$

Observações:

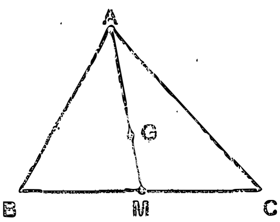
1) As três alturas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto chamado de *ORTOCENTRO,* as três medianas no *BARICENTRO,* as três bissetrizes internas no *INCENTRO*, e as três bissetrizes externas encontram-se, duas a duas, nos *EX-INCENTROS*, e as mediatrizes encontram-se no CIRCUNCENTRO.

2) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, enquanto que o circuncentro é o centro da circunferência nele circunscrita. Daí, o incentro é o ponto eqüidistante dos lados do triângulo, e o circuncentro eqüidista de seus vértices.

3) Em um triângulo acutângulo, o ortocentro está em seu interior, já no obtusângulo ele está em seu exterior, enquanto que no triângulo retângulo, ele coincide com o vértice do ângulo reto.

4) O triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo, é chamado de triângulo órtico. O triângulo retângulo é o único que não possui triângulo órtico.

5) O baricentro divide cada medidana em dois segmentos aditivos que estão sempre na razão 2 : 1, ou seja, a distância do vértice ao baricentro vale sempre o dobro da distância do baricentro até o lado.



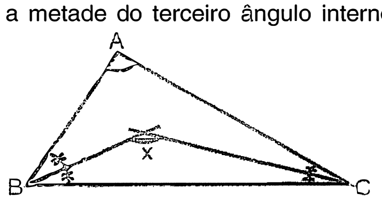
G é baricentro

$$\overline{AG}=2.\overline{GM}$$

6) Em um triângulo isóscles chamamos de altura principal àquela relativa à base, a qual é também mediana, mediatriz e bissetriz, simultaneamente.

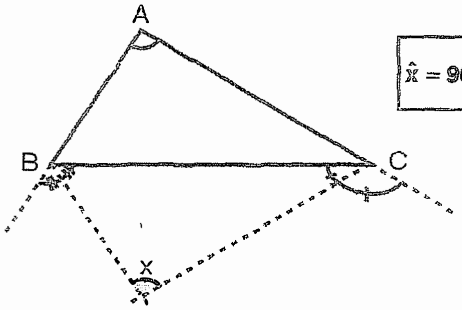
7) Em um triângulo equilátero, o incentro, o baricento, o ortocentro e o circuncentro são coincidentes.

8) Em todo triângulo, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois de seus ângulos vale sempre 90° mais a metade do terceiro ângulo interno.



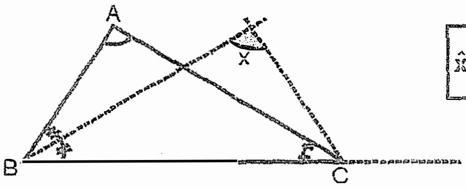
$$\boxed{\hat{x}=90°+\frac{\hat{A}}{2}}$$

9) Em todo triângulo, o ângulo formado pelas bissetrizes de dois de seus ângulos externos, vale sempre 90º menos a metade do ângulo interno localizado no terceiro vértice.



$$\boxed{\hat{x} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}}$$

10) Em todo triângulo, o ângulo formado por uma bissetriz interna e outra externa, traçadas de vértices diferentes, vale sempre a metade do ângulo interno localizado no terceiro vértice.



$$\boxed{\hat{x} = \frac{\hat{A}}{2}}$$

Exemplos:

Dados um triângulo MNP de ângulos $\hat{M} = 30^\circ$, $\hat{N} = 70^\circ$ e $\hat{P} = 80^\circ$, determine:

a) o ângulo $\hat{\alpha}$ formado pelas bissetrizes internas de $\hat{M}$ e $\hat{N}$;
b) o ângulo $\hat{\beta}$ formado pelas bissetrizes externas de $\hat{M}$ e $\hat{P}$;
c) o ângulo $\hat{\gamma}$ formado pela bissetriz interna de $\hat{N}$ com a bissetriz externa de $\hat{P}$.

Resolução:

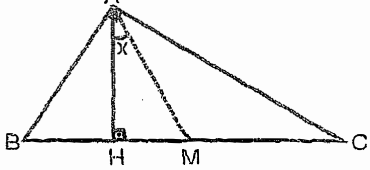
a) $\hat{\alpha} = 90^\circ + \frac{\hat{P}}{2} = 90^\circ + \frac{80^\circ}{2} = 130^\circ.$

b) $\hat{\beta} = 90^\circ - \frac{\hat{N}}{2} = 90^\circ - \frac{70^\circ}{2} = 55^\circ.$

c) $\hat{\gamma} = \frac{\hat{M}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ.$

11) Em todo triângulo retângulo, o ângulo formado pela altura e pela mediana, relativas à hipotenusa, vale sempre a diferença entre as medidas dos ângulos agudos do triângulo.

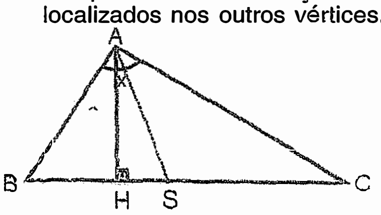
$\overline{AH} \to$ altura
$\overline{AM} \to$ mediana



$$\boxed{\hat{x} = |\hat{B} - \hat{C}|}$$

12) Em todo triângulo, o ângulo formado pela altura e pela bissetriz interna, traçadas de um mesmo vértice, vale sempre a semi-diferença entre os ângulos internos localizados nos outros vértices.

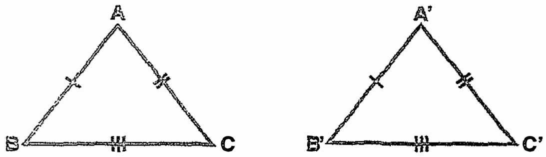
$\overline{AH} \to$ altura
$\overline{AS} \to$ bissetriz



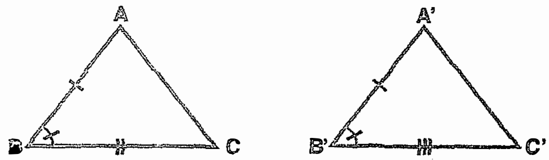
$$\boxed{\hat{x} = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}}$$

Congruência de triângulos

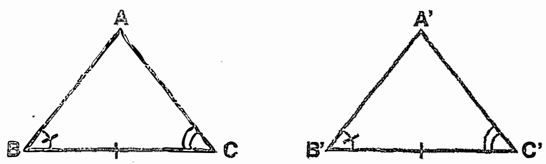
1º caso (LLL) - São congruentes dois triângulos que têm os três lados respectivamente congruentes.



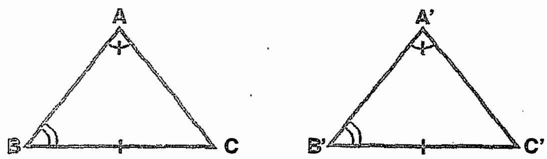
2º caso (LAL) - São congruentes dois triângulos que têm um ângulo congruente compreendido entre dois lados respectivamente congruentes.



3º caso (ALA) - São congruentes dois triângulos que ~~têm um lado congruente~~ compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes.



4º caso (LAA) - São congruentes dois triângulos que têm um lado congruente, e dois ângulos respectivamente congruentes, sendo um deles oposto ao lado congruente.



Obs.: O símbolo de congruência é ≡. Assim, como os pares de triângulos acima são congruentes, podemos escrever que:

$$\boxed{\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'}$$

Exercícios

1) Determine o perímetro de um triângulo de lados 3 cm, 5 cm e 6 cm.

2) Os lados de um triângulo são expressos, em centímetros, por 2x + 1, 4x - 2 e x + 9. Determine a medida do maior lado, sabendo que o perímetro do triângulo vale 29 cm.

3) A base de um triângulo isósceles e um outro lado, estão na razão 2 para 3. Se o perímetro do triângulo vale 40 cm, determine as medidas de seus lados.

4) O perímetro de um triângulo isósceles mede 16 cm. O comprimento da base vale 3/5 da soma dos outros lados que são iguais. A base mede:
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 10 cm
e) 12 cm

5) Um triângulo isósceles tem lados iguais a 7 e 16. Calcule o perímetro do triângulo.

6) Quais os valores possíveis para x sabendo que 10, 8 e x + 3 são lados de um triângulo ?

7) Classifique, quanto aos lados e ângulos, os triângulos cujos ângulos medem:
a) 30°; 70° e 80°
b) 30°; 60° e 90°
c) 40°; 40° e 100°
d) 60°; 60° e 60°
e) 45°; 45° e 90°
f) 20°; 80° e 80°

8) Classifique, quantos aos lados e ângulos, o triângulo cujos ângulos são expressos por 2x - 10°, x - 30° e x - 20°.

9) Em um triângulo, dois ângulos medem 43° 19' 37" e 54° 52' 49". Determine a medida do outro ângulo.

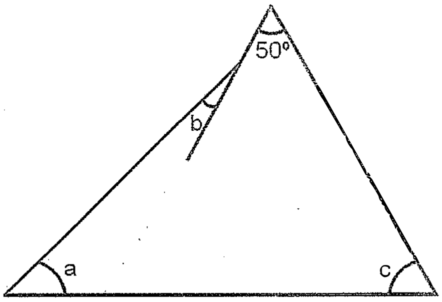
10) Os ângulos internos de um triângulo são expressos por 3x + 3°, 2x - 1° e x + 40°. Determine-os.

11) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são expressos em graus por 4x + 10° e 2x + 40°. Determine a medida do ângulo do vértice.

12) Os ângulos internos de um triângulo são expressos em graus por números pares e consecutivos. Calcule-os.

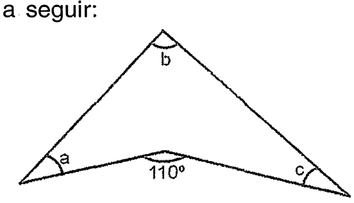
13) Determine as medidas dos ângulos de um triângulo, sabendo que elas são inversamente proporcionais a 1, 2 e 6.

14) Na figura abaixo, determine o valor de $S = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$.

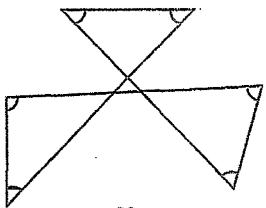


15) Determinar a soma dos ângulos assinalados nas figuras a seguir:

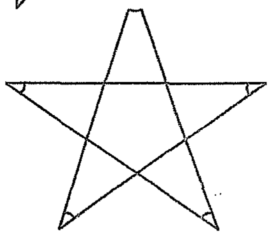
a)



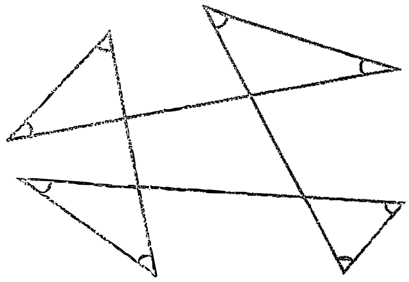
b)



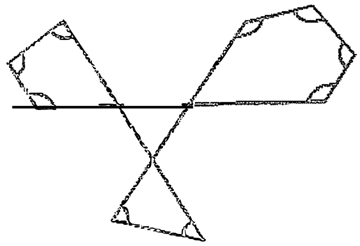
c)



d)

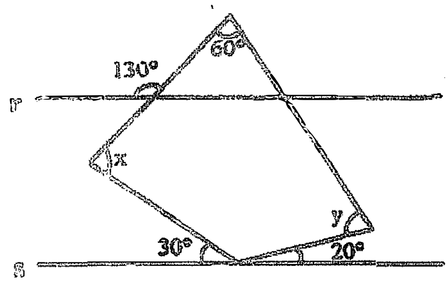


e)



16) Em um triângulo ABC, a soma das medidas dos ângulos externos em A e B vale 260°, enquanto que a soma das medidas dos ângulos externos em A e C vale 220°. Determine os ângulos internos desse triângulo.

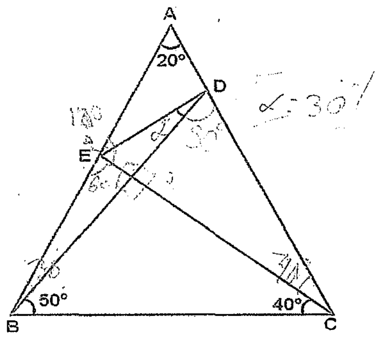
17) Na figura, as retas r e s são paralelas.



A medida y é igual a:
a) 70°
b) 80°
c) 90°
d) 100°
e) 110°

18) Em um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ está para o ângulo $\hat{B}$ assim como 7/3. Enquanto que o ângulo $\hat{B}$ está para o ângulo $\hat{C}$, assim como 3/5. Determine a medida do menor ângulo externo desse triângulo.

19) Na figura abaixo $\overline{AB} = \overline{AC}$. Calcule a medida do ângulo x.



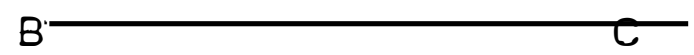
20) Em um triângulo ABC, um ponto D do lado $\overline{BC}$ é equidistante dos três vértices do triângulo. Classifique, quanto aos ângulos, esse triângulo.

21) Qual é o único triângulo cujo circuncentro pertence a um des seus lados ?

22) Se em um triângulo, um dos ângulos é o dobro da soma dos outros dois, podemos garantir que seu ortocentro é interior, exterior ou pertence a um de seus lados ?

23) Um triângulo não possui triângulo órtico. Determine as medidas de seus ângulos, sabendo-se que um deles é a quinta parte da soma dos outros.

24) Considere o triângulo ABC da figura. Se a bissetriz interna do ângulo B forma com a bissetriz externa do ângulo C um ângulo de 50°, determine a medida do ângulo interno $\hat{A}$.



25) Em um triângulo isósceles as bissetrizes dos ângulos da base formam um ângulo que equivale ao triplo do ângulo principal. Determine os ângulos desse triângulo.

26) Num triângulo ABC, $\hat{B}-\hat{C}=90°$. Calcular o menor dos ângulos formados pela bissetriz interna $\overline{AD}$ com $\overline{BC}$.

27) Em um triângulo ABC as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo $\hat{\alpha}=4x-30°$ e as bissetrizes externas de $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo $\hat{\theta}=x+10°$. Determine o valor de x.

28) Determine os ângulos obtusos formados em torno do incentro de um triângulo ABC, no qual tem-se $\hat{A}=60°$ e $\hat{B}=70°$.

29) Em um triângulo MNP, temos $\hat{M}=80°$ e $\hat{P}=70°$. Determine a medida do ângulo formado pela bissetriz interna do ângulo $\hat{M}$ com a altura que parte do vértice M.

30) Em um triângulo retângulo, o maior ângulo é o quíntuplo do menor. Determine a medida do ângulo formado pela altura e mediana traçadas do vértice do ângulo reto.

31) Na figura abaixo, AH é altura e AM é mediana, relativa à hipotenusa. Sabendo-se que a altura e a mediana fazem um ângulo de 14°, determine os ângulos B e C do triângulo.

32) Em um triângulo retângulo, a altura e bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de 18°. Quanto mede o maior dos ângulos agudos ?

33) Em um triângulo ABC, o ângulo formado pela altura e pela bissetriz interna traçadas do vértice B, mede 5°, enquanto que aquele formado pela altura e pela bissetriz interna traçadas do vértice A, mede 10°. Determine os ângulos desse triângulo.

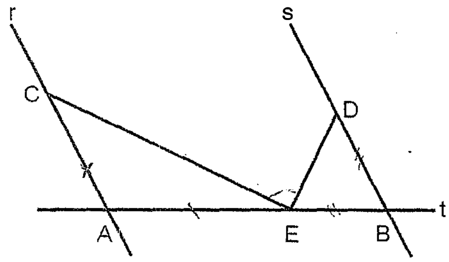
34) Em um triângulo isósceles, um dos ângulos é o triplo do outro. Sabendo-se que o ortocentro desse triângulo é interior a ele, determine a medida de seu menor ângulo interno.

35) Em um triângulo ABC, os pontos M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ intersectam-se no ponto R. Sabendo-se que $\overline{AR}=10$, $\overline{RN}=6$ e $\overline{CP}=12$, determine a soma das medidas dos segmentos $\overline{RM}$, $\overline{BR}$ e $\overline{RP}$.

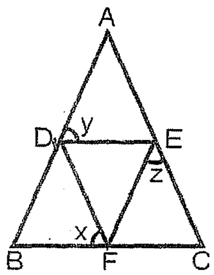
36) Em um triângulo isósceles ABC, de base BC igual a 7 cm, a soma das medianas relativas aos lados iguais é 18 cm. Sendo G o ponto de encontro dessas medianas, determine o perímetro do triângulo GBC.

37) No interior de um triângulo isósceles ABC, constrói-se um triângulo equilátero BCD. O ângulo $\hat{A}$, ângulo principal do triângulo ABC, é igual ao dobro do ângulo $A\hat{B}D$. Determine a medida do ângulo A.

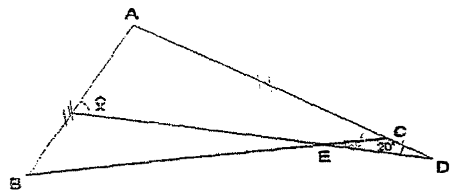
38) Na figura abaixo, a retas r e s são paralelas. Sabendo-se que $\overline{AC}=\overline{AE}$ e $\overline{BE}=\overline{BD}$, determine a medida do ângulo CÊD.



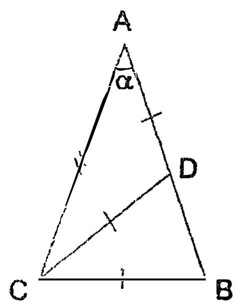
39) Na figura abaixo, o triângulo ABC é isósceles, de base $\overline{BC}$ e o triângulo DEF é equilátero. Determine a medida do ângulo $\hat{x}$, em função de $\hat{y}$ e $\hat{z}$.



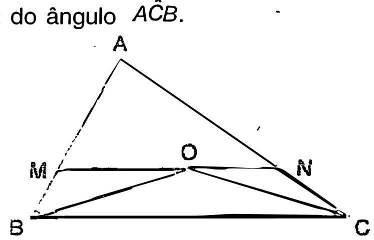
40) Na figura tem-se $\overline{AB}=\overline{AC}$ e $\overline{CD}=\overline{CE}$. Determine x.



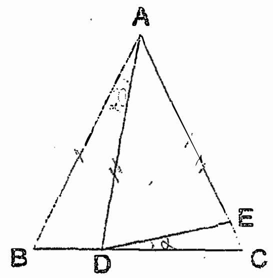
41) Na figura tem-se $\overline{AB}=\overline{AC}$ e $\overline{CD}=\overline{CB}=\overline{AD}$. Determine o ângulo a.



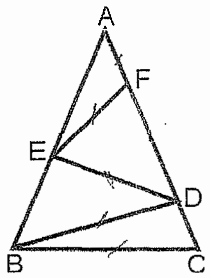
42) As dimensões do triângulo ABC são $\overline{AB}=11$, $\overline{AC}=18$ e $\overline{BC}=20$. Calcule o perímetro do triângulo AMN, sabendo-se que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, que $\overline{OB}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ e que $\overline{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.



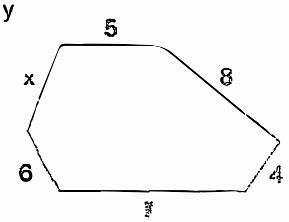
43) Na figura abaixo $\overline{AB}=\overline{AC}$ e $\overline{AD}=\overline{AE}$. Sendo B Â D = 20°, determine a medida do ângulo C $\hat{D}$ E.



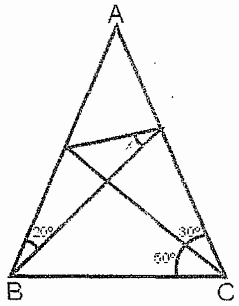
44) Determine a medida do ângulo Â, que é o ângulo principal do triângulo ABC, sabendo que $\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{DE} = \overline{BD} = \overline{BC}$.



45) O hexágono da figura abaixo é equiângulo. Determine o valor de x + y

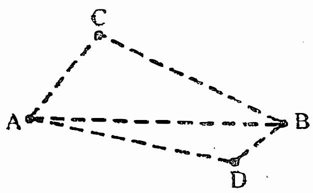


46) Na figura abaixo, determine a medida do ângulo $\hat{x}$, considerando que o triângulo ABC é isósceles, de base $\overline{BC}$.



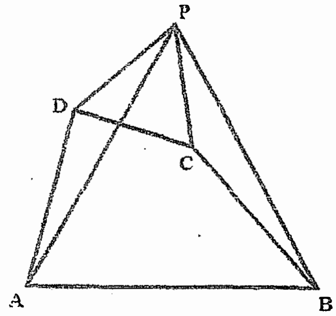
47) Sobre um segmento $\overline{BE}$ é marcado um ponto C, que não é seu ponto médio. Acima de $\overline{BE}$ são construídos os triângulos ABC, equilátero, e BDE, isósceles de base $\overline{BE}$ Sabendo-se que $B\hat{D}E = 140°$ e que os pontos A, D e E são colineares, determine a medida do ângulo $B\hat{D}C$.

48) Um rallye é disputado por três corredores I, II e III. O corredor I sai de A, vai em linha reta até C, de onde vai direto para B, e daí volta para A; já o corredor II vai direto de A para B e daí retorna direto para A; enquanto que o corredor III vai de A para D, de D para B e daí retorna para o ponto de partida A. Sabendo-se que a distância entre A e B é 160 km e que os automóveis dos três corredores gastam 1 litro de combustível a cada 4 km, podemos afirmar que:



a) O corredor I estará mentindo se afirmasse ter gasto 100 litros de combustível nessa corrida.
b) O corredor I estaria mentindo se afirmasse ter gasto 95 litros de combustível nessa corrida.
c) O corredor III estaria mentindo se afirmasse ter gasto 83 litros de combustível nessa corrida.
d) O corredor III estaria mentindo se afirmasse ter gasto 74 litros de combustível nessa corrida.
e) O corredor II é o mais veloz.

49) Na figura abaixo, ABCD é um quadrilátero onde $\overline{AD} = \overline{BC}$, $D\hat{A}B = 80°$ e $C\hat{B}A = 40°$. Um ponto P é tal que o triângulo DPC é equilátero. Determine o perímetro do triângulo APB, sabendo-se que $\overline{AB} = 6\ cm$ e $\overline{CD} = 3\ cm$.



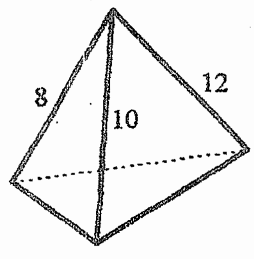
QUESTÕES DE CONCURSOS

50) **(CM)** Dentre os termos de números abaixo, o único que não pode corresponder às medidas dos lados de um triângulo é:
a) 2, 3, 2
b) 4, 5, 6
c) 4, 5, 9
d) 4, 6, 9
e) 6, 6, 9

51) **(EPCAR)** Os valores de x, para os quais é possível construir um triângulo, cujos lados medem x, 5 e 9 unidades de medidas, são:
a) todo x natural
b) todo x natural menor que 14
c) $x \in N$ e $x < 14$
d) $x \in N$ e $4 < x < 14$

52) **(CM)** Se a soma dos lados de um triângulo equilátero é menor do que 17cm e maior do que 13cm e a medida de seu lado é um número inteiro, o lado desse triângulo mede:
a) 3cm
b) 4cm
c) 5cm
d) 6cm

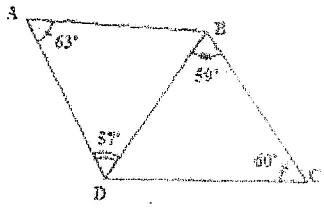
53) **(UERJ)** Dispondo de canudos de refrigerantes, Tiago deseja construir pirâmides. Para as arestas laterais, usará sempre canudos com 8 cm, 10 cm e 12 cm de comprimento. A base de cada pirâmide será formada por 3 canudos que têm a mesma medida, expressa por um número inteiro, diferente das anteriores. Veja o modelo abaixo:



A quantidade de pirâmides de bases diferentes que

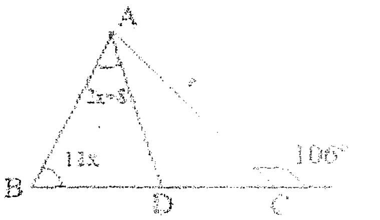
Tiago poderá construir, é:
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

54) **(CEFET)** Dentre os segmentos desenhados na figura a seguir, qual é o maior?
a) $\overline{AB}$
b) $\overline{AD}$
c) $\overline{BC}$
d) $\overline{BD}$

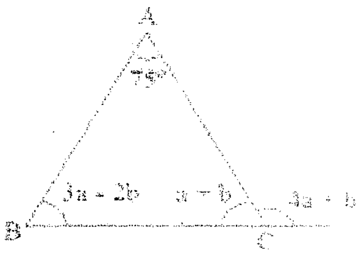


55) **(CM)** Considere um triângulo equilátero. A medida do ângulo externo a um de seus vértices é de:
a) 60°
b) 120°
c) 180°
d) 300°

56) **(CM)** Na figura, o segmento AD é a bissetriz do ângulo Â e o ângulo externo em C mede 106°. A relação entre os ângulos e BÂD também está expressa na figura.
A medida, em graus, do maior ângulo do triângulo ABD é:
a) 63
b) 66
c) 72
d) 84
e) 94

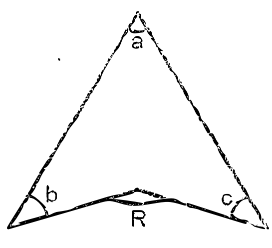


57) **(CM)** No triângulo ABC da figura, os ângulos internos medem respectivamente A = 75°, B = (3a - 2b)°, e C = (a + b)°. Sabendo-se que o ângulo externo em C tem como medida (4a + b)°, a diferença entre os valores a e b é:
a) 3
b) 5
c) 10
d) 15
e) 20

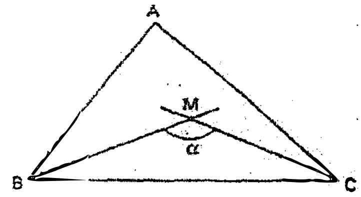


58) **(CM)** Em um triângulo ABC, o ângulo externo B mede 120° e o ângulo interno A é o triplo do ângulo interno C . A diferença entre os ângulos internos A e C, em graus, é igual a:
a) 15
b) 30
c) 45
d) 60
e) 75

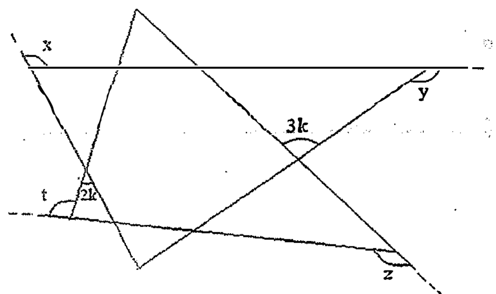
59) **(CEFET)** Considere o quadrilátero da figura abaixo e calcule a medida do ângulo x em função das medidas de a, b e c.



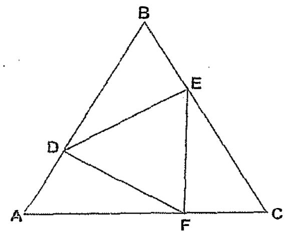
60) **(CM)** Se no triângulo ABC, da figura abaixo, as medidas dos ângulos internos B e C são, em graus, respectivamente 70° e 40° e $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$, suas bissetrizes internas, então o valor do ângulo assinalado é:
a) 110°
b) 115°
c) 120°
d) 125°
e) 130°



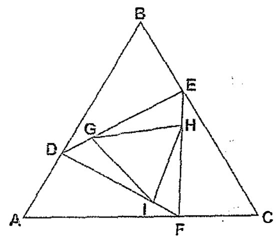
61) **(CN)**
Na figura abaixo, sabe-se que k > 36°. Qual é o menor valor natural da soma x + y + z + t, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?
a) 479
b) 539
c) 599
d) 659
e) 719



62) **(EPCAR)** Sobre os lados do triângulo equilátero ABC abaixo tomam-se os pontos D, E e F tais que $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.



Sobre os lados do triângulo DEF da figura (I), tomam-se os pontos G, H e I tais que $\overline{DG} = \overline{EH} = \overline{FI}$.



Com base nas figuras (I) e (II), tem-se, necessariamente, que:
a) O triângulo GHI é isósceles.
b) Os triângulos DGI, GEHe HFI são retângulos.
c) $\overline{IH} // \overline{AB}$, $\overline{GH} // \overline{AC}$ e $\overline{IG} // \overline{BC}$.
d) $G\hat{H}E$ é agudo.

63) **(CEFET)** Imagine que se tenha três casas de um condomínio como na figura abaixo e que seus donos desejem colocar segurança particular numa quarta pequena casa a ser construída de forma que ela deva ficar numa posição equidistante das ruas que interligam as casas duas a duas. A posição que deve ser escolhida corresponde a que ponto notável do triângulo formado por essas ruas?
a) Ponto de encontro das medianas.
b) Ponto de encontro das bissetrizes externas.
c) Ponto de encontro das bissetrizes internas.
d) Ponto de encontro das alturas.
e) Ponto de encontro das mediatrizes.

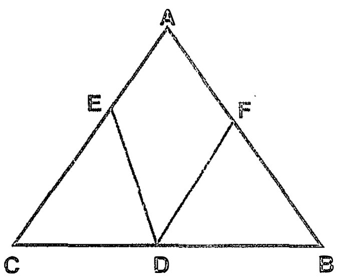
64) **(CN)** O ponto P interno ao triângulo ABC é equidistante de dois de seus lados e de dois de seus vértices. Certamente P é a interseção de:
a) uma bissetriz interna e uma altura desse triângulo.
b) uma bissetriz interna e uma mediatriz de um dos lados desse triângulo.
c) uma mediatriz de uma lado e uma mediana desse triângulo.
d) uma altura e uma mediana desse triângulo.
e) uma mediana e uma bissetriz interna desse triângulo.

65) **(CN)** Quantos são os pontos de um plano a que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em a ?
a) Um.
b) Dois.
c) Três.
d) Quatro.
e) Cinco.

66) **(PUC)** No triângulo ABC, o ângulo CÂB supera em 30 graus o ângulo $A\hat{B}C$; D é um ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$. Então a medida (em graus) do ângulo $B\hat{A}D$ é:
a) 30;
b) 20;
c) $22\frac{1}{2}$;
d) 10;
e) 15.

67) **(CN)** Num triângulo ABC, AB = AC, o ponto D interno ao lado AC é determinado de modo que DC = BC. Prolonga-se o lado BC (no sentido de B para C) até o ponto E de modo que CE = BC. Se o ângulo A D mede 12°, qual a medida, em graus, do ângulo BÂC?
a) 100
b) 88
c) 76
d) 54
e) 44

68) **(CEFET)** No triângulo ABC, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\hat{A} = 80°$. Os pontos D, E e F estão sobre os lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Se $\overline{CE} = \overline{CD}$ e $\overline{BF} = \overline{BD}$, então o ângulo $E\hat{D}F$ é igual a:
a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



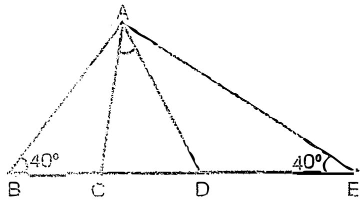
69) **(CN)** Sejam os triângulos ABC e MPQ, tais que:

I- $M\hat{P}Q = 90° = A\hat{C}B$
II- $P\hat{Q}M = 70°$
III- $B\hat{A}C = 50°$
IV- $AC = MP$

Se $\overline{PQ} = x$ e $\overline{BC} = y$, então $\overline{AB}$ é igual a:

a) $x + y$
b) $\sqrt{x^2 + y^2}$
c) $\frac{2xy}{(x+y)^2}$
d) $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$
e) $2x + y$

70) **(PUC)** Na figura, $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{DE} = \overline{AD}$, o ângulo CÂD mede:
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 60°



71) **(CN)** Dados os casos clássicos de congruência de triângulos A. L. A, L. A. L, L. L. L. e L. A. A_0 onde L = Lado, A = ângulo e A_c = ângulo oposto ao lado dado, complete corretamente as lacunas das sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.

I- Para se mostrar que a mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos extremos A e B, usa-se o caso ________ de congruência de triângulos.
II- Para se mostrar que a bissetriz de um ângulo $A\hat{B}C$ tem seus pontos equidistantes dos lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ desse ângulo, sem usar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, usa-se o caso ________ de congruência de triângulos.

a) L. A. L. / A. L. A.
b) L. A. L. / L. A. A_0
c) L. L. L. / L. A. A_0.
d) L. A. A_0 / L. A. L.
e) A. L. A. / L. L. L.

72) **(CN)** Dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, interceptam-se interiormente no ponto O. Sabe-se que as medidas de $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são, respectivamente, 3 cm e 4 cm, e que as medidas de $\overline{CO}$ e $\overline{OD}$ são, respectivamente, 2 cm e 6 cm. Qual o número de pontos do plano determinado por $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que equidistam dos pontos A, B, C e D ?
a) Zero
b) Um
c) Dois
d) Três
e) Infinito

73) **(CN)** Dado um triângulo retângulo, seja P o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de P aos catetos do triângulo são K e L. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por

a) $\frac{K+L}{4}$.
b) 2K + L.
c) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$.
d) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$.
e) $\sqrt{K^2+L^2}$.

GABARITO

1) 14 cm
2) 12 cm
3) 10 cm, 15 cm e 15 cm
4) A; B; D
5) 39
6) $-1 < X < 15$
7) a) escaleno e acutângulo
   b) escaleno e retângulo
   c) isósceles e obtusângulo
   d) equilátero e acutângulo
   e) isósceles e retângulo
   f) isósceles e acutângulo
8) escaleno e obtusângulo
9) 81° 47' 34"
10) 72°, 45° e 63°
11) 40°
12) 58°, 60° e 62°
13) 108°, 54° e 18°
14) 130°
15) a) 110°
   b) 360°
   c) 180°
   d) 360°
   e) 900°
16) 60°, 40° e 80°
17) C
18) 96°
19) 30°
20) retângulo
21) retângulo
22) exterior
23) 30°, 60° e 90°
24) 100°
25) 36°, 72° e 72°
26) 45°
27) 40°
28) 115°, 120° e 125°
29) 20°
30) 54°
31) 52° e 38°
32) 63°
33) 60°, 70° e 50°
34) 25° 42' $51\frac{3}{7}$"
35) 21
36) 19 cm
37) 30°
38) 90°
39) $\hat{x} = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{2}$
40) 60°
41) 36°
42) 29°
43) 10°
44) 20°
45) 13
46) 30°
47) 30°
48) D
49) 18 cm
50) C
51) D
52) C
53) A
54) C
55) B
56) B
57) D
58) D
59) $\hat{x} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$
60) D
61) C
62) A
63) C
64) B
65) D
66) E
67) E
68) C
69) A
70) B
71) B
72) B
73) E

OBSERVAÇÕES

Quadriláteros

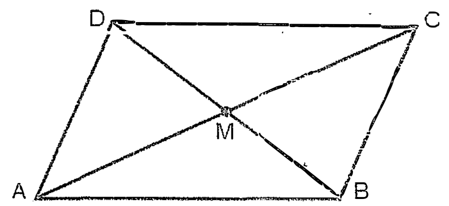
Definição

Quadrilátero é todo polígono que possui quatro lados.

Principais quadriláteros

I) Paralelogramo

Paralelogramo é o quadrilátero que apresenta os lados opostos paralelos.



ABCD é paralelogramo pois $\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$ e $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$

Propriedades gerais

a) Os lados opostos são congruentes.
$\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

b) Os ângulos opostos são congruentes.
$\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$

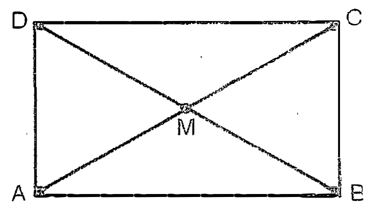
c) Os ângulos consecutivos são suplementares.
$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D} = \hat{D} + \hat{A} = 180°$

d) As diagonais cortam-se ao meio.
$\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$

Paralelogramos importantes

1) Retângulo

É o paralelogramo que possui os ângulos congruentes.



Propriedades

a) As gerais.

b) As diagonais são congruentes. $\overline{AC} = \overline{BD}$

Conseqüência da propriedade (b)

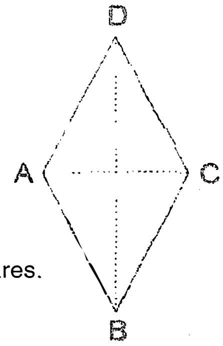
Da figura temos que: $\overline{AC} = \overline{BD}$ e $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$,

logo $\overline{AM} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$

Como o triângulo ABD é retângulo, $\overline{AM}$ é mediana relativa à hipotenusa. Daí podemos concluir que: "em todo triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa vale sempre a metade da hipotenusa".

2) Losango ou rombo

É o paralelogramo que possui os lados congruentes.



ABCD é losango pois
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

Propriedades

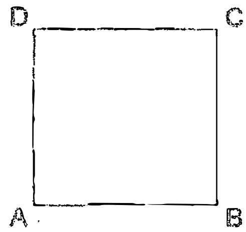
a) As gerais.

b) As diagonais são perpendiculares.
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

c) As diagonais são bissetrizes.

3) Quadrado

É o paralelogramo que possui os lados e ângulos respectivamente congruentes.



ABCD é quadrado pois
$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv 90°$ e
$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

Propriedades

Valem para o quadrado todas as propriedades de paralelogramo, retângulo e losango.

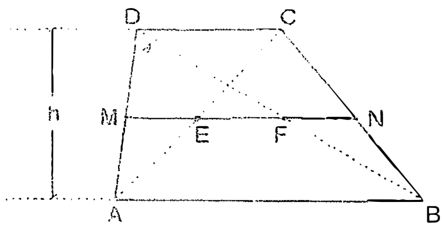
Nota:

O quadrado é simultaneamente retângulo e losango.

II) Trapézio

Trapézio é o quadrilátero convexo que possui apenas dois lados paralelos.

Elementos e propriedades



ABCD é trapézio pois $\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$

a) Os lados paralelos são chamados de bases: $\overline{AB}$ é a base maior e $\overline{DC}$ é a base menor.

b) $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados oblíquos.

c) A distância entre as bases é a altura: h

d) $\hat{A} + \hat{D} = 180°$ e $\hat{B} + \hat{C} = 180°$

e) Base Média $(\overline{MN})$ segmento que une os pontos médios dos lados oblíquos. É paralelo às bases e tem por medida a semi-soma das bases.

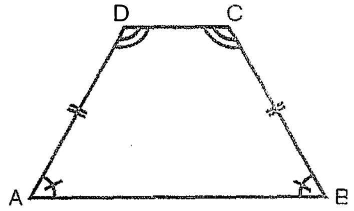
$$\boxed{\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}}$$

f) Mediana de Euler $(\overline{EF})$: segmento que une os pontos médios das diagonais. É paralelo às bases e tem por medida a semi-diferença das bases.

$$\boxed{\overline{EF} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2}}$$

Classificação dos trapézios

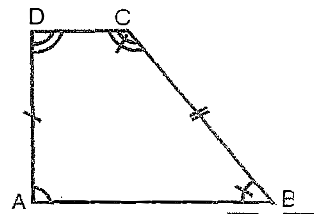
1) Isósceles: lados não paralelos são congruentes.



ABCD é trapézio isósceles pois $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

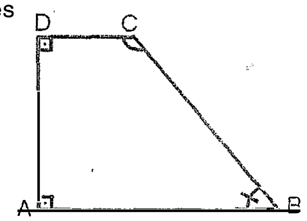
daí: $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{D} \equiv \hat{C}$

2) Escaleno: lados não paralelos não são congruentes.



ABCD é trapézio escaleno pois $\overline{AD} \neq \overline{BC}$, daí:
$\hat{A} \neq \hat{B}$ e $\hat{D} \neq \hat{C}$

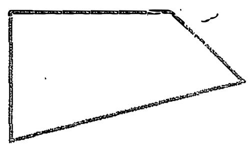
3) Retângulo: um dos lados oblíquos é perpendicular às bases



ABCD é trapézio retângulo pois
$\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$

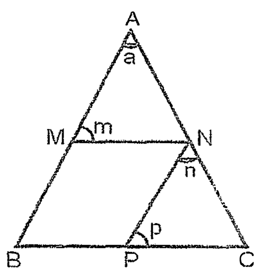
III) Trapezóide

Trapezóide é o quadrilátero convexo que não possui lados paralelos.



Base média de um triângulo

Chamamos de base média de um triângulo ao segmento que une os pontos médios de dois lados desse triângulo, sendo paralela ao terceiro lado e valendo a metade dele.



$\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC.

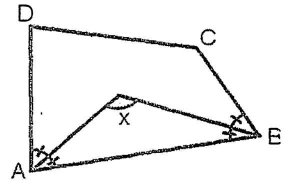
Demonstração:

Partindo da hipótese que M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{MN} // \overline{BC}$, tracemos $\overline{NP} // \overline{AB}$.

Pelo paralelismo temos que: $\hat{a} = \hat{n}$ e $\hat{m} = \hat{p}$. Como MNPB é um paralelogramo, $\overline{NP} = \overline{MB} = \overline{AM}$ daí que os triângulos AMN e NPC são congruentes, logo: MN = PC e MN = PB e finalmente $\overline{BC} = \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{MN} + \overline{MN} = 2\overline{MN}$.

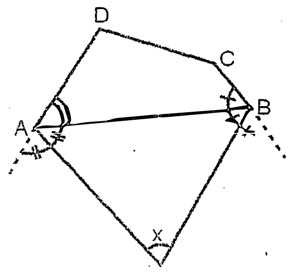
Observações importantes

1) **Em todo quadrilátero convexo, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos é sempre igual à semi-soma dos outros dois ângulos internos.**



$$\hat{x} = \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$$

2) **Em todo quadrilátero convexo, o ângulo formado pelas bissetrizes externas, traçadas de dois vértices consecutivos, é sempre igual à semi-soma dos ângulos internos existentes nesses mesmos vértices.**



$$\hat{x} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Assinale a opção correta ao numerarmos a 2ª coluna de acordo com a 1ª.

1 Lados iguais
2 Quatro lados
3 Ângulos iguais
4 Lados opostos paralelos
5 Lados e ângulos respectivamente iguais

( ) Retângulo
( ) Quadrado
( ) Losango
( ) Quadrilátero
( ) Rombóide

a) 5 - 1 - 4 - 3 - 2
b) 3 - 5 - 1 - 2 - 4
c) 3 - 1 - 2 - 5 - 4
d) 4 - 2 - 1 - 3 - 5
e) 2 - 4 - 5 - 3 - 1

2) Dois ângulos de um rombóide diferem de 70°. Determine todos os seus ângulos.

3) Em um paralelogramo, a soma de dois ângulos vale 220°. Determine os ângulos desse quadrilátero.

4) Em um losango, uma das diagonais forma um ângulo de 37° com um dos lados. Determine seus ângulos.

5) Em um paralelogramo, um ângulo obtuso mede 149° 37' 18". Determine a medida do ângulo agudo.

6) Em um trapezóide, dois ângulos medem 70° e 130°. Determine as medidas dos demais, sabendo-se que uma delas é o triplo da outra.

7) Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são expressos por 2x - 16° e 3x + 1°. Determine o valor da diferença entre eles.

8) Em um paralelogramo, um dos ângulos equivale à quinta parte da soma dos demais. Determine as medidas dos ângulos desse quadrilátero.

9) Um dos ângulos de um trapézio isósceles mede 43°. Determine as medidas dos demais.

10) Dois ângulos de um trapézio isósceles diferem de 40°. Determine os ângulos desse trapézio.

11) Os ângulos de um trapezóide são dados por x + 38°, 2x - 14°, 3x - 6° e 2x + 6°. Calcule-os.

12) Em um quadrilátero ABCD, temos que $\hat{A}=\hat{B}, \hat{C}=\hat{A}/2$ e $\hat{D}=3\hat{C}$. Determine os ângulos desse quadrilátero.

13) Em um paralelogramo um ângulo é o triplo do outro. Determine os ângulos desse quadrilátero.

14) Dois ângulos de um trapézio medem 76° e 93°. Determine as medidas dos outros dois.

15) Dois ângulos de um losango são complementares. Determine os ângulos desse quadrilátero.

16) Em um trapézio retângulo, o maior ângulo excede o menor em 42°. Determine os ângulos desse trapézio.

17) Os ângulos de um trapezóide são proporcionais a 5, 6, 9 e 4. Determine-os.

18) A diferença entre dois ângulos de um paralelogramo é de 30°. Determine os ângulos desse quadrilátero.

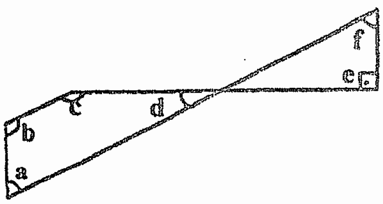
19) Em um paralelogramo, um dos ângulos obtusos é o dobro da soma dos agudos. Determine o valor de cada ângulo obtuso desse quadrilátero.

20) Determine o maior ângulo de um trapézio isósceles no qual uma altura forma um ângulo de 32° com um dos lados não paralelos.

21) Em um quadrilátero ABCD, de ângulos opostos suplementares, o ângulo $\hat{A}$ é o triplo de $\hat{B}$ e este é a terça parte de $\hat{C}$. Determine os ângulos desse quadrilátero.

22) Em um retângulo, uma das diagonais forma 52° com um dos lados. Determine o maior ângulo formado por suas diagonais.

23) Nesta figura, os ângulos a, b, c e d medem, respectivamente x/2, 2x, 3x/2 e x. O ângulo e é reto. Qual a medida do ângulo f ?

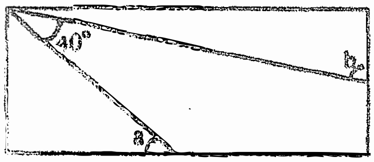


a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 24°

24) Um dos lados de um losango mede 1,3 cm. Determine seu perímetro.

25) Dado um losango, traça-se uma de suas diagonais. Um dos triângulos isósceles assim obtidos tem ângulo da base igual a 35°. Determine as medidas dos ângulos desse losango.

26) No retângulo abaixo, o valor, em graus, de a + b é:



a) 50°
b) 90°
c) 120°
d) 130°
e) 220°

27) Em um trapézio de bases iguais a 6 e 20, determine as medidas da base média e da mediana de Euler.

28) Determine a base média e a mediana de Euler de um trapézio de bases 13,5 e 25,5.

29) As bases de um trapézio são proporcionais a 11 e 5. Determine a medida da mediana de Euler, sabendo que a base média vale 32.

30) A base média de um trapézio vale 74,358092 cm e a mediana de Euler vale 25,641908 cm. Determine a medida da base maior desse trapézio.

31) Em um trapézio, a medida da base maior é o triplo de medida da base menor. Sabendo-se que a base média mede 12 cm, determine a medida da mediana de Euler.

32) A mediana de Euler de um trapézio, cuja base maior mede 17, mede 4. Determine a medida de sua base média.

33) A base média e a mediana de Euler de um trapézio medem, respectivamente, 20 e 2. Determine as medidas de suas bases.

34) Um trapézio ABCD tem base maior $\overline{AB}$ e base média $\overline{MN}$ ($M \in \overline{AD}$). A diagonal $\overline{AC}$ intersecta a base média no ponto E, enquanto que a diagonal $\overline{BD}$ a intersecta no ponto F. Se $\overline{ME}=4$ e $\overline{EF}=3$, calcule:
a) Base menor
b) Base média
c) Base maior

35) Em um quadrilátero ABCD, tem-se $\hat{A}=140°$ e $\hat{B}=30°$. Calcule:
a) O ângulo formado pelas bissetrizes internas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$.
b) O ângulo formado pelas bissetrizes externas nos vértices C e D.

36) Em um quadrilátero convexo ABCD, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, 32° 27' e 47° 33'. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes internas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

37) Em um trapézio isósceles um ângulo vale 110°. Calcule o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos da base maior.

38) Seja ABCD um trapézio retângulo. O ângulo formado pelas bissetrizes do seu ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior mede 92°. Os ângulos agudo e obtuso deste trapézio medem, respectivamente:
a) 88° e 92°
b) 86° e 94°
c) 84 e 96°
d) 82° e 98°
e) 79° e 101°

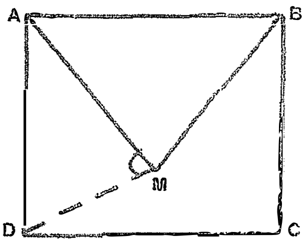
39) Determine o ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois ângulos adjacentes a um mesmo lado oblíquo de um trapézio.

40) Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

41) Em um quadrilátero MNPQ, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de $\hat{N}$ e $\hat{P}$ mede 104°. Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes externas nos vértices N e P.

42) Em um quadrilátero ABCD, as bissetrizes internas de $\hat{A}$ e $\hat{D}$ encontram-se no ponto P, enquanto que as bissetrizes externas traçadas nos vértices A e D encontram-se em Q. Se $A\hat{P}D = 4x + 12°$ e $A\hat{Q}D = x + 18°$, determine o valor de x.

43) Na figura, ABCD é um quadrado e AMB um triângulo equilátero. Determine a medida do ângulo $A\hat{M}D$.



44) Determine o perímetro de um losango cuja diagonal menor mede $\sqrt{3}\ cm$, sabendo que um ângulo é o dobro do outro.

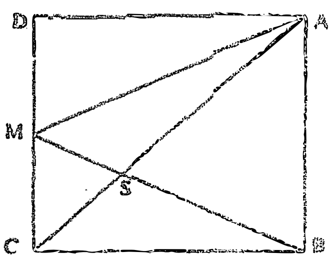
45) As bases de um trapézio isósceles medem 12 e 8. Sabendo que dois de seus ângulos são complementares, determine a altura desse trapézio.

46) Em um trapézio isósceles de bases 4 e 9, as diagonais são bissetrizes dos menores ângulos. Determine o perímetro desse trapézio.

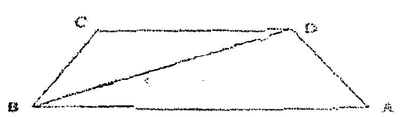
47) Determine a distância entre o baricentro e o circuncentro de um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 18 cm.

48) Num triângulo ABC, traça-se a mediana $\overline{AM}$ relativa do lado $\overline{MS}$, e pelo ponto B uma reta que passa pelo ponto E, médio de $\overline{AM}$, e vai intersectar $\overline{AC}$ em F. Calcule a medida de $\overline{BE}$, sabendo que $\overline{BF}$ mede 18 cm.

49) Na figura, ABCD é um retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Calcule $\overline{MS}$, sabendo que $\overline{AB} = 21\,m$.



50) Na figura, $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$ e $\overline{BD} = \overline{BA}$. Calcule o ângulo Â do trapézio ABCD.



51) Um triângulo tem lados iguais a 6, 4 e 8. Determine o perímetro do triângulo que se obtém unindo os pontos médios dos lados desse triângulo.

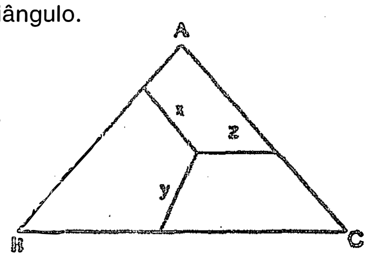
52) Um triângulo tem lados medindo 6, 7 e 9. Determine o perímetro do triângulo que se obtém ao traçarmos de cada vértice uma paralela ao lado oposto.

53) Em um paralelogramo ABCD, as bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ encontram-se em P e as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$ encontram-se em Q. Sendo M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e sabendo que $\overline{PM} = 5$ e $\overline{QN} = 3$, determine o perímetro desse quadrilátero.

54) Em um triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa forma com ela um ângulo que vale 70°. Determine a medida do menor ângulo agudo desse triângulo.

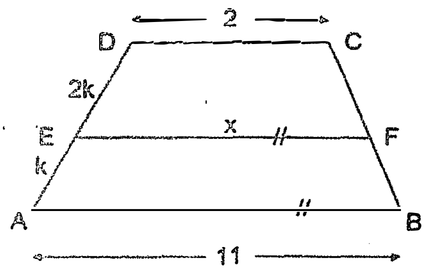
55) As diagonais de um quadrilátero medem 6 e 10. Determine o perímetro do quadrilátero convexo que se obtém unindo os pontos médios dos lados desse quadrilátero.

56) Na figura, ABC é um triângulo equilátero. Sabendo que os segmentos x, y e z são paralelos aos lados do triângulo e que x + y + z = 12, determine o perímetro desse triângulo.



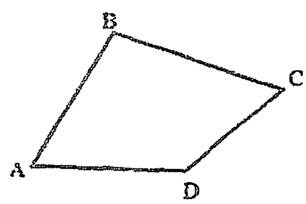
57) Em um trapézio retângulo ABCD, considere o ponto M, médio do maior lado oblíquo $\overline{BC}$. Se a base menor $\overline{DC}$ é congruente ao segmento $\overline{CM}$ e o ângulo $A\hat{M}C = 126°$, a medida do ângulo $\hat{B}$ do trapézio é:
a) 42°.
b) 63°.
c) 84°.
d) 105°.
e) 126°.

58) Na figura abaixo, ABCD é um trapézio. Calcule x.



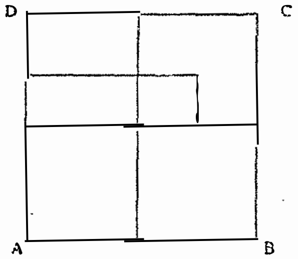
59) Em um paralelogramo ABCD, o lado $\overline{AB}$ é o dobro do lado $\overline{BC}$. Sendo M o ponto médio do lado $\overline{CD}$, determine a medida do ângulo $A\hat{M}B$.

60) Na figura, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e o ângulo $\hat{D}$ vale o dobro do ângulo $\hat{B}$. Calcule o segmento $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{AD} = 6cm$ e $\overline{CD} = 4\ cm$.



QUESTÕES DE CONCURSOS

61) **(CM)** Observe o quadrilátero ABCD, indicado na figura abaixo.



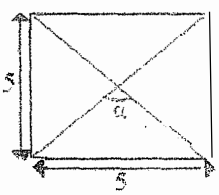
O número máximo de quadriláteros que podem ser visualizados na figura é:
a) 6
b) 8
c) 12
d) 14
e) 16

62) **(UERJ)** Se um polígono tem todos os lados iguais, então todos os seus ângulos internos são iguais.
Para mostrar que essa proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:
a) Losango.
b) Trapézio.
c) Retângulo.
d) Quadrado.

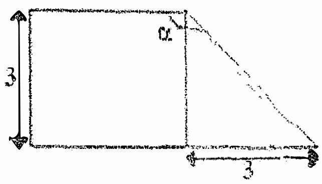
63) **(ENEM)** Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1:3.
O ângulo menor desse paralelogramo mede:
a) 45°
b) 50°
c) 55°
d) 60°
e) 65°

64) **(CAP - UFRJ)** A razão entre a base e a altura de um retângulo é 2,4 e seu perímetro mede 17 cm. Nessas condições, quanto mede a base desse retângulo ?

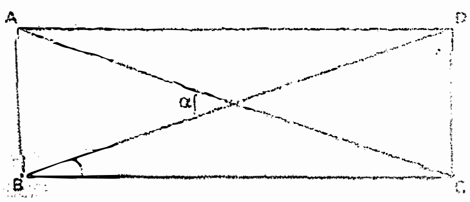
65) **(CM)** Observe a figura ao lado.
A medida do ângulo a, indicado na figura abaixo, é de:
a) 90°
b) 80°
c) 60°
d) 30°



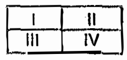
66) **(CM)** Observe a figura a seguir.
A medida do ângulo, a, indicado na figura abaixo, é de:
a) 90°
b) 120°
c) 135°
d) 150°



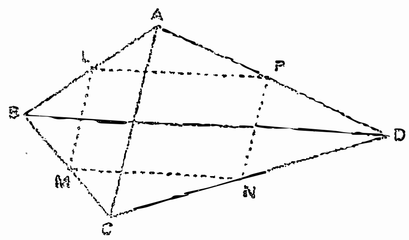
67) **(CM)** Se na figura abaixo o quadrilátero ABCD é um retângulo, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ suas diagonais e o ângulo agudo DBC mede 25°, então a medida do ângulo a é:
a) 30°
b) 35°
c) 40°
d) 45°
e) 50°



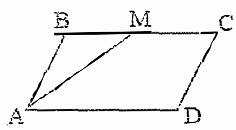
68) **(CEFET)** Uma bandeira de formato retangular é dividida em 4 partes também retangulares, como mostra a figura. Se as regiões II e III têm perímetros iguais, respectivamente, a 14cm e 18cm, pode-se afirmar que o perímetro da bandeira, em cm, é igual a
a) 20
b) 24
c) 26
d) 28
e) 32



69) **(CM)** Se na figura a seguir os pontos L, M, N e P são respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD}$ do quadrilátero ABCD e AC = 10 cm e BD = 16 cm, então o perímetro do quadrilátero LMNP é:
a) 26 cm
b) 13 cm
c) 20 cm
d) 24 cm
e) 16 cm



70) **(CM)** Na figura abaixo ABCD é um paralelogramo, e M é o ponto médio do lado BC.



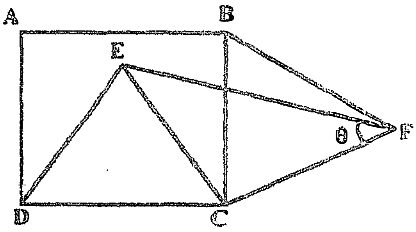
A diferença entre o perímetro do triângulo ABM e o perímetro do trapézio AMCD é igual a:
a) AM + CD
b) AD + CD
c) $\frac{AD + CD}{2}$
d) $AD + \frac{CD}{2}$
e) AD

71) **(CM)** Num trapézio, a base média mede 11 cm e a diferença entre os lados não paralelos é de 3 cm. Se o perímetro do trapézio é de 75 cm, a medida, em centímetros, do maior dos lados não paralelos é:
a) 22
b) 25
c) 27
d) 28
e) 32

72) **(CN)** As bases de um trapézio medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base média, são proporcionais aos números:
a) 1, 1, 1
b) 1, 2, 1
c) 1, 3, 1
d) 1, 4, 1
e) 2, 3, 4

73) **(CN)** A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB ?
a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 75°
e) 90°

74) **(PUC)** Na figura, ABCD é um quadrado, DEC e BCF são triângulos equiláteros. Determine o ângulo q.



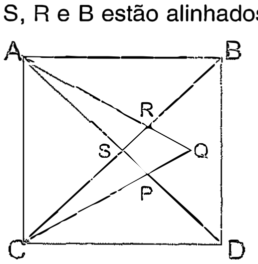
75) **(CN)** Considere um quadrado ABCD e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:
a) 270°
b) 300°
c) 330°
d) 360°
e) 390°

76) **(CN)** Um quadrilátero convexo Q tem diagonais respectivamente iguais a 4 e 6. Assinale dentre as opções, a única possivel para o perímetro de Q.
a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

77) **(CN)** Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos **não** são paralelos. Se as medidas dos lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado $\overline{BC}$) é:
a) 12,5
b) 14
c) 14,5
d) 16
e) 17

78) **(CN)** O número de trapézios distintos que se pode obter dispondo-se de 4, e apenas 4 segmentos de reta medindo, respectivamente, 1 cm, 2 cm, 4 cm e 5 cm é:
a) Nenhum.
b) Um.
c) Dois.
d) Três.
e) Quatro.

79) **(EPCAR)** Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e ACQ é um triângulo equilátero.
Os pontos D, S, R e B estão alinhados assim como A, S, P e C.



Se $\overline{RB} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QC}$, então é INCORRETO afirmar que:

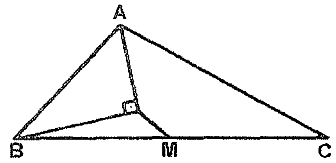
a) nos triângulos CBQ e SAR tem-se $S\hat{A}R \neq C\hat{B}Q$.

b) nos triângulos BQD, ARB e AQD tem-se $B\hat{Q}D + A\hat{R}D = 4(A\hat{Q}D)$.

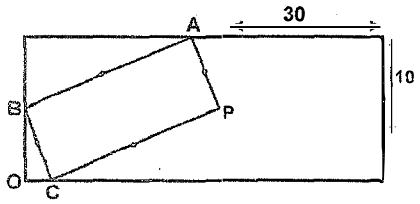
c) a soma dos ângulos $D\hat{P}C$ e $A\hat{S}D$ dos triângulos DPC e ASD é maior do que o ângulo $B\hat{Q}C$ do triângulo BQC.

d) nos triângulos SAR e PCQ tem-se $S\hat{R}A - C\hat{P}Q = 0$.

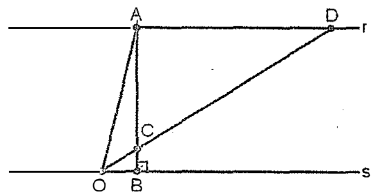
80) **(E. E. AER)** Na figura, M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, $\overline{AN}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e $\overline{BN}$ é perpendicular a $\overline{AN}$. Se $\overline{AB} = 14$ e $\overline{AC} = 20$, a medida do segmento $\overline{MN}$ é:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6



81) **(UFRJ)** Em uma mesa de bilhar, uma bola está situada no ponto P, a 30 cm do menor lado da mesa e a 10 cm do maior. Teixeirinha, em uma exibição, dá uma tacada em que a bola, após três tabelas, volta ao ponto P, percorrendo o caminho PABCP, conforme a figura abaixo. Em cada tabela, o ângulo de incidência é igual ao de reflexão. Calcule a distância BO.



82) **(E. E. AER)** Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas e o segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a elas. Sabendo que $\overline{CD} = 2\overline{AO}$ e $B\hat{O}C = 18°$, calcule a medida do ângulo $A\hat{O}B$.



83) **(CN)** Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo ABCD. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?
a) 120°
b) 135°
c) 150°
d) 165°
e) 175

GABARITO

1) B
2) 2 de 125° e 2 de 55°
3) 2 de 110° e 2 de 70°
4) 2 de 74° e 2 de 106°
5) 30° 22' 42"
6) 40° e 120°
7) 56°
8) 2 de 60° e 2 de 120°
9) 43°, 137° e 137°
10) 2 de 110° e 2 de 70°
11) 80°, 70°, 120° e 90°
12) 90°, 90°, 45° e 135°

13) 2 de 45° e 2 de 135°
14) 104° e 87°
15) 2 de 45° e 2 de 135°
16) 69°, 111°, 90° e 90°
17) 75°, 90°, 135° e 60°
18) 2 de 75° e 2 de 105°
19) 144°
20) 2 de 58° e 2 de 122°
21) 90°, 30°, 90° e 150°
22) 104°
23) B
24) 5,2 cm
25) 2 de 70° e 2 de 110°
26) D
27) 13 e 7
28) 19,5 e 6
29) 12
30) 100 cm
31) 6 cm
32) 13
33) 22 e 18
34) a) 8
b) 11
c) 14
35) a) 85°
b) 95°
36) 40°
37) 110°
38) B
39) 90°
40) 90°
41) 76°
42) 30°
43) 75°
44) $4\sqrt{3}$ cm
45) 2
46) 21
47) 6 cm
48) 13,5 cm
49) 7 m
50) 72°
51) 9
52) 44
53) 32
54) 35°
55) 16
56) 36
57) C
58) 8
59) 90°
60) 10 cm
61) D
62) A
63) A
64) 6 cm
65) A
66) C
67) E
68) E
69) A
70) E
71) D
72) B
73) D
74) 45°
75) B
76) B
77) A
78) B
79) A
80) B
81) 10 cm
82) 54°
83) B

OBSERVAÇÕES

Círculo

Circunferência

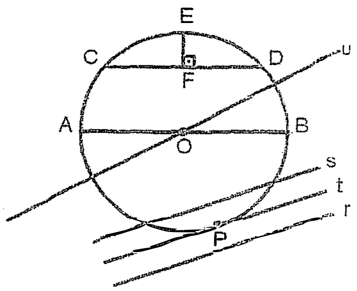
Definição: circunferência é o conjunto dos pontos do plano eqüidistantes de um ponto fixo chamado **centro**.

Círculo

Definição: círculo é o conjunto dos pontos do plano cuja distância até um ponto fixo (centro) é menor ou igual a um valor dado chamado de **raio**.

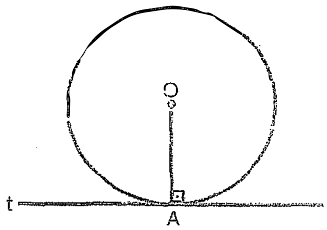
Elementos do círculo

O	$\to$	centro
$\overline{OA}$	$\to$	raio
$\overline{CD}$	$\to$	corda
$\overline{AB}$	$\to$	diâmetro (corda máxima)
$\widehat{CD}$	$\to$	arco
$\overline{EF}$	$\to$	flecha
r	$\to$	reta exterior
s	$\to$	reta secante
t	$\to$	reta tangente
u	$\to$	reta secante diametral
P	$\to$	ponto de tangência



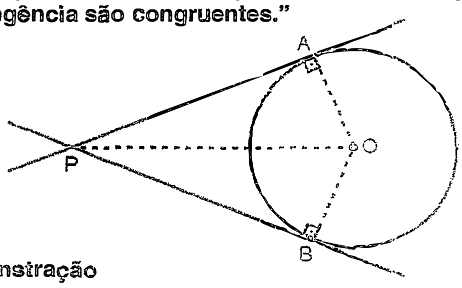
Observações importantes

1) **"O raio que passa pelo ponto de tangência é perpendicular à tangente."**



$\boxed{\overline{OA} \perp t}$

2) **"Quando traçamos, por um ponto exterior, duas tangentes a uma mesma circunferência, os segmentos compreendidos entre o ponto exterior e os pontos de tangência são congruentes."**

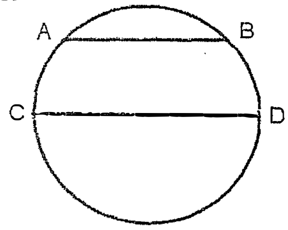


Demonstração

Os triângulos AOP e BOP são congruentes pois ambos são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa $(\overline{OP})$ e dois catetos congruentes $(\overline{OA} = \overline{OB})$. Daí temos que:

$$\boxed{\overline{PA} = \overline{PB}}$$

3) **"Cordas paralelas de um círculo determinam arcos congruentes."**

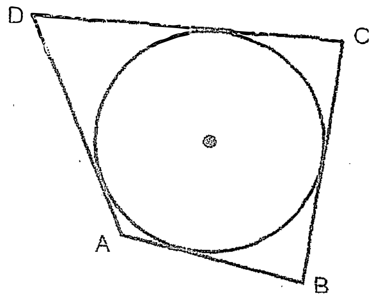


$$\boxed{\overline{AB} // \overline{CD} \to \widehat{AC} = \widehat{BD}}$$

4) **Teorema de Pitot**

"Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é sempre igual à soma dos outros dois."

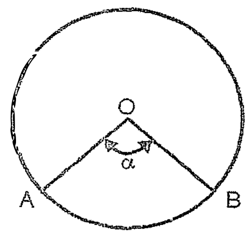
$$\boxed{\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}}$$



ÂNGULOS NO CÍRCULO

Ângulo central

É o ângulo cujo vértice é o centro do círculo. A medida do ângulo central é igual à medida do arco compreendido entre os lados do ângulo que são dois raios.

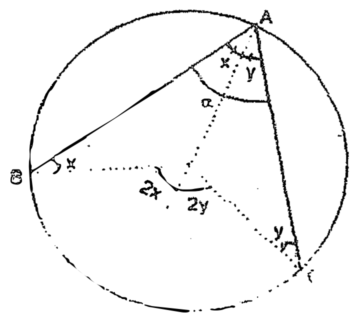


$\hat{\alpha}$ - ângulo central

$$\boxed{\hat{\alpha} = \widehat{AB}}$$

Ângulo inscrito

É o ângulo cujo vértice encontra-se na circunferência e seus lados são duas cordas. A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco subentendido entre seus lados.

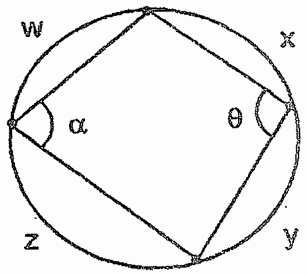


$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\widehat{BC}}{2}}$$

$\hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{y} =$ ângulo inscrito

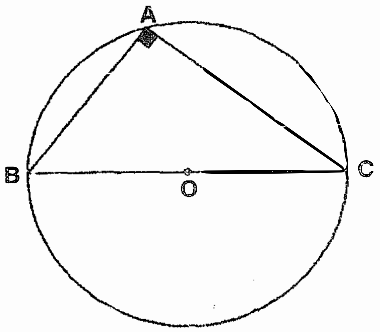
Corolários

1) **"Em todo quadrilátero inscritível dois ângulos opostos são suplementares."**



$$\boxed{\hat{\alpha}+\hat{\theta}=180°}$$

2) **"Todo triângulo inscrito em um círculo que apresente o diâmetro como um de seus lados é *retângulo* e tem o diâmetro como hipotenusa":**



Demostração

Se $\overline{BC}$ é diâmetro, então $\overset{\frown}{BC} = 180°$.

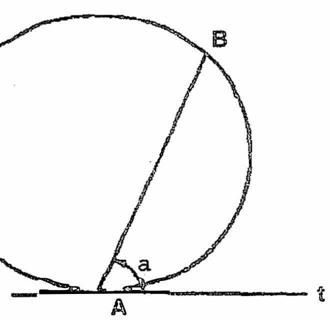
Como o ângulo BÂC é inscrito, temos que:

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Daí que o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $\overset{\frown}{BC}$.

Ângulo de segmento

É o ângulo cujo vértice está na circunferência e seus lados, são uma tangente e uma corda que parte do ponto de tangencia.

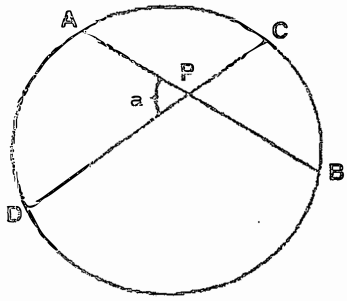


â - ângulo de segmento

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Ângulo excêntrico interior

É o ângulo cujos lados são duas cordas que se intersectam no interior do círculo, mas não no centro.

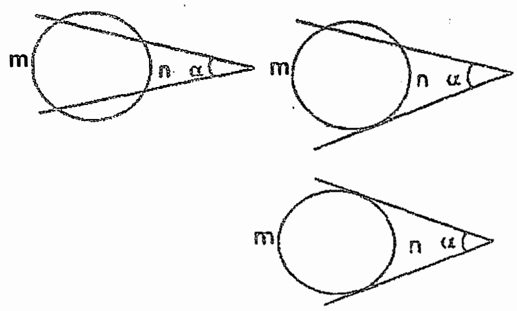


â - ângulo excêntrico interior

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{2}}$$

Ângulo excêntrico exterior

É o ângulo cujos lados são duas secantes, ou uma secante e uma tangente, ou duas tangentes que se intersectam em um ponto no exterior ao círculo. No caso dos lados serem duas tangentes o ângulo excêntrico exterior é chamado de ângulo ***circunscrito***.



â - ângulo excêntrico exterior.

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\hat{m}-\hat{n}}{2}}$$

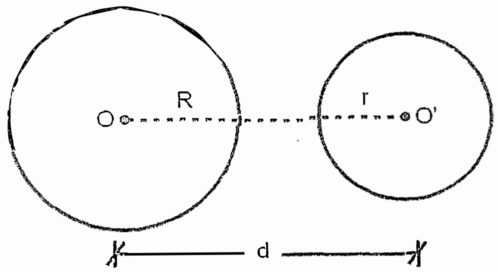
Obs.: No caso do ângulo circunscrito, este pode ser calculado através do suplemento do menor arco, ou seja:

$$\boxed{\hat{\alpha} = 180° - \hat{n}}$$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

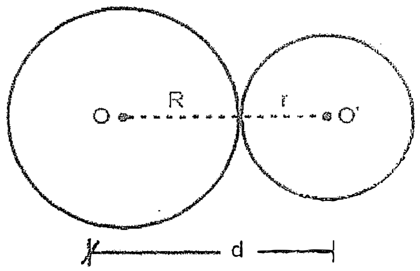
Consideremos uma circunferência de centro O e raio R, e outra de centro O' e raio r, de modo que $\overline{OO'} = d$. A partir daí, vamos analisar todas as posições relativas entre elas, supondo que $R < r$.

1) Exteriores



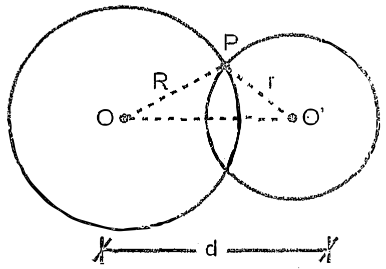
Condição: $\boxed{d > R + r}$

2) Tangentes exteriores



Condição: $\boxed{d = R + r}$

3) Secantes

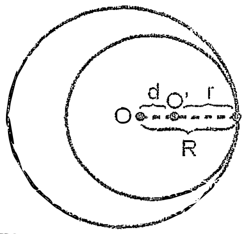


Observe que para que as circunferências sejam secantes, é necessário que o triângulo OO'P existe. Daí, apliquemos as condições de existência de um triângulo.

Condição: $\boxed{R - r < d < R + r}$

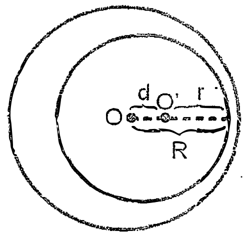
Importante: Quando em duas circunferências, o ângulo $O\hat{P}O'$ for igual a 90°, as circunferências são chamadas de **ortogonais**.

4) Tangentes interiores



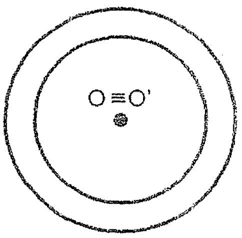
Condição: $\boxed{d = R - r}$

5) Interiores



Condição: $\boxed{d < R - r}$

6) Concêntricas



Condição: $\boxed{d = 0}$

Exemplos:

Considerando-se duas circunferências de raios R = 10 e r = 3, determine a posição relativa entre elas, em cada caso a seguir:

a) d = 7

Resolução: Note que d = R - r = 10 - 3 = 7, logo são tangentes interioes.

b) d = 15

Resolução: Como R + r = 13, temos que d > R + r, e portanto elas são exteriores.

c) d = 9

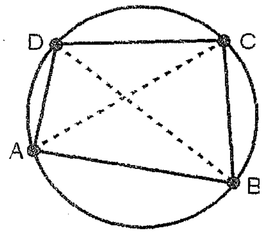
Resolução: Temos que R - r = 7 e R + r = 13. Verificamos que R - r < d < R + r, e portanto elas são secantes.

d) d = 6

Resolução: Visto que d < R - r, elas são interiores

TEOREMA DE HIPARCO

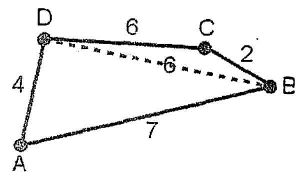
Em todo quadrilátero convexo, inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.



$$\boxed{\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{DC} + \overline{AD} \times \overline{BC}}$$

Exemplo:

Sabendo-se que o quadrilátero abaixo é inscritível, determine a medida da diagonal $\overline{AC}$.



Resolução:

$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{DC} + \overline{AD} \times \overline{BC}$

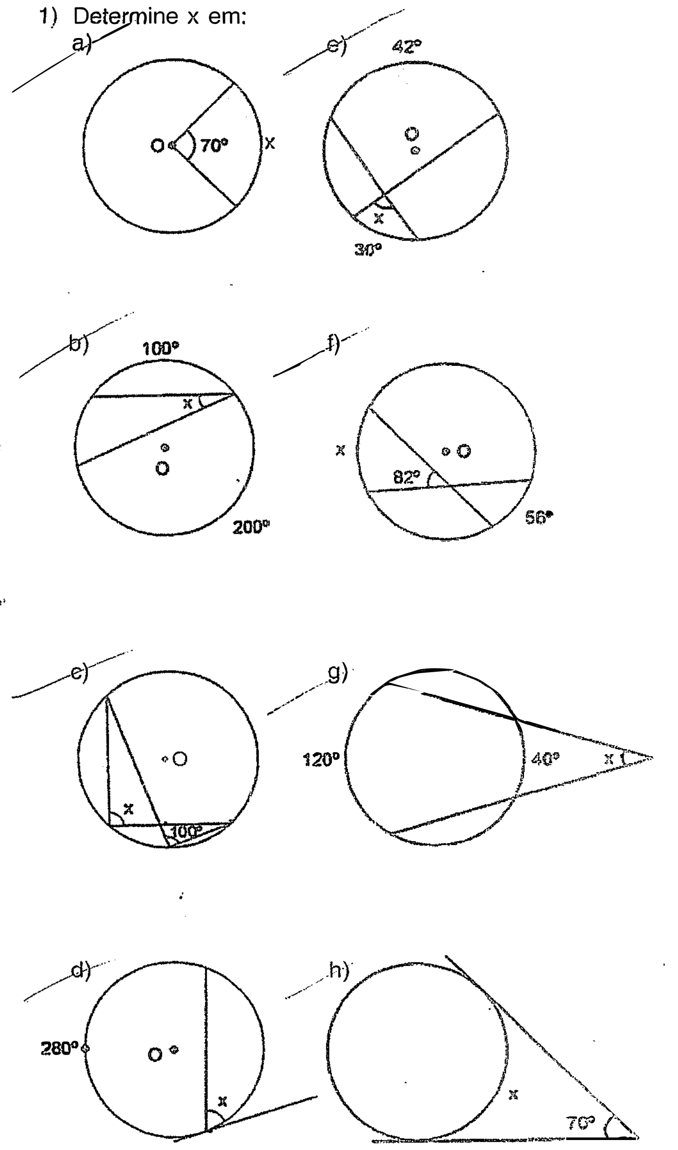
$x \cdot 6 = 7 \cdot 6 + 4 \cdot 2$

$6x = 50$

$x = 25/3$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine x em:



2) Determine a medida do menor arco subentendido pela corda $\overline{AB}$, nos casos em que $\overline{AB}$ é:
   a) o lado de um triângulo equilátero inscrito.
   b) o lado de um quadrado inscrito.
   c) o lado de um pentágono regular inscrito.
   d) o lado de um hexágono regular inscrito.
   e) o lado de um octógono regular inscrito.
   f) o lado de um icoságono regular inscrito.
   g) um diâmetro.

3) Os lados de um ângulo excêntrico exterior subentendem na circunferência dois arcos expressos por 4x + 11° e 2x - 21°. Determine o valor de x, sabendo-se que o referido ângulo mede 33°.

4) Um ângulo inscrito é formado por um diâmetro e uma corda, e mede 74°. Determine o valor do arco subentendido pela corda.

5) Calcular o ângulo inscrito formado por duas cordas que são os lados do quadrado e do hexágono regular inscritos.

6) Duas cordas intersectam-se no interior de um círculo formando um ângulo de 140°. Sabendo-se que um dos arcos equivale a 3/4 do outro, determine a medida do maior arco.

7) Um ângulo excêntrico interior mede 59°, e a diferença entre as medidas dos arcos por ele subentendidos na circunferência vale 46°. Determine as medidas desses arcos.

8) Por um ponto P, exterior a um círculo, traçam-se as secantes PAB e PCD, sendo esta diametral. Se os menores arcos $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BD}$ são, nesta ordem, proporcionais a 1, 2 e 3, determine a medida do ângulo $B\hat{P}D$.

9) De um ponto P, exterior a um círculo, traçam-se as tangentes $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$. Os pontos M e N dividem a circunferência em dois arcos tais que a diferença entre o dobro da medida do maior e o triplo da medida do menor, dá 20°. Determine a medida do ângulo $M\hat{P}N$.

10) Em um círculo, a tangente t toca a circunferência no ponto P. A partir de P é traçada uma corda que divide a circunferência em dois arcos proporcionais a 7 e 2.
Determine a medida do menor dos ângulos formados pela corda e a tangente.

11) Sobre uma circunferência são marcadas, nesta ordem, os pontos A, B, C e D, e os menores arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DA}$ são expressos, respectivamente, por 4x - 8°, 5x - 20°, 6x - 12° e 3x + 4°. Determine o(s) ângulos(s):
    a) $A\hat{B}D$
    b) do triângulo BCD
    c) do quadrilátero ABCD
    d) formado pelas cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

12) Sobre uma circunferência marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Sabendo-se que $\overline{AB}$ é o lado de um pentágono regular, $\overline{CD}$ é o lado de um triângulo equilátero e que os menores arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{BC}$ estão na razão 3 para 4, determine:
    a) As medidas dos ângulos do quadrilátero ABCD.
    b) O ângulo formado pelas diagonais do quadrilátero ABCD.
    c) O ângulo formado pelos prolongamentos das cordas $\overline{DA}$ e $\overline{CB}$.

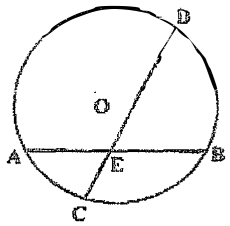
13) Sobre uma circunferência são marcados, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Sabendo-se que as cordas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero, hexágono regular e quadrado inscritos, determine o(s) ângulo(s):
    a) do quadrilátero ABCD.
    b) do triângulo ABC.
    c) do triângulo BCD.
    d) formado pelas diagonais do quadrilátero ABCD.
    e) formado pelos prolongamentos das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$.

14) Sobre uma circunferência são marcados os pontos A, B e C. Os menores arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$ medem, respectivamente, 3x + 14°, 2x + 16° e 6x - 22°. Determine os ângulos do triângulo ABC.

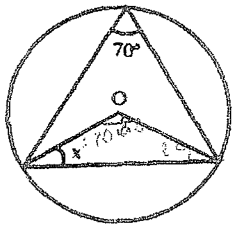
15) Em um círculo, a corda $\overline{AB}$ é o lado de um decágono regular inscrito. Sua mediatriz intersecta a circunferência nos pontos C e D. Determine os ângulos dos triângulos ABC e ABD.

16) Um triângulo ABC está inscrito em um círculo cujo centro encontra-se no interior do triângulo. Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero e do quadrado inscritos, determine os ângulos desse triângulo. Quais seriam os ângulos desse triângulo, se o centro do círculo estivesse em seu exterior ?

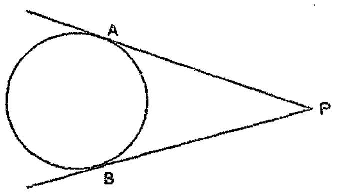
17) Na figura, o ângulo AÊC mede 80° e o arco $\widehat{AC}$ mede 100°. A medida do arco $\widehat{BD}$ é:
a) 45°
b) 50°
c) 60°
d) 75°
e) 90°



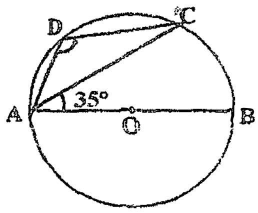
18) Na figura, O é o centro da circunferência. Determine a medida do ângulo $\hat{x}$.



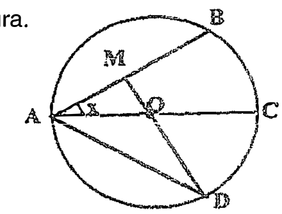
19) Na figura abaixo, $\overline{AB}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito. Determine a medida do ângulo $A\hat{P}B$.



20) A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:
a) 125°
b) 110°
c) 120°
d) 100°
e) 135°

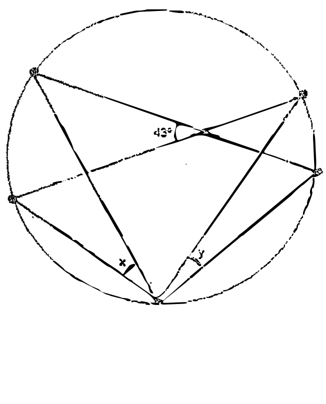


21) Observe a figura.

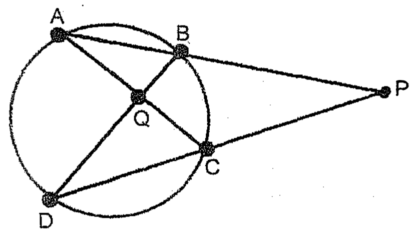


Nessa figura, B e D são pontos da circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AC}$, M é ponto médio da corda $\overline{AB}$ e o ângulo $A\hat{D}M$ mede 35°. A medida x do ângulo BÂC, em graus é:
a) 20
b) 25
c) 30
d) 35
e) 37,5

22) Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

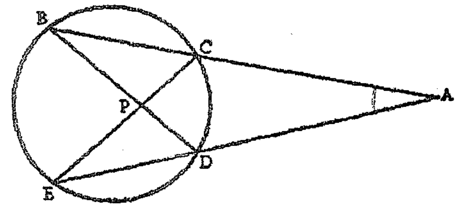


23) Na figura abaixo, sabe-se que $A\hat{B}D = x$ e $C\hat{A}B = y$. Determine as medidas dos ângulos $A\hat{Q}D$ e $A\hat{P}D$.

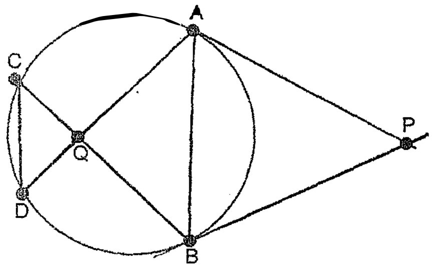


24) Na figura anterior, se $A\hat{Q}D = \alpha$ e $A\hat{P}D = \beta$, determine as medidas dos ângulos $A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$.

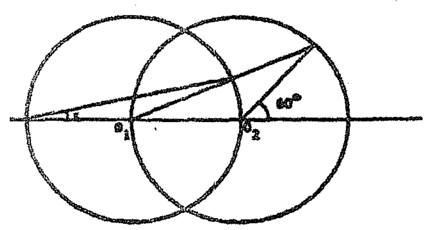
25) Na figura abaixo, o ângulo $A\hat{B}D$ mede 20° e o ângulo $C\hat{P}D$ mede 60°. Determine a medida do ângulo BÂE.



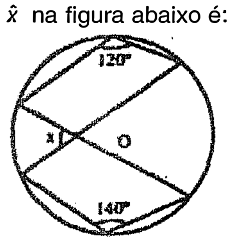
26) Na figura abaixo, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes, $\overline{AB}$ é o lado de um triângulo equilátero, $\overline{CD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito no círculo e BÂD = 50°. Assim, determine as medidas dos ângulos $A\hat{P}B$, $A\hat{Q}B$, $B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C$.



27) Determine a medida do ângulo x na figura abaixo, onde são representados dois círculos de centros 0_1 e 0_2.

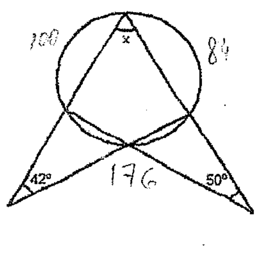


28) O valor de $\hat{x}$ na figura abaixo é:



a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

29) Na figura abaixo, determine o valor do ângulo x.

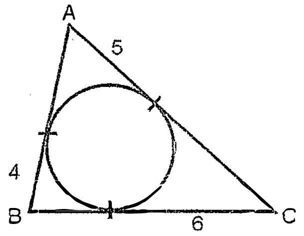


30) Determine os ângulos de um trapézio inscrito em um *semicírculo*, sabendo-se que suas bases são os lados de um quadrado e de um pentágono regular inscritos.

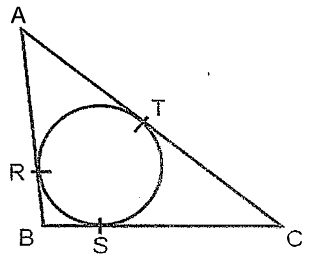
31) Um dos lados oblíquos de um trapézio inscrito é o lado de um triângulo equilátero e uma das bases é o lado de um decágono regular. Determine os ângulos desse trapézio.

32) Um trapézio ABCD está inscrito em um círculo e suas bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são, respectivamente, os lados do hexágono regular e do triângulo equilátero inscritos. Determine as medidas dos ângulos desse trapézio.

33) Determine o perímetro do triângulo da figura abaixo:

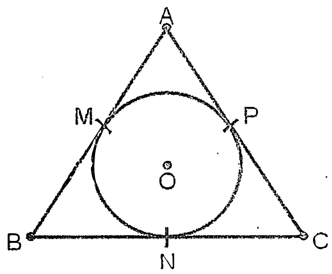


34) Na figura abaixo, $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=8$ e $\overline{AC}=11$. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AR}$, $\overline{BS}$ e $\overline{CT}$.

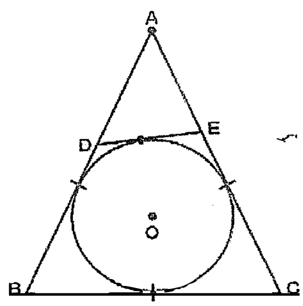


35) Na figura abaixo, o círculo de centro O está inscrito no triângulo ABC, com pontos de contato M, N e P. Sabendo-se que as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são, respectivamente, 9, 11 e 10, determine:

a) $\overline{AM}$
b) $\overline{BN}$
c) $\overline{CP}$
d) $\overline{AP}+\overline{BM}+\overline{CN}$



36) Na figura abaixo, no triângulo ABC, de perímetro 32 e base $\overline{BC}=11$, está inscrito um círculo de centro O. Se o segmento $\overline{DE}$ é tangente a esse mesmo círculo, determine o perímetro do triângulo ADE.



37) Determine a medida do raio r do círculo inscrito em um triângulo retângulo de perímetro 2p e hipotenusa a.

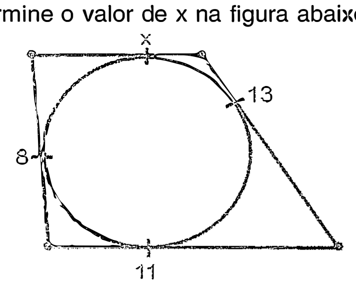
38) Detemine o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de lados 41, 40 e 9.

39) O raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo vale 1. Determine as medidas dos lados desse triângulo, sabendo que eles são números inteiros e consecutivos.

40) De um ponto exterior P são traçadas duas tangentes $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ a um círculo. Por um ponto T do menor arco $\widehat{AB}$ é traçada uma tangente que intersecta $\overline{PA}$ em M e $\overline{PB}$ em N. Se o comprimento de $\overline{PA}$ é 17 cm, determine o perímetro do triângulo PMN.

41) Em um quadrilátero circunscritível, dois lados opostos medem 7 e 9. Determine as medidas dos outros, sabendo-se que a medida de um deles é a terça parte da medida do outro.

42) Determine o valor de x na figura abaixo.



43) Em um quadrilátero convexo circunscritível ABCD, tem-se $\overline{AB}=5x-3$, $\overline{BC}=2x+3$, $\overline{CD}=x+2$ e $\overline{DA}=3x-1$. Determine o valor de x.

44) As bases de um trapézio circunscritível medem 6 e 8. Determine o seu perímetro.

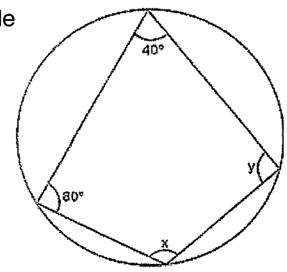
45) Determine o perímetro de um trapézio circunscrito a um círculo, sabendo-se que sua base média tem medida K.

46) Em uma circunferência são marcados os pontos A, B e C, sendo que A e B são extremos de um mesmo diâmetro. Sabendo que $C\hat{A}B = 34°$, determine a medida do ângulo $C\hat{B}A$.

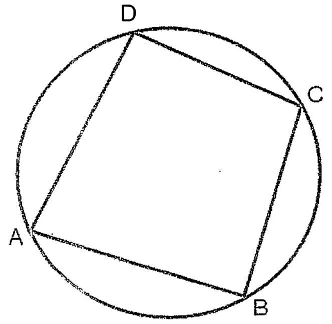
47) Um dos lados de um triângulo inscrito em um círculo é o diâmetro. Determine os ângulos desse triângulo, sabendo-se que o maior deles é o triplo do menor.

48) A diferença entre as medidas dos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ na figura abaixo vale

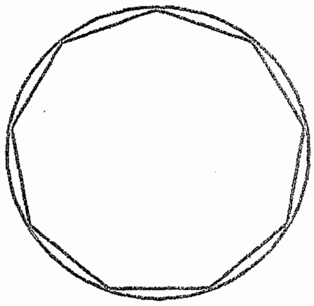
a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



49) Na figura abaixo, determine a medida do segmento $\overline{AC}$, sabendo-se que $\overline{AB}=\overline{BC}=6$, $\overline{CD}=5$, $\overline{AD}=7$ e $\overline{BD}=8$.



50) Em um quadrilátero convexo inscritível ABCD, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são, nesta ordem, expressas por números inteiros e consecutivos, enquanto que $\overline{BD} = 2\overline{AB}$. Determine o perímetro desse quadrilátero.



61) Duas circunferências têm raios R e r, e a distância entre seus centros é d. Verifique a posição relativa entre elas nos casos a seguir:
a) R = 7, r = 3 e d = 4
b) R = 9, r = 4 e d = 3
c) R = 7, r = 2 e d = 11
d) R = 5, r = 3 e d = 0
e) R = 6, r = 2 e d = 7
f) R = 8, r = 3 e d = 11
g) R = 7, r = 4 e d = 8
h) R = 9, r = 5 e d = 2

52) Quantas retas são tangentes comuns a duas circunferências:
a) Tangentes exteriores ?
b) Secantes ?
c) Concêntricas ?
d) Exteriores ?
e) Interiores ?
f) Tangentes interiores ?

53) Três círculos tangentes exteriores dois a dois, têm centros nos pontos M, N e P. Determine os seus sabendo-se que $\overline{MN} = 8$, $\overline{MP} = 13$ e

54) Duas circunferências de raios 4 e 10 são tangentes exteriores, e, simultaneamente, tangentes interiores a uma terceira circunferência de raio r. Determine valor de r.

55) Duas circunferências concêntricas têm raios x e y. Determine os raios de duas outras que as tangenciam.

56) Duas circunferências concêntricas têm raios iguais a 10 e 4. Determine os raios de duas outras circunferências simultaneamente tangentes a elas.

57) Determine os raios de duas circunferências concêntricas, sabendo que os raios de duas outras que as tangenciam, medem 5 e 9.

58) Duas circunferências C_1 e C_2 têm raios 8 e 20, e seus centros distam de 32 unidades. Determine o raio de uma outra circunferência, cujo centro seja colinear aos centros das duas circunferências anteriores, nos seguintes casos:
a) Envolve C_1 e C_2, tangenciando-as.
b) É tangente exterior a C_1 e C_2, ao mesmo tempo.
c) É tangente exterior a C_1 e envolve C_2, tangenciando-a.
d) É tangente exterior a C_2 e envolve C_1, tangenciando-a.

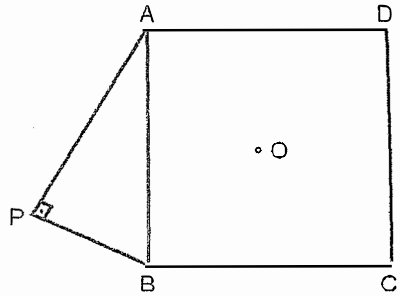
59) Uma circunferência de raio 7 cm é tangente a duas circunferência concêntricas e envolve a menor. Determine o raio da menor, sabendo-se que o raio da maior é 10 cm.

60) Duas circunferências secantes são tais que cada uma delas passa pelo centro da outra. Se o raio de uma delas mede 3p cm, determine o perímetro do quadrilátero convexo obtido unindo-se os centros aos pontos de interseção das circunferências.

61) A distância d entre os centros de duas circunferências interiores de raios 9 e 2, é expressa por um número inteiro. Qual o maior valor possível para d ? E se essas circunferências fossem secantes, qual seria o menor valor possível de d ?

62) Em um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overline{BC}$, a circunferência de centro B e raio $\overline{AB}$ intersecta a hipotenusa em N, enquanto a circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$ encontra tal hipotenusa em M. Determine a medida do segmento $\overline{MN}$, sabendo que o raio do círculo inscrito no triângulo ABC vale 5.

63) Na figura abaixo, sobre o lado $\overline{AB}$ do quadrado ABCD, constrói-se o triângulo retângulo ABP. Sendo O o centro do quadrado, determine a medida do ângulo $O\hat{P}B$.



64) Considere um quadrado ABCD e o triângulo equilátero ABM, construído sobre o lado $\overline{AB}$, exteriormente ao quadrado. Se as diagonais do quadrado intersectam-se no ponto P, determine a medida do ângulo $A\hat{P}Q$, sendo Q o ponto médio do lado $\overline{AM}$.

65) Para confeccionar um trabalho de artes, para sua escola, Lucas dispunha de certo número de moedas, idênticas. Assim, colou uma delas em um folhas de cartolina e em seguida arrumou as demais em volta dela, tangenciando-a, de modo que cada uma delas tangenciasse a outras duas. Ao final do trabalho verificou ter usado todas as moedas que possuía. Quantas moedas Lucas utilizou em sua obra de arte ?

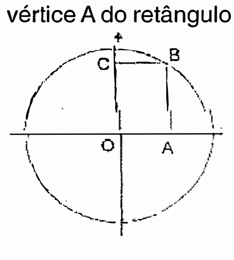
66) Em um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overline{BC}$, tracemos a altura $\overline{AH} = h$, relativa à hipotenusa. Quanto vale a soma dos raios das circunferências inscritas nos triângulos AHB, AHC e ABC ?

67) De um ponto P exterior a um círculo traça-se a secante diametral PAB e a tangente $\overline{PT}$. Une-se o ponto B ao ponto T e traça-se a bissetriz do ângulo $\hat{P}$, que encontra $\overline{BT}$ em C. Determine a medida do ângulo $P\hat{C}B$.

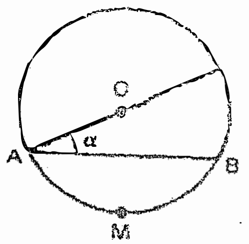
QUESTÕES DE CONCURSOS

68) **(CM)** As circunferências C e D são concêntricas, e a circunferência F é, simultaneamente, tangente exterior a D e tangente interior a C. Sendo e o raio C, d o raio de D e f o raio de F. podemos afirmar que:
a) f = c + d b) f = c - d c) f = d
d) f < d e) $f = \dfrac{c - d}{2}$

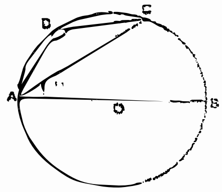
69) **(ENEM)** Na figura ao lado, o vértice A do retângulo OABC está a 6 cm do vértice C.
O raio do círculo mede:
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 9 cm
e)10 cm



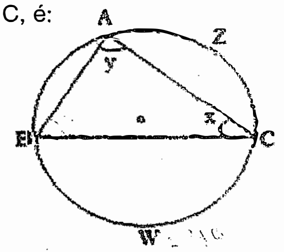
70) **(CM)** Na figura abaixo temos um círculo de centro no ponto O, um diâmetro com extremidade no ponto A e uma corda AB. Se o arco AMB mede 110°, então o ângulo inscrito a mede:
a) 20°
b) 25°
c) 30°
d) 35°
e) 70°



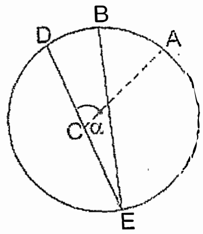
71) **(CM)** Se na figura abaixo os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência de centro O; os pontos A, O e B são colineares e a medida do ângulo agudo CAB é 40°, então a medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:
a) 110°
b) 120°
c) 130°
d) 140°
e) 150°



72) **(CM)** Na figura abaixo, o ângulo x excede o ângulo y de 26°, e o arco Z, compreendido entre os pontos A e C, mede 92°.
A medida, em graus, do arco W, compreendido entre os pontos B e C, é:
a) 108
b) 160
c) 180
d) 200
e) 268

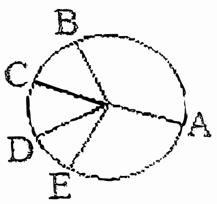


73) **(CM)** Observe a figura abaixo.



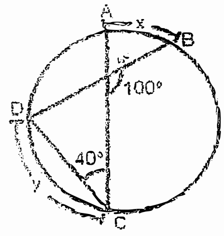
Sabendo-se que o ponto B divide o arco designado por AD exatamente ao meio e que C se encontra no centro da circunferência, pode-se afirmar que:
a) a = 40°
b) a= 35°
c) a = 30°
d) a = 20°

74) **(CM)** Observe a figura abaixo.

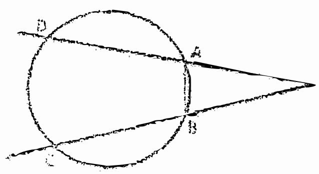


Uma reta é secante à circunferência. Se tal reta passa pelo centro da circunferência e corta a circunferência no menor arco, designado por BC, então a reta também cortará a circunferência no menor arco designado por:
a) AB
b) CD
c) DE
d) AE

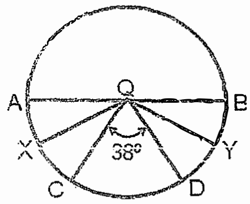
75) **(CEFET)** Sendo $\overset{\frown}{AB} = x$ e $\overset{\frown}{CD} = y$, o valor de x + y é:
a) 90°;
b) 120°;
c) 140°;
d) 150°;
e) 160°.



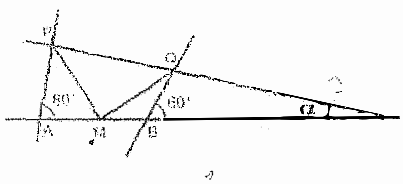
76) **(CEFET)** Os arcos AB, BC, CD e DA e são proporcionais a 2, 4, 8 e 4 respectivamente. A corda AB corresponde à medida do lado de um polígono regular inscrito no círculo cujo número de diagonais é igual a:
a) 27
b) 28
c) 29
d) 30
e) 31

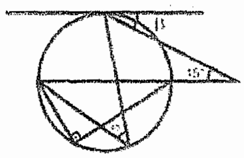


77) **(CEFET)** Na figura, AB é o diâmetro da circunferência de centro Q; QX e QY são respectivamente bissetrizes de AQC e BQD. Desta forma, XQY mede:
a) 76°;
b) 96°;
c) 109°;
d) 138°;
e) 181°.



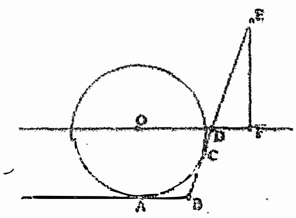
78) **(EPCAR)** Nas figuras abaixo, o valor de α + β é:





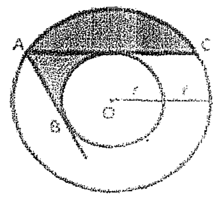
Dados: AM = AP, BM = BQ, MP = MQ
a) 25°
b) 35°
c) 30°
d) 40

79) **(CEFET)** Na figura abaixo O é o centro de uma circunferência que tangencia a semirreta BA no ponto A e tangencia o segmento BE no ponto C. Sabendo ainda que BA é paralela a reta OF, que o segmento EF é perpendicular a OF e que o menor arco da circunferência com extremidades em A e C mede 60°, podemos afirmar que o ângulo FÊD mede:
a) 20°
b) 30°
c) 50°
d) 60°



80) **(EPCAR)** Em um círculo de centro O e raio r, o prolongamento de uma corda AB que não contém o diâmetro é um segmento BC de comprimento igual a r. A reta CO corta o círculo em D e E (D entre O e C). Se ACE mede 20°, então AOE mede:

a) 60°
b) 45°
c) 40°
d) 30°



81) **(CN)** Num círculo, duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam no ponto I, interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°

82) **(CN)** Num quadrilátero inscritível, um de seus ângulos é a sexta parte do seu ângulo oposto. Escrito em graus, minutos e segundos, o número da parte inteira de segundos, do referido ângulo, é:
a) 50
b) 51
c) 52
d) 53
e) 54

83) **(CN)** Sobre o lado BC do quadrado ABCD constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero PCDB convexo. Se o ângulo $P\hat{D}C$ é congruente ao ângulo PBC, pode-se afirmar que o quadrilátero PCDB é
a) sempre inscritível em um círculo.
b) sempre circunscritível a um círculo.
c) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.
d) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.
e) impossível de ser inscrito em um círculo.

84) **(CN)** Considere as 4 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses conforme sejam verdadeiras ou falsas, e assinale a alternativa correta.
I- ( ) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.
II- ( ) As diagonais de um trapézio podem se interceptar no seu ponto médio.
III- ( ) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango ou um quadrado.
IV- ( ) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se interceptam.

a) Apenas II é verdadeira.
b) Apenas III é verdadeira.
c) Apenas III e IV são verdadeiras.
d) II, III e IV são verdadeiras.
e) I e IV são verdadeiras.

85) **(CN)** Os pontos X, O e Y são vértices de um polígono regular de n lados. Se o ângulo $X\hat{O}Y$ mede 22° 30', considerando-se as afirmativas:
I- n pode ser igual a 8.
II- n pode ser igual a 12.
III- n pode ser igual a 24.

Podemos afirmar que:
a) apenas I e II são verdadeiras.
b) apenas I e III são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) apenas uma delas é verdadeira.

86) **(CN)** Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com a < b < c, é:

a) $\frac{c^2+b^2}{a}$

b) $\frac{cb}{a}$

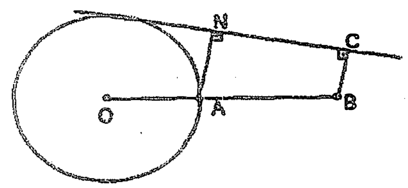
c) $\frac{c^2-b^2}{a}$

d) $\frac{(c+b)^2}{a}$

e) $\frac{(c-b)^2}{a}$

87) **(CN)** Considere um triângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z, (x < y < z) são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então
a) $z = 360° - y$.
b) $z = x + y$.
c) $x + y + z = 180°$.
d) $x + y = 180°$.
e) $z = 2x + y$.

88) **(IME)** Na figura, a reta r é tangente ao círculo, $\overline{AB} = \overline{OA}$, $O\hat{A}C = 126°$ e $\overline{AN}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares à reta r. Calcule $A\hat{C}B$.



89) **(CM)** Uma moeda é colocada deitada sobre uma mesa. O número máximo de moedas iguais a ela que podem ser colocadas deitadas sobre a mesa, tangentes a ela e a o redor dela, e duas a duas tangentes entre si é:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

GABARITO

1) a) 70°
b) 30°
c) 100°
d) 40°
e) 36°
f) 108°
g) 40°
h) 110°

2) a) 120°
b) 90°
c) 72°
d) 60°
e) 45°
f) 18°
g) 180°

3) 17°
4) 32°
5) 15° ou 105°
6) 160°
7) 82° e 36°
8) 30°
9) 40°
10) 40°

11) a) 35°
b) 60°, 75° e 45°
c) 105°, 95°, 75° e 85°
d) 80° e 100°

12) a) 108°, 96°, 72° e 84°
b) 84°
c) 24°

13) a) 75°, 90°, 105° e 90°
b) 30°, 90° e 60°
c) 45°, 105° e 30°
d) 75°
e) 15°

14) 40°, 55° e 85°

15) 9°, 162° e 9° ou 81°, 81° e 18°

16) 45°, 75° e 60°

17) C

18) 20°

19) 60°

20) A

21) A

22) 43°

23) x + y e x − y

24) $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$

25) 20°

26) 60°, 90°, 50° e 40°

27) 15°

28) D

29) 44°

30) 2 de 40° 30' e 2 de 139° 30'

31) 2 de 78° e 2 de 102°

32) 2 de 75° e 2 de 105° ou 2 de 45° e 2 de 135°

33) 30

34) 5, 2 e 6

35) a) 6
b) 4
c) 5
d) 15

36) 10

37) r = p − a

38) 4

39) 3, 4 e 5

40) 34 cm

41) 4 e 12

42) 10

43) 3

44) 28

45) 4K

46) 56°

47) 30°, 60° e 90°

48) B

49) 9

50) 18

51) a) tangentes interiores
b) interiores
c) exteriores
d) concêntricas
e) secantes
f) tangentes exteriores
g) secantes
h) interiores

52) a) 3
b) 2
c) 0
d) 4
e) 0
f) 1

53) 3,5 e 8

54) 14

55) $\frac{x+y}{2}$ e $\frac{x-y}{2}$

56) 3 e 7

57) 14 e 4

58) a) 30
b) 2
c) 22
d) 10

59) 4 cm

60) 12p cm

61) 6 e 8

62) 10

63) 45°

64) 30°

65) 7

66) h

67) 135°

68) E

69) B

70) D

71) C

72) A

73) D

74) D

75) E

76) A

77) C

78) C

79) B

80) A

81) B

82) B

83) A

84) E

85) D

86) C

87) B

88) 42°

89) C

OBSERVAÇÕES

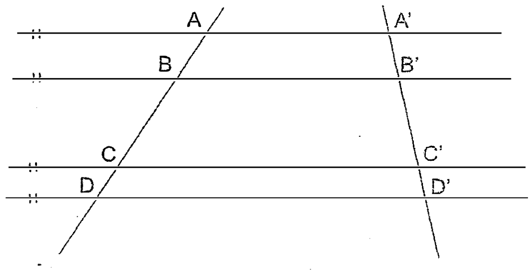
Linhas proporcionais

Feixe de paralelas

É todo conjunto formado por duas ou mais retas paralelas.

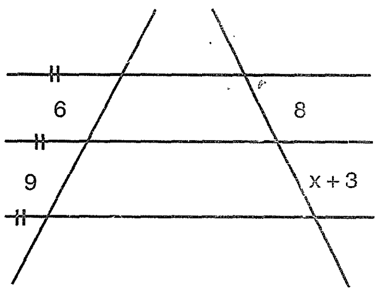
Teorema de Thales

"Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes segmentos homólogos (correspondentes) proporcionais."



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$$

Exemplo:
Determine o valor de x na figura:



Resolução:

$$\frac{6}{9}=\frac{8}{x+3} \quad \text{ou} \quad \frac{6}{8}=\frac{9}{x+3}$$

$6(x+3)=8.9 \qquad 6(x+3)=8.9$

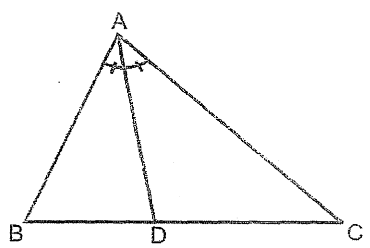
$6x+18=72$

$6x=54$

$$\boxed{x=9}$$

Teorema da bissetriz interna

"A bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos proporcionais aos lados que lhe são adjacentes."



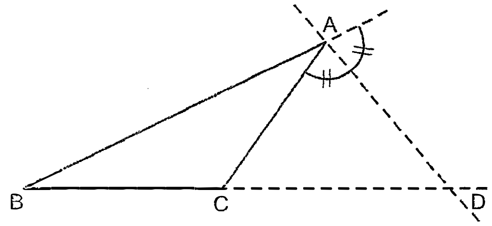
$$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}}$$

AD : bissetriz interna

Obs.: Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são aditivos pois adicionando-os obtemos o lado $\overline{BC}$.

Teorema da bissetriz externa

"A bissetriz externa de um dos ângulos de um triângulo determina no lado oposto segmentos subtrativos proporcionais aos lados que lhes são adjacentes."



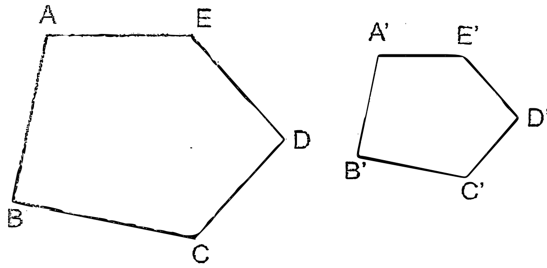
$$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}}$$

$\overrightarrow{AD}$: bissetriz externa

Obs.: Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são subtrativos pois a diferença entre eles é o lado $\overline{BC}$.

Polígonos semelhantes

Dois polígonos são semelhantes quando apresentam os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.



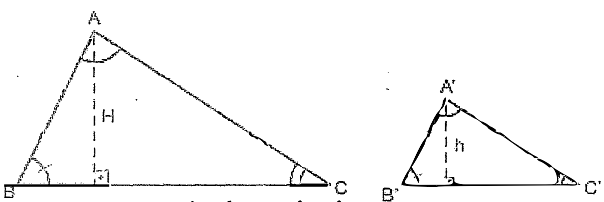
Se $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, $\hat{D} \equiv \hat{D}'$, $\hat{E} \equiv \hat{E}'$ e

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}=k$, os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E são semelhantes, ou seja, ABCDE ~ A'B'C'D'E'.

Devemos observar que a razão de proporcionalidade entre lados homólogos (k) é chamada de ***razão de semelhança*** e vale também para as demais linhas homólogas, como as diagonais, e para os perímetros.

Semelhança de triângulos

No caso dos triângulos, para que se reconheça a semelhança, basta que eles apresentem os mesmo ângulos, ou lados respectivamente proporcionais, ou ainda um ângulo congruente compreendido entre lados respectivamente proporcionais. Lembramos mais uma vez que constatada a semelhança de dois triângulos, a proporcionalidade entre os lados homólogos também deve ser aplicada para as demais linhas homólogas, como alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes.

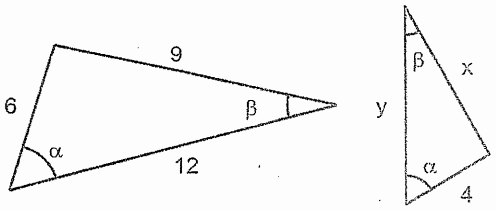


Se $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$ e $\hat{C}=\hat{C}'$, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, daí:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{H}{h}=\ldots=\frac{2p}{2p'}=k$$

Exemplo:

Determine a razão de semelhança, assim como os valores de x e y, nos triângulos abaixo:



Resolução:

Os triângulos são semelhantes pois há dois ângulos respectivamente congruentes, e certamente os terceiros ângulos também são congruentes.

A razão de semelhança k é a razão entre duas linhas homólogas, correspondentes. A melhor maneira de determiná-la é observar os ângulos, pois lados homólogos se opõem a ângulos congruentes. No caso da figura anterior, são conhecidos os lados opostos ao ângulo b em ambos os triângulos, logo eles são homólogos.

$k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (do primeiro para o segundo triângulo)

ou

$k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (do segundo para o primeiro triângulo).

Os lados 9 e x também são homólogos, pois estão opostos a a. Então: $\frac{9}{x} = \frac{6}{4} \rightarrow 6x = 36 \rightarrow x = 6$.

Os lados 12 e y também são homólogos:

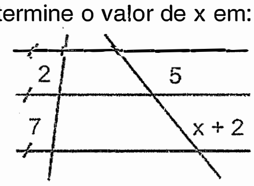
$\frac{12}{y} = \frac{6}{4} \rightarrow 6y = 48 \rightarrow y = 8$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

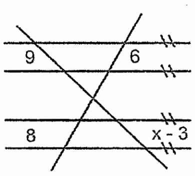
1) Se $\overline{AB} = 30$ e P divide internamente o segmento $\overline{AB}$ na razão 2/3, calcule as medidas de segmento $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.
   a) PA = 12 e PB = 18
   b) PA = 27 e PB = 34
   c) PA = 02 e PB = 08
   d) PA = 18 e PB = 30
   e) PA = 10 e PB = 28

2) Determine o valor de x em:

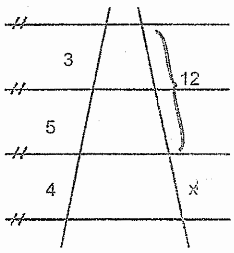
a)



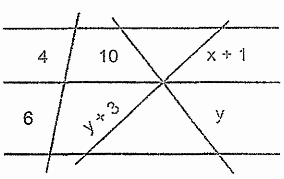
b)



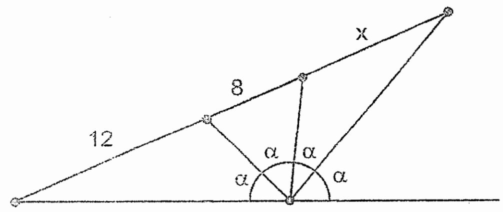
c)



d)



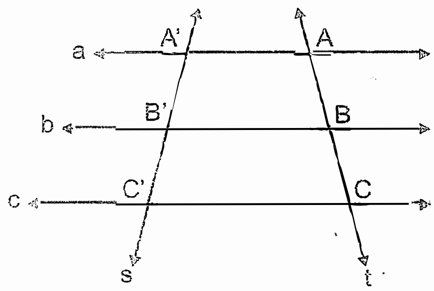
3) Calcule o valor de x na figura abaixo:



4) Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal, segmentos de 4, 8 e 6 centímetros e, sobre uma outra transversal, três outros segmentos cuja soma vale 45 cm. Determine esses outros três segmentos.

5) Um feixe de paralelas determina sobre uma transversal três segmentos de medidas 2 cm, 4 cm e 6 cm; e sobre outra transversal três segmentos tais que a soma das medidas dos dois maiores é 15 cm. Determine a medida do outro segmento.

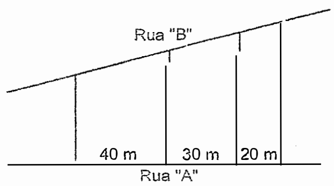
6) Consideremos as retas paralelas a, b e c cortadas pelas transversais s e t, conforme figura abaixo. Sendo $\overline{AB} = 3cm$, $\overline{A'B'} = 4cm$ e $\overline{AC} = 9cm$, concluímos que $\overline{B'C'}$ mede, em cm:
   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8
   e) 9



7) Um feixe de quatro paralelas é intersectado por duas transversais, determinando sobre uma delas segmentos de medidas 2 cm, 5 cm e 4 cm. Determine as medidas dos segmentos da outra transversal, sabendo-se que o seu produto vale 135 cm³.

8) Um feixe de paralelas determina sobre uma transversal segmentos que medem 15 cm, 20 cm e 10 cm, e sobre uma outra, segmentos cuja soma dos quadrados de suas medidas vale 261 cm². Determine-os.

9) Três terrenos têm frente para a rua "A" e para a rua "B", como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A". Qual a medida de frente para a rua "B" de cada lote, sabendo-se que a frente total para essa rua é 180 m?



10) Em um triângulo MNP, a bissetriz interna do ângulo M intersecta o lado oposto no ponto Q. Sabendo-se que $\overline{MN} = 6cm$, $\overline{MP} = 10cm$, $\overline{NP} = 8cm$, determine a medida do segmento $\overline{QP}$.

11) Em um triângulo de lados 4 cm, 6 cm e 8 cm, determine as medidas dos segmentos em que a bissetriz interna do maior ângulo divide o lado oposto.

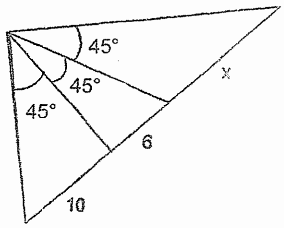
12) Em um triângulo ABC, de lados $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 12$ e $\overline{BC} = 10$, determine a medida do menor segmento em que a bissetriz do ângulo A divide o lado oposto.

13) Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A intercepta o lado oposto no ponto D. Sabendo que $\overline{AB} = 18\,cm$, $\overline{AC} = 12\,cm$ e $\overline{BD} = 15\,cm$, determine a medida do segmento $\overline{DC}$.

14) Os lados de um triângulo medem 10 cm, 12 cm e 16 cm. Quanto devemos prolongar o menor lado para que a bissetriz externa do ângulo oposto o encontre?

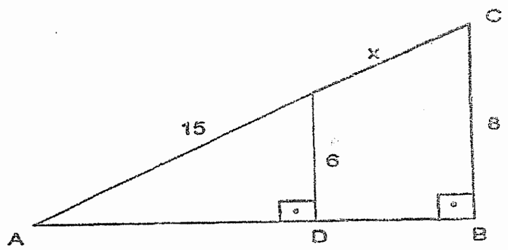
15) Um triângulo tem lados iguais a 7 cm, 15 cm e 20 cm. De quanto devemos prolongar o menor lado de modo que ele encontre a bissetriz externa do ângulo oposto?

16) Determine o valor de x em:

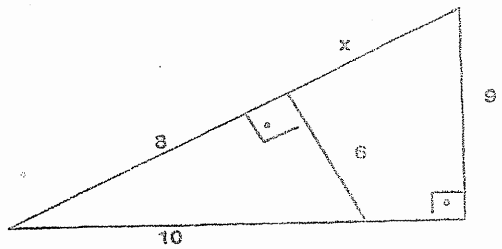


17) Determine o valor de x e a razão de semelhança entre os triângulos das figuras abaixo:

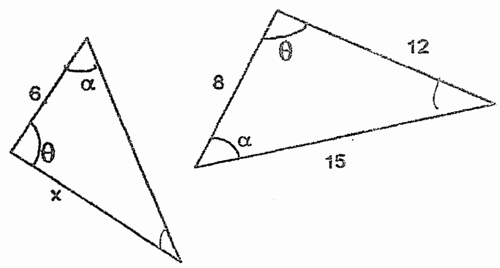
a)



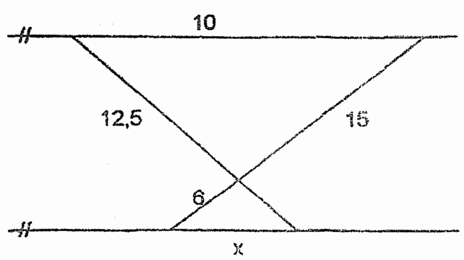
b)



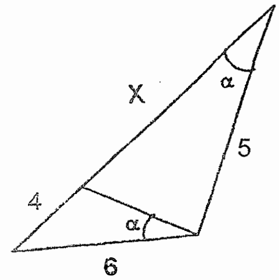
c)



d)



e)

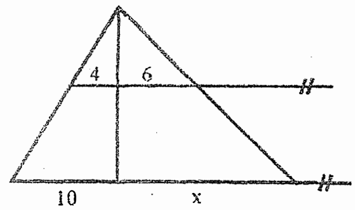


18) Os lados de um quadrilátero são expressos por $3x - 1$, $4x + 8$, $16 - 2x$ e $25 - 5x$. Um outro quadrilátero, semelhante ao primeiro, tem perímetro 72. Determine a razão de semelhança do maior polígono para o menor.

19) Os perímetros de dois polígonos semelhantes são 52 cm e 78 cm. A maior diagonal do menor polígono mede 12 cm. Determine a medida da maior diagonal do maior polígono.

20) Os perímetros de dois polígonos semelhantes valem 34 m e 85 m. O maior lado do menor polígono mede 6 m. Determine o maior lado do maior polígono.

21) Calcule x na figura abaixo:



22) O perímetro de um triângulo vale 12 cm. Pelo seu baricentro é traçada uma reta paralela a um de seus lados formando com os outros dois lados um outro triângulo. Determine o perímetro desse triângulo.

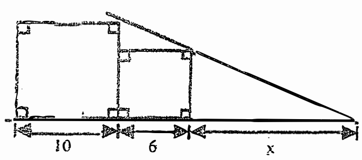
23) Um trapézio tem bases 10 cm e 15 cm e altura 7 cm. Determine a altura do maior triângulo que se obtém prolongando-se os lados oblíquos desse trapézio?

24) Num trapézio de bases 24 cm e 16 cm e altura 20 cm, a que distância da base menor cortam-se as diagonais?

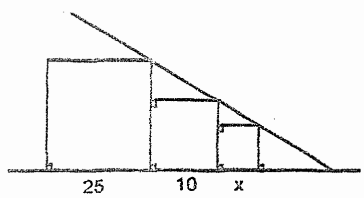
25) Determine a altura de um trapézio de base 7,5 cm e 10 cm, sabendo-se que suas diagonais intersectam-se a 6 cm da base maior.

26) Em um trapézio de bases 6 e 9, as diagonais encontram-se de forma que os maiores segmentos determinados em cada um delas medem 6 e 12. Determine a medida da maior diagonal.

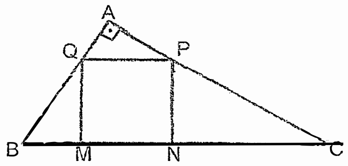
27) Considere os quadrados da figura abaixo e calcule o valor de x.



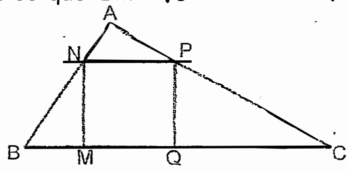
28) Considere os três quadrados da figura e calcule x.



29) Determine o perímetro do quadrado MNPQ, da figura baixo, sabendo-se que $\overline{BM} = 3\,cm$ e $\overline{NC} = 27\,cm$.



30) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A. Sabendo-se que $\overline{BM} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{QC} = \sqrt{5} + 1$, determine:



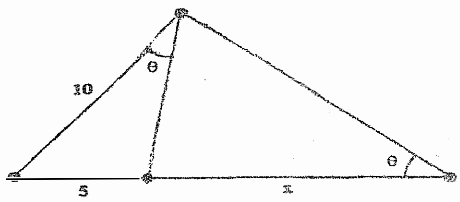
a) O perímetro do quadrado;
b) A medida do segmento $\overline{AQ}$.

31) Um retângulo cuja base é o dobro da altura está inscrito em um triângulo de base 20 e altura 16. Calcule o perímetro desse retângulo.

32) Determine o lado de um quadrado inscrito num triângulo cuja base mede 12 cm e a altura 8 cm.

33) Calcule o lado de um quadrado inscrito num losango cujas diagonais medem 12 m e 6 m.

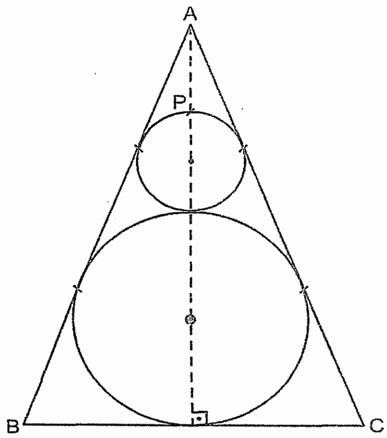
34) Determine o valor de x na figura abaixo:



35) Um trapézio de 9 cm de altura tem bases iguais a 6 cm e 12 cm. A 6 cm da base menor é traçada uma reta paralela às bases. Calcule o segmento dessa paralela compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.

36) Um trapézio de bases 4 cm e 13 cm, tem altura 12 cm. A 2 cm das bases são traçadas paralelas a elas. Determine a soma das medidas dos segmentos dessas paralelas compreendidos entre os lados oblíquos do trapézio.

37) Na figura abaixo, o diâmetro de um dos círculos é o triplo do diâmetro do outro. Determine a altura do triângulo isósceles ABC, sabendo-se que $\overline{AP} = 5\,cm$.



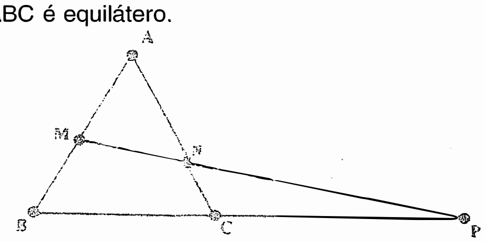
38) As tangentes comuns externas a dois círculos tangentes exteriores de raios 4 e 8, encontram-se no ponto P. Determine a medida do segmento da linha que une os centros, compreendido entre P e a menor circunferência, exterior a ela.

39) Um trapézio retângulo, de diagonais perpendiculares, possui bases b e B. Determine a medida de sua altura h.

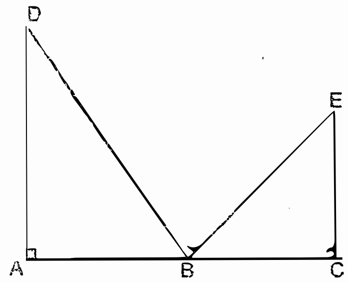
40) Determine a altura de um trapézio retângulo de diagonais perpendiculares cujas bases valem 8 cm e 4,5 cm.

41) Um trapézio retângulo cujas diagonais são perpendiculares é tal que a menor diagonal é igual a um dos lados não paralelos. Calcule a altura do trapézio, sabendo que a base menor mede 4 cm.

42) Na figura abaixo tem-se $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{CP} = 12$. Determine a medida do segmento $\overline{AN}$, sabendo-se que o triângulo ABC é equilátero.



43) Na figura, B é ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos.



Se $\overline{AD} = 6\,dm$, $\overline{AC} = 11\,dm$ e $\overline{EC} = 3\,dm$, as medidas possíveis de $\overline{AB}$, em dm, são:
a) 4,5 e 6,5
b) 7,5 e 3,5
c) 8 e 3
d) 7 e 4
e) 9 e 2

44) Duas circunferências de raios 4 cm e 9 cm, são tangentes interiores. Toma-se um ponto M, pertinente à maior circunferência, e une-se ao ponto de tangência P. O segmento $\overline{MP}$ intersecta a menor circunferência em N. Sabendo-se que $\overline{PN} = 6\,cm$, determine a medida do segmento $\overline{MN}$.

45) Em um paralelogramo ABCD, temos que $\overline{AB} = 12\,cm$ e $\overline{BC} = 8\,cm$. Se a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 6 cm, determine a medida daquela relativa ao lado $\overline{BC}$.

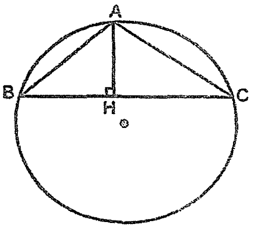
46) Considere um ponto P pertinente ao lado $\overline{BC}$, de um triângulo ABC. Pelo vértice B, traça-se uma paralela a $\overline{AP}$, que intersecta o suporte do lado $\overline{AC}$ no ponto D. Pelo vétice C, traça-se uma outra paralela a $\overline{AP}$, que secciona o suporte de $\overline{AB}$ em E. Sabendo-se que $\overline{BD} = 20\,cm$ e $\overline{CE} = 12\,cm$, determine a medida do segmento $\overline{AP}$.

47) Um engenheiro, não podendo medir a largura de um rio num determinado trecho, avistou na margem oposta uma pedra e colocou-se no ponto A em frente a ela. Andou perpendicularmente à margem até o ponto B. Mediu a

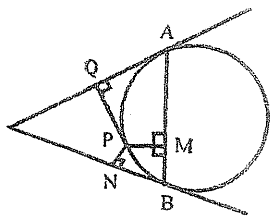
distância $\overline{AB}$ e encontrou 5 m. A seguir deslocou-se de B até C, paralelamente à margem, e encontrou $\overline{BC} = 12m$. Aí, então, deslocou-se até o ponto D, junto à margem, andando em direção à pedra. Sabendo-se que $\overline{AD} = 8m$, calcule a largura do rio.

48) O ponto I é o centro do círculo inscrito em um triângulo ABC, no qual $\overline{AB} = 6m$, $\overline{AC} = 12m$ e $\overline{BC} = 9m$. Dos pontos J e K, pertencentes ao lado $\overline{BC}$, traçam-se os segmentos $\overline{IJ} // \overline{AB}$ e $\overline{IK} // \overline{AC}$. Determine a medida do maior lado do triângulo IJK.

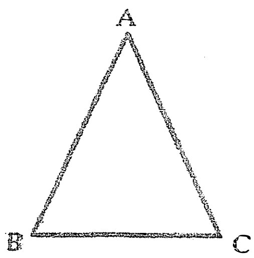
49) Na figura, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 5 cm e 6 cm, respectivamente, e $\overline{AH} = 3cm$. Calcule a medida do raio do círculo.



50) Na figura abaixo, consideremos a corda $\overline{AB}$ e as tangentes à circunferência nos pontos A e B. Calcule PM, sabendo que PN = 2 m e PQ = 4,5 m.



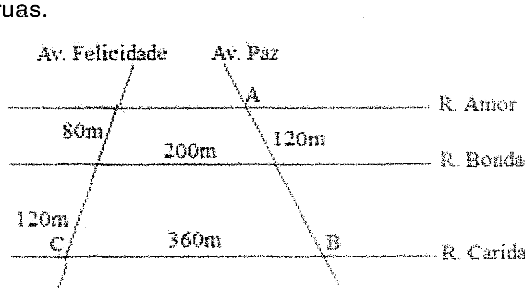
51) Na figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC} = 2cm$. Determine a medida do lado $\overline{BC}$, sabendo que o ângulo BÂC mede 36°.



52) Prove que o lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R é dado por $\ell = \dfrac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$.

QUESTÕES DE CONCURSOS

53) **(CPII)** As ruas Amor, Bondade e Caridade são paralelas e as avenidas Paz e Felicidade são transversais a essas ruas.

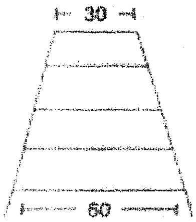


Arthur mora na esquina da Rua Amor com a Avenida Paz indicada na figura pelo ponto A.

a) Para ir à videolocadora situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Paz, indicada pelo ponto B, quantos metros, no mínimo, Arthur percorre?

b) Arthur faz uma caminhada de 200 metros em 3 minutos. Para ir à sua escola, situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Felicidade, indicada pelo ponto C, ele anda pela Avenida Paz e vira na Rua Caridade. Quanto tempo Arthur demora pra chegar à escola?

54) **(ENEM)** Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.
Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

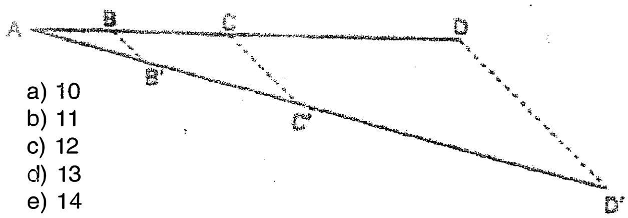


a) 144
b) 180
c) 210
d) 225
e) 240

55) **(CM)** Se as medidas dos lados de um triângulo são 8m, 10m e 12m, e este triângulo é semelhante a outro triângulo cujo perímetro é 18m, então a medida do maior lado do triângulo menor é:
a) 6,4m
b) 6,6m
c) 7,2m
d) 7,8m
e) 8,2m

56) **(CM)** Um triângulo ABC, de perímetro igual a 35 cm, é semelhante ao triângulo DEF, cujos lados medem 4,2 cm; 7,8 cm e 9 cm. A medida, em cm, do lado que se opõe ao menor ângulo do triângulo ABC é:
a) 15
b) 14
c) 13
d) 7
e) 6

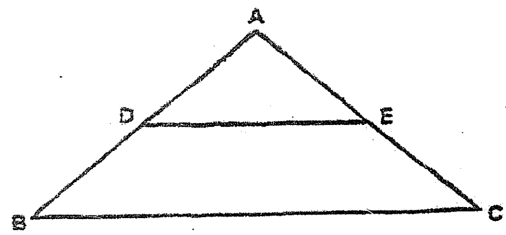
57) **(CM)** Se na figura abaixo o segmento $\overline{AD}$ for dividido em três partes tais que AB = 3cm, BC = 6cm e CD = 9cm; o segmento AD' mede 2cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD', então o comprimento do segmento $\overline{C'D'}$, em centímetros é:



a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

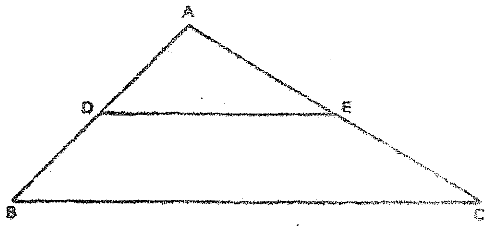
58) **(CM)** Na figura abaixo, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Se $\overline{AB} = 16cm$, $\overline{AD} = 4cm$ e $\overline{AE} = 3cm$, então a medida, em centímetros, do segmento $\overline{CE}$ é:

a) 9
b) 8
c) 5
d) 12
e) 15



59) **(CM)** Se no triângulo ABC da figura abaixo o segmento DE é paralelo ao lado BC, AD = 12cm, DB = 9cm e AE = 16cm, então a medida do segmento EC é:

a) 10cm
b) 12cm
c) 14cm
d) 16cm
e) 18cm



60) **(PUC)** Considere o triângulo ABC em que $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Seja D o ponto médio de $\overline{AC}$, e E o ponto médio de $\overline{AB}$. O comprimento de $\overline{DE}$ vale:

a) 1/3

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) 1/2

e) 1/4

61) **(CM)** Em um triângulo retângulo os catetos medem 3 cm e 4 cm. A bissetriz interna do ângulo reto decompõe a hipotenusa em dois segmentos. Qual é a medida do maior desses dois segmentos?

a) $\frac{10}{7}$cm

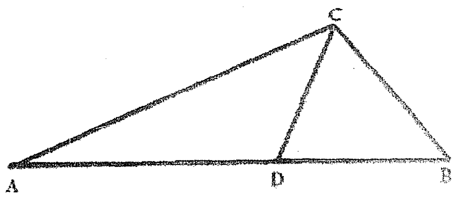
b) $\frac{13}{7}$cm

c) $\frac{15}{7}$cm

d) $\frac{20}{7}$cm

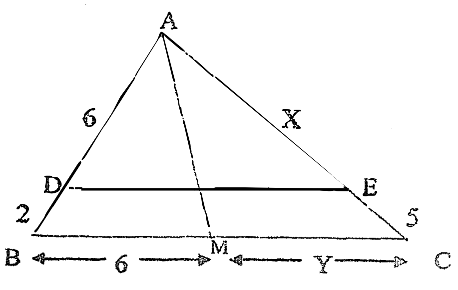
62) **(CM)** Na figura abaixo, $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo interno C, do triângulo ABC. Se $\overline{AD} = 3\text{cm}, \overline{DB} = 2\text{cm}$ e $\overline{AC} = 4\text{cm}$, então a medida, em centímetros, do lado $\overline{BC}$ é:

a) 24/5
b) 15/8
c) 40/3
d) 13/3
e) 8/3



63) **(CN)** Na figura abaixo, DE é paralela a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Então X + Y é igual a:

a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35



64) **(UFRJ)** Um automóvel de 4,5 m de comprimento é representado, em escala, por um modelo de 3 cm de comprimento. Determine a altura do modelo que representa, na mesma escala, uma casa de 3,75 m de altura.

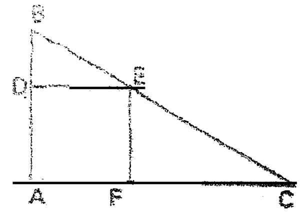
65) **(ENEM)** A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:
a) 30 cm
b) 45 cm
c) 50 cm
d) 80 cm
e) 90 cm

66) **(ENEM)** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:
a) 1,16 metros.
b) 3,0 metros.
c) 5,4 metros.
d) 5,6 metros.
e) 7,04 metros.

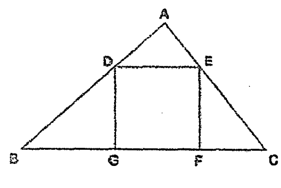
67) **(CM / UNICAMP)** Uma rampa, de inclinação constante, tem 4 m de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 m sobre a rampa está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa?
a) 32,8 m
b) 29,7 m
c) 22,7 m
d) 20,5 m
e) 19,5 m

68) **(CAP-UFRJ)** Dado um triângulo ABC, traça-se a 9 cm da base $\overline{BC}$, um segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BC}$. Sabendo que $\overline{DE} = 24$ cm e $\overline{BC} = 60$ cm, qual a medida da altura do triângulo ADE?

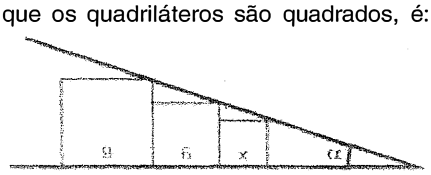
69) **(CM)** Se na figura abaixo o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 3 cm e AC = 5 cm, então a medida do lado do quadrado ADEF, em centímetros, vale:
a) 1,75
b) 1,5
c) 2
d) 1,875
e) 1,725



70) **(ENEM)** Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A e DEFG é um quadrado inscrito nesse triângulo. Considerando-se que BG = 9 e CF = 4, o perímetro desse quadrado é igual a:
a) 24
b) 28
c) 32
d) 36
e) 40

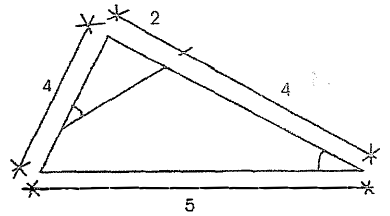


71) **(EPCAR)** Na figura abaixo, o valor da tangente de á, sabendo-se que os quadriláteros são quadrados, é:
a) 0,3
b) 0,5
c) 0,6
d) 0,7

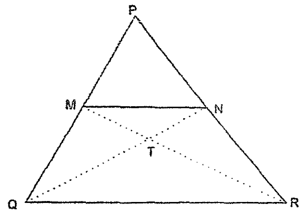


72) **(UNIRIO)** Observe os dois triângulos abaixo representados, onde os ângulos assinalados são congruentes. O perímetro do menor triângulo é:

a) 3
b) 15/4
c) 5
d) 15/2
e) 15

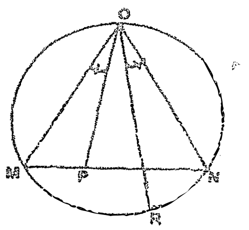


73) **(UFF)** Na figura abaixo M e N são pontos médios dos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ do triângulo PQR.



Sabendo que $\overline{QR}$ mede 18,0 cm e que a altura relativa a este lado mede 12,0 cm, a altura do triângulo MNT, relativa ao lado $\overline{MN}$, mede:
a) 4,0 cm
b) 3,5 cm
c) 3,0 cm
d) 2,0 cm
e) 2,5 cm

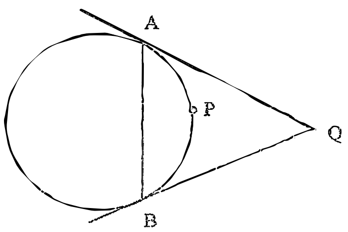
74) **(CEFET)** Considere a figura abaixo:



Se MÔP = NÔR, $\overline{OM} = 3$ cm, $\overline{OP} = 2$ cm e $\overline{ON} = 4$ cm, determine a medida de $\overline{OR}$.

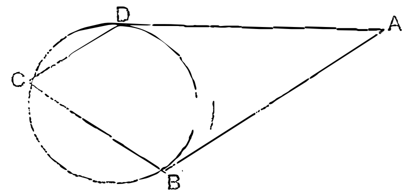
75) **(CN)** Num triângulo ABC as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, são respectivamente iguais a 4, 6 e 8. Da extremidade D da bissetriz $\overline{AD}$, traça-se o segmento $\overline{DE}$, E pertencente ao lado $\overline{AB}$, de tal forma que o triângulo BDE é semelhante ao triângulo ABD. A medida do segmento $\overline{BE}$ é igual a:
a) 2,56
b) 1,64
c) 1,32
d) 1,28
e) 1

76) **(CN)** Observe a figura abaixo:



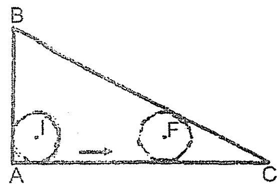
O ponto P do menor arco $\widehat{AB}$ dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes $\overline{AQ}$ e $\overline{BQ}$.
A distância, em cm, do ponto P à corda $\overline{AB}$ é igual a:
a) $\sqrt{38}$
b) $2\sqrt{15}$
c) 16
d) 18
e) $6\sqrt{10}$

77) **(CN)** Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DA}$ são tangentes à circunferência determinada pelos pontos B, C e D. Sabendo-se que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, pode-se afirmar que o lado $\overline{BC}$ é:



a) a média aritmética entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
b) a média geométrica entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
c) a média harmônica entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
d) o inverso da média aritmética entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
e) o inverso da média harmônica entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

78) **(UFRJ)** Na figura a seguir, o círculo de raio 1 cm rola da posição I para a posição F, sempre tangenciando o cateto AC do triângulo retângulo ABC.



Na posição I o círculo tangencia AB e na posição F ele é tangente a BC. Os lados do triângulo valem AB = 6 cm, AC = 8 cm e BC = 10 cm.
Determine a distância percorrida pelo centro do círculo.

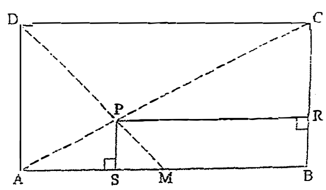
79) **(CEFET)** Num triângulo ABC, têm-se AB = 90 cm, AC = 60 cm e BC = 50 cm. A paralela MN ao lado BC forma o trapézio BMNC de perímetro $\frac{400}{3}$ cm. Determine as medidas dos lados desse trapézio.

80) **(PUC)** ABCD é um paralelogramo, M é o ponto médio do lado $\overline{CD}$, e T é o ponto de intersecção de $\overline{AM}$ com $\overline{BD}$.
O valor da razão $\frac{\overline{DT}}{\overline{BD}}$ é:
a) 1/2
b) 1/3
c) 2/5
d) 1/4
e) 2/7

81) **(CEFET)** Seja ABCD um paralelogramo no qual o vértice A é unido aos pontos médios E e F dos lados opostos BC e CD formando o triângulo AEF. Os segmentos AE e AF intersectam a diagonal BD nos pontos M e N. Sendo BD = 1 e a medida MN representada por x, podemos afirmar que $1 - x^{-2}$ é igual a:
a) –7 b) –8 c) –9 d) –10 e) –11

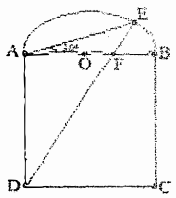
82) **(CM)** No retângulo ABCD, temos: $\overline{AB} = 18$ m, $\overline{BC} = 12$ m, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{AC}$ determina sobre o segmento $\overline{DM}$ o ponto P. Em consequência, os segmentos $\overline{PS}$ e $\overline{PR}$ medem, respectivamente:

a) 3 m e 10 m
b) 4 m e 12 m
c) 8 m e 15 m
d) 10 m e 3 m
e) 12 m e 4 m



83) **(CN)** Um retângulo ABCD de lados AB = a e BC = b ($a > b$), é dividido, por um segmento EF, num quadrado AEFD e num retângulo EBCF, semelhante ao retângulo ABCD conforme a figura acima. Nessas condições a razão entre a e b é aproximadamente igual a

a) 1,62
b) 2,62
c) 3,62
d) 4,62
e) 5,62



84) **(CN)** Considere o quadrilátero ABCD onde $CD = 9cm$, $AD = 4cm$ e $BD = 6cm$. O ângulo $A\hat{B}C$ deste quadrilátero é igual a:

a) $B\hat{C}D + \dfrac{A\hat{D}C}{2}$

b) $B\hat{A}D + A\hat{D}C - B\hat{C}D$

c) $B\hat{A}D + B\hat{C}D$

d) $2B\hat{C}D + A\hat{D}C$

e) $A\hat{D}C + 2B\hat{A}C - B\hat{C}D$

85) **(CN)** Num quadrilátero ABCD tem-se: AB = 42, BC = 48, CD = 64, DA = 49 e P é o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD. Qual é a razão entre os segmentos PA e PC, sabendo-se que a diagonal BD é igual a 56?

a) 7/8
b) 8/7
c) 7/6
d) 6/7
e) 49/64

86) **(CN)** Um quadrilátero de bases paralelas B e b é dividido em dois outros semelhantes pela sua base média, caso seja, necessariamente, um:

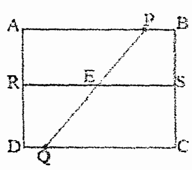
a) paralelogramo
b) trapézio retângulo
c) trapézio isósceles
d) trapézio qualquer
e) losango

87) **(CN)** Num triângulo acutângulo isósceles ABC, o segmento BP, P interno ao segmento AC, forma com o lado BA um ângulo de 15°. Quanto mede o maior ângulo de PBC, sabendo que os triângulos ABP e ABC são semelhantes?

a) 65,5°
b) 82,5°
c) 97,5°
d) 135°
e) 150°

88) **(CN)** Num quadrado ABCD tem-se os pontos: P, pertencente ao lado AB; Q, pertencente ao lado CD; R, médio de DA; e S, médio de BC. Se PB é o dobro de DQ e E é o ponto de interseção entre PQ e RS, quantos trapézios retângulos semelhantes sempre existirão na figura, sabendo-se que PB + DQ < AB?

a) Dois
b) Três
c) Quatro
d) Cinco
e) Seis



89) (CN) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\dfrac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1.
b) 1 e 2.
c) 2 e 3.
d) 3 e 4.
e) 4 e 5.

90) **(CN)** Num triângulo ABC traça-se a ceviana interna $\overline{AD}$, que o decompõe em dois triângulos semelhantes e não congruentes ABD e ACD. Conclui-se que tais condições:

a) só são satisfeitas por triângulos acutângulos
b) só são satisfeitas por triângulos retângulos
c) só são satisfeitas por triângulos obtusângulos
d) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos acutângulos quanto por triângulos retângulos
e) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos retângulos quanto por triângulos obtusângulos.

91) **(CN)** Num triângulo ABC de lado $\overline{AC} = 12$, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divide internamente o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos: $\overline{BD} = 18$ e $\overline{DC} = 6$. Se $A\hat{B}D = x$ e $A\hat{C}D = y$, o ângulo $B\hat{D}A$ é dado por:

a) $y - x$
b) $x + y$
c) $2x - y$
d) $2y - x$
e) $2x + y$

92) **(CN)** Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maios AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\dfrac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\dfrac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\dfrac{med(BC)}{med(AD)}$

c) $\dfrac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\dfrac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\dfrac{med(AD)}{med(IH)}$

93) **(CN)** Teoricamente, num corpo humano de proporções perfeitas, o umbigo deve estar localizado num ponto que divide a altura da pessoa na média e extrema razão (razão áurea), com a distância aos pés maior que a distância à cabeça. A que distância, aproximadamente, deverá estar localizado o umbigo de uma pessoa com 1,70m de altura, para que seu corpo seja considerado em proporções perfeitas?

Dados: - Usar 2,24 para raiz quadrada de 5

a) 1,09
b) 1,07
c) 1,05
d) 1,03
e) 1,01

94) **(CN)** Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5 cm, e a base medindo 8 cm. A distância entre o seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

a) 0,1 cm
b) 0,3 cm
c) 0,5 cm
d) 0,7 cm
e) 0,9 cm

95) **(CN)** Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é 'k', pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será:

a) $\frac{5k}{2}$ b) $\frac{4k}{3}$ c) $\frac{4k}{5}$ d) $\frac{k}{2}$ e) $\frac{k}{3}$

96) **(CN)** Em um triângulo os lados de medidas m e n são opostos, respectivamente, aos ângulos de 60° e 40°. O segmento da bissetriz do maior ângulo interno do triângulo é dado por:

a) $m\sqrt{\frac{m+n}{n}}$

b) $n\sqrt{\frac{m+n}{m}}$

c) $m\sqrt{\frac{n}{m+n}}$

d) $n\sqrt{\frac{m}{m+n}}$

e) $\sqrt{m}$

97) **(CN)** Num triângulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. Traçam-se, a partir de D, as semirretas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semirreta DE em G e a semirreta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que
a) AG:AH :: DG:DH.
b) EG:DE :: FH:DF.
c) DG:DH :: DE:DF.
d) AG:GE :: AH:HF.
e) DE:AG :: DF:AH.

98) **(CN)** Em um quadrado ABCD de lado 10, toma-se internamente sobre o lado CD o ponto P, que dista 4 do vértice C, e internamente sobre o lado BC, o ponto Q, de modo que os triângulos ADP e PCQ sejam semelhantes, com o segmento CQ menor possível. Nessas condições, o ângulo BAQ será igual ao ângulo
a) APB
b) PAQ
c) PAC
d) BPQ
e) AQP

99) **(CM)** A medida, em cm, do lado de um pentágono regular cujas diagonais medem $(3+3\sqrt{5})$cm é:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

GABARITO

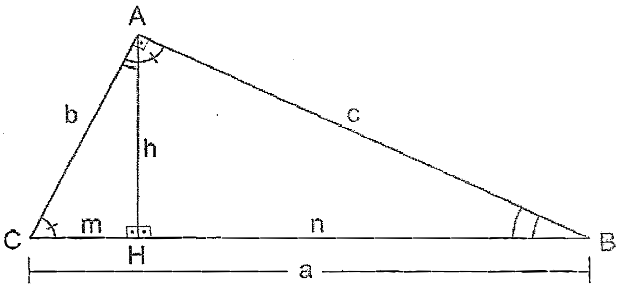
1) A
2) a) 15,5
b) 15
c) 6
d) 11
3) 40
4) 10 cm, 20 cm e 15 cm
5) 3 cm
6) D
7) 3 cm, 7,5 cm e 6 cm
8) 9 cm, 12 cm e 6 cm
9) 80 m, 60 m e 40 m
10) 5 cm
11) 3,2 cm e 4,8 cm
12) 4
13) 10 cm
14) 30 cm
15) 21 cm
16) 24
17) a) 5 e $\frac{3}{4}$
b) 7 e $\frac{2}{3}$
c) 9 e $\frac{3}{4}$
d) 4 e $\frac{2}{5}$
e) 5 e $\frac{2}{3}$
18) $\frac{3}{2}$
19) 18 cm
20) 15 m
21) 15
22) 8 cm
23) 21 cm
24) 8 cm
25) 10,5 cm
26) 20
27) 9
28) 4
29) 36 cm
30) a) 8
b) $\sqrt{5}+1$
31) 480/13
32) 4,8 cm
33) 4 m
34) 15
35) 10 cm
36) 17 cm
37) 45 cm
38) 8
39) $h = \sqrt{B\ b}$
40) 6 cm
41) $4\sqrt{2}$cm
42) 18
43) E
44) 7,5 cm
45) 9 cm
46) 7,5 cm
47) 10 m

48) 4 cm
49) 5 cm
50) 3 m
51) $\sqrt{5} - 1$
52) Sugestão: trace a bissetriz interna de $\overline{BD}$ e use a semelhança entre os triângulos ABC e BCD.
53) a) 300 m
b) 9,9 min ou 9 min 54 seg
54) D
55) C
56) D
57) A
58) A
59) B
60) D
61) D
62) E
63) D
64) 2,5 cm
65) B
66) D
67) D
68) 6 cm
69) D
70) A
71) B
72) D
73) D
74) 6 cm
75) A
76) B
77) B
78) 4 cm
79) $\overline{BC} = 50cm; \overline{BM} = 30cm; \overline{MN} = \frac{100}{3}cm \text{ e } \overline{NC} = 20cm$
80) B
81) B
82) B
83) A
84) C
85) E
86) A
87) C
88) A
89) B
90) B
91) B
92) C
93) C
94) B
95) E
96) C
97) A
98) D
99) A

OBSERVAÇÕES

Relações métricas no triângulo retângulo

No triângulo retângulo abaixo vamos destacar os elementos mais importantes:



a → hipotenusa
b, c → catetos
h → altura relativa à hipotenusa
m, n → projeções dos catetos na hipotenusa

Na figura acima podemos observar que os triângulos ABC, AHB e AHC são semelhantes. Daí, podemos tirar as relações que se seguem:

1 – "Em todo triângulo retângulo, o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela."

$\boxed{b^2 = a \cdot m}$ ou $\boxed{c^2 = a \cdot n}$

2 – "O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura que lhe é relativa."

$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$

3 – "O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções."

$\boxed{h^2 = m \cdot n}$

4 – "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos." (Teorema de Pitágoras)

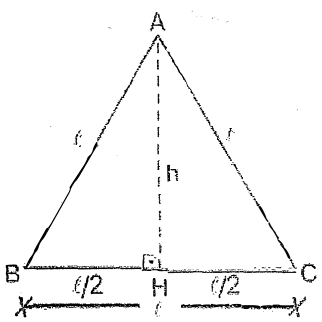
$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

5 – "O inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos."

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Aplicações
Cálculo da altura de um triângulo equilátero

Consideremos um triângulo equilátero de lado ℓ. Sabemos que sua altura AH também é mediana. Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo AHB.



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

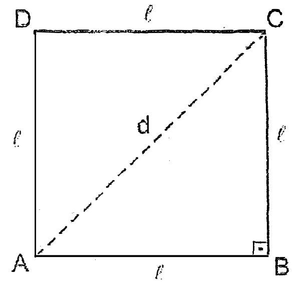
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

$$\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Cálculo da diagonal de um quadrado



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2$
$d^2 = 2\ell^2$

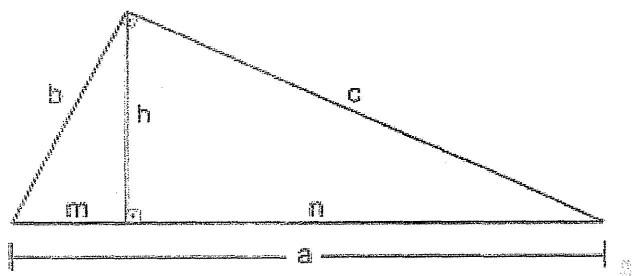
$\boxed{d = \ell . \sqrt{2}}$

Obs.: As relações angulares serão abordadas no capítulo 41.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Em um triângulo retângulo de catetos 6 e 8, determinar seus demais elementos.

2) Considerando a figura abaixo, determine o que se pede nos itens seguintes, considerando os dados de cada um deles.



a) a = 41; b = 9; c = ?

b) b = 15; c = 8; a = ?

c) a = 10; b = 8; c = 6; h = ?

d) a = x + 1; b = x; c = x - 7; h = ?

e) h = 10; m = 5; n = ?

f) $m = \sqrt{2+\sqrt{3}}$; $n = \sqrt{2-\sqrt{3}}$; h = ?

g) a = 6,75; m = 4; b = ?

h) m = 9; n = 16; c = ?

i) b = 5; $h=\frac{60}{13}$; c = ?

j) b - c = 7; a - b = 2; m = ?

l) b + c = 7; $h=\frac{12}{5}$; a = ?

m) a . b . c = 1620; h = 7,2; a = ?

n) $a^2 + b^2 + c^2 + 2h^2 + m^2 + n^2 = 1875$; a = ?

o) b . n = c . m; h = $6\sqrt{3}$; b = ?

p) a = 25; h = 12; $m^3 + n^3$ = ?

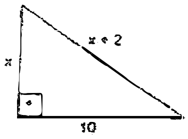
q) $a \in N$; $b \in N$; $c \in N$; $b^2 - c^2 = 119$; a = ?

r) b = 60; h = 36; c = ?

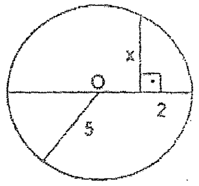
3) Em um triângulo de perímetro 60 cm, a altura relativa à hipotenusa vale 12 cm. Determine os demais elementos.

4) Determine o valor de x em:

a)

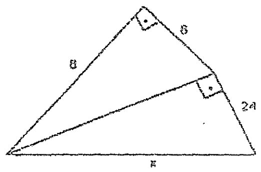


e)

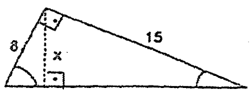


b)

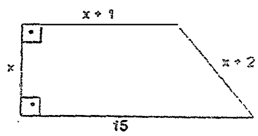
f)



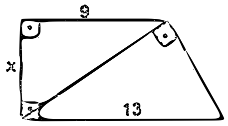
c)



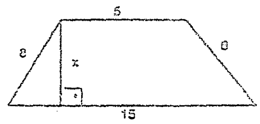
g)



d)

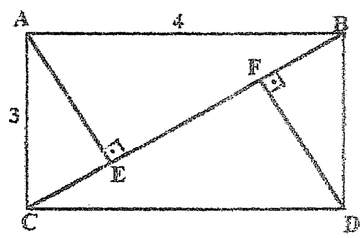


h)



5) Na figura ABCD é um retângulo. A medida do segmento $\overline{EF}$ é:

a) 0,8
b) 1,4
c) 2,6
d) 3,2
e) 3,8



6) O menor cateto e a maior projeção de um triângulo retângulo medem, respectivamente, 12 cm e 12,8 cm. Determine as medidas do outro cateto, da outra projeção, da altura relativa à hipotenusa e da hipotenusa.

7) A hipotenusa de um triângulo de perímetro 60 cm, mede 26 cm. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa.

8) Em um triângulo de perímetro 30 cm, os catetos diferem de 7 cm. Determine os lados desse triângulo.

9) Em um triângulo de hipotenusa a e catetos b e c, temos que b + c = 17 e a - c = 8. Calcule o perímetro desse triângulo.

10) Determine as medidas dos lados de um triângulo retângulo no qual a altura relativa à hipotenusa mede 4 cm e as projeções são tais que uma excede a outra em 6 cm.

11) Determine a altura de um triângulo equilátero do perímetro $6\sqrt{3}\,cm$.

12) Determine o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $4\sqrt{2}\,cm$.

13) O incentro de um triângulo equilátero dista 2 cm de um de seus lados. Determine o perímetro desse triângulo.

14) Determine a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 4 cm.

15) Determine a altura de um triângulo isósceles de lados 4 cm e 10 cm.

16) Um triângulo isósceles tem base 16 cm e altura a ela relativa igual a 15 cm. Determine o perímetro desse triângulo.

17) O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de altura é 18 cm. Os lados deste triângulo, em cm, são:

a) 7, 7, 4
b) 5, 5, 8
c) 6, 6, 6
d) 4, 4, 10
e) 3, 3, 12

18) Em um trapézio retângulo, a base menor vale 6 e os lados oblíquos medem 12 e 13. Determine a medida da base maior.

19) Em um trapézio de base 4 e 18, os lados não paralelos medem 13 e 15. Determine a medida da altura desse trapézio.

20) Determine a altura de um trapézio de bases 6 cm e 21 cm, sabendo-se que seus lados oblíquos medem 9 cm e 12 cm.

21) Determine o perímetro de um trapézio retângulo cuja base maior mede 15 cm, sabendo-se que a altura, a base menor e o maior lado oblíquo são, nesta ordem, números inteiros e consecutivos.

22) Determine a altura h de um trapézio isósceles de bases B e b, que se encontra circunscrito a um círculo.

23) Determine a altura de um trapézio isósceles circunscritível, de bases 2 cm e 32 cm.

24) Determine o raio do círculo inscrito em um trapézio isósceles de bases 6 cm e 24 cm.

25) O raio do círculo inscrito em um trapézio isósceles mede 2 cm. Determine a medida da base menor do trapézio, sabendo-se que a outra base mede 5 cm.

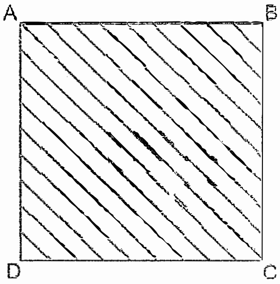
26) As perpendiculares $\overline{DM}$ e $\overline{CN}$, baixadas dos vértices da base menor de um trapézio ABCD sobre a base maior, dividem-na nos segmentos $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NB}$, que, nesta ordem, têm medidas expressas por múltiplos consecutivos de 4. Determine a medida da base maior, sabendo-se que as contra-bases medem 30 e 26.

27) Determine o perímetro e a altura de um losango cujas diagonais medem 18 cm e 24 cm.

28) A diagonal menor de um losango de perímetro 60 cm mede 15 cm. Calcule a medida da diagonal maior.

29) Determine a altura de um losango cuja diagonal maior mede 16 cm e cujo perímetro vale 40 cm.

30) Um quadrado ABCD de lado ℓ tem cada um de seus lados dividido em 9 partes iguais. Ligando-se com segmentos de reta os pontos de divisão, segundo a direção da diagonal $\overline{AC}$, obtém-se o hachurado mostrado na figura. Calcule a soma dos comprimentos dos 17 segmentos assim obtidos.

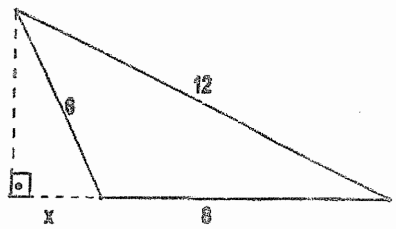


31) Determine o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos 10 cm e 24 cm.

32) Um triângulo tem lados medindo 20 cm, 21 cm e 29 cm. Determine a soma dos raios das circunferência inscrita e circunscrita a ele.

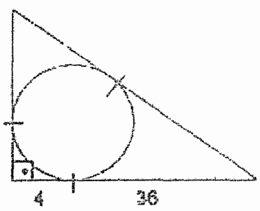
33) Determine as medidas dos raios dos círculos inscrito e circunscrito ao triângulo de lados 8, $4\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.

34) Determine a medida de x na figura abaixo:

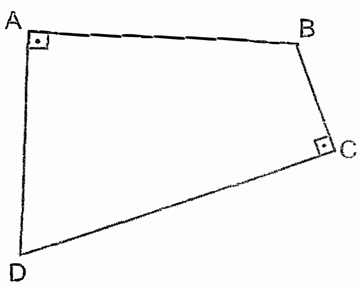


35) Num círculo de 16 m de raio, uma corda mede 8 m. Determine a medida da corda do arco duplo.

36) Determine o perímetro do triângulo abaixo:



37) Calcule a medida de $\overline{DC}$ na figura abaixo, em que $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{AD} = 7$.

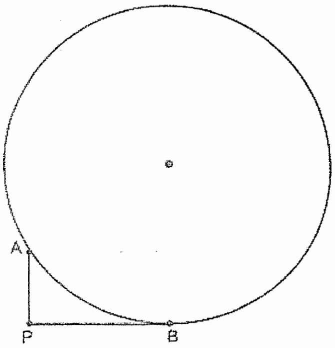


38) Os centros de duas circunferências de raios 2 cm e 7 cm distam de 10 cm. Determine o comprimento das tangentes comuns interna e externa.

39) Determine o comprimento da tangente comum externa a duas circunferências tangentes exteriores de raios 8 cm e 6 cm.

40) Duas circunferências concêntricas têm raios 3 cm e 4 cm. Determine o comprimento da corda da maior que é tangente à menor.

41) Na figura abaixo, $\overline{PB} = 5$ é tangente à circunferência e $\overline{PA} = 1$ é perpendicular a $\overline{PB}$. Determine o raio de círculo.

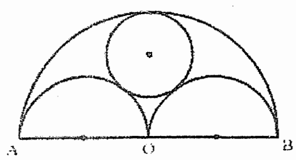


42) Determine o perímetro do quadrilátero convexo que se obtém unindo-se os pontos médios dos lados de um trapézio retângulo, que medem 8, 10, 10 e 16.

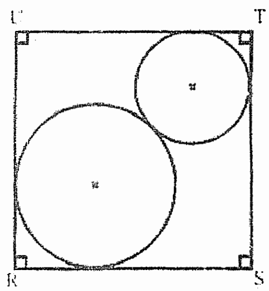
43) Em um triângulo retângulo, as medianas não relativas à hipotenusa medem 10 cm e $\sqrt{70}\,cm$. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

44) Determine o perímetro de um quadrado no qual a soma das medidas de um lado com uma diagonal vale $2 + \sqrt{2}\,cm$.

45) Na figura abaixo, determine o raio do círculo tangente aos semi-círculos de diâmetros $\overline{AB}$, $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, sabendo que $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$.



46) Calcule a soma dos raios dos círculos da figura abaixo, sabendo que eles são tangentes cada um a dois lados consecutivos do retângulo RSTU de dimensões $\overline{RS} = 9m$ e $\overline{ST} = 8m$, e tangentes entre si.



47) Sobre um plano traça-se uma reta r. Em um dos semi-planos por ela definido, são traçados três circunferências, tangentes entre si duas a duas, de modo que todas tangenciam a reta r. Determine o raio da menor circunferência nos casos em que os raios das maiores medem:
a) 8 e 8
b) 2 e 8

48) Dois ângulos de um trapézio isósceles circunscritível são complementares. Determine o perímetro desse trapézio, sabendo-se que a medida de sua mediana de Euler é $8\sqrt{2}\,m$.

49) Apoiados sobre os lados de um triângulo retângulo, para o seu exterior, são construídos três quadrados. A soma das

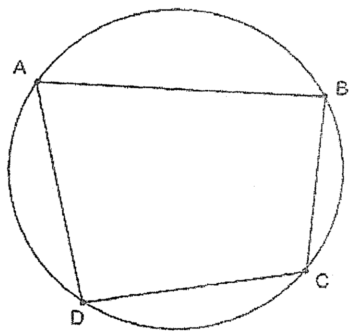
medidas de todas as diagonais desses quadrados vale $24\sqrt{2}\,cm$. Determine a hipotenusa desse triângulo, sabendo que ela e a altura que lhe é relativa estão na razão $\frac{25}{12}$.

50) Dois círculos tangentes exteriores têm raios R e r. Determine a medida do segmento da reta tangente comum externa a eles, determinado pelos pontos de contato.

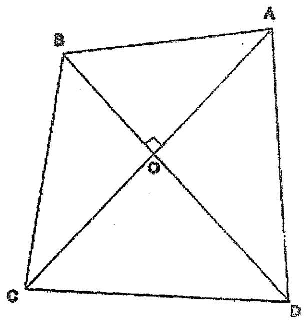
51) Dois círculos são tangentes exteriores e o raio de um deles é 1 m. Determine o raio do outro, sabendo que o segmento determinado na tangente comum externa tem comprimento 4 cm.

52) Um quadrado ABCD tem 64 cm de perímetro. Determine a medida do raio do círculo que passa pelos pontos A e D e é tangente ao lado $\overline{BC}$.

53) Na figura abaixo, o círculo tem raio igual a 1,5 cm. Sabendo-se que $\overline{AB} = \sqrt{5}\,cm$, $\overline{BC} = 1cm$ e $\overline{CD} = 2cm$, determine a medida do segmento $\overline{AD}$.



54) Na figura, a medida do lado $\overline{BC}$ é o dobro da medida do lado $\overline{AB}$. Sabendo-se que $\overline{AD} = 8\,cm$ e $\overline{CD} = 10\,cm$, determine o valor do perímetro do quadrilátero ABCD.



QUESTÕES DE CONCURSOS

55) **(CM)** No triângulo retângulo abaixo sabe-se que a, b e c satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$.
Se **a** mede 11cm e **b** mede 7cm, pose-se dizer que **c** mede:
a) $3\sqrt{2}$cm
b) $4\sqrt{2}$cm
c) $6\sqrt{2}$cm
d) $18\sqrt{2}$cm

56) **(CM)** Se a menor altura de um triângulo retângulo isósceles mede 20 cm, então o perímetro desse triângulo é igual a:
a) $20.(1+\sqrt{2})$ cm
b) $20.(2+2\sqrt{2})$ cm
c) $20.(3+\sqrt{2})$ cm
d) $20.(4+\sqrt{2})$ cm
e) $20.(5+\sqrt{2})$ cm

57) **(CM)** Se as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, em um triângulo retângulo, medem 9 cm e 25 cm, então a soma dos catetos, em centímetros, é igual a:
a) $8\sqrt{34}$
b) $9\sqrt{34}$
c) 45
d) 35
e) $15\sqrt{34}$

58) **(PUC)** A hipotenusa de um triângulo mede $2\sqrt{61}$. A diferença entre os comprimentos dos dois outros lados é 2. Então o menor lado tem comprimento:
a) $\sqrt{10}$
b) 7
c) 10
d) $5\sqrt{6}$
e) 11

59) **(PUC)** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 17 cm. A diferença entre os comprimentos dos dois outros lados é de 7 cm. Qual é o perímetro do triângulo?
a) 38 cm;
b) $17 + 20\sqrt{2}\,cm$;
c) 40 cm;
d) $17 + 10\sqrt{7}\,cm$;
e) 47 cm.

60) **(PUC)** Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Sejam m e n as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Então a soma $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ é igua a:

a) $\frac{1}{a}$

b) $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

c) $\frac{1}{b+c}$

d) $\frac{a^3}{b^2+c^2}$

e) $\frac{a^3}{b^2c^2}$

61) **(PUC)** A altura de um triângulo eqüilátero de lado 4 cm é:
a) 4 cm
b) 2 cm
c) 1 cm
d) $4\sqrt{3}\,cm$
e) $2\sqrt{3}\,cm$

62) **(CN)** Para a construção com régua e compasso do número $\sqrt{r}$, r primo, um aluno determinou a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujas projeções dos catetos sobre a hipotenusa são números:
a) primos
b) cujo quociente pode ser r - 1

c) cuja diferença é r - 1
d) múltiplo de r
e) cuja soma é r

63) **(CM)** Se o perímetro de um triângulo equilátero é 36 metros, então sua altura medirá:

a) $4\sqrt{27}$ m
b) $3\sqrt{6}$ m
c) 18m
d) $4\sqrt{2}$ m
e) $6\sqrt{3}$ m

64) **(CM)** O valor absoluto da diferença entre as raízes da equação $x^2 - x + \sqrt{2} = x$ é a medida do lado de um quadrado. A diagonal desse quadrado mede:

a) $2 - \sqrt{2}$
b) $3 - \sqrt{2}$
c) $3 - 2\sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{2}$
e) $1 + \sqrt{2}$

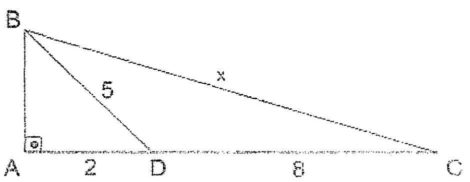
65) **(CM)** As diagonais de um losango medem a e b. A circunferência inscrita nesse losango:

a) só existe se a = b.
b) sempre existe e tem raio $\sqrt{ab}$.
c) sempre existe e tem raio $\sqrt{a^2+b^2}$.
d) sempre existe e tem raio $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.
e) sempre existe e tem raio $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2(a^2+b^2)}$.

66) **(CEFET)** Um triângulo retângulo tem lados com medidas a, b e c (em cm), onde $c = \sqrt{13}$ e $c < b < a$. Considerando ainda que a e b são números inteiros, calcule o valor de $2a - b$.

67) **(ENEM)** Na figura, o triângulo ABC é retângulo em Â. Sabendo-se que AD = 2, CD = 8 e BD = 5, a medida do lado BC é:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15



68) **(CEFET)** Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Os pontos M e N pertencem ao lado BC e o dividem em três partes iguais. O perímetro do triângulo AMC é:

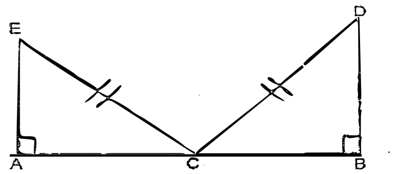
a) $\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}$
b) $\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$
c) $\dfrac{5+4\sqrt{7}}{3}$
d) $\dfrac{5+6\sqrt{7}}{3}$
e) $\dfrac{1+7\sqrt{7}}{3}$

69) **(EPCAR)** Em um triângulo isósceles AOB, retângulo em O, de cateto igual a **b**, são dados os pontos P entre A e O e Q entre O e B de tal maneira que AP = PQ = QB = x. O valor de x é:

a) $b\sqrt{2}$
b) $2b$
c) $2b + b\sqrt{2}$
d) $2b - b\sqrt{2}$

70) **(PUC)** Na figura, sabendo-se que $\overline{AE} = 30m$, $\overline{BD} = 40m$, $\overline{AB} = 50m$, $\overline{EC} = \overline{CD}$, então $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ valem respectivamente:

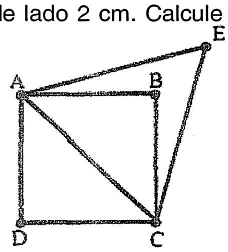
a) 25 m e 25 m
b) 32 m e 18 m
c) 38 m e 12 m
d) 40 m e 10 m



71) **(CN)** As medianas traçadas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, medem $\sqrt{17}\,cm$ e $\sqrt{23}\,cm$. A medida da mediana traçada do ângulo reto é:

a) $5\sqrt{2}\,cm$
b) $4\sqrt{2}\,cm$
c) $3\sqrt{2}\,cm$
d) $2\sqrt{2}\,cm$
e) $\sqrt{2}\,cm$

72) **(UERJ)** Na figura, o triângulo AEC é eqüilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. Calcule a distância BE.

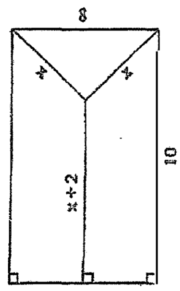


73) **(CEFET)** Se ABCD é um quadrilátero tal que AB = AD, BÂD = 60°, $A\hat{B}C$ = 150° e $B\hat{C}D$ = 45°, podemos afirmar que:

a) CD = AB
b) CD = $\sqrt{2}$. BC
c) CD < AD
d) CD – BD < 0

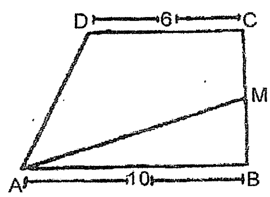
74) **(CM)** Na figura ao lado, o valor de x é:

a) 5
b) 4,5
c) 4,0
d) 3,0
e) 6,0



75) **(CN)** O trapézio ABCD da figura é retângulo. A bissetriz do ângulo Â intercepta $\overline{BC}$ no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:

a) $2\sqrt{15}$
b) $8\sqrt{15}$
c) $6\sqrt{15}$
d) $4\sqrt{15}$



e) $5\sqrt{15}$

76) **(CN)** Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios dos lados de um trapézio retângulo ABCD, de bases $\overline{AB} = 32$ e $\overline{CD} = 8$. A altura $\overline{BC}$ é igual a:
a) 8
b) 10
c) 12
d) 16
e) 20

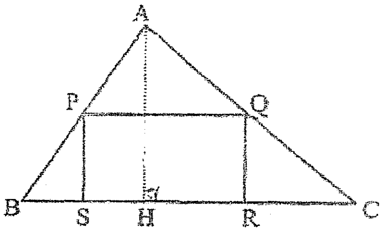
77) **(CAP - UFRJ)** No triângulo ABC da figura abaixo, determine a medida da diagonal do retângulo PQRS.

Dados: $\overline{AB} = 3cm$

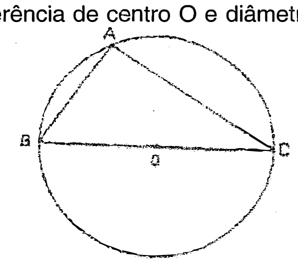
$\overline{BH} = 1cm$

$\overline{HR} = 1cm$

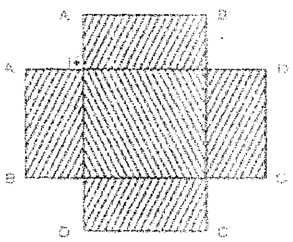
$\overline{RC} = 1cm$



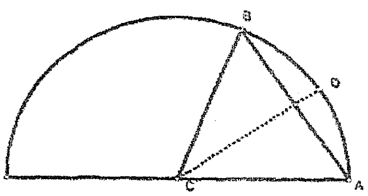
78) **(CM)** Se na figura abaixo o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O e diâmetro $\overline{BC}$, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 5 cm e 12 cm, então o raio da circunferência de centro O e diâmetro mede, em centímetros:
a) 5
b) 6
c) 6,5
d) 7
e) 7,5



79) **(ENEM)** Na figura a seguir, os retângulos ABCD e A'B'C'D' têm o mesmo centro e lados iguais a 5 cm e 9 cm.



80) **(CM)** Em um semicírculo de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC, como mostra a figura. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo AB intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$é:



81) **(PUC)** A figura é uma circunferência de centro O e raio **a** com os segmentos de tangentes $\overline{CB}$ em T e $\overline{BA}$ em A. Se $\overline{AB}$ mede **b**, a medida de $\overline{AC}$ é igual a:

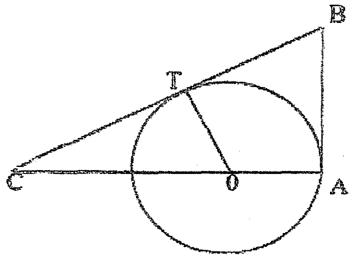
a) $\dfrac{2ab}{b+a}$

b) $\dfrac{ab}{b-a}$

c) $\dfrac{2ab^2}{b^2-a^2}$

d) $\dfrac{a^2b}{b^2+a^2}$

e) $\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}$



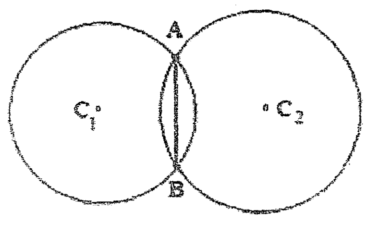
82) **(CEFET)** Duas circunferências de raio 4 cm e 5cm intersectam-se nos pontos A e B como está indicado na figura. Se a distância entre seus centros C_1 e C_2 é de 6 cm, a medida da corda $\overline{AB}$comum às duas circunferências é:

a) $\dfrac{11}{2}$cm

b) $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}cm$

c) $4\sqrt{6}cm$

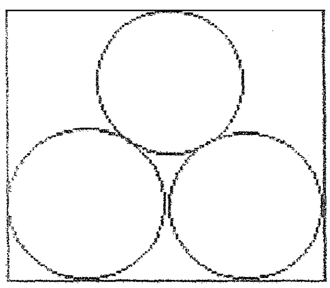
d) $\dfrac{9\sqrt{5}}{2}cm$



83) **(CN)** A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.
a) 38,5
b) 39
c) 39,5
d) 40
e) 40,5

84) **(CN)** Os raios de dois círculos medem 15 m e 20 m e a distância dos seus centros tem 35 m. O segmento da tangente comum, compreendido entre os pontos de contato, mede em metros:
a) $5\sqrt{3}$
b) $10\sqrt{3}$
c) $12\sqrt{3}$
d) $15\sqrt{3}$
e) $20\sqrt{3}$

85) **(CM)** Observe a figura.
Nela, três circunferências de raio r são tangentes duas a duas e tangentes aos lados de um quadrado. A medida do lado do quadrado em função do raio r das circunferências é igual a:
a) 3 . r
b) $\dfrac{5}{2}\cdot r$
c) $r.(2+\sqrt{3})$
d) $r.\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
e) 4r



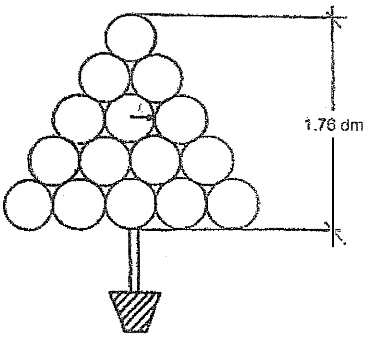
86) **(CM)** No interior de um quadrado de lado **a** existem cinco círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o centro do quadrado e cada um dos outros quatro círculos tangencia externamente o primeiro círculo e tangencia, também, dois lados consecutivos do quadrado. Então, podemos afirmar que:
a) $r = a\sqrt{2}+1$
b) $r = a\sqrt{3}-1$

c) $r = 2a\sqrt{2}$

d) $r = 3a\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}$

e) $r = a\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$

87) **(CEFET)** Num cartão de Natal, havia a figura de uma árvore como mostra o desenho. Sendo todos os círculos congruentes, calcule o raio ℓ. (Considere $\sqrt{3}=1{,}7$).



88) **(CN)** Considere uma circunferência I de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à I e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por:

a) $\dfrac{R}{4}$

b) $\dfrac{R\sqrt{2}}{4}$

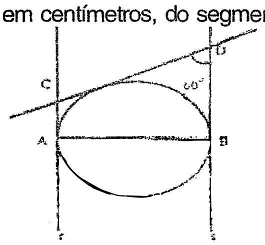
c) $\dfrac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

d) $\dfrac{R\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}$

e) $\dfrac{R}{6}$

89) **(CN)** Na figura abaixo, as retas r, s e t são tangentes à circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{AC}$ é:

a) 16
b) 14
c) 12
d) 8
e) 20

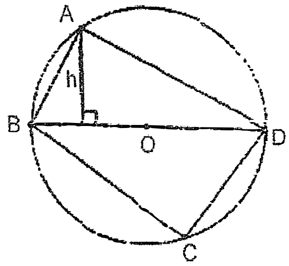


90) **(CM)** Determine a diferença entre as medidas das bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo de raio 3 cm, sabendo que a base média desse trapézio mede 6,5 cm.

a) 1,5 cm
b) 2 cm
c) 2,5 cm
d) 4 cm

91) **(CM)** Na figura abaixo, onde as medidas estão expressas na mesma unidade, temos $AB = 15$, $BC = 24$ e $CD = 7$.
Sendo BD diâmetro, a medida de h é:

a) 10,5
b) 10,6
c) 11,5
d) 12
e) 12,5
e) 5 cm



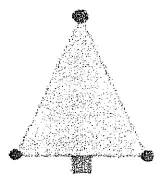
92) **(CN)** ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB em A e tangente a K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será:

a) $\dfrac{5L}{6}$ b) $\dfrac{4L}{5}$ c) $\dfrac{2L}{3}$ d) $\dfrac{3L}{5}$ e) $\dfrac{L}{3}$

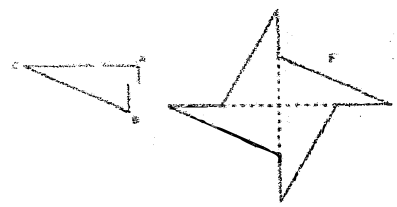
93) **(CPII)** A vitrine de uma loja tem 2,4 m de largura e 2,9 m de altura. Com a proximidade do Natal, a lojista deseja decorar a vitrine de sua loja. Ela pretende construir uma árvore de Natal utilizando três círculos congruentes, de raio 10 cm, um quadrado cujo lado mede 30 cm e um triângulo isósceles, com 2 m de base e lados de 2,6 m cada, todos de cartolina <u>não vazada.</u>
Os centros dos círculos devem coincidir com os vértices do triângulo.
Calcule as medidas da árvore (largura e altura) e compare-as com as da vitrine. Será que essa árvore vai caber na vitrine?

94) **(CEFET)** Abaixo temos um triângulo retângulo ABC e uma figura F composta por quatro triângulos congruentes a ABC. Considerando que BC = 8 cm e 3 AC = 4 AB, qual é o perímetro da figura F?

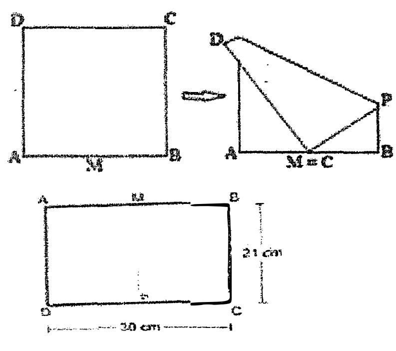
a) 36,0 cm
b) 36,4 cm
c) 38,0 cm
d) 38,4 cm



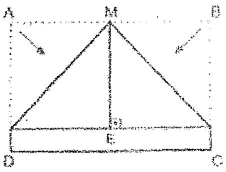
95) **(CPII)** Uma folha quadrada de papel ABCD, cujos lados medem 12cm, é dobrada de modo que o vértice C coincide com o ponto M, médio de $\overline{AB}$, como mostra a figura abaixo. Calcule a medida do segmento $\overline{BP}$.



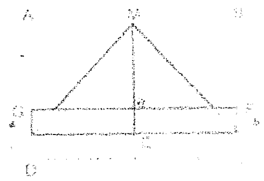
96) **(EPCAR)** Brincando de dobraduras, Renan usou uma folha retangular de dimensões 30 cm por 21 cm e dobrou conforme o procedimento abaixo descrito.
1º Tracejou na metade da folha e marcou o ponto M.



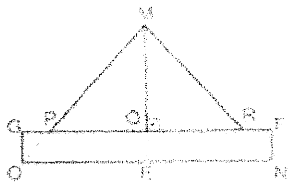
2º Dobrou a folha movendo os pontos A e B para o ponto E.



3º Em seguida, dobrou a folha movendo os pontos C e D para F e G, respectivamente.



4º Marcou os pontos N, O, P, Q, R na figura resultante.



Segundo esses procedimentos, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{MR}$, em centímetros, é igual a:
a) 6
b) $6\sqrt{2}$
c) 9
d) $9\sqrt{2}$

97) **(PUC)** Um balão está no solo a 10 m de distância de um observador. O observador começa a andar em direção ao balão com velocidade de 2,0 m/s no exato instante em que o balão começa a subir com velocidade de 1,0 m/s. Determine a distância de, d em metros, entre o observador e o balão após t minutos em que o balão começou a subir.

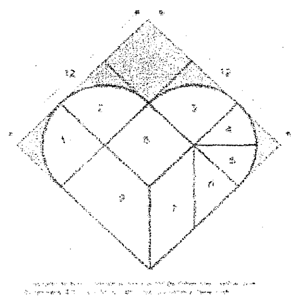
98) **(CEFET)** Dois automóveis A e B estão se movendo em direção à interseção de duas estradas retilíneas que formam entre si um ângulo de 90º. O carro A movimenta-se no sentido oeste, enquanto o carro B movimenta-se no sentido norte. Ambos os carros movimentam-se com velocidade constante. Às 13 horas, o carro A encontra-se a 200 quilômetros da referida interseção entre as estradas e movimenta-se a 60 km/h enquanto o carro B encontra-se a 190 quilômetros desta interseção, movimentando-se a 55 km/h. Determinar:
a) A distância entre os carros às 15 horas.
b) O horário no qual a distância do automóvel A até a referida interseção entre as estradas, seja igual ao dobro da distância do automóvel B até esta interseção.

99) **(CN)** Uma cidade B encontra-se a 600 Km a leste de uma cidade A; e uma cidade C encontra-se a 500 Km ao norte da mesma cidade A. Um ônibus parte de B, com velocidade constante em linha reta e na direção da cidade A. No mesmo instante e com velocidade constante igual à do ônibus, um carro, também em linha reta parte de C para interceptá-lo. Aproximadamente a quantos quilômetros de A, o carro alcançará o ônibus?
a) 92
b) 94
c) 96
d) 98
e) 100

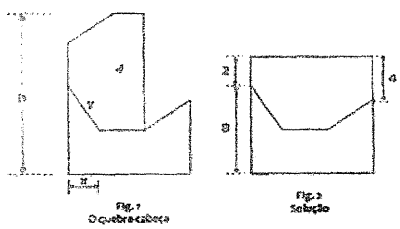
100) **(CN)** Um móvel P_1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K_1 de diâmetro AB = 2 e, no mesmo instante, um outro móvel P_2 parte, no sentido anti-horário, do ponto C de uma circunferência K_2 de diâmetro BC = 4.

Sabe-se que:
- A, B e C são colineares;
- P_1 e P_2 têm velocidade constante;
- K_1 e K_2 são tangentes exteriores em B;
- P_1 e P_2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;
- P_2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K_2;
- O primeiro encontro de P_1 e P_2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

101) **(CPII)** Mariana gosta muito de quebra-cabeça geométricos. Seu favorito é o quebra-cabeça “Coração Partido”. A partir de um quadrado de lado 12cm, o coração é formado por nove peças: três setores de 90º, dois setores de 45º, um triângulo retângulo, um paralelogramo, um quadrado e um trapézio retângulo, conforme ilustra a figura. A parte em cinza do quadrado é descartada do quebra-cabeça.
Determine a área do coração, em cm². (Adote ð @ 3.)

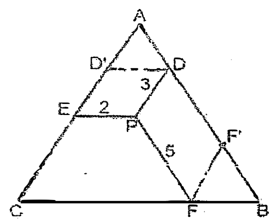


102) **(CPII)** O quebra-cabeça ilustrado abaixo, formado por duas peças que se encaixam perfeitamente, foi apresentado pela primeira vez pelos enigmistasLoyd e Dudeney como o Enigma da Liteira. Nesse enigma, desejava-se cortar a liteira (Fig. 1) no menor número possível de pedaços e rearranja-los de modo que formassem um quadrado. A solução (Fig. 2) está representada abaixo.



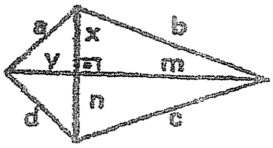
103) **(PUC)** Um segmento tem 2 cm de comprimento. Os centros dos seus arcos capazes de 30º distam entre si:
a) 1 cm
b) $\sqrt{3}\,cm$
c) 2 cm
d) 3 cm
e) $2\sqrt{3}\,cm$

104) **(CEFET)** O triângulo ABC da figura é eqüilátero. Se $\overline{PD}\,//\,\overline{AC}$, $\overline{PF}\,//\,\overline{AB}$ e $\overline{PE}\,//\,\overline{BC}$, determine a altura do triângulo ABC.



105) **(CEFET)** Num quadrilátero convexo, os lados a, b, c e d são consecutivos e as diagonais são perpendiculares.

Se b = 2a e d + c = a², calcule a diferença indicada: d - c.



106) **(PUC)** Um ponto P interior a um retângulo ABCD, é tal que $\overline{AP} = 4\,cm$, $\overline{BP} = 5\,m$ e $\overline{CP} = 6\,cm$. Determine a medida de $\overline{DP}$.

107) **(CN)** A que distância do vértice de um triângulo eqüilátero de lado igual a 6 cm deve-se traçar uma reta paralela à base, de forma que o quadrilátero assim obtido seja circunscritível?

a) $\sqrt{3}\,cm$

b) $2\sqrt{3}\,cm$

c) $3\sqrt{3}\,cm$

d) $4\sqrt{3}\,cm$

e) $5\sqrt{3}\,cm$

108) **(CN)** O lado do hexágono eqüilátero inscrito numa semicircunferência do círculo de raio r e centro 0, onde uma de suas bases está sobre o diâmetro, é:

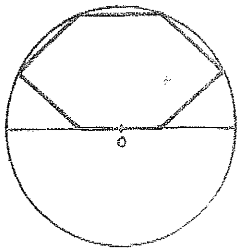
a) r/2

b) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$

d) r

e) 2r/3



109) **(CN)** No triângulo ABC, tem-se $\overline{BC} = a$ e a altura $\overline{AH} = h$. O lado do triângulo eqüilátero DEF inscrito em ABC tal que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, é dado pela expressão:

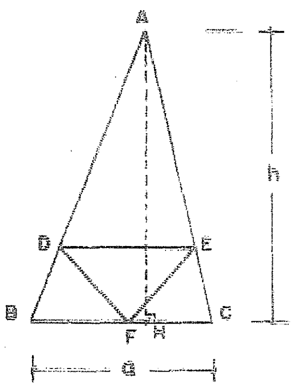
a) $\frac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$

b) $\frac{ah}{h+a\sqrt{3}}$

c) $\frac{2h}{h\sqrt{3}+a}$

d) $\frac{2a}{a\sqrt{3}+h}$

e) $\frac{2ah}{2a\sqrt{3}+h}$



110) (CN) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente 3x, 4x e 5x, em que x é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos a esse triângulo corresponde a

a) $\frac{5x}{4}$

b) $\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$

c) $x\sqrt{2}$

d) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{5x}{6}$

111) **(CN)** ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:

a) AC

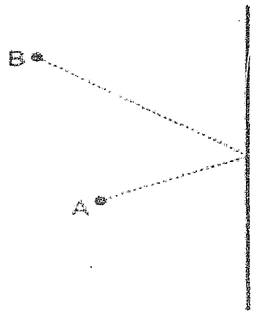
b) AB

c) BC/2

d) HC/2

e) AH

112) **(CEFET)** Gustavo está no ponto A de uma floresta e precisa ir para o ponto B. Porém, ele está com muita sede e , antes, precisa ir até o rio para beber água. O rio está representado pela reta r na figura abaixo. Sabe-se que o ponto A e o ponto B estão respectivamente a 300m e 600m do rio. A distância entre os pontos A e B é de 500m. Calcule a menor distância que Gustavo pode percorrer.



GABARITO

1) a = 10; h = 4,8; m = 3,6 e n = 6,4

2) a) 40
b) 17
c) 4,8
d) $\frac{60}{33}$
e) 20
f) 1
g) $3\sqrt{3}$
h) 20
i) 12
j) $\frac{225}{17}$
l) 5
m) 15
n) 25
o) $6\sqrt{6}$
p) 4.825
q) 13
r) 45

3) a = 25; b = 15; c = 20; m = 9 e n = 16

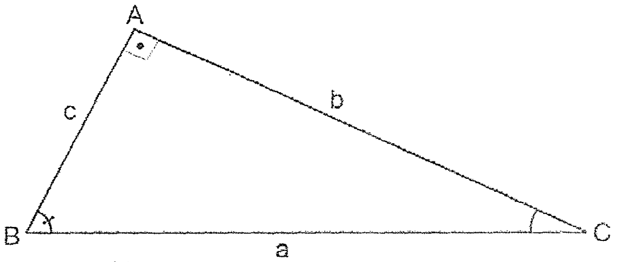
4) a) 24
b) 16
c) $\frac{120}{17}$
d) 6
e) 4

f) 26
g) 8
h) 4,8

5) B
6) 16 cm; 7,2 cm; 9,6 cm e 20 cm
7) $\frac{120}{13}$cm
8) 5 cm; 12 cm e 13 cm
9) 30
10) $2\sqrt{5}$cm; $4\sqrt{5}$cm e 10cm
11) 3 cm
12) $8\sqrt{6}$cm
13) $12\sqrt{3}$cm
14) $2\sqrt{2}$ cm
15) $4\sqrt{6}$cm
16) 50 cm
17) B
18) 11
19) 12
20) 7,2 cm
21) 42 cm
22) h = $\sqrt{B \cdot b}$
23) 8 cm
24) 6 cm
25) 3,2 cm
26) 42
27) 60cm, e 14,4 cm
28) $15\sqrt{3}$cm
29) 9,6 cm
30) $9\ell\sqrt{2}$
31) 4 cm
32) 20,5 cm
33) $4(\sqrt{2}-1)$ e 4
34) 2,75
35) $4\sqrt{15}$m
36) 90
37) 11
38) $\sqrt{19}cm$ e $5\sqrt{3}cm$
39) $8\sqrt{3}$
40) $2\sqrt{7}$cm
41) 13
42) $8\sqrt{5}+2\sqrt{41}$
43) $2\sqrt{34}$cm
44) $4\sqrt{2}$
45) 2
46) 5m
47) a)2
b)$\frac{8}{9}$
48) 64 m
49) 5 cm
50) A
51) 0,04 cm
52) 10 cm
53) $2\sqrt{2}$cm
54) $6(\sqrt{3}+3)$cm
55) C
56) B
57) A
58) C
59) C
60) E
61) E
62) C
63) E
64) A
65) E
66) 8
67) A
68) B
69) D
70) B
71) D
72) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm
73) B
74) A
75) D
76) D
77) $\frac{\sqrt{17}}{2}$cm
78) C
79) C
80) A
81) C
82) B
83) D
84) E
85) C
86) E
87) 0,2 dm
88) C
89) A
90) E
91) D
92) E
93) Sim, pois ℓ = 2,2m e a=2,8 m
94) D
95) 4,5 cm
96) D
97) $d=\sqrt{5t^2-40t+100}$
98) a) $80\sqrt{2}$km
b) 16 h 36 min
99) A
100) E
101) a) BN = 3x, AN = 12 – 3x e AM = 12 – x
b) 2 cm
102) a) 2 cm
b) 14 cm
c) $2\sqrt{5}$ cm
103) E
104) $5\sqrt{3}$
105) -3
106) $3\sqrt{3}$cm
107) A
108) B
109) A
110) D
111) C
112) $100\sqrt{97}m$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Como vimos no capítulo anterior, o triângulo retângulo é aquele que apresenta um ângulo reto e portanto dois outros ângulos agudos complementares.



$a \to$ hipotenusa
$b, c \to$ catetos

$$\boxed{\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ}$$

Definições
Em um triângulo retângulo os ângulos agudos estão associados aos números *seno*, *cosseno*, e *tangente*, cotagente, secante e cossecante, definidos a seguir:

Seno – é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a}}$$

Cosseno – é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\cos\hat{B} = \frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos\hat{C} = \frac{b}{a}}$$

Tangente – é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.
Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}}$$

Cotangente – é a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo.
Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\text{ctg}\,\hat{B} = \frac{c}{b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{ctg}\,\hat{C} = \frac{b}{c}}$$

Secante – é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo.
Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\sec\hat{B} = \frac{a}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sec\hat{C} = \frac{a}{b}}$$

Cossecante – é a razão ente a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo.
Na figura anterior, temos:

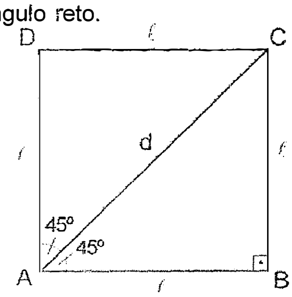
$$\boxed{\csc\hat{B} = \frac{a}{b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\csc\hat{C} = \frac{a}{c}}$$

Importante
Observe pelo exposto anteriormente que sen B = cos C, sen C = cos B, tg B = ctg C, tg C = ctg B, sec B = csc C e sec C = csc B. Isto se deve ao fato de que os ângulos B e C são *complementares*. Assim: **"se dois ângulos são complementares o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, a tangente de um é igual à cotangente do outro e a secante de um é igual à cossecante do outro."**

Exemplos:
sen 40º = cos 50º
tg 70º = ctg 20º
sec 10º = csc 80º

Razões trigonométricas do ângulo de 45º

A seguir obteremos as principais razões trigonométricas do ângulo de 45º que são seno, cosseno e tangente. Para isto, consideremos o quadrado ABCD abaixo, de lado ℓ. Sabemos que a diagonal d, que vale $\ell\sqrt{2}$, também é bissetriz do ângulo reto.



Aplicando no triângulo ABC as definições:

$$\text{sen}\,45^\circ = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

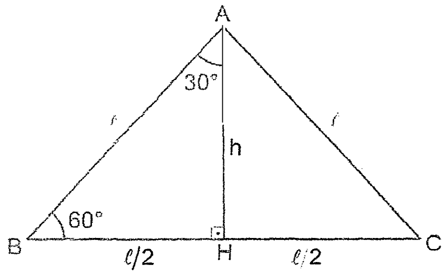
$$\cos 45^\circ = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg}\,45^\circ = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{CATETO ADJACENTE}} = \frac{\ell}{\ell} = \boxed{\text{tg}\,45^\circ = 1}$$

Razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º

Para obtermos tais razões, lançaremos mão do triângulo equilátero ABC de lado ℓ e altura h da figura abaixo.

Como estudado anteriormente, temos que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$



Utilizando as definições no triângulo ABH, lembrando que $\overline{AH}$ também é bissetriz:

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ell}{2} \times \frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

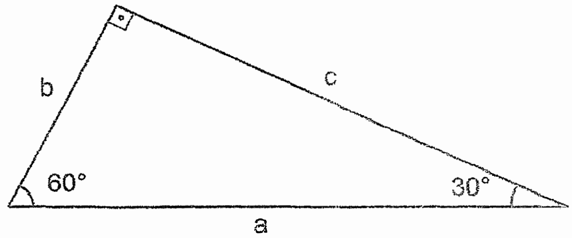
$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{h}{\ell}}{2} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\ell} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}}$$

Triângulos retângulos especiais

Como consequência do exposto aqui, podemos citar algumas conclusões importantes e bastante úteis.

Triângulo de ângulos 30°, 60° e 90°



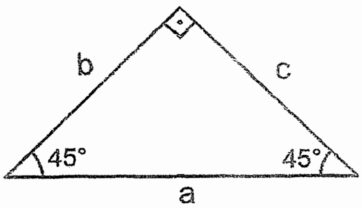
"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 30°, vale a metade da hipotenusa."

$$\boxed{b = \frac{a}{2}}$$

"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 60°, vale a metade da hipotenusa multiplicada por $\sqrt{3}$."

$$\boxed{c = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

Triângulo retângulo isósceles



"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 45º, vale a metade da hipotenusa multiplicada por $\sqrt{2}$."

$$\boxed{b = c = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}}$$

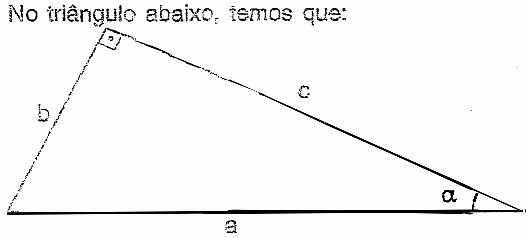
Tabela de valores

A seguir, mostramos uma tabela que será utilizada na resolução de vários exercícios.

	sen	cos	tg
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\nexists$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	0	-1	0

Relação Fundamental

No triângulo abaixo, temos que:



$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos \hat{\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dividindo-se ambos os membros por a^2:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\boxed{\text{sen}^2 \hat{\alpha} + \cos^2 \hat{\alpha} = 1}$$

Exemplo:

Dado um ângulo agudo $\hat{x}$, tal que sen $\hat{x} = \frac{5}{13}$, calcule o cos $\hat{x}$.

Resolução:

$$\text{sen}^2 \hat{x} + \cos^2 \hat{x} = 1$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \hat{x} = 1$$

$$\frac{25}{169} + \cos^2 \hat{x} = 1$$

$$\cos^2 \hat{x} = 1 - \frac{25}{169}$$

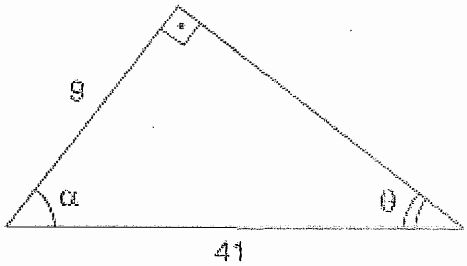
$$\cos^2 \hat{x} = \frac{144}{169}$$

$$\cos \hat{x} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$$

Como o ângulo é agudo, o cosseno é positivo. Então $\cos \hat{x} = \frac{12}{13}$.

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

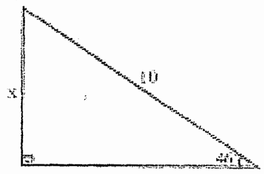
1) Considerando-se a figura abaixo, determine:

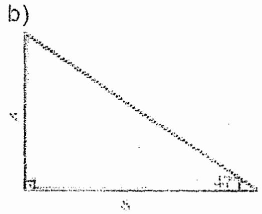


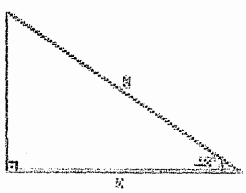
a) sen α
b) cos α
c) tg α
d) ctg α
e) sec α
f) csc α
g) sen $\hat{\theta}$
h) cos $\hat{\theta}$
i) tg $\hat{\theta}$
j) ctg $\hat{\theta}$
l) sec $\hat{\theta}$
m) csc $\hat{\theta}$

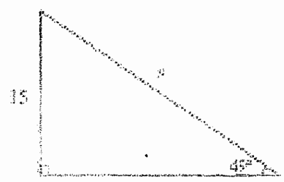
2) Determine o valor de x nas figuras que se seguem com o auxílio da tabela de razões trigonométricas abaixo:

GRAUS	sen	cos	tg
46	0,72	0,69	1,04
47	0,73	0,68	1,07
48	0,74	0,67	1,11
49	0,75	0,66	1,15
50	0,76	0,64	1,19

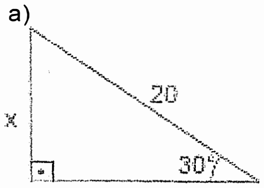
a)


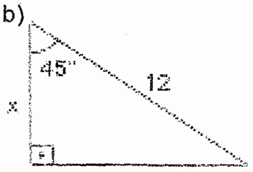
b)


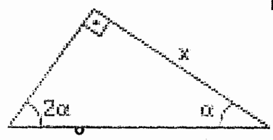
c)


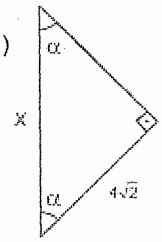
d)


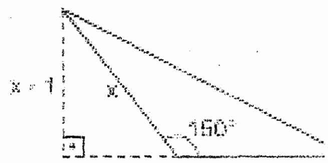
3) Determine o valor de x em:

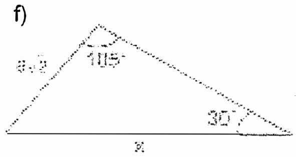
a)


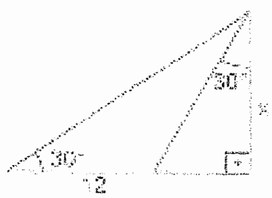
b)


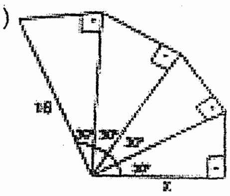
c)


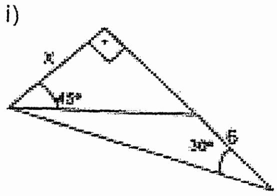
d)


e)


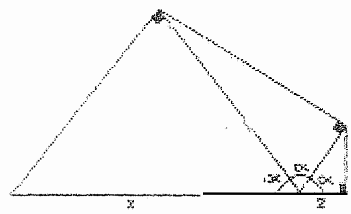
f)


g)


h)


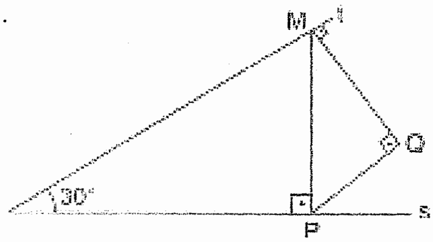
i)


4) Determine o valor de x na figura abaixo:



5) Na figura $\overline{MP} \perp s$; $\overline{MQ} \perp t$; $\overline{MQ} \perp \overline{PQ}$ e $\overline{MP} = 6$.

Calcule $\overline{PQ}$.



6) Determine o perímetro de um triângulo retângulo isósceles sabendo-se que a altura relativa à hipotenusa mede 3 cm.

7) Determine a medida da altura principal de um triângulo isósceles de base $2\sqrt{3}$ cm, que possui um ângulo de 120°

8) Determine a altura relativa ao maior lado de um rombóide que possui um ângulo de 120° e cujo menor lado mede 8 cm.

9) Em um trapézio retângulo de bases 4 e 12, um dos ângulos mede 150°. Determine as medidas da altura e do maior lado oblíquo.

10) Dois ângulos de um trapézio medem 150° e 135°. Determine a medida do maior lado oblíquo, sabendo-se que o menor mede $8\sqrt{2}$ cm.

11) Determine a altura de um trapézio isósceles de bases 5 e 9, sabendo-se que um de seus ângulos é o quintuplo do outro.

12) Em um trapézio ABCD, as bases são $\overline{AB} = 10$ e $\overline{CD} = 2$. Traça-se a bissetriz $\overline{AM}$ sendo M o ponto médio do lado oblíquo $\overline{BC}$. Determine a medida do segmento $\overline{AM}$, sabendo-se que MÂB = 30°.

13) Determine o perímetro de um trapézio isósceles cuja altura mede 4, e um de seus ângulos mede 30° e uma base é o dobro da outra.

14) Sabendo-se que $\hat{a}$ é um dos ângulos de um triângulo e que cos $\hat{a}$ =0,8, determine sen $\hat{a}$.

15) Determine o valor do cosseno no ângulo agudo $\hat{a}$, sabendo-se que $\operatorname{sen} a = \frac{5}{13}$.

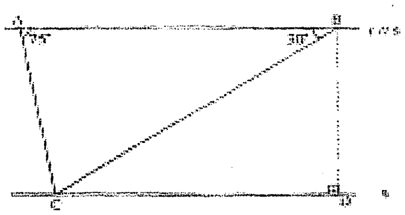
16) Devido à força do vento, uma vara de bambu de 4,2 m *trincou* em um certo ponto, indo sua extremidade livre tocar o solo em um determinado ponto. Se o ângulo formado pelos dois pedaços da vara é de 60°, qual o tamanho do maior pedaço?

17) Um observador encontra-se em um ponto A e vê o topo de um poste de altura $3\sqrt{3}$ m, segundo um ângulo de 30°. De A, caminhando em linha reta na direção do poste, ele vai até B, ponto do qual o topo do poste é avistado segundo um ângulo de 60°. Sabendo que a distância percorrida de A até B é o dobro da que falta percorrer até o poste, determine a distância $\overline{AB}$.

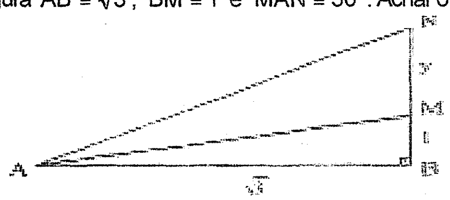
18) Um teleférico liga um ponto A, no nível do solo, até um ponto B, no alto do morro do Prazeres, que se encontra a uma altura de aproximadamente 576 m. Para isto é utilizado um cabo de 800 m de extensão. Qual o ângulo que o cabo forma com o solo? (*Utilize, se necessário, tabela do exercício 2).*

19) Um móvel parte de A e segue numa direção que forma com a reta $\overline{AC}$ um ângulo de 30°. Sabe-se que o móvel caminha com uma velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a que distância o móvel se encontra da reta $\overline{AC}$?

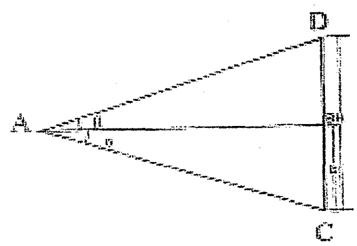
20) Dois pontos A e B estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 30°. Determine a largura do rio.



21) Na figura $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{BM} = 1$ e $M\hat{A}N = 30°$. Achar o valor de y.



22) Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal $\overline{AB}$ e mediu os ângulos a e b tendo a seguir medido $\overline{BC} = h$. Determinar a altura da chaminé.



23) Determinar o raio do círculo inscrito em um setor circular de 60° em um círculo de 6 cm de raio.

24) Determinar o raio de um círculo inscrito em um setor circular de 120° em um círculo de raio 2.

QUESTÕES DE CONCURSOS

25) **(CM)** Determine a medida do menor dos catetos de um triângulo retângulo que tem hipotenusa medindo $4\sqrt{5}$ m e um ângulo interno agudo medindo 30°.

a) $2\sqrt{6}$ m

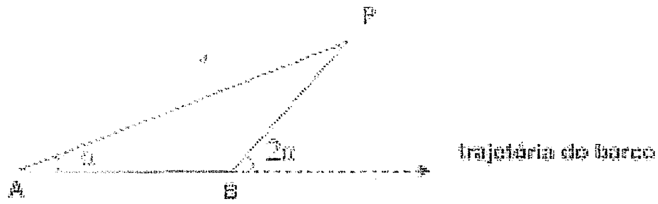
b) $2\sqrt{5}$ m

c) $2\sqrt{2}$ m

d) $4\sqrt{2}$ m

e) $2\sqrt{7}$ m

26) **(ENEM)** Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2a. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo a = 30° e , ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1 000 m

b) 1 000 $\sqrt{3}$ m

c) 2 000 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

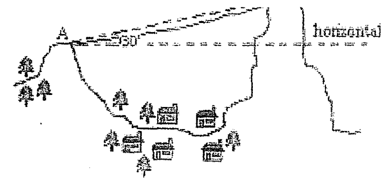
d) 2 000 m

e)2 000 $\sqrt{3}$ m

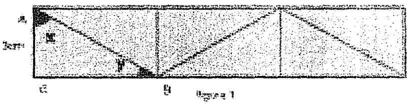
27) **(CM)** A Secretaria de Turismo de Andrelândia quer instalar um teleférico ligando os topos de duas montanhas **A** e **B** que contornam a cidade, veja a figura:
A altitude da montanha **A** é de 978 m e da montanha **B** é de 1.224 m. Os técnicos verificaram que o segmento que liga o topo das duas montanhas forma um ângulo de 30° com a horizontal que passa pelo ponto **A**. Por causa da grande distância que liga o topo das duas montanhas, o cabo de aço que sustentará o teleférico deverá fazer uma curvatura

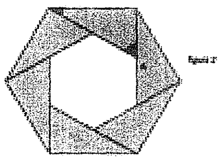
quase imperceptível aos olhos de um observador, por isso o comprimento do cabo de aço deverá ser 7% maior que o segmento $\overline{AB}$. Então o comprimento do cabo de aço deverá ser igual a:

a) 131,61 m
b) 227,95 m
c) 492,00 m
d) 526,44 m
e) 692,00 m



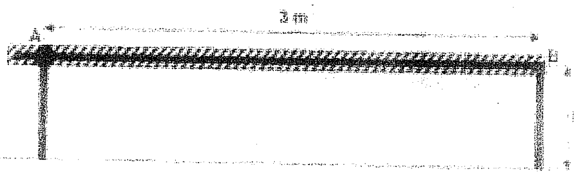
28)**(CPII)** Juliana recortou de uma tira de cartolina retangular seis triângulos retângulos idênticos, em que um dos catetos mede 3 cm (figura 1). Com esses triângulos, fez uma composição que tem dois hexágonos regulares (figura 2).



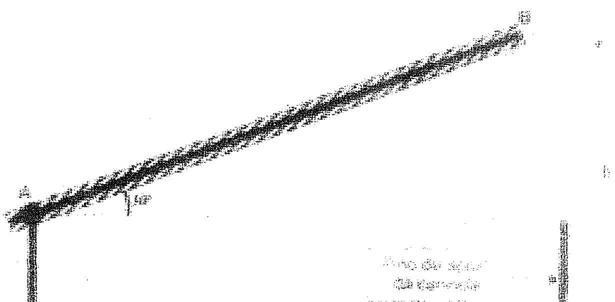


a) Qual é a medida do ângulo interno do hexágono maior?
b) Quais são as medidas x e y dos ângulos dos triângulos retângulos?
c)Qual é a medida do perímetro do hexágono menor?

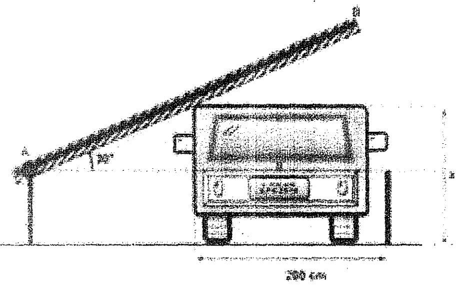
29) **(CPII)** Na entrada de um condomínio, há uma cancela que, quando fechada, impede a entrada e a saída de veículos. Após a identificação do carro, ela se abre, permitindo a passagem do veículo. A figura abaixo mostra a vista frontal da cancela fechada.



Um defeito no mecanismo automático desta cancela está fazendo com que ela se abra com um ângulo máximo de 30º com a horizontal, conforme representado abaixo.

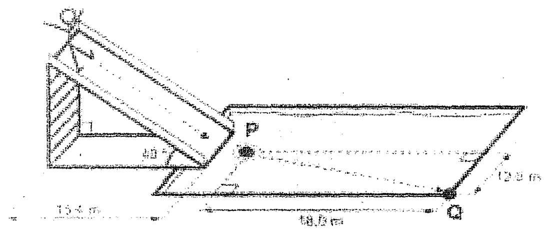


a) Determine, considerando o defeito da cancela, a altura máxima a que chega o ponto B.
b) Um veículo de 190 cm de largura deseja passar pela cancela aberta, guardando uma distância de 10 cm do pino de apoio da cancela, conforme a figura a seguir.



Para passar sem tocar a cancela, o carro deverá ter uma altura inferior a x cm. Determine o valor de x. (Considere $\sqrt{3} \approx 1{,}7$)

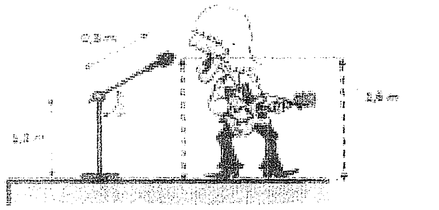
30) **(CPII)** Gustavo escorrega na rampa de um tobogã com inclinação de 40º com o plano horizontal e mergulha em uma piscina com borda retangular. Depois, nada do ponto P, onde mergulhou, até o ponto Q, na borda da piscina.



Observe a situação descrita na figura a seguir:
Considere: sen 40º = 0,64; cós 40º = 0,77; tg 40º = 0,84 e $\sqrt{13} \approx 3{,}61$

a) Qual é o comprimento, em metros, da rampa inclinada do tobogã?
b) Quantos metros Gustavo nadou?

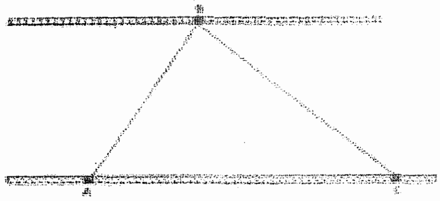
31) **(CPII)** Leonardo é vocalista de uma banda de heavy metal. Em um show de sua banda, ele precisa ajustar o pedestal de seu microfone de forma que este fique a uma altura de 1,60 m do piso. Na figura abaixo, vê-se a parte vertical fixa e a parte inclinada ajustável do pedestal, o que possibilita variar o ângulo :



α (graus)	sen α	cos α	tg α
2	0,035	0,999	0,035
4	0,070	0,998	0,070
6	0,105	0,995	0,105
8	0,139	0,990	0,141
10	0,174	0,985	0,176
12	0,208	0,978	0,213
14	0,242	0,970	0,249
16	0,276	0,961	0,287
18	0,309	0,951	0,325
20	0,342	0,940	0,364
22	0,375	0,927	0,404
24	0,407	0,914	0,445
26	0,438	0,899	0,488
28	0,469	0,883	0,532
30	0,500	0,866	0,577

Considere a tabela trigonométrica acima e determine a medida do ângulo β.

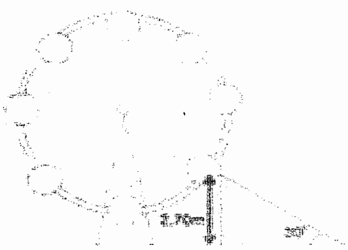
32) **(CPII)** A jovem Ester, aluna do 9º ano, deseja medir a largura de um rio. Sua ideia inicial era trabalhar com um triângulo retângulo, utilizando a trigonometria que havia aprendido na escola. Porém, sentiu dificuldade em determinar dois pontos, situados em margens opostas, que fossem as extremidades de um segmento perpendicular às margens do rio. Ester, então, utilizou outra estratégia: escolheu um ponto B qualquer de referência na outra margem e mediu os ângulos AB e CÂB; em seguida, mediu a distância entre os pontos A e C, obtendo 630 m. A partir desses dados, a jovem calculou facilmente a largura do rio, utilizando seus conhecimentos de trigonometria. Determine a largura do rio, sabendo que suas margens são paralelas.



Utilize os dados da tabela

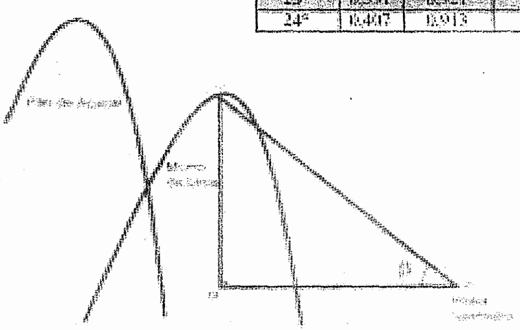
Ângulo	sen	cos	tg
CÂB	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{5}$
AĈB	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$

33) **(CEFET)** A rampa de acesso a uma roda-gigante permite a entrada no brinquedo a uma altura de 2,70m e forma com o solo um ângulo de 30 como mostra a figura. A distância percorrida por uma pessoa na rampa para entrar no brinquedo corresponde a 3/5 da altura máxima atingida pela pessoa no brinquedo. Essa altura é de:
a) 9m;
b) 3,24m;
c) 2,30m;
d) 5,40m;
e) 8m.



34) **(CEFET)** Quem viaja no bondinho do Pão de Açúcar percorre dois trechos: o primeiro vai da Praia Vermelha até o morro da Urca (segmento PU da figura) e o segundo, parte do morro da Urca até o Pão de Açúcar. Sabendo que o segmento PM e a altura do morro da Urca equivalem a 4/3 e a 5/9 da altura do Pão de Açúcar, respectivamente, podemos afirmar que o ângulo â formado pelos segmentos PU e PM indicados na figura:
a) está entre 21° e 22°
b) está entre 22° e 23°
c) está entre 23° e 24°
d) é maior que 24°

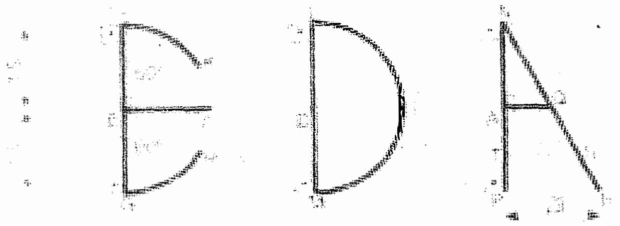
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,913	0,445



35) **(EPCAR)** "NASCIDOS PARA VOAR: 60 ANOS DE FUMAÇA JÁ"

Fonte: Jornal EPCARIANO – Ano 1, nº 1 – p.4

Em maio de 2012, o esquadrão EDA (Esquadrilha da Fumaça) comemorou 60 anos de apresentações. Para homenagear esse esquadrão foi realizado na EPCAR um concurso em que os alunos teriam que criar um desenho. Uma das regras desse concurso foi: elaborar um desenho usando conhecimento de matemática.
O aluno vencedor apresentou o desenho em circunferências conforme esquema a seguir.



Com base nas informações do desenho, julgue verdadeira ou falsa cada afirmativa.
(02) A menor soma das medidas dos comprimentos dos arcos PS, GH, FK, e LM é igual a 6p.

(04) A razão entre $\overline{PS}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(08) $\overline{PS}$ e $\overline{GH}$ são congruentes.

(16) $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{EJ}$.

(32) $\overline{ST} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

A soma das alternativas verdadeiras é igual a:
a) 20
b) 22
c) 36
d) 44

36) **(EPCAR)** Observe a figura abaixo:
Nela, estão representadas uma circunferência de centro O e raio R, as retas **t** e **u**, tangentes à circunferência em A e D, respectivamente, a reta **v** que contém os pontos C, O, F e E e os pontos B, C e D pertencem à reta w.
Classifique em **(V)** verdadeiro ou **(F)** falso cada item abaixo e, a seguir, marque a sequência correta.

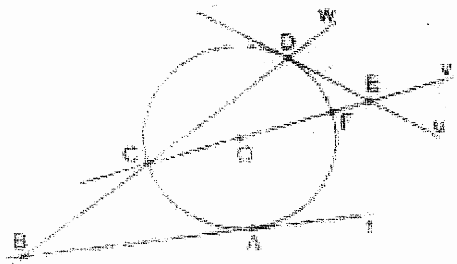
( ) A medida do segmento $\overline{OA}$ é 5 cm.

( ) O segmento $\overline{CE}$ mede $13,\bar{3}$ cm.

( ) cos (FÊD) < cos 60°.

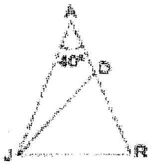
( ) A medida do ângulo $\hat{CDE}$ é a metade da medida do ângulo FÔD.

a) V – V – F – F
b) V – F – F – V
c) F – V – V – F
d) F – F – V – V



Dados:
$\overline{FE} = x$
$\overline{DE} = 2(\overline{FE})$
$\overline{AB} = 3R$
$\overline{BC} = R\sqrt{5}$
$\overline{CD} = (R-1)\sqrt{5}$

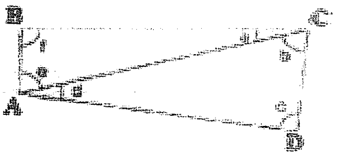
37) **(EPCAR)** Considere as proposições abaixo e julgue-as VERDADEIRAS ou FALSAS.
I) Considerando-se os triângulos da figura, pode-se afirmar que $\text{tg } 40° = \frac{y}{2x - y\sqrt{3}}, \left(x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$



$\overline{AJ} = \overline{AR} = x$
$\overline{JR} = \overline{JD} = y$

II) Nos triângulos ABC e ACD da figura abaixo, o maior dos segmentos representados é .

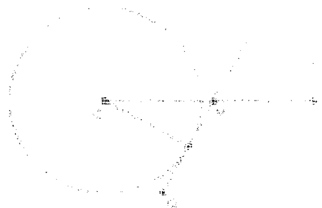
Dados
$a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f$
$a < b < c < f$
$a < e < f$
$c < d$
$e < d$



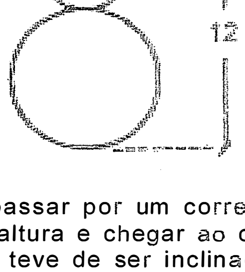
III) Seja P um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero ABC e os pontos $M \in \overline{AC}, N \in \overline{BC}$ e $Q \in \overline{AB}$. Se $\overline{PM}, \overline{PN}$, e $\overline{PQ}$ são segmentos traçados por P, paralelos aos lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{PM} + \overline{PN} + \overline{PQ} = \frac{2p}{3}$, onde p é o semiperímetro do triângulo ABC.

Pode-se afirmar que, entre as proposições,
a) apenas duas são falsas.
b) apenas uma é falsa.
c) todas são falsas.
d) todas são verdadeiras.

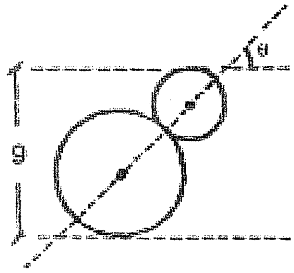
38) **(CEFET)** Na figura abaixo, O é o centro de uma circunferência que tangencia o segmento BQ no ponto T. Considerando também que o segmento BA é perpendicular ao segmento AO, que M é o ponto médio do segmento AO e que BM = 4.MT, determine a medida do ângulo TMO.



39) **(UFRJ)** A grande sensação da última ExposArte foi a escultura "O.I.T.O.", de 12 metros de altura, composta por duas circunferências que reproduzimos abaixo, com exclusividade.



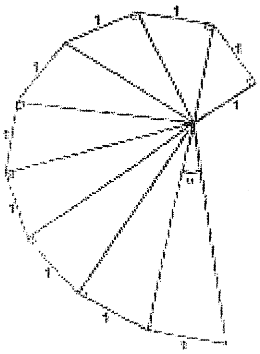
Para poder passar por um corredor de apenas 9 metros de altura e chegar ao centro do salão principal, ela teve de ser inclinada. A escultura atravessou o corredor tangenciando o chão e o teto, como mostra a figura a seguir:



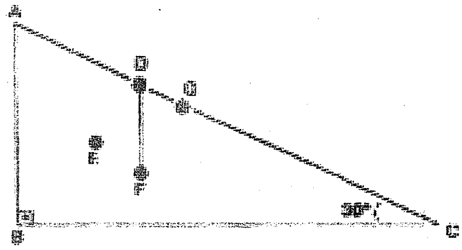
Determine o ângulo de inclinação θ indicado na figura.

40) **(CEFET)** Dada a figura, calcule sen α.

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 3
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt[3]{10}$



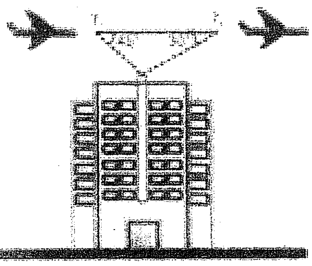
41) **(CEFET)** No triângulo retângulo ABC, representado abaixo, a diagonal FD do retângulo DEFG é paralela ao cateto AB do referido triângulo. Sabendo-se que a medida desta diagonal FD mede 100 cm, determine o perímetro do retângulo DEFG.



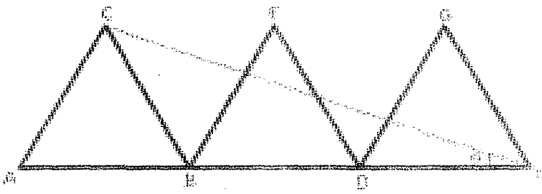
42) **(CN)** Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a:
a) 6,5
b) 7,0
c) 7,5
d) 8,0
e) 8,5

43) **(EPCAR)** Um piloto de avião, a uma altura de 3100m em relação ao solo, avista o ponto mais alto de um edifício de 100m de altura nos instantes T_1 e T_2, sob os ângulos de 45° e 30°, respectivamente, conforme a figura seguinte: A distância percorrida pelo avião entre T_1 e T_2, é, em m, igual a:

a) $3000(1+\sqrt{3})$
b) $3000\sqrt{3}$
c) $2190\sqrt{3}$
d) $3000(\sqrt{3}-1)$

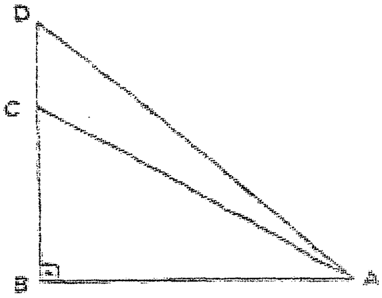


44) **(CEFET)** Três triângulos equiláteros de lado 1cm estão enfileirado como indicado na figura a seguir. Nessas condições, determine o seno do ângulo θ.



45) **(CM)** Na figura abaixo ABC e ABD são triângulos retângulos em B. Se $\overline{AD} = 2\sqrt{31}\text{cm}, \overline{AB} = 5\sqrt{3}$ cm e o ângulo ACB = 60°, então o perímetro do triângulo ACD, em centímetros, mede:

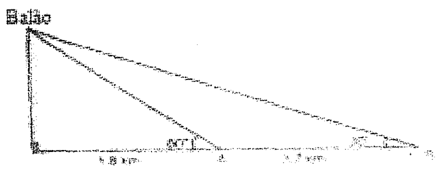
a) $14 + 2\sqrt{31}$
b) $10 + 2\sqrt{31}$
c) $4(2 + \sqrt{31})$
d) $2(6 + \sqrt{31})$
e) $12 + 4\sqrt{31}$



46) **(ENEM)** Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente. Assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

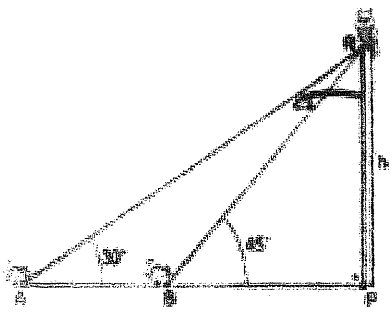
Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

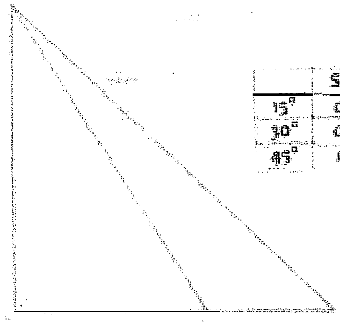


Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?
a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

47) **(EPCAR)** Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.
O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre:
a) 3 e 4
b) 4 e 5
c) 5 e 6
d) 6 e 7
e) 7 e 8



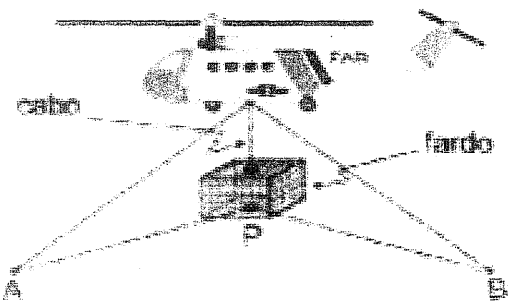
48) **(CPII)** Um paraquedista saltou sob um ângulo de inclinação de 30°. Como era um dia de muito vento, o paraquedista caiu além do ponto previsto, desviando-se 15° da direção inicial. Considerando todas as trajetórias num mesmo plano, o desenho abaixo representa, aproximadamente, a trajetória prevista e a trajetória real do paraquedista, onde o ponto C era o local para a queda e o ponto D o local onde efetivamente ele caiu.



	Seno	Cosseno	tangente
15°	0,26	0,97	0,27
30°	0,50	0,87	0,58
45°	0,71	0,71	1

a) Sabendo que, no momento do salto, o avião se encontrava a 1750 metros de altura, a que distância do ponto B o paraquedista cairia se tivesse mantido a trajetória inicialmente prevista?
b) Sabendo que o paraquedista foi resgatado no ponto D, qual a distância entre o ponto previsto e o ponto de resgate?

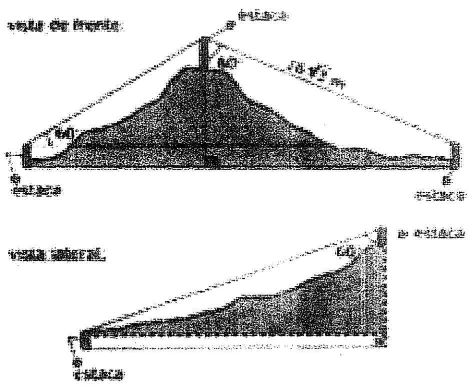
49) **(EPCAR)** Um fardo de alimentos será entregue para alguns habitantes de uma região de difícil acesso na Floresta Amazônica por um helicóptero, conforme a figura ao lado.



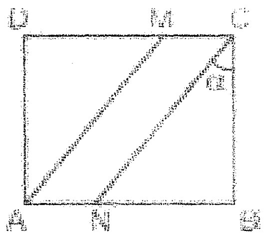
No momento em que o fardo atinge o ponto P no solo, o cabo que sai do helicóptero e sustenta o fardo está esticado e perpendicular ao plano que contém os pontos A, P e B.
Sabe-se que o helicóptero está a uma altura h do solo e é avistado do ponto A sob um ângulo de 30° e do ponto B sob um ângulo de 45°.

Sabe-se, também, que a medida de $A\hat{P}B = 90°$ e que a distância entre A e B é 100 metros.
O número que expressa a medida de **h**, em metros,
a) é primo e ímpar.
b) é múltiplo de 3 maior que 30.
c) é número par menor que 30.
d) tem 6 divisores que são números naturais.

50) **(EPCAR)** Chama-se agrimensura a arte de medição de terras. O agrimensor é aquele que obtém as medidas de um terreno.
Um fazendeiro comprou um terreno cuja base planificada tem a forma de um retângulo. A pedido do fazendeiro, o agrimensor desenhou a vista frontal e a vista lateral desse terreno indicando medidas precisas que ele obteve utilizando-se de estacas auxiliares de mesma medida.
Tomando-se como referência a forma planificada retangular do terreno cujo custo do metro quadrado foi de 120 reais para o fazendeiro, é correto afirmar que:
a) tem mais de 20 m de lateral.
b) sua área total é de 336 m².
c) foi comprado pelo valor de R$ 96.210,00.
d) tem menos de 30 m de frente.



51) **(EPCAR)** Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado "a". Por A e C traçam-se AM e CN paralelos. Se a distância entre AM e CN é a/5, então o seno de á vale:
a) 0,5
b) 0,6
c) 0,7
d) 0,8



GABARITO

1) a) $\frac{40}{41}$
b) $\frac{9}{41}$
c) $\frac{40}{9}$
d) $\frac{9}{40}$
e) $\frac{41}{9}$
f) $\frac{41}{40}$
g) $\frac{9}{41}$
h) $\frac{40}{41}$
i) $\frac{9}{40}$
j) $\frac{40}{9}$
l) $\frac{41}{40}$
m) $\frac{41}{9}$

2) a) 7,2
b) 6,42
c) 5,36
d) 20

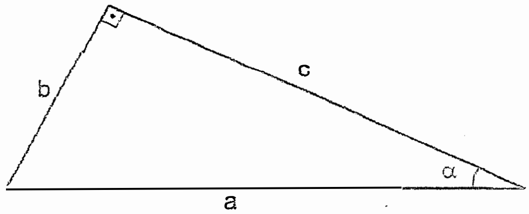
3) a) 10
b) $6\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{3}$
d) 8
e) 2
f) $6(\sqrt{3}+1)$
g) $6\sqrt{3}$
h) 9
i) 3 + 3

4) 16
5) 3
6) 6 cm
7) 1 cm
8) 4 cm
9) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{16\sqrt{3}}{3}$
10) 16 cm
11) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
12) $6\sqrt{3}$
13) $8(3\sqrt{3}+2)$
14) 0,6
15) $\frac{12}{13}$
16) 2,8 m
17) 6 m
18) 46°
19) 75 km
20) 20 m
21) 2
22) $\frac{h(tg\,\alpha + tg\,\beta)}{tg\alpha}$
23) 2 cm
24) $4\sqrt{3} - 6$
25) B
26) B
27) D
28) a) 120°
b) 60° e 30°
c) 18 cm
29) 1,567 m
30) a) 20 m
b) 21,66m
31) 112°
32) 360°
33) A
34) B
35) D
36) A
37) B
38) 60°
39) 30°
40) A
41) 100 cm
42) C
43) A
44)
45) D
46) C
47) B
48) a) 1.015 m
b) 735 m
49) D
50) A
51) B

OBSERVAÇÕES

Relação Fundamental

No triângulo abaixo, temos que:



$$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos \hat{\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dividindo-se ambos os membros por a^2:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \hat{\alpha} + \cos^2 \hat{\alpha} = 1}$$

Exemplo:

Dado um ângulo agudo $\hat{x}$, tal que $\operatorname{sen} \hat{x} = \frac{5}{13}$, calcule o $\cos \hat{x}$.

Resolução:

$\operatorname{sen}^2 \hat{x} + \cos^2 \hat{x} = 1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \hat{x} = 1$

$\frac{25}{169} + \cos^2 \hat{x} = 1$

$\cos^2 \hat{x} = 1 - \frac{25}{169}$

$\cos^2 \hat{x} = \frac{144}{169}$

$\cos \hat{x} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

Como o ângulo é agudo, o co-seno é positivo. Então $\cos \hat{x} = \frac{12}{13}$.

Relações métricas num triângulo qualquer

Introdução

Já estudamos em capítulo anterior as relações métricas no triângulo retângulo. Neste capítulo vamos analisar as relações em triângulos não retângulos.

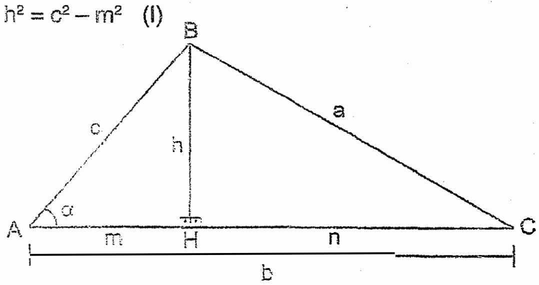
Lei dos co-senos

"Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto destes dois pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado."

Demonstração: Considere o triângulo ABC da figura de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, no qual destacamos o ângulo $\hat{\alpha}$. Tracemos a altura $\overline{BH} = h$ que divide o lado $\overline{AC}$ nos segmentos $\overline{AH} = m$ e $\overline{HC} = n$.

Apliquemos o Teorema de Pitágoras no triângulo AHB:

$c^2 = h^2 + m^2$
$h^2 = c^2 - m^2$ (I)



É sabido que, em um triângulo retângulo, o co-seno de um ângulo agudo é igual ao comprimento do cateto adjacente ao ângulo, dividido pelo comprimento da hipotenusa. Assim no triângulo AHB temos que:

$\cos \hat{\alpha} = \frac{m}{c}$

$m = c \cdot \cos \hat{\alpha}$ (II)

No triângulo BHC, aplicando-se o Teorema de Pitágoras:

$a^2 = n^2 + h^2$

Como $m + n = b$, temos que $n = b - m$, e daí:

$a^2 = (b - m)^2 + h^2$
$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2$ (III)

Substituindo-se (I) em (III):

$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + c^2 - m^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot m$ (IV)

Substituindo-se (II) em (IV):

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}}$ c.q.d

Corolário: Uma conseqüência da lei dos co-senos é a **SÍNTESE DE CLAIRAUT**, que serve para classificar um triângulo quanto aos ângulos, dados os lados. Sendo $\hat{\alpha}$ o maior ângulo de um triângulo, **a** o lado oposto a este ângulo e **b** e **c** os outros lados, temos três casos a considerar:

1) **O triângulo é acutângulo**

Neste caso $0^{\circ} < \hat{\alpha} < 90^{\circ}$, logo $\cos \hat{\alpha} > 0$ e o termo $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é negativo, então:

$$a^2 < b^2 + c^2$$

2) O triângulo é retângulo

Temos $\hat{\alpha} = 90^{\circ}$, e como $\cos \hat{\alpha} = \cos 90^{\circ} = 0$, o termo $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é nulo, logo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3) O triângulo é obtusângulo

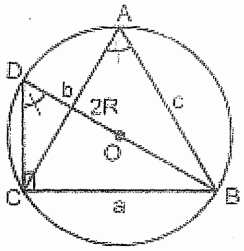
Como neste caso $90^{\circ} < \hat{\alpha} < 180^{\circ}$, $\cos \hat{\alpha} < 0$ e o termo $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é positivo, vem que:

$$a^2 > b^2 + c^2$$

Lei dos senos

"Em todo triângulo, a razão entre cada lado e o seno do ângulo opos to é constante e igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo."

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, inscrito em um círculo de raio R.



Tracemos o diâmetro que passa pelo vértice B e tem a outra extremidade em D. Em seguida liguemos D a C. O triângulo BCD é retângulo em C. O ângulo $\hat{D}$ é inscrito e congruente ao ângulo $\hat{A}$, logo:

$$\text{sen}\hat{A} = \text{sen}\hat{D} = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2R$$

Analogamente, podemos mostrar que $\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$. Daí, temos a lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} = 2R \qquad \text{c.q.d.}$$

Exemplos:

1) Classifique o triângulo de lados 5, 9 e 8 quanto aos ângulos.

Solução:

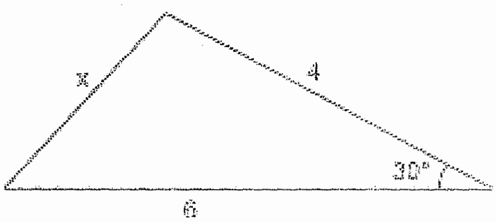
Pela síntese de Clairaut, devemos elevar o maior lado ao quadrado e compará-lo à soma dos quadrados dos outros dois:

$9^2 = 81$

$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

Como: $9^2 < 5^2 + 8^2$, o triângulo é acutângulo.

2) Determine o valor de x na figura abaixo:



Solução:

Aplicando a lei dos co-senos:

$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \cos 30°$

$x^2 = 16 + 36 - 48 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 52 - 24\sqrt{3}$

$x = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{4 \,.\, (13 - 6\sqrt{3})}$

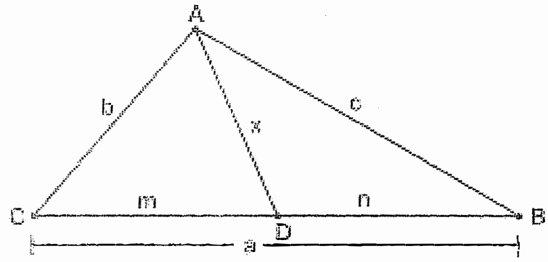
$x = 2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$

Formulário

Em seguida, apresentamos um conjunto de fórmulas que não são usadas com freqüência em exercícios e questões de provas. Apenas alguns concursos com grau de dificuldade acima da média, como IME, ITA e Colégio Naval, cobram, às vezes, tais conceitos.

1 - Relação de Stewart

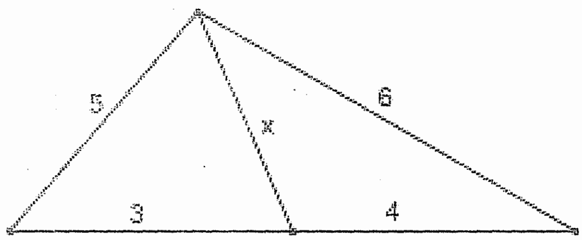
Tem como objetivo determinar o comprimento de uma ceviana AD qualquer, de um triângulo ABC.



$$\boxed{\frac{b^2}{am} - \frac{x^2}{m.n} + \frac{c^2}{a.n} = 1}$$

Exemplo:

Determine o valor de x na figura:



Resolução:

$$\frac{5^2}{3.7} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{6^2}{4.7} = 1$$

$$\frac{25}{21_{/4}} - \frac{x^2}{12_{/7}} + \frac{36}{28_{/3}} = \frac{1}{1_{/84}}$$

$100 - 7x^2 + 108 = 84$

$7x^2 = 124$

$x^2 = \frac{124}{7}$

$x = \sqrt{\frac{124}{7}} \therefore x = \frac{2\sqrt{217}}{7}$

2 - Comprimento da mediana

Se, em particular, desejamos determinar a mediana relativa ao lado a, de um triângulo de lados a, b e c, podemos utilizar a fórmula abaixo.

$$\boxed{M_a = \frac{\sqrt{2.(b^2 + c^2) - a^2}}{2}}$$

3 - Comprimento da altura

A altura relativa ao lado a, tem comprimento dado por:

$$\boxed{h_a = \frac{2.\sqrt{p.(p-a).(p-c).(p-c)}}{a}}$$

4 - Comprimento da bissetriz

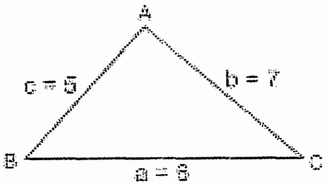
O comprimento da bissetriz interna traçada do vértice oposto ao lado a, pode ser calculada pela fórmula:

$$\boxed{b_a = \frac{2.\sqrt{p.b.c.(p-a)}}{b+c}}$$

Nota: Nas fórmulas 3 e 4, p é o semi-perímetro do triângulo.

Exemplo:
Em um triângulo ABC, em que AB = 5, BC = 6 e AC = 7, determine as medidas da mediana, altura e bissetriz, traçadas do vértice A.

Resolução:



$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$M_a = \frac{\sqrt{2.(7^2+5^2)-6^2}}{2} = \frac{\sqrt{112}}{2} = \frac{4\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7}$$

$$h_a = \frac{2\sqrt{9.(9-6).(9-7).(9-5)}}{6} = \frac{\sqrt{216}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$$

$$b_a = \frac{2\sqrt{9.7.5.(9-6)}}{7+5} = \frac{2\sqrt{945}}{12} = \frac{3\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Classifique quanto aos ângulos os triângulos de lados:
a) 34; 30; 16
b) 15; 20; 26
c) 7; 7; 8

2) Classifique quanto aos ângulos um triângulo de lados x^2+y^2, x^2-y^2 e 2xy, sendo x e y números inteiros tais que $x > y > 0$.

3) Considere o problema de construir um triângulo ABC, conhecendo $\hat{A}$ = 30°, $\overline{AB} = 6\,cm$ e $\overline{BC} = x\,cm$, $x > 0$. Determine x de modo que o problema tenha:
a) Uma única solução;
b) Mais de uma solução.

4) Em um triângulo ABC, tem-se $\overline{AB} = 8$, $\hat{A} = 45°$ e $\hat{B} = 60°$. Determine a medida do lado $\overline{AC}$.

5) Em um triângulo ABC, tem-se B$\hat{A}$C = 60°, $\overline{AB} = 6\,cm$ e $\overline{AC} = 4\,cm$. Determine a medida do lado $\overline{BC}$.

6) Determine a medida do lado $\overline{AC}$ de um triângulo ABC, em que $\overline{BC} = 6$, $\hat{B} = 45°$ e $\hat{C} = 15°$.

7) Em um triângulo ABC, determine a medida do ângulo $\hat{B}$, sabendo-se que $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ e $\hat{C} = 45°$.

8) Determine a medida do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC sabendo-se que $\overline{AB} = 3\,cm$, $\overline{AC} = 4\sqrt{3}\,cm$ e $\overline{BC} = 8\,cm$.

9) O triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio R. Se cos $\hat{A}$ = 3/5, o comprimento do lado $\overline{BC}$ é:
a) $\frac{2R}{5}$
b) $\frac{3R}{5}$
c) $\frac{4R}{5}$
d) $\frac{6R}{5}$
e) $\frac{8R}{5}$

10) Determine o raio de um círculo, no qual está inscrito o triângulo ABC, em que $\hat{A}$ = 60° e $\overline{BC} = 4$.

11) Um círculo circunscreve um triângulo em que um lado, oposto a um ângulo de 135°, mede $6\sqrt{2}\,cm$. Determine a medida do raio desse círculo.

12) Um triângulo tem lados 3, 4 e 5. A soma dos senos dos seus ângulos vale:
a) 1,4
b) 1,5
c) 1,8
d) 2
e) 2,4

13) Em um triângulo um lado que mede 4 cm está oposto a um ângulo de 30°. Determine a soma dos senos dos ângulos internos desse triângulo, sabendo-se que todos os seus lados são expressos por números inteiros consecutivos e seu perímetro é o menor possível.

14) A um triângulo ABC, de lados x, y e z, está circunscrito um círculo de raio R. Determine o produto dos senos dos ângulos desse triângulo.

15) Em um triângulo ABC, detemine a medida do ângulo $\hat{B}$, sabendo-se que seus lados satisfazem à igualdade: $(a+b+c).(a-b+c) = ac$.

16) Determine a medida da maior diagonal de um losango de perímetro 16 cm, no qual um ângulo é o dobro do outro.

17) Determine a medida da menor diagonal de um paralelogramo de lados 1 e $\sqrt{3}$, sabendo-se que dois de seus ângulos diferem de 120°.

18) Determine a medida da menor diagonal de um paralelogramo de lados 7 cm e 8 cm, cuja diagonal maior mede 12 cm.

19) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio florestal em F. Conhecendo os ângulos F$\hat{A}$B = 45°, F$\hat{B}$A = 105° e a distância $\overline{AB} = 15\,km$, determine as distâncias $\overline{AF}$ e $\overline{BF}$.

20) Um hexágono regular tem perímetro 48 cm. Determine o perímetro do hexágono regular convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados do primeiro.

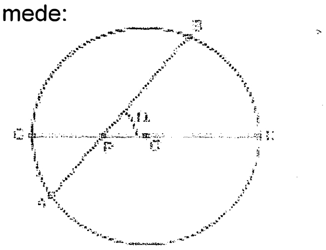
21) Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, para o exterior do quadrado, são construídos os triângulos equiláteros ABM e BCN. Determine a medida do segmento $\overline{MN}$, sabendo-se que o quadrado tem lado unitário.

22) Determine a medida do lado de um otógono regular inscrito em um círculo de raio 6 cm.

23) Na figura abaixo, a corda $\overline{AB}$ intersecta o diâmetro $\overline{CD}$ no

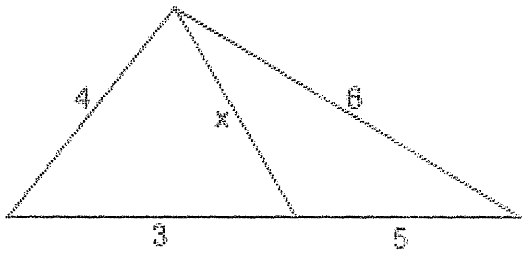
ponto P, que a divide nos segmentos $\overline{AP} = m$ e $\overline{PB} = n$. Determine o valor do quadrado do raio, nos casos em que o ângulo a mede:

a) 30°
b) 45°
c) 60°



24) Um triângulo ABC tem lados a = 8, b = 6 e c = 4. Determine:
a) comprimento da mediana relativa ao lado a.
b) comprimento da bissetriz interna que parte do vértice A
c) comprimento da altura relativa ao lado a.

25) Determine o valor de x na figura:



QUESTÕES DE CONCURSOS

26) **(CM)** Se em um triângulo ABC, $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm e o ângulo ABC = 60°, então o lado $\overline{AC}$ em centímetros, mede:
a) 10
b) $\sqrt{13}$
c) 12
d) $2\sqrt{13}$
e) 13

27) **(PUC)** No triângulo ABC, o ângulo Â vale 60°, o lado oposto mede 7 cm e um dos lados adjacentes mede 3 cm. O outro lado do triângulo mede:
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 7 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

28) **(CM)** Se as diagonais do paralelogramo medem 36 m e 24m e formam um ângulo de 60° entre si, então a medida do menor lado do paralelogramo será:
a) $6\sqrt{7}$ m
b) $6\sqrt{19}$ m
c) $6\sqrt{17}$ m
d) $6\sqrt{15}$ m
e) $6\sqrt{21}$ m

29) **(CN)** Quantos triângulos obtusângulos existem, cujos lados são expressos por números inteiros consecutivos?
a) um
b) dois
c) três
d) quatro
e) cinco

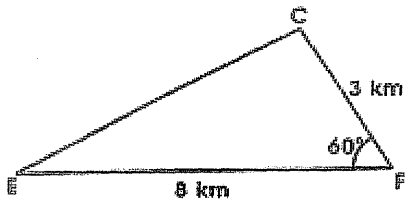
30) **(CN)** O número de triângulos que podemos construir com lados medindo 5, 8 e x, $x \in N^*$ de tal forma que o seu ortocentro seja interno ao triângulo é:
Obs.: N* é o conjunto dos números naturais não nulos.
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

31) **(PUC)** O número de valores inteiros de x, para os quais existe um triângulo acutângulo de lados 10, 24 e x, é igual a:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

32) **(CEFET)** No triângulo ABC de lados medindo AB = x – 7, BC = x e AC = x + 2, sendo x um inteiro positivo menor que 20, e os ângulos internos α, β e θ tais que $\alpha<\beta<\theta< 90°$.
a) Faça o desenho do triângulo ABC indicado seus vértices e os ângulos internos.
b) Determine os possíveis valores de x.

33) **(CM)** Uma fábrica será instalada a 8 km da única estação de tratamento de água da cidade. A cisterna (reservatório de água) da fábrica será construída a 3 km da fábrica. Na figura abaixo, as letras E, F e C representam, respectivamente, a localização da estação de tratamento de água, a fábrica e a cisterna. A quantidade de quilômetros de encanamento que levará a água da estação de tratamento para a cisterna da fábrica é dada por um número que pertence ao intervalo real:
a)] 0,3 [
b) [3,5 [
c) [5,7 [
d) [7,10 [
e) [10, +∞ [

AB



34) **(CM)** Considere um triângulo ABC onde as medidas dos lados AC e BC são 8 cm e 12 cm, respectivamente, e o ângulo interno A mede 30°. Qual é o valor do seno do ângulo interno B?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

35) **(CM)** O triângulo ABC está inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é $\overline{AC}$. Se $|BC| = 3$cm e sen $\hat{A} = \frac{5}{8}$, a medida, em centímetros, de $\frac{5}{3} \cdot |AB|$ é igual a:

a) $\sqrt{39}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $\sqrt{41}$ d) 2 e) $\sqrt{43}$

36) **(CM)** Um agrimensor quer medir a distância entre duas árvores que se encontram nas margens opostas de um rio, uma em A e outra em B. A partir de um ponto C, ele obteve as seguintes medidas: $\overline{AC} = 20$ m, $B\hat{A}C = 75°$ e $A\hat{C}B = 45°$. A distância entre as duas árvores é:

a) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ m b) $20\sqrt{2}$ m c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m

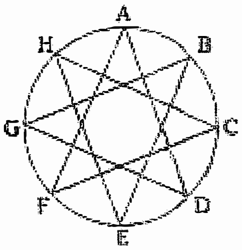
d) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ m e) $20\sqrt{3}$ m

37) **(CN)** Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 90°. Sabe-se que AB = c, AC = b e BC = a. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP = \frac{(c+b).(c-b)}{a}$. O perímetro do triângulo APC é dado pela expressão:

a) $\frac{2b\ (a+b)}{a}$ b) $\frac{2c\ (a+b)}{a}$ c) $\frac{2b\ (b+c)}{a}$

d) $\frac{2c\ (b+c)}{a}$ e) $\frac{2b\ (a+c)}{a}$

38)**(UFRJ)** Os pontos A, B, C, D, E, F, G, e H dividem uma circunferência de raio R, em oito partes iguais, conforme a figura abaixo:



Calcule a medida do lado $\overline{AD}$ do octógono estrelado em função de R.

39)**(CN)** Um hexágono regular ABCDEF tem lado 3 cm. Considere os pontos: M, pertencente a $\overline{AB}$, tal que $\overline{MB}$ igual a 1 cm; N, pertencente a $\overline{CD}$, tal que $\overline{ND}$ igual a 1 cm; e P pertencente a $\overline{EF}$, tal que $\overline{PF}$ igual a 1 cm. O perímetro, em centímetros, do triângulo MNP é igual a:

a) $3\sqrt{15}$ b) $3\sqrt{17}$ c) $3\sqrt{19}$ d) $3\sqrt{21}$ e) $3\sqrt{23}$

40) **(CN)** Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, P ≠M, então o segmento $\overline{NP}$ mede:

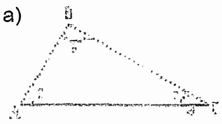
a) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$ b) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$

d) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$ e) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

GABARITO

1) a) retângulo
b) obtusângulo
c) acutângulo

2) retângulo
3) a) x = 3
b) 3 < x < 6
4) $4\sqrt{6}$
5) $2\sqrt{7}$ cm
6) $2\sqrt{6}$
7) 30°
8) 30°
9) E
10) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
11) 6 cm
12) E
13) $\frac{9}{8}$
14) $\frac{xyz}{8R^3}$
15) 120°
16) $4\sqrt{3}$ cm
17) 1
18) $\sqrt{82}$cm
19) $\begin{cases} \overline{AF} = \frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\text{km} \\ \overline{BF} = 15\sqrt{2}\text{km} \end{cases}$
20) $24\sqrt{3}$ cm
21) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
22) $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$cm
23) a) $\frac{m^2+n^2+mn}{3}$
b) $\frac{m^2+n^2}{2}$
c) $m^2 + n^2 - mn$
24) a) $\sqrt{10}$
b) $\frac{6\sqrt{6}}{5}$
c) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$
25) $\frac{\sqrt{34}}{2}$
26) D
27) D
28) A
29) A
30) A
31) C
32) a)



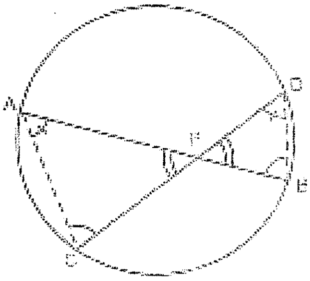
b) 16; 17; 18 ou 19

33) D
34) A
35) A
36) A
37) A
38) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$
39) D
40) C

Relações métricas no círculo

Ponto interior

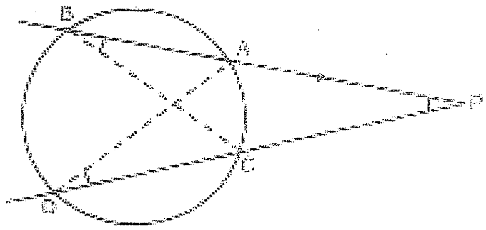
"Quando duas cordas intersectam-se no interior de um círculo, cada uma delas fica dividida em dois segmentos. O produto das medidas dos dois segmentos de uma delas é igual ao produto das medidas dos dois segmentos da outra."



$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

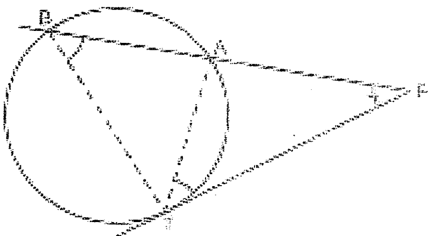
Ponto exterior

a) "Quando por um ponto exterior traçamos duas secantes a um círculo, o produto entre as medidas da parte externa de uma delas e de seu comprimento total, é igual produto da medida da parte externa da outra pelo seu comprimento total."



$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

b) "Quando por um ponto exterior traçamos uma tangente e uma secante a um círculo, o quadrado da medida da tangente é igual ao produto da medida da parte externa da secante pelo seu comprimento total."



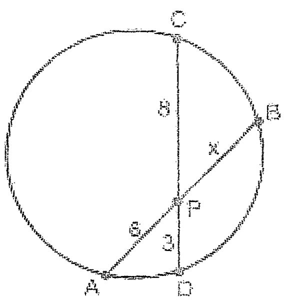
$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PT}^2$

Nota:

Toda as relações mostradas anteriormente são dedutíveis através da semelhança de triângulos.

Exemplos:

1) Determine o valor de x em:



Resolução:

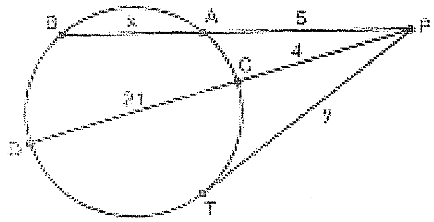
$\overline{PA} . \overline{PB} = \overline{PC} . \overline{PD}$

$6 . x = 8 . 3$

$6x = 24$

$x = 4$

2) Determine os valores de x e y em:



Resolução:

$\overline{PA} . \overline{PB} = \overline{PC} . \overline{PD}$

$5 . (5 + x) = 4 . 25$

$25 + 5x = 100$

$5x = 75$

$x = 15$

$\overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PT}^2$

$4 . 25 = y^2$

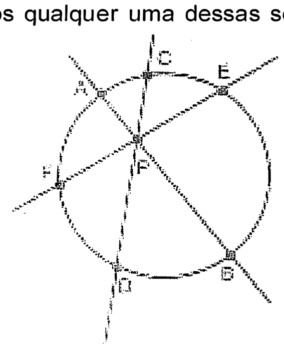
$y^2 = 100$

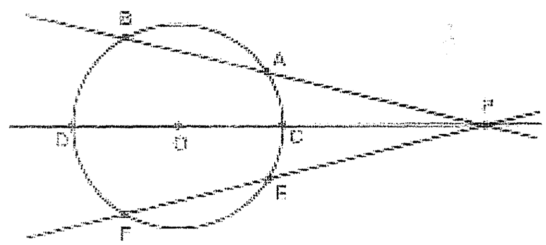
$y = 10$

Potência de um ponto

Seja um feixe de secantes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, ..., todas passando por um ponto P.

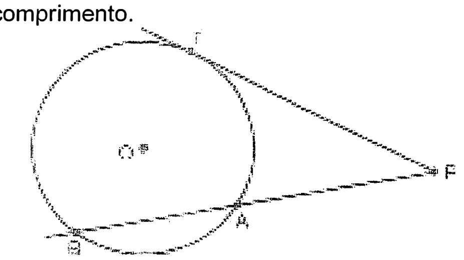
A potência de P em relação a esse círculo de centro O, é igual ao produto das distâncias de P à circunferência, quando tomamos qualquer uma dessas secantes.





$\boxed{Pot_0 P = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF} = ...}$

No caso da tangente, a potência é igual ao quadrado de seu comprimento.



É sabido que

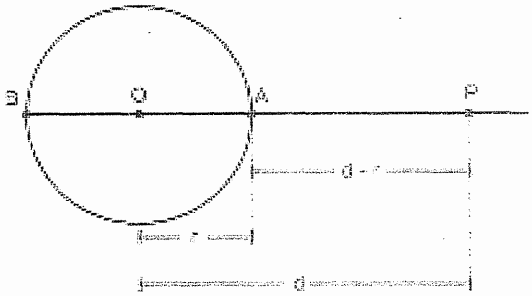
$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PT}^2$

Como $Pot_O P = \overline{PA} \times \overline{PB}$

$\boxed{Pot_O P = \overline{PT}^2}$

Cálculo da potência de um ponto em relação a um círculo

Consideremos um ponto P qualquer que dista d unidades do centro de um círculo de raio r.



Usando a definição de potência

$Pot_O P = \overline{PA} \times \overline{PB} = (d - r).(d + r)$

Então:

$\boxed{Pot_O P = d^2 - r^2}$

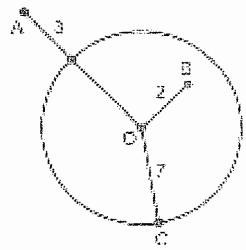
Cabe ressaltar que, quando P é exterior ao círculo, temos d > r, logo $d^2 > r^2$ e, daí, a sua potência é **positiva**.

Quando o ponto P é interior ao círculo, d < r e portanto $d^2 < r^2$, o que nos leva a concluir que sua potência, neste caso, é **negativa**.

Finalmente, se o ponto P é da circunferência, d = r e sua potência é **nula**.

Exemplo:

Determine a potência dos pontos A, B e C, na figura, em relação ao círculo de centro O.



Resolução:

$Pot = d^2 - r^2$

$Pot_O A = 10^2 - 7^2 = 51$

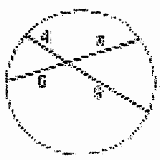
$Pot_O B = 2^2 - 7^2 = -45$

$Pot_O C = 7^2 - 7^2 = 0$

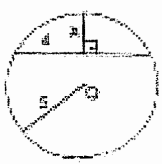
QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Determine o valor de x em:

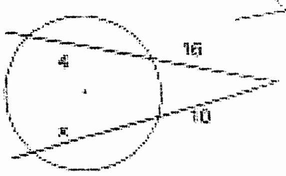
a)



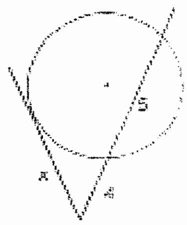
b)



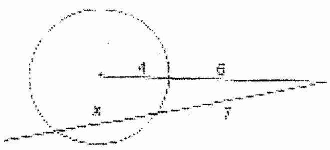
c)



d)

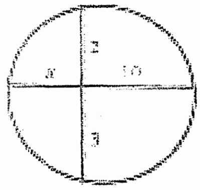


e)



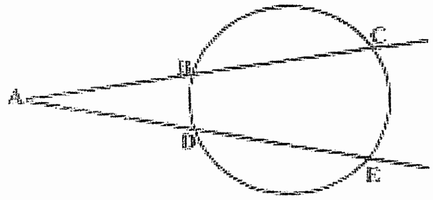
2) O valor de x na figura abaixo é:

a) 3/5
b) 1
c) 4
d) 5
e) 20/3



3) Na figura, $\overline{AB} = 7\,m$, $\overline{AD} = 6m$ e $\overline{DE} = 4m$. Então, $\overline{BC}$ é igual a:

a) 5 m
b) 12 m
c) $\frac{11}{7}$ m
d) $\frac{24}{7}$m



4) Duas cordas cortam-se no interior de um círculo. Os segmentos da primeira são expressos por 3x e x + 1 e os segmentos da segunda por x e 4x - 1. O comprimento da maior corda, qualquer que seja a unidade, é expresso pelo número:

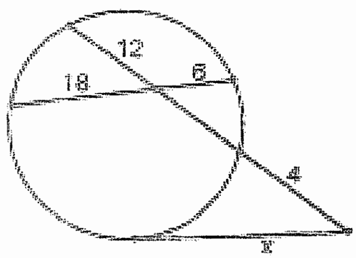
a) 17
b) 19
c) 21
d) 30
e) 33

5) Duas cordas cortam-se no interior de um círculo. Uma delas fica dividida em dois segmentos que medem 4 cm e 6 cm. Determine os segmentos em que a outra, cujo comprimento total é 11 cm, ficou dividida.

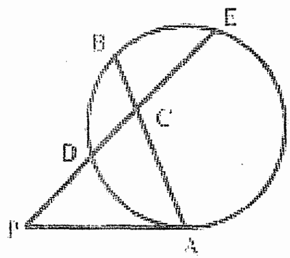
6) Num círculo, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 3$, a medida de $\overline{CD}$ é:

a) 3
b) $\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) 4

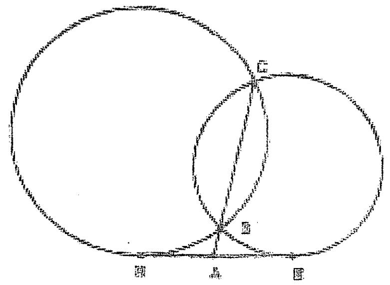
7) Determine x em:



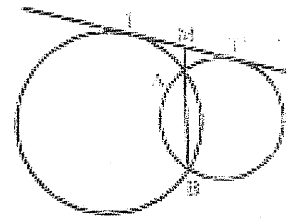
8) Na figura abaixo, $\overline{PA}$ é tangente em **A** ao círculo, $\overline{PA} = \overline{PC} = \overline{CB}$, $\overline{PD} = 1$ e $\overline{DE} = 8$. Calcule a medida do segmento $\overline{AC}$.



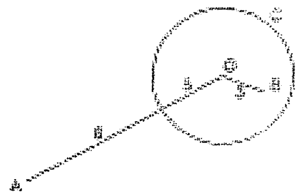
9) Na figura abaixo $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 6$. Determine a medida do segmento $\overline{MN}$.



11) Na figura, determine a medida do segmento $\overline{TT'}$, sabendo que $\overline{MA} = 4\,cm$ e $\overline{AB} = 5\,cm$.



12) Determine a soma das potências dos pontos A, B e C, da figura abaixo.



23) Qual é o ponto de um círculo que possui potência mínima em relação a ele?

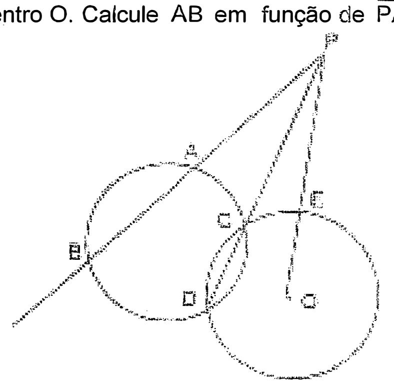
13) Qual é a localização de um ponto P, pertinente a um círculo, que tem potência máxima em relação a ele?

14) Uma corda $\overline{AB}$, de comprimento 48 cm, é dividida por um ponto P na razão 5 : 7. Determine a potência de P.

15) Em um círculo de centro O, traça-se a secante diametral ABO, onde A é exterior e B é interior ao círculo. Sabe-se que as menores distâncias de A e B à circunferência são, respectivamente, 3 e 4. Determine a medida do raio desse círculo, visto que a soma das potências de A e B vale 1.

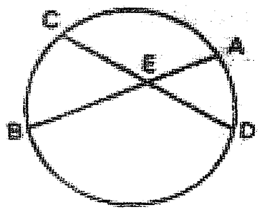
16) Considere as cordas $\overline{AB} = 29$ e $\overline{CD} = 20$ de uma circunferência, que se intersectam em um ponto P; e um ponto Q da corda $\overline{AB}$, tal que ACQD seja um paralelogramo. Marcado esse ponto Q, calcule $\overline{AQ}$.

17) Na figura abaixo, $\overline{PB} = \overline{PO} = 2r$, sendo r o raio do círculo de centro O. Calcule $\overline{AB}$ em função de $\overline{PA}$.

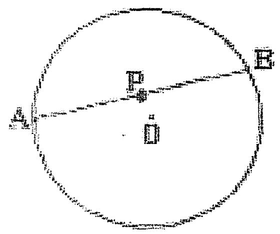


QUESTÕES DE CONCURSOS

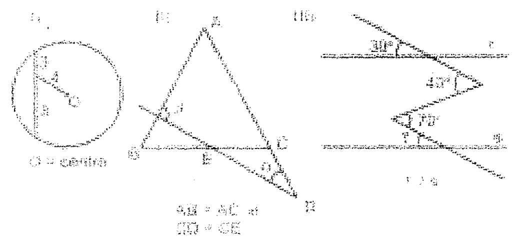
18) **(CM)** Se na figura a seguir as cordas AB e CD interceptam-se no ponto E, AE = 3 cm, EB = 6 cm e ED = 4 cm, então o segmento CE medirá:
a) 4 cm
b) 4,5 cm
c) 6 cm
d) 6,5 cm
e) 8 cm



19) **(CM)** Se na circunferência de centro 0, da figura abaixo, $\overline{AP} = 9cm, \overline{PB} = 16cm$ e $\overline{PO} = 5cm$, então o raio da circunferência de centro 0, em centímetros, mede:
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15



20) **(EPCAR)** Considerando as figuras abaixo, assinale **(V)** para as afirmativas verdadeiras e **(F)** para as falsas.

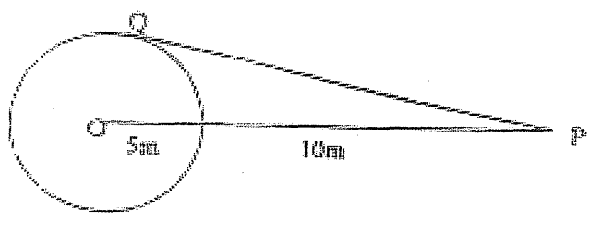


( ) Na figura I, o raio vale $2\sqrt{10}$.
( ) Na figura II, pode-se afirmar que $\beta = 2\alpha$.
( ) Na figura III, pode-se concluir que $\gamma = 50°$.
( ) Com base nas figuras II e III, pode-se afirmar que se $\alpha = \gamma/2$, então β é um ângulo reto.
A sequência correta é:
a) V – V – F – F
b) F – F – F – F
c) V – V – V – F
d) V – F – F – V

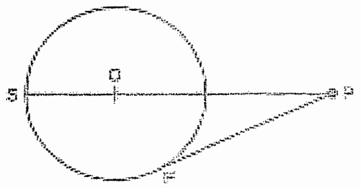
21) **(CESGRANRIO)** Por um ponto distante 15 cm do centro de uma circunferência, traçamos um segmento tangente de 9 cm. O diâmetro dessa circunferência é:
a) 28 cm
b) 24 cm
c) 10 cm
d) 26 cm
e) 12 cm

22) **(CAP - UFRJ)** De um ponto situado a 3 m da circunferência de um círculo, traça-se uma tangente de comprimento igual a 9 m. Qual a medida do raio do círculo?

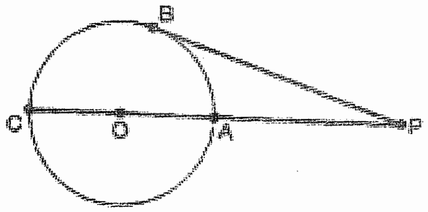
23) **(CAP - UFRJ)** Uma pessoa se encontra em um ponto P que dista 10 m de uma pisicna circular de raio 5 m, conforme indica a figura abaixo. Que distância essa pessoa percorrerá até o ponto Q, sabendo que Q é tangente à borda da piscina?



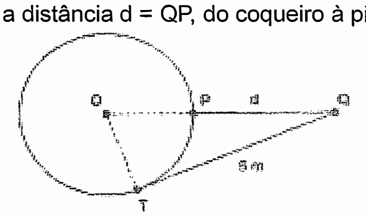
24) **(CESGRANRIO)** Na figura, O é centro da circunferência. Se $\overline{PE} = 6$ e $\overline{PS} = 9$, o raio da circunferência é:
a) 9/4
b) 4
c) 6
d) 5/2
e) 5



25) **(CM)** Na circunferência de centro O da figura abaixo, o segmento PB é tangente à circunferência e mede 12 cm, o segmento PA mede 8 cm e os pontos P, A, O e C estão alinhados. Calcule, valor do raio da circunferência de centro O.
a) 3 cm
b) 4 cm
c) 5 cm
d) 6 cm
e) 7 cm

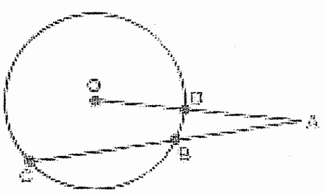


26) **(ENEM)** Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa água há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q.
Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é:
a) 4 m
b) 4,5 m
c) 5 m
d) 5,5 m
e) 6 m

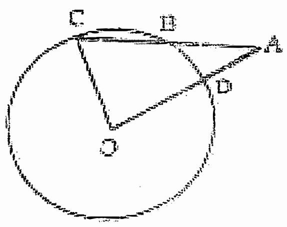


27) (CEFET) De um ponto P exterior a um círculo, traça-se uma reta secante r, que intercepta a circunferência nos pontos A e B, sendo PA > PB. A partir do mesmo ponto exterior P, traça-se a tangente PT ao círculo. Sabe-se que PT = 16cm, PA = 32cm e que o raio do círculo é igual a 13cm. Qual é, em centímetros, a distância do centro do círculo à corda AB?

28) **(UNIFICADO)** Na figura abaixo, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 4$ e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:
a) 36
b) 45
c) 48
d) 50
e) 54



29) **(E. E. AER)** Na figura, AB = 8 cm, BC = 9 cm, AD = 4 cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC, em cm, é:
a) 43
b) 47
c) 49
d) 51



30) **(CN)** Na figura abaixo, PA é uma secante a círculo, PT é uma tangente ao círculo e BC é uma corda do círculo. Qual das relações abaixo sempre será válida?

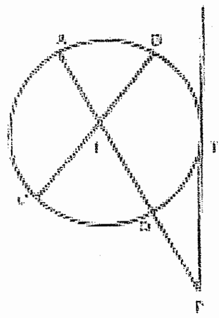
a) $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$

b) $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{AD}}$

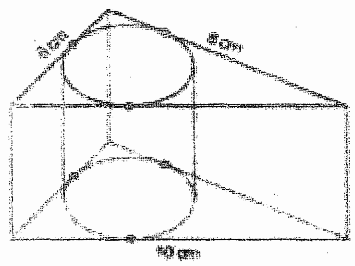
c) $\dfrac{\overline{CI}}{\overline{BI}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$

d) $\dfrac{\overline{PT}}{\overline{CI}} = \dfrac{\overline{IB}}{\overline{PT}}$

e) $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{BI}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CA}}$



31) **(ENEM)** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente ás suas faces laterais, conforme mostra a figura.
O raio da perfuração da peça é igual a
a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm



32) **(CN)** Define-se potência de um ponto **P** em relação a um círculo **C**, de centro **O** e raio **r** como sendo o quadrado da distância de **P** a **O** menos o quadrado de **r**. Qual é a potência de um dos vértices do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r, em relação a este círculo?

a) $\dfrac{2r^2}{3}$

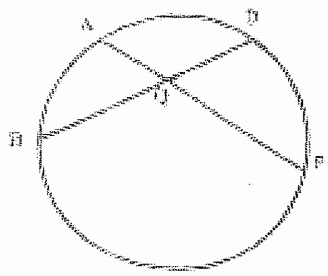
b) $\dfrac{r^2}{2}$

c) $\dfrac{r^2}{3}$

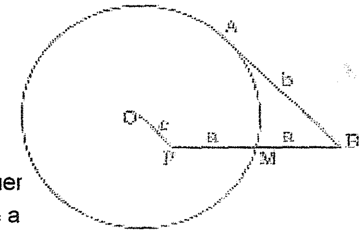
d) $\dfrac{r^2}{4}$

e) $\dfrac{r^2}{6}$

33) **(CN)** Considere as cordas $\overline{AP} = 13$ e $\overline{BD} = 12$ de uma circunferência, que se interceptam no ponto Q; e um ponto C na corda $\overline{AP}$, tal que ABCD seja um paralelogramo. Determinado este ponto C, $\overline{AC}$ mede:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12



34) **(CN)** O raio do círculo da figura abaixo, onde $a^2 = bc$, é igual a:



Dados:
Centro 0
P ponto interior qualquer
Med$(\overline{PM})$ = Med$(\overline{MB})$ = a
$\overline{AB}$ é tangente ao círculo em A.
a) | a + c - b|
b) | 2a + c - b|
c) | a + b - c|
d) |2a - c|
e) |b - c|

35) **(CN)** Sejam L_1 e L_2 duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B, P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à L_1 e L_2, cujos pontos de contatos são R e S. Se PR = PS, Pode-se afirmar que P, A e B
a) estão sempre alinhados
b) estão alinhados somente em duas posições
c) estão alinhados somente em três posições
d) estão alinhados somente em quatro posições
e) nunca estarão alinhados

GABARITO

1) a) 6
b) 2
c) 22
d) 6
e) 5
2) A
3) C
4) B
5) 3 cm e 8 cm
6) C
7) 10
8) 4
9) 8
10) 12 cm
11) 80
12) o centro
13) sobre a circunferência
14) -560 cm²
15) 12
16) 8
17) $\overline{AB} = \frac{\overline{PA}}{3}$
18) B
19) C
20) D
21) B
22) 12 m
23) $10\sqrt{2}$ m
24) D
25) C
26) A
27) 5 cm
28) E
29) D
30) A
31) B
32) C
33) A
34) E
35) A

OBSERVAÇÕES

Polígonos regulares

Introdução

Como vimos anteriormente no capítulo de polígonos, um polígono é regular quando é EQUILÁTERO (lados iguais) e EQUIÂNGULO (ângulos iguais). Neste capítulo vamos estudar os principais polígonos regulares, relacionando-os com os círculos inscrito e circunscrito. Assim, vamos dividir tal análise nos itens que se seguem.

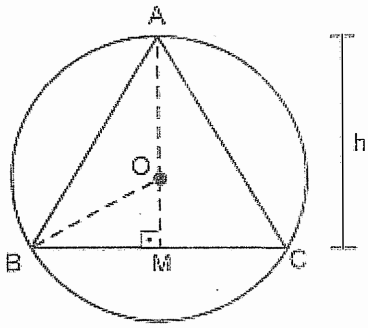
Polígonos regulares inscritos

Todos os vértices estão na circunferência.

1) Triângulo equilátero

Antes de iniciarmos as demonstrações das relações acima aludidas, cabe-nos ressaltar o conceito de **raio de um polígono regular**, que é a distância do centro do polígono a qualquer um dos seus vértices, sendo igual ao raio do círculo no qual o polígono é inscrito, e o de **apótema de um polígono regular**, que é a distância do centro do polígono a qualquer um de seus lados, sendo igual ao raio do círculo ao qual o polígono é circunscrito.

Observe que o apótema divide o lado ao meio. A partir de agora chamemos o lado do polígono regular inscrito de **L**, seu apótema **a**, o lado do polígono regular circunscrito de **L**, seu apótema de **A** e o raio do círculo de **R**.



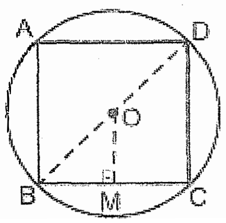
Na figura acima, temos OB = R, OM = a e BM = $\frac{L}{2}$. Como no triângulo retângulo OMB o ângulo $\hat{B} = 30°$ e o ângulo $\hat{O} = 60°$, OM e BM são respectivamente catetos opostos a ângulos de 30° e 60°, então:

$$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}$$

$$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{L}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \rightarrow L = \mathbf{R\sqrt{3}}$$

$$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} \text{ fi } \; h = R + \frac{R}{2} \rightarrow \mathbf{h} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{2}}$$

2) Quadrado



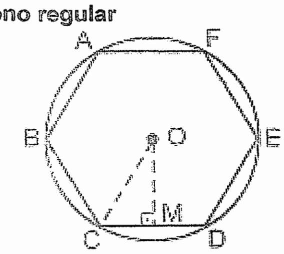
No triângulo OMB da figura acima, temos OB = R, OM = a, BM = $\frac{L}{2}$, $\hat{B} = 45° = 45°$ e $\hat{O} = 45°$. Como OM e BM são catetos opostos a ângulos de 45°, vem que:

$$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{R\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

$$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow \frac{L}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \rightarrow L = R\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = 2R \rightarrow \mathbf{d = 2R}$$

3) Hexágono regular



Devemos lembrar que o ângulo interno de um hexágono regular vale 120°. Então no triângulo OMC temos OC = R, OM = a, CM = $\frac{\ell}{2}$, C = 60° e $\hat{O} = 30°$. Daí, OM e CM são respectivamente catetos opostos a ângulos de 60° e 30°, logo:

$$a = \frac{\mathbf{R\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

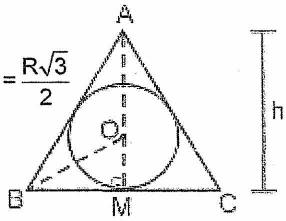
$$\overline{CM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow \frac{L}{2} = \frac{R}{2} \rightarrow \mathbf{L = R}$$

Polígonos regulares circunscritos

Todos os lados tangenciam a circunferência.

1) Triângulo equilátero

$$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



No triângulo OMB, OM = A, BM = L/2, $\hat{B} = 30°$ e $\hat{O} = 60°$.

Note que:

OM = R, daí **A = R**

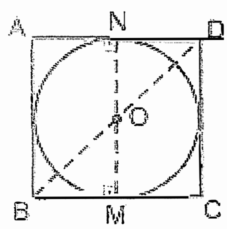
Como OM e BM são catetos opostos, respectivamente, a ângulos de 30° e 60°:

$$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow R = \frac{\overline{OB}}{2} \rightarrow \mathbf{\overline{OB} = 2R}$$

$$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{L}{2} = \frac{2R}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \mathbf{L = 2R\sqrt{3}}$$

$$H = \overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = 2R + R \rightarrow \mathbf{H = 3R}$$

2) Quadrado



Na figura, observe que ABMN é um retângulo, logo AB = NM. Como AB = L = NM = 2R, temos que:

$$\mathbf{L = 2R}$$

Observemos que OM = A e OM = R, logo:

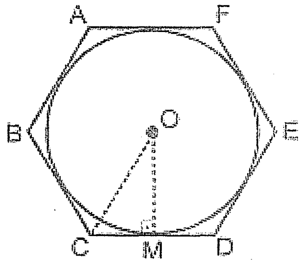
$$\mathbf{A = R}$$

Como visto no capítulo 40, calculemos a diagonal **D**:

$$D = L \cdot \sqrt{2}$$

$$\mathbf{D = 2R\sqrt{2}}$$

3) Hexágono regular



No triângulo OMC temos OM = A, CM = L/2, $\hat{C} = 60°$ e $\hat{O} = 30°$. Observe que: OM = R, e daí:

$$A = R$$

O cateto OM está oposto a 60°, então:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OC}}{2}.\sqrt{3}$$

$$R = \frac{\overline{OC}}{2}.\sqrt{3}$$

$$\overline{OC} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{OC} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

O cateto CM está oposto a 30°, logo:

$$\overline{CM} = \frac{\overline{OC}}{2}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2}$$

$$L = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Quadros de resumo

Polígonos regulares inscritos

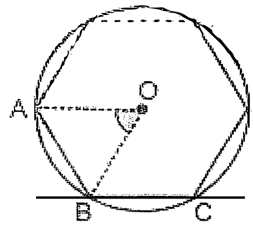
	ℓ	a
△	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
□	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
⬡	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Polígonos regulares circunscritos

	L	A
△	$2R\sqrt{3}$	R
□	2R	R
⬡	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	R

Ângulo central

O **ângulo central** ou **cêntrico** de um polígono regular convexo é aquele que tem vértice no centro do círculo e tem como lados dois raios, que partem de dois vértices consecutivos do polígono.



Na figura acima, o ângulo AÔB é o ângulo central do polígono regular ABCD... de n lados.

Note que:

$$\boxed{A\hat{O}B = \frac{360°}{n}}$$

Obs.: Note que o ângulo central tem a mesma medida do ângulo externo do polígono.

Exemplo:
Determine o ângulo central de um icoságono regular.

Resolução:

$$A\hat{O}B = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{20} = 18°$$

Formulário geral

A seguir citaremos algumas fórmulas que servem para determinar lados de quaisquer polígonos regulares. Cabe lembrar, que tal formulário não é imprescindível para alunos dos cursos fundamental e médio, porém podem ser peças importantes nos concursos de maior nível de dificuldade.

1 - Fórmula geral do lado

Dado um polígono regular de ângulo central q, inscrito em um círculo de raio R, seu lado ℓ é dado por:

$$\boxed{\ell = R\sqrt{2 - 2\cos\theta}}$$

2 - Fórmula geral do apótema

Em um polígono regular de ângulo central q, de lado ℓ e inscrito em um círculo de raio R, seu apótema pode ser calculado por duas fórmulas equivalentes.
Opte por uma delas, de acordo com os dados do exercício.

$$\boxed{a = \frac{R\sqrt{2 + 2\cos\theta}}{2}}$$

ou

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{4R^2 - \ell^2}}{2}}$$

Exemplo:
Determine as medidas do lado e do apótema de um octógono regular inscrito em um círculo de raio 20 cm.

Resolução:

$$q = \frac{360°}{8} = 45°$$

$$\ell = R\sqrt{2-2\cos\theta} = \frac{20\sqrt{2-2\cos 45^\circ}}{2} = 20\sqrt{2-2\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 20\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ cm}$$

$$a = \frac{R\sqrt{2+2\cos\theta}}{2} = \frac{20\sqrt{2+2\cos 45^\circ}}{2} = \frac{20\sqrt{2+2\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2} =$$

$$= 10\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ cm}$$

3 - Cálculo de ℓ_{2n} em função de ℓ_n

Considerando-se dois polígonos regulares de gêneros n e 2n, há uma relação que une seus lados:

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}}$$

Exemplo:
Determine o lado de um dodecágono regular inscrito em um círculo de raio 8 cm.

Resolução:
$2n = 12 \to n = 6$
$\ell_n = \ell_6 = R = 8$

$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

$$\ell_{12} = \sqrt{2.8^2 - 8\sqrt{4.8^2 - 8^2}} = \sqrt{128 - 8\sqrt{192}} =$$

$$= \sqrt{128 - 8.8\sqrt{3}} = \sqrt{128 - 64\sqrt{3}} = \sqrt{64.(2-\sqrt{3})}$$

$$\ell_{12} = 8\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ cm}$$

Relação importante

Dados dois polígonos regulares de gênero n, um deles inscrito, de lado ℓ_n e apótema a_n e outro circunscrito, de lado L_n e, como visto anteriormente, de apótema igual ao raio R do círculo, vale a relação:

$$\boxed{\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{a_n}{R}}$$

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Em um círculo de raio 10, determine o
   a) lado do triângulo equilátero inscrito;
   b) apótema do triângulo equilátero inscrito;
   c) altura do triângulo equilátero inscrito;
   d) lado do quadrado inscrito;
   e) apótema do quadrado inscrito;
   f) diagonal do quadrado inscrito;
   g) lado do hexágono regular inscrito;
   h) apótema do hexágono regular inscrito;
   i) lado do triângulo equilátero circunscrito;
   j) apótema do triângulo equilátero circunscrito;
   l) altura do triângulo equilátero circunscrito;
   m) lado do quadrado circunscrito;
   n) apótema do quadrado circunscrito;
   o) diagonal do quadrado circunscrito;
   p) lado do hexágono regular circunscrito;
   q) apótema do hexágono regular circunscrito.

2) Determine as medidas dos ângulos centrais dos polígonos:
   a) Triângulo equilátero;
   b) Quadrado;
   c) Hexágono regular;
   d) Pentágono regular;
   e) Octógono regular;
   f) Pentadecágono regular.

3) O lado do hexágono regular inscrito em um círculo vale 4 cm. Determine a altura do triângulo equilátero circunscrito a esse círculo .

4) O perímetro do quadrado circunscrito a um círculo vale 40 m. Determine a altura do triângulo equilátero inscrito nesse círculo.

5) O apótema do hexágono regular inscrito a um círculo vale $5\sqrt{3}$ cm. Determine o lado do quadrado inscrito.

6) A altura de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo mede $36\sqrt{3}$ cm. Determine o apótema do hexágono regular inscrito nesse mesmo círculo.

7) Determine o apótema do quadrado inscrito em um círculo no qual o lado do triângulo equilátero circunscrito mede $6\sqrt{5}$ cm.

8) A um mesmo círculo estão circunscritos um triângulo equilátero e um hexágono regular cuja soma dos perímetros é de $50\sqrt{3}$ cm. Determine o raio do círculo.

9) Em um círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. Determine o perímetro do triângulo, sabendo-se que a diagonal do quadrado mede 8 cm.

10) Em um círculo estão inscritos um triângulo eqüilátero e um quadrado. Se o perímetro do triângulo mede $12\sqrt{3}$ cm, determine a medida do apótema do quadrado.

11) Um trapézio está inscrito em um círculo de raio 4 cm. Determine a altura do trapézio, sabendo que suas bases são respectivamente o lado triângulo equilátero e o lado do hexágono regular inscritos nesse círculo.

12) Um trapézio está inscrito em um semicírculo de raio 6 cm. Determine a altura do trapézio cujas bases são o lado do quadrado e o lado triângulo equilátero inscritos.

13) Determine o perímetro de um trapézio inscrito em um círculo de raio 4 cm, sabendo que suas bases são o diâmetro e o lado do hexágono regular.

14) Determine o perímetro do triângulo formado pelos prolongamentos, nos dois sentidos, de três lados alternados de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 5 m.

15) A menor diagonal de um hexágono regular inscrito num círculo mede $6\sqrt{3}$ m. Determine o apótema do quadrado inscrito neste círculo.

16) Determine a medida da menor diagonal de um octógono regular inscrito em um círculo de raio $3\sqrt{2}$ cm.

17) Um trapézio está inscrito em um círculo de raio 6 m, tendo o centro desse círculo em seu interior. Os arcos subentendidos pelos lados desse trapézio são proporcionais a 2, 3, 3 e 4. Determine o perímetro desse trapézio.

18) Um hexágono regular está circunscrito a um círculo de raio 6 cm. Determine o perímetro do triângulo que se obtém através da interseção das retas suportes de lados alternados desse hexágono.

19) Em um círculo de raio 11 está inscrito um quadrilátero convexo, em que um dos lados é a corda máxima e os

outros três são congruentes. Determine o perímetro desse quadrilátero.

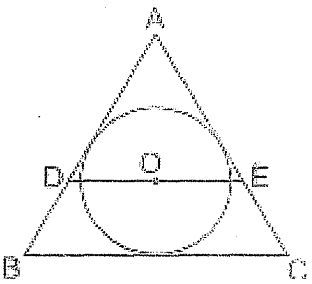
20) Em um círculo está inscrito um triângulo equilátero, e em um outro está inscrito um quadrado. Determine a razão entre os comprimentos do menor e do maior raio, sabendo que os perímetros desses polígonos são iguais.

21) Em um círculo de raio 2 cm, está inscrito um hexágono regular. Este hexágono está circunscrito a um círculo no qual está inscrito um quadrado. Detemine a medida do lado desse quadrado.

22) Um triângulo não isósceles está inscrito em um círculo de raio 6 cm. Determine seu perímetro, sabendo que dois de seus lados são o lado do hexágono regular e o lado do triângulo equilátero inscritos nesse círculo.

23) Circunscreve-se um círculo a esse mesmo hexágono Apoiado sobre o lado do hexágono e para o seu exterior, constrói-se um outro círculo. Determine a razão entre os raios do primeiro e do segundo círculos traçados.

24) Na figura abaixo, o círculo de centro O tem raio 8, o triângulo ABC é equilátero e o segmento é paralelo a $\overline{BC}$. Determine o perímetro do quadrilátero BCED.



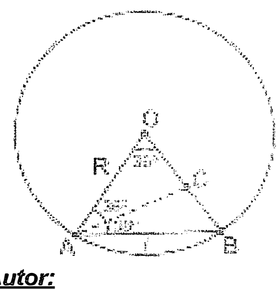
25) Um octógono regular está inscrito em um círculo. A diferença entre as medidas da maior e da menor diagonal é 2 cm. Determine a medida do raio desse círculo.

26) Determine o lado e o apótema de cada um dos polígonos regulares abaixo, inscritos em um círculo de raio R.
a) Octógono
b) Dodecágono

27) Determine o lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

28) Determine a razão entre as medidas do lado e do apótema de um dodecágono regular inscrito em um círculo de raio R.

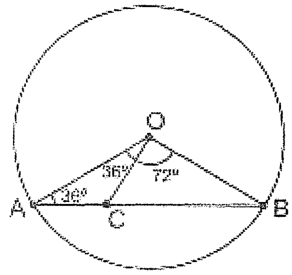
29) Determine o lado e o apótema de um decágono regular inscrito em um círculo de raio R.



Nota do Autor:
Este exercício já foi proposto no capítulo 39, porém, é importante ressaltá-lo. Observe que o lado do decágono regular subentende um arco de 36° na circunferência. Como sugestão verifique a semelhança entre os triângulos OAB e OAC da figura abaixo.

30) Determine a medida da diagonal $\overline{AD}$ de um decágono regular ABCDE ... J, inscrito em um círculo de raio R.

Sugestão:
Verifique que o arco subentendido por essa corda mede 108°. Proceda de forma semelhante ao exercício anterior, verificando a semelhança entre os triângulos OAB e OAC na figura abaixo.



31) Determine o lado e o apótema de um pentágono regular inscrito em um círculo de raio R.

Sugestão:
Construa no círculo de raio R, um triângulo retângulo inscrito, de hipotenusa 2R, no qual um cateto é a referida diagonal do exercício anterior, e o outro é o lado do pentágono desejado.

32) Determine a medida da menor diagonal de um icoságono regular inscrito em um círculo de raio $\sqrt{5}+1$.

33) O produto das medidas do lado e do apótema de um octógono regular vale $18\sqrt{2}\,cm^2$. Determine a medida do lado do pentágono regular inscrito no mesmo círculo que o octógono.

34) A soma das medidas do lado de um decágono regular com o dobro do apótema de um pentágono regular, vale $3\sqrt{5}$ cm. Determine a medida do raio no qual esse polígono está inscrito.

QUESTÕES DE CONCURSOS

35) **(CM)** Na figura abaixo o triângulo ABC é inscrito na circunferência de centro O e as medidas de seus lados são tais que AB = BC = CA = 10 cm. Qual a altura do triângulo AOB relativa ao lado AB?

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\,cm$

b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\,cm$

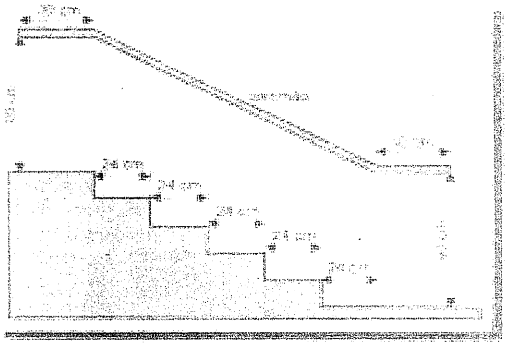
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}\,cm$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\,cm$

e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\,cm$

36) **(ENEM)** Na figura a seguir, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:
a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m

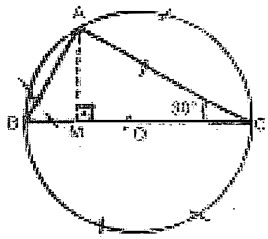
d) 2,1 m
e) 2,2 m



37) **(PUC)** A figura mostra um hexágono regular de lado a. A diagonal AB mede:

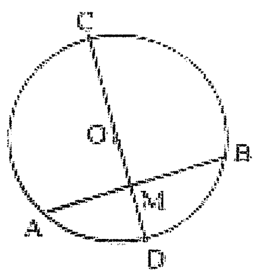
a) 2a
b) $a\sqrt{2}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
d) $a\sqrt{3}$
e) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

38) **(CEFET)** Sendo $\overline{BC}$ o diâmetro da circunferência, assinale a única alternativa FALSA.



a) O triângulo BAC é retângulo;
b) Os triângulos AMB e BAC são semelhantes;
c) A medida de $\overline{AC}$ representa a medida do lado do triângulo equilátero, inscrito no círculo de raio $\overline{OC}$.
d) A medida $\overline{AC}$ representa a medida do lado do triângulo eqüilátero, circunscrito ao círculo de raio $\overline{OC}$.

39) **(CAP - UFRJ)** Dada uma circunferência de centro O, traça-se a corda $\overline{AB}$ e a mediatriz $\overline{CD}$ de $\overline{AB}$, conforme mostra a figura.



Sabendo-se que a medida de $\overline{OM}$ é metade da medida do raio, classifique o triângulo ABC, quanto aos lados.

40) **(CN)** Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$
b) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$
c) $2\sqrt{2}+\sqrt{2}+1$
d) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$
e) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$

41) **(CM)** O lado de um triângulo equilátero tem a mesma medida que o lado de um hexágono regular e ambos medem $12\sqrt{3}$ cm. Se colocarmos, sobre um plano, o triângulo ao lado do hexágono, de maneira que dois lados, um de cada polígono, fiquem em coincidência, qual será a distância entre os centros dessas duas figuras?

a) 24 cm
b) $24\sqrt{3}$ cm
c) 25 cm
d) 28 cm
e) 36 cm

42) **(CN)** O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170. Logo:

a) o número de lados de P é ímpar.
b) P não tem diagonal passando pelo centro de K.
c) o ângulo externo de P mede 36º.
d) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.
e) o número de lados de P é múltiplo de 3.

43) **(CN)** Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um círculo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?

a) $16\sqrt{3}-12$
b) $12\sqrt{3}-12$
c) $8\sqrt{3}+12$
d) $12\sqrt{3}+8$
e) $16\sqrt{3}-8$

44) **(CN)** Um quadrilátero ABCD está inscrito num círculo de raio unitário. Os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular inscritos no círculo. Se x é a medida do lado $\overline{AD}$ do quadrilátero, pode-se afirmar que:

Obs.: $\overline{CD}$ é aproximadamente igual a 1,2.

a) $1{,}0 < x < 1{,}2$
b) $1{,}2 < x < 1{,}4$
c) $1{,}4 < x < 1{,}6$
d) $1{,}6 < x < 1{,}8$
e) $1{,}8 < x < 2{,}0$

45) **(CN)** Sejam ABCDEFGHIJKL os vértices consecutivos de um dodecágono regular inscrito num círculo de raio $\sqrt{6}$. O perímetro do triângulo de vértices A, E e H é igual a :

a) $3[3+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$
b) $3[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$
c) $3[1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

d) $3\left[2+\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right]$

e) $3\left[1-\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right]$

46) **(PUC)** Qual é a medida do lado de um polígono regular de 12 lados, inscrito num círculo de raio unitário?

a) $2+\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{3}-1$

d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

47) **(CN)** O perímetro do heptágono regular convexo inscrito num círculo do raio 2,5, é um número x Î R, tal que:
a) $14 < x < 15$
b) $15 < x < 16$
c) $16 < x < 17$
d) $17 < x < 18$
e) $18 < x < 19$

48) **(CN)** Em um trapézio isósceles ABCD, de base maior AB, está inscrito um arco de circunferência AMB, onde M é o ponto médio da base menor CD. O ângulo ABC, formado pela base maior AB e pelo lado não paralelo BC desse trapézio, mede 60°. Qual é a razão entre as medidas da base AB e do comprimento do arco AMB, sabendo-se que os lados congruentes desse trapézio são tangentes ao arco AMB nos pontos A e B?

a) $\frac{3}{\pi}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

49) **(CN)** Um professor usa para medir comprimentos uma unidade denominada "nix", definida como 1 nix = $\sqrt{3}$ centímetros. Ele mediu na unidade nix as diagonais de um hexágono regular de lado 1cm e encontrou para as menores x e para as maiores y.
Pode-se concluir que x e y são, respectivamente,
a) números racionais.
b) números irracionais.
c) um número inteiro e um número irracional.
d) um número irracional e um número inteiro.
e) um número racional não inteiro e um número irracional.

50) **(CN)** Em uma circunferência de raio R está inscrito um pentadecágono regular P. Coloque (V) verdadeiro ou (F) falso nas afirmativas abaixo:

( ) P tem diagonal que mede 2 R

( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$

( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$

( ) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Assinale a alternativa correta.

a)	(V)	(V)	(F)	(F)
b)	(F)	(V)	(V)	(F)
c)	(F)	(F)	(V)	(V)
d)	(V)	(V)	(V)	(F)
e)	(V)	(V)	(V)	(V)

51) **(CN)** Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede:

a) $\sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}-1$

d) $\sqrt{3}$

e) $2-\sqrt{2}$

GABARITO

1) a) $10\sqrt{3}$
b) 5
c) 15
d) $10\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{2}$
f) 20
g) 10
h) $5\sqrt{3}$
i) 20
j) 10
l) 30
m) 20
n) 10
o) $20\sqrt{2}$
p) $10\sqrt{3}$
q) 10

2) a) 120°
b) 90°
c) 60°
d) 72°
e) 45°
f) 24°

3) 12 cm
4) 7,5 m
5) 10cm
6) 18 cm
7) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm
8) 5 cm
9) $12\sqrt{3}$ cm
10) $2\sqrt{2}$ cm
11) $2\left(\sqrt{3}+1\right)cm$ ou $2\left(\sqrt{3}-1\right)cm$
12) $3\left(\sqrt{2}-1\right)cm$
13) 20 m
14) 45 m

15) $3\sqrt{2}$ m
16) 6 cm
17) $6\left(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)m$
18) $36\sqrt{3}$ cm
19) 55
20) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$
21) $\sqrt{6}cm$
22) $6\left(3+\sqrt{3}\right)cm$
23) $\sqrt{3}$
24) $\dfrac{112\sqrt{3}}{3}$
25) $\left(2+\sqrt{2}\right)cm$
26) a) $\ell = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e $a = \dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

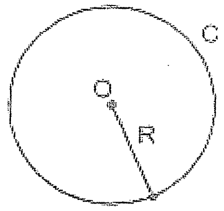
b) $\ell = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $a = \dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

27) $\sqrt{2}$
28) $2\left(2-\sqrt{3}\right)$
29) $\ell = \dfrac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ e $a = \dfrac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
30) $\ell = \dfrac{R\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$
31) $\ell = \dfrac{R\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{2}$ e $a = \dfrac{R\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$
32) 2
33) $3\sqrt{10-2\sqrt{5}}cm$
34) 3 cm
35) B
36) D
37) D
38) D
39) equilátero
40) B
41) A
42) D
43) C
44) B
45) B
46) B
47) B
48) D
49) C
50) C
51) C

OBSERVAÇÕES

Comprimento da circunferência

A circunferência de um círculo é uma linha formada por todos os pontos do plano equilátero de um ponto fixo chamado de cateto, como p é do nosso conhecimento. Seu comprimento é dado por.



$\boxed{C = 2\pi R}$

onde $\pi \cong 3{,}14$

Exemplo:

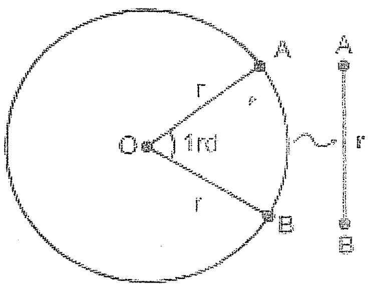
Determine o comprimento de uma circunferência de raio 4,5 cm.

Resolução:

$C = 2\,\pi\,R = 2\,.\pi\,.\,4{,}5 = 9\,\pi\text{ cm} \cong 9\,.\,3{,}14 \cong 28{,}26\text{ cm}$

O sistema circular ou radiométrico

A unidade padrão deste sistema é o *radiano* (*rad* ou *rd*). Definimos o ângulo de 1 radiano como sendo o ângulo central que, em um círculo qualquer, subentende na circunferência um arco cujo comprimento retificado é igual ao comprimento do raio do círculo utilizado.



O arco $\widehat{AB}$ retificado tem comprimento igual a *r*.

Vimos que o comprimento de uma circunferência de raio *r* é dado por $2\pi r$. Assim, para determinarmos a quantos radianos equivale uma circunferência, devemos montar uma regra de três, pois, um arco de comprimento *r* está associado ao valor *1rad*, logo a circunferência de comprimento $2\pi r$ está associada a x rd. Daí:

comprimento do arco	**ângulo**
r	1 rad
$2\pi r$	x rad

$x\,.\,r = 2\pi r \quad \therefore \quad x = 2\pi$

Ou seja, a circunferência equivale a 2π rad.

Relação importante:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\pi \text{ rad} = 360^\circ \\ \text{ou} \\ \pi \text{ rad} = 180^\circ \end{array}}$$

Exemplos:

a) A quantos radianos equivale o ângulo de 150°?

Resolução:

$180^\circ \;-\; \pi$ rad

$150^\circ \;-\; x$

$180\,.\,x = 150\,.\,\pi$

$x = \dfrac{150.\pi}{180} \quad \therefore \quad x = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

b) O ângulo de $\dfrac{3\pi}{4}$ rad a quantos graus equivale?

Resolução:

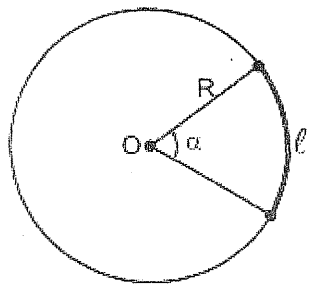
$\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3}{4}\,.\,180^\circ = 135^\circ$

Comprimento de um arco

Seja o comprimento ℓ de um arco que, em um círculo de raio R, está associado a um ângulo central $\hat{\alpha}$. Podemos, observar que enquanto a circunferência é um arco que tem comprimento $2\pi R$ e subentende um ângulo de 360°, o arco de comprimento ℓ compreende um ângulo central $\hat{a}$. Assim, podemos montar uma regra de três:

$2\,\pi R \;-\; 360^\circ$

$\ell \;-\; \hat{\alpha}$



$360^\circ\,.\,\ell = 2\pi R\,.\,\hat{\alpha}$

$\ell = \dfrac{2\pi R.\hat{\alpha}}{360^\circ}$

$\boxed{\ell = \dfrac{\pi R\hat{\alpha}}{180^\circ}}$

Se o ângulo $\hat{a}$ estiver em radianos, teremos que:

$\ell = \dfrac{\pi R\hat{\alpha}}{180^\circ} = \dfrac{\pi R\hat{\alpha}}{\pi}$

$\boxed{\ell = R\,.\,\hat{\alpha}}$

Exemplos:

1) Determine o comprimento de um arco que, num círculo de raio 4 m, subentende um ângulo de 120°.

Resolução:

Dados: R = 4 m; $\hat{\alpha} = 120^\circ$; $\ell = ?$

$\ell = \dfrac{\pi R\hat{\alpha}}{180^\circ} = \dfrac{\pi\,.\,4\,.\,120^\circ}{180^\circ} = \dfrac{8p}{3} \cong \dfrac{8\,.\,3{,}14}{3} \cong 8{,}37$ m.

2) Quantos radianos tem um arco que um círculo de raio 12 m, mede 2 p m?

Resolução:

$\ell = R\,.\,\hat{\alpha}$

$2\pi = 12\,.\,\hat{\alpha}$

$\hat{\alpha} = \dfrac{2\pi}{12}$

$\hat{\alpha} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

QUESTÕES PARA TREINAMENTO

1) Transforme para radianos os ângulos:
   a) 120°
   b) 72°
   c) 225°
   d) 330°

2) Transforme para graus os ângulos:

a) $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{7\pi}{10}$

c) $\frac{4\pi}{15}$

3) Determine o comprimento de uma circunferência de raio 8 cm.

4) Determine o perímetro de uma circunferência de diâmetro 5 cm.

5) Determine o raio de uma circunferência de comprimento 31,40 cm.

6) Determine o comprimento de um arco de 240° em um círculo de 6 m de raio.

7) Em um círculo de 8 cm de raio, um arco mede 18,84 cm. Determine o ângulo a ele associado.

8) Determine o diâmetro de um círculo no qual um arco de 24° mede $\frac{\pi}{3}$m.

9) Em um círculo de raio 12 cm, determine o comprimento:
a) do menor arco subentendido pelo lado de um triângulo eqüilátero inscrito.
b) do menor arco subentendido pelo lado de um quadrado inscrito.
c) do menor arco subentendido pelo lado de um icoságono regular inscrito.

10) Em um círculo de raio 6 cm está inscrito um triângulo ABC. Se os arcos AB e BC têm comprimento respectivamente iguais a 5π cm e $\frac{4\pi}{3}$ cm, determine os ângulos desse triângulo, sabendo-se que:
a) C pertence ao maior arco AB.
b) C pertence ao menor arco AB.

11) Determine o ângulo formado por duas tangentes a um círculo de raio R, sabendo que o arco por elas subentendido na circunferência tem comprimento $\frac{\pi R}{3}$.

12) Em círculo de raio 5 cm, um ângulo inscrito tem como lados um diâmetro e uma corda que subentende um arco de comprimento igual a 2π cm. Determine, em radianos, a medida desse ângulo.

13) Determine a razão entre os perímetros das circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado.

14) Determine a maior distância entre duas circunferências concêntricas cujos comprimentos diferem de 16π m, sabendo que o raio de uma é o triplo do raio da outra.

15) Em um serviço artesanal, José recorta em uma folha de alumínio um círculo de raio R. Em seguida, com centro coincidente com o anterior, ele recorta dele um outro círculo, obtendo assim, um "disco" de largura constante, igual a 8 cm. Finalmente, reveste a circunferência externa do disco com um barbante dourado, e a circunferência interna, com outro barbante azul. Detemine a diferença entre os comprimentos dos barbantes utilizados.

16) De quanto aumenta o comprimento de uma circunferência quando aumentamos seu raio de 6 cm?

17) De quanto devemos aumentar o raio de um círculo para que a circunferência aumente de 8 cm?

18) De quanto diminui o perímetro de uma circunferência, se diminuirmos seu diâmetro de 4 cm?

19) Qual a diminuição que deve sofrer o raio de um círculo, para que o comprimento da circunferência diminua de 10 cm?

20) As rodas de um automóvel têm raios iguais a 30 cm. Qual a distância aproximada por elas percorrida ao fim de 1000 voltas?

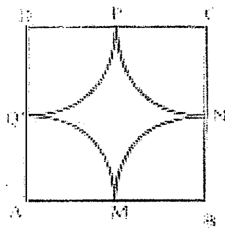
21) Uma pista circular tem raio de 50 m. Um atleta que nela percorra 12560 m, quantas voltas aproximadamente dará?

22) Uma praça de formato circular tem 200 m de raio. Quantas árvores serão necessárias para arborizarmos seu perímetro, colocando-as de 4 em 4 metros?

23) Duas circunferências secantes são tais que uma passa pelo centro da outra, e a interseção dá-se nos pontos A e B. Determine a medida do menor arco AB, sabendo-se que o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são A, B e os centros dos círculos, mede 24 cm.

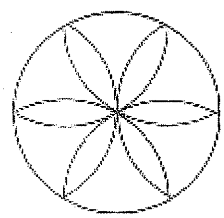
24) Em um quadrado ABCD, de perímetro 60 cm, com raio igual ao seu lado, traçam-se os arcos BD, com centro em A; AC, com centro em B; BD, com centro em C e AC, com centro em D, todos interiores ao quadrado. Determine o comprimento da figura curvilínea assim formada.

25) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de perímetro igual a 16 cm e os pontos M, N, P e Q são médios de seus lados. Determine o perímetro da figura inscrita nesse quadrado.



26) Determine o perímetro da rosácea inscrita em um quadrado de lado 8 cm.

27) Determine o perímetro da figura abaixo, sendo 2 m o raio do círculo que a contém.

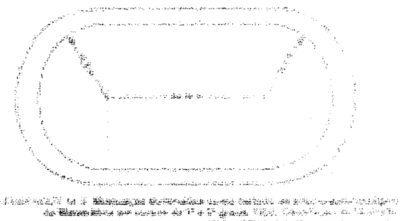


28) Os centros das três polias de um mecanismo estão sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado L e o diâmetro de cada polia é muito próximo de L.
O comprimento da correia MNPQRSM, que movimenta as polias é, aproximadamente:
a) $(\pi + 3)$ L
b) $(2\pi + 3)$ L
c) $(\pi + 6)$ L
d) $\frac{(\pi + 6)\,L}{2}$
e) 6π L

29) Em um círculo inscrevem-se um triângulo equilátero e um quadrado. Transportam-se para um reta o segmento $\overline{AB}$, igual ao comprimento do lado do triângulo eqüilátero, e o segmento $\overline{BC}$, igual ao comprimento do lado do quadrado. O segmento $\overline{AC}$, assim obtido, tem um comprimento aproximadamente igual a um arco com que medida em graus na circunferência desse círculo?

QUESTÕES DE CONCURSOS

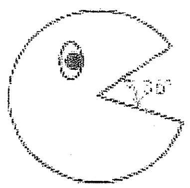
30) **(ENEM)** O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.
Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?
a) 1
b) 4
c) 5
d) 7
e) 8

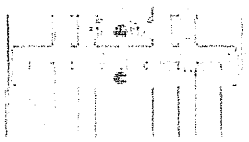


31) **(CN)** A razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é um número:
a) que varia em função de raio da circunferência.
b) constante e inteiro.
c) constante e tem notação decimal finita.
d) constante e tem notação decimal infinita periódica.
e) constante e tem notação decimal infinita e não periódica.

32) **(CEFET)** Sobre o comprimento de uma circunferência e seu respectivo raio, podemos afirmar que:
a) O comprimento e o raio são expressos sempre por números irracionais.
b) Se o comprimento for expresso por um número inteiro, o raio deverá ser expresso por um número irracional.
c) Se o raio for expresso por um número racional, o comprimento deverá ser expresso por um número inteiro.
d) Se o raio for expresso por um número irracional, o comprimento deverá ser expresso por um número inteiro.

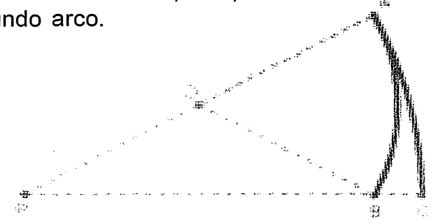
33) **(CPII)** O come-come foi um dos primeiros vídeo-games lançados no mercado e fez muito sucesso há alguns anos atrás. O bichinho, uma bolinha que ia comendo tudo pela frente e tomando cuidado com os fantasmas para não ser morto, tinha que comer todos os pontinhos da tela para passar de fase.





A forma de um come-come é a de um círculo do qual retiramos um setor circular. No come-come que temos da figura anterior, o ângulo do setor circular mede 36° e o diâmetro do círculo mede 20 mm.
Encontre a medida do perímetro deste come-come, usando π = 3,14.

34) **(CEFET)** Na figura abaixo, temos dois arcos de duas circunferências com centros O e P: o primeiro possui extremidades A e B e o segundo possui extremidades A e C, respectivamente. Sabendo ainda que O é ponto médio do segmento e PA, B é um ponto do segmento PC e que o primeiro arco mede 3,2 cm, obtenha a medida, em cm, do segundo arco.



35) **(CN)** Suponha que 1 (um) naval (símbolo n) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a:

a) $\frac{\pi}{4}$ n

b) $\frac{\pi}{2}$ n

c) π n

d) 2π n

e) 4π n

36) **(CN)** De um ponto fora de um círculo de 60 cm de raio traçam-se duas tangentes. Os pontos de tangência determinam na circunferência um arco de 10π cm. O ângulo formado pelas duas tangentes vale:
a) 30°
b) 120°
c) 145°
d) 150°
e) 330°

37) **(CN)** Por um ponto P exterior a um círculo de centro 0 e o raio R = 1 cm, traça-se uma secante que intercepta a circunferência do círculo dado nos pontos A e B, nesta ordem. Traça-se pelo ponto A uma paralela à reta $\overline{PO}$ que intercepta a mesma circunferência no ponto C. Sabendo que o ângulo $O\hat{P}A$ mede 15°, o comprimento do menor arco BC, em centímetros, é:

a) $\frac{\pi}{12}$

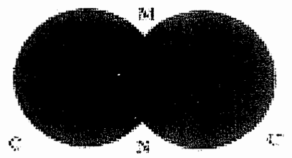
b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{3}$

e) $\frac{5\pi}{12}$

38) **(UFF)** A figura abaixo, representa duas circunferências C e C' de mesmo raio r.



Se MN é o lado comum dos hexágonos regulares inscritos em C e C', então o perímetro da região sombreada é:

a) $\frac{10\pi r}{3}$;

π

b) $\frac{\pi r}{3}$;

c) $\frac{2\pi r}{3}$;

d) $4\pi r$;

e) $2\pi r$.

39) **(EPCAR)** É dado um triângulo ABC, retângulo, de hipotenusa "a" e catetos "b" e "c" (b < c). Pelo ponto M, médio da hipotenusa BC, traça-se MN perpendicular a BC (N . AB). O círculo circunscrito ao quadrilátero CAMN tem perímetro igual a:

a) $\frac{a^2\pi}{c}$

b) $\frac{2a^2\pi}{ab}$

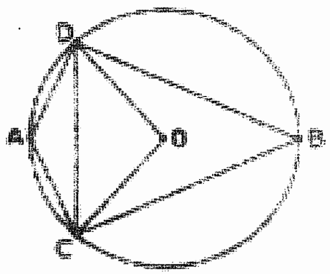
c) $\frac{a^2\pi}{2c}$

d) $\frac{a^2\pi}{2b}$

40) **(EPCAR)** Durante as comemorações dos 60 anos da EPCAR, em virtude do louvável destaque que os alunos do CPCAR alcançaram em 2008 nas Olimpíadas de Matemática, serão produzidas placas para premiação dos melhores classificados.
Tais placas deverão conter o emblema abaixo cujas figuras geométricas serão contornadas por um fio de ouro de espessura uniforme.
Sabendo que 10 g de ouro custam R$ 450,00 e produzem 10 cm desse fio, pode-se estimar que o valor, em reais, gasto com o ouro para a confecção de uma medalha estará entre os números:

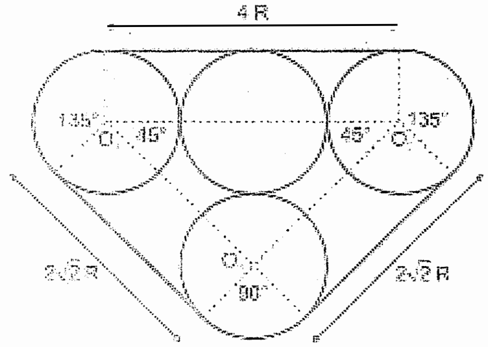
a) 7.500 e 8.000
b) 8.000 e 8.500
c) 8.500 e 9.000
d) 9.000 e 9.500

Dados:
$\overset{\frown}{AB} = 180°$
$\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 12$ cm
$C\hat{O}D = 120°$
$\pi = 3$
$\sqrt{3} = 1,7$

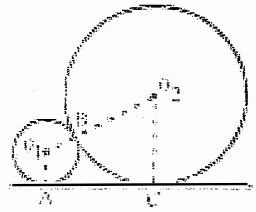


41) **(CN)** As quatro circunferências da figura abaixo têm raios r = 0,5. O comprimento da linha que as envolve é aproximadamente igual a:

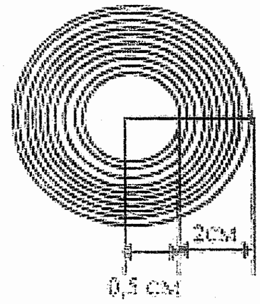
a) 6,96
b) 7,96
c) 8,96
d) 9,96
e) 10,96



42) **(UFRJ)** Na figura a seguir, os círculos de centros O_1 e O_2 são tangentes em B e têm raios 1 cm e 3 cm. Determine o comprimento da curva ABC.



43) **(UFRJ)** Leo resolveu estender uma faixa de papel do escritório em que trabalha no 31° andar até o chão. Para isso, dispunha de rolos de fita de máquina de calcular que iria emendar até atingir os 93 metros de que necessitava.



Determine o número mínimo de rolos de papel que ele terá que usar, sabendo que a espessura do papel é 0,1 mm e as dimensões que nos interessam em cada rolo estão na figura.

44) **(EPCAR)** Considere o octógono regular ABCDEFG inscrito numa circunferência β de raio R. Se esse mesmo octógono circunscreve uma circunferência α de raio r, então a razão entre os quadrados dos comprimentos das circunferências β e α, é, nessa ordem, igual a:

a) $(2+\sqrt{2})$

b) $2(2+\sqrt{2})$

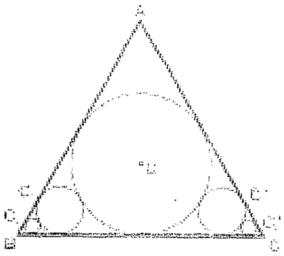
c) $2(2-\sqrt{2})$

d) $2-\sqrt{2}$

45) **(CN)** Um estudante foi calculando o lado do polígono regular de 2n lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo, porém menor do que

a) 60.
b) 61.
c) 62.
d) 63.
e) 64.

46) **(CEFET)** Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1. Considere um círculo C_0 inscrito a ABC e, em seguida, construa um círculo C_1 tangente a C_0, AB e BC e outro círculo C'_1 também tangente a C_0, BC e AC. Continue construindo infinitos círculos C_n tangentes a C_{n-1}, AB e BC. Faça o mesmo para os círculos C'_n também tangentes a C'_{n-1}, BC e AC. A seguir, a figura representa um exemplo com cinco círculos.
A soma dos comprimentos de todos os infinitos círculos é:



a) infinita

b) ð

c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

GABARITO

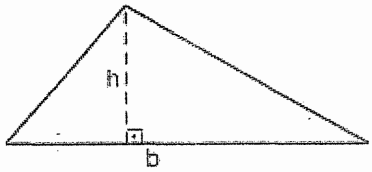
1) a) $\frac{2\pi}{3}$ rad
   b) $\frac{2\pi}{5}$ rad
   c) $\frac{5\pi}{4}$ rad
   d) $\frac{11\pi}{6}$ rad
2) a) 270°
   b) 126°
   c) 48°
3) 16π cm ou 50,24 cm
4) 5π cm ou 15,70 cm
5) 5 cm
6) 8π cm ou 25, 12 cm
7) 135°
8) 5 m
9) a) 8π cm
   b) 6π cm
   c) $1{,}2\pi$ cm
10) a) 20°, 85° e 75°
    b) 20°, 55° e 105°
11) 120°
12) $\frac{3\pi}{10}$ rad
13) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
14) 16 m
15) 16π cm
16) 12π cm
17) $\frac{4}{\pi}$ cm
18) 4π cm
19) $\frac{5}{\pi}$ cm
20) 1884 m
21) 40
22) 314
23) 4π cm
24) 30π cm
25) 4π cm
26) 16π cm ou 50,24 cm
27) 12π m ou 37,68 m
28) A
29) 180°
30) A
31) E
32) B
33) 76,52 mm
34) 3,2 cm
35) D
36) D
37) B
38) A
39) C
40) B
41) B
42) $\frac{5\pi}{3}$ cm
43) 5
44) C
45) D
46) D

OBSERVAÇÕES

Áreas das principais figuras planas

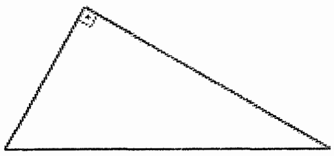
Enumeramos a seguir as fórmulas que nos permitem determinar as áreas das figuras planas mais utilizadas em questões de concursos.

1) **Triângulo** (fórmula geral)



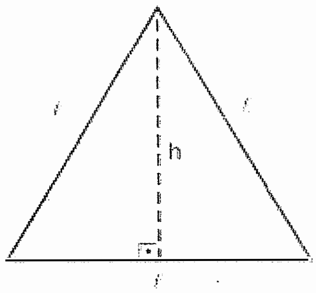
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

2) **Triângulo retângulo**



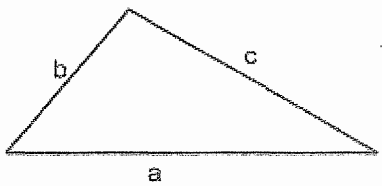
$$S = \frac{\text{Cateto} \cdot \text{Cateto}}{2}$$

3) **Triângulo equilátero**



$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \text{ou} \quad S = \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

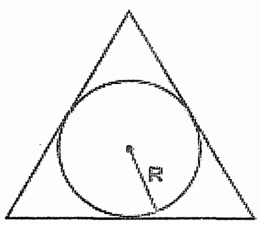
4) **Triângulo**, dados os lados (fórmula de Heron)



$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

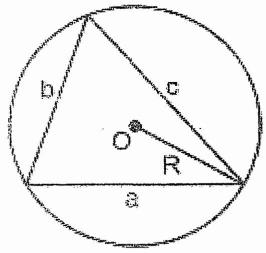
p → semi-perímetro

5) **Triângulo circunscrito**



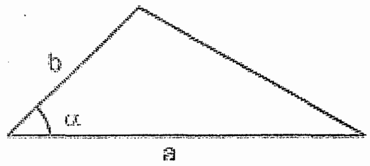
$$S = p \cdot R$$

6) **Triângulo inscrito**



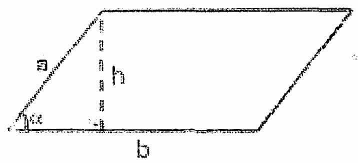
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

7) **Triângulo**, dado um ângulo



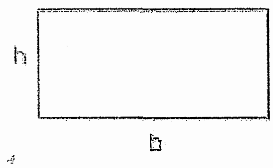
$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\hat{\alpha}}{2}$$

8) **Paralelogramo**



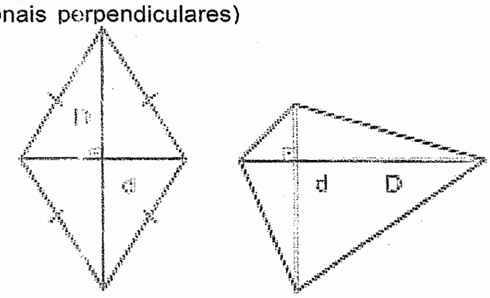
$$S = b \cdot h \quad \text{ou} \quad S = a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha$$

9) **Retângulo**



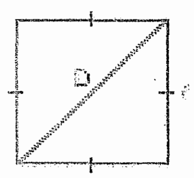
$$S = b \cdot h$$

10) **Losango** (vale também para todo quadrilátero convexo de diagonais perpendiculares)



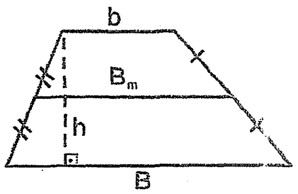
$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

11) **Quadrado**



$$S = \ell^2 \quad \text{ou} \quad S = \frac{D^2}{2}$$

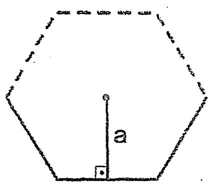
12) **Trapézio**



$S = \frac{(B + b)}{2} . h$ ou $S = B_m . h$

$B_m \rightarrow$ base média

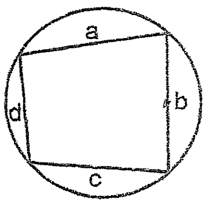
13) **Polígonos regulares**



$S = p . a$

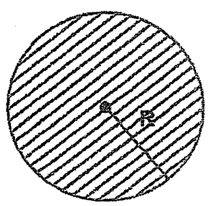
a → apótema

14) **Quadrilátero inscrito**



$S = \sqrt{(p-a) \ . \ (p-b) \ . \ (p-c) \ . \ (p-d)}$

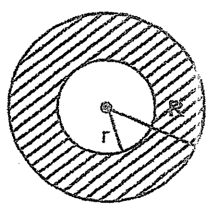
15) **Círculo**



$S = \pi R^2$

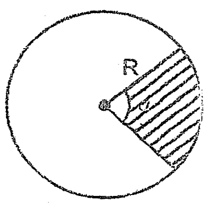
$\pi \cong 3{,}14$

16) **Coroa circular**



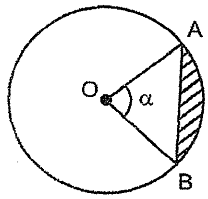
$S = \pi . (R^2 - r^2)$

17) **Setor circular**



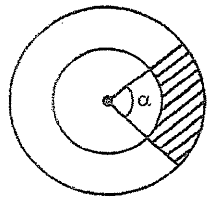
$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$

18) **Segmento circular**



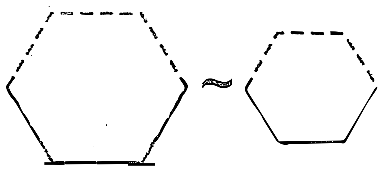
$S = S_{\text{Setor OAB}} - S_{\Delta OAB}$

19) **Trapézio circular**



$S = \frac{\pi \ (R^2 - r^2) \ . \ \alpha}{360°}$

20) **Figuras semelhantes**

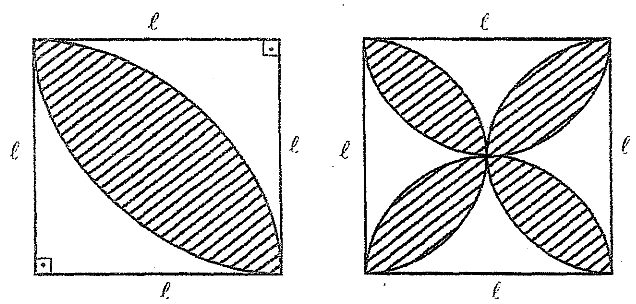


Razão de semelhança = k

↓

Razão das áreas = k^2

21) **"Folha" ou "Rosácea"**



$S = \frac{\ell^2(\pi - 2)}{2}$

Exercícios:

1) Determine a área de um triângulo cuja base mede 6 cm e a altura a ela relativa mede 7 cm.

2) A base e a altura de um triângulo são número inteiros e consecutivos. Determine a soma dessas medidas, sabendo-se que a área do triângulo vale 45 cm².

3) Determine a área de um triângulo retângulo de catetos 10 e 13.

4) Determine a área de um triângulo eqüilátero de lado igual a 2 cm.

5) Um triângulo ABC tem base $\overline{BC} = 4$ cm em e altura $\overline{AH}$ igual a $^3/_2$ de $\overline{BC}$. Determine a área do triângulo ABC.

6) Determine a área de triângulo equilátero de perímetro 18 cm.

7) Em um triângulo de perímetro 16 cm está inscrito um círculo de raio 3 cm. Determine a área do triângulo.

8) Determine a área de um triângulo equilátero cuja altura mede $3\sqrt{3}$ cm.

9) Determine a área de um triângulo retângulo em que um cateto mede 9 cm e a hipotenusa mede 41 cm.

10) Em um triângulo retângulo uma altura é igual a $\sqrt{6}$ e uma das projeções que ela determina na hipotenusa vale 2. Calcule a área do triângulo.

11) Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos na hipotenusa valem 2 cm e 8 cm. Calcule a área desse triângulo.

12) Determine a área de um triângulo de lados 6 cm, 10 cm e 12 cm.

13) Determine a área do triângulo de lados 13 cm, 14 cm e 15 cm.

14) Determine a área de um triângulo de lados 15 cm, 41 cm e 52 cm.

15) Determine a área de um triângulo no qual dois lados medem 16 cm e 10 cm, e o ângulo por eles formado vale 150º.

16) Em um triângulo isósceles de perímetro 72 cm, um dos lados iguais e a base são proporcionais a 13 e 10. Calcule a área desse triângulo.

17) Determine a área de um triângulo retângulo isósceles de perímetro 2π.

18) Determine a área de um retângulo de perímetro 30 cm, no qual uma dimensão é o quádruplo da outra.

19) Determine o perímetro de um retângulo de área 120, sabendo-se que suas dimensões são expressas por dois números pares consecutivos.

20) Determine a área de um retângulo cujas dimensões são proporcionais a 3 e 4 e cuja diagonal mede 20 cm.

21) Determine a área de um quadrado de perímetro 24.

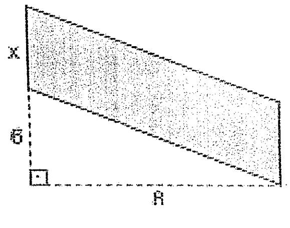
22) Em um retângulo uma das dimensões mede 12 cm. Determine a área desse retângulo, sabendo-se que a outra dimensão e uma das diagonais são proporcionais a 4 e 5.

23) Em um retângulo uma das diagonais, que mede 12 cm, forma com um dos lados um ângulo de 60º. Determine sua área.

24) Determine a área de um rombóide que possui lados 5 m e 8 m e um ângulo de 30º.

25) Detemine a área de um paralelogramo de lados 4 e 12 que possui um ângulo de 120º.

26) O paralelogramo da figura abaixo tem área igual a 24 cm². Determine o valor de x.



27) Determine a área de um quadrado de diagonal 8 cm.

28) Determine a área de um quadrado, sabendo-se que ela é numericamente igual à sua diagonal.

29) A soma das medidas do lado de um quadrado e de sua diagonal vale $6+3\sqrt{2}$ cm. Determine sua área.

30) A área de um quadrado é $\frac{32\pi\sqrt{3}}{7}$ cm². Determine a área do quadrado cujo lado é a diagonal do primeiro.

31) As diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares e medem 6 cm e 11 cm. Determine sua área.

32) Determine a área de um losango de perímetro 32 m que possui um ângulo de 120º.

33) Determine a área de um losango de perímetro 48 cm, sabendo-se que um de seus ângulos é igual à soma dos outros dois.

34) Determine a área de um trapézio de bases 6 e 15, e altura 10.

35) A base menor, a base maior e a altura de um trapézio são, nesta ordem, proporcionais a 3,5 e 6. Determine a medida de sua base média, sabendo-se que sua área mede 384 m².

36) Determine a área de um trapézio isósceles no qual um dos lados oblíquos mede 10 cm, sabendo que ele está circunscrito a um círculo de raio 4 cm.

37) Um terreno tem a forma de um trapézio e sua área é de 420 m². A base maior é a frente do terreno e será cercada. Para a medição do terreno, foram usados um barbante de 50 cm e um comprido bambu de medida desconhecida. A base maior do terreno mede 4 bambus mais 4 barbantes; a base menor 2 bambus mais 8 barbantes; a altura 4 bambus menos 8 barbantes. Qual a medida da cerca da frente do terreno.

38) O perímetro de um triângulo vale 30 cm e a área do círculo nele inscrito vale 4π cm². Determine a área do triângulo.

39) Determine a área de um segmento circular de 90º em um círculo de raio 12 cm.

40) Determine a área de um segmento circular de 120º em um círculo de raio 6 cm.

41) Determine o raio de um círculo circunscrito a um triângulo de lados iguais a 10, 12 e 10.

42) Determine a área de uma coroa circular de raios 6 e 9.

43) Determine os raios de duas circunferências concêntricas que distam 2 m e cuja área da coroa por elas determinada é de 16π m².

44) Duas circunferências são concêntricas e uma corda da maior tangente à menor mede $2\pi\sqrt{3}$ cm. Determine a área da coroa circular.

45) Determine a área de um trapézio circular de 90º em círculos de raios 3 m e 5 m.

46) Determine a área de um hexágono regular inscrito num círculo de raio 4 cm.

47) Determine a área de um hexágono regular inscrito em um círculo de perímetro 10π cm.

48) Determine a área de um círculo, sabendo-se que ela é numericamente igual ao perímetro da sua circunferência.

49) Determine a área de um setor circular de 240° em um círculo de 18 cm de raio.

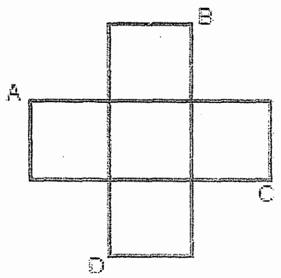
50) Em um círculo de raio 12 cm, determine a área do círculo inscrito em um setor circular de 60°.

51) Dois triângulos de perímetros 12 cm e 18 cm são semelhantes. Determine a área do maior deles, sabendo que a área do menor é 14 cm².

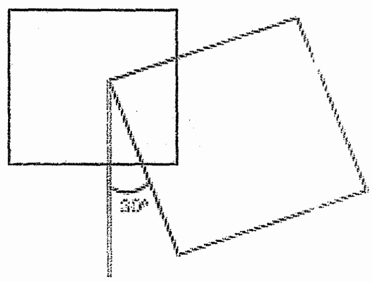
52) Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B e C, e sobre uma reta s, paralela a r, são marcados os pontos M e N. Se $\overline{MN} = 6$ e a área do triângulo AMN é 12, determine:
a) a área do triângulo BMN.
b) a altura relativa ao lado $\overline{MN}$ do triângulo CMN.

53) Dois polígonos são semelhantes. O menor lado do primeiro vale 2 cm e o menor lado do segundo vele 5 cm. Se a área do menor polígono é 16 cm², determine a área do maior polígono.

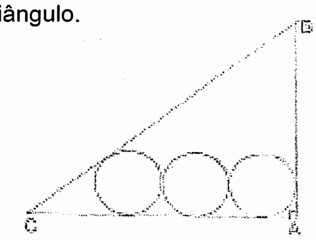
54) Cinco quadrados de lado L formam a cruz da figura abaixo. Determine a área do quadrilátero convexo de vértices A, B, C e D.



55) Dois quadrados intersectam-se conforme a figura, sendo que o quadrado maior de área A tem um de seus vértices no centro do outro quadrado de área a. Determine a área da região hachurada.



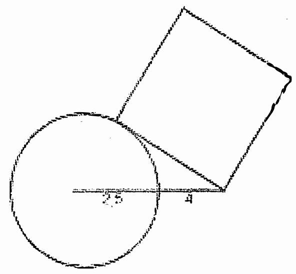
56) Na figura abaixo, o triângulo retângulo ABC possui catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, que medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Em seu interior há três circunferências de mesmo raio que se tagenciam entre si e também aos lados do triângulo.



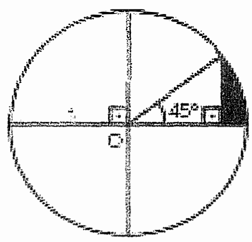
Determine o raio de cada circunferência.

57) Em um triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ mede 12 cm. Uma reta paralela a $\overline{BC}$ intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente aos pontos D e E. Sabendo-se que a área do quadrilátero BCED equivale a 64% da área do triângulo ABC, determine a medida do segmento $\overline{DE}$.

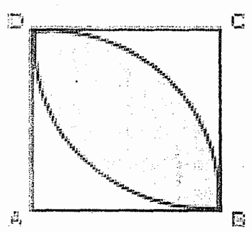
58) Determine a área do quadrado da figura abaixo:



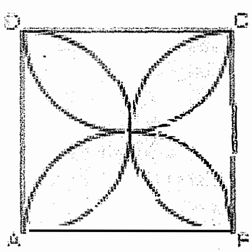
59) Determine a área da região hachurada da figura:



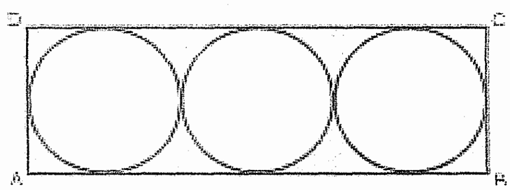
60) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 4 cm. Determine a área hachurada.



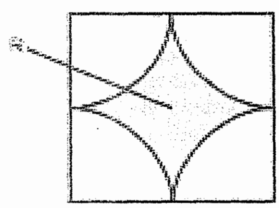
61) Na figura abaixo determine a área da região hachurada, sendo ABCD um quadrado de perímetro 24 cm.



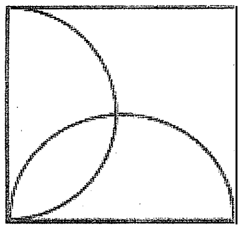
62) Na figura ABCD é um retângulo e cada círculo tem raio 3 cm. Determine a área da região hachurada.



63) A região hachurada R da figura é limitada por arcos de círculos centrados nos vértices do quadrado de lado 12 m. Determine a área R.



64) O quadrado da figura tem perímetro 12 cm. Determine a área hachurada:



65) Um hexágono regular de área $72\sqrt{7}\,cm^2$ está inscrito em um círculo. Determine a área do triângulo que se obtêm unindo os pontos médios de três lados não consecutivos desse hexágono.

66) No centro de um vasto terreno, há um curral quadrado de lado 6 m. Em uma das esquinas desse curral, em seu exterior, amarra-se uma corda de 8 m de comprimento e a ela um cavalo. Qual a área total máxima que este cavalo poderá utilizar para pastar?

67) Uma circunferência tangencia os lados de um ângulo de 120º, nos pontos M e N. Determine a área do retângulo MNPQ inscrito neste círculo, que possui raio igual a 6 m

68) Qual o aumento percentual da área de um retângulo quando aumentamos sua base de 30% e sua altura de 40%?

69) Qual o percentual de diminuição da área de um círculo quando diminuímos seu raio de 60%?

70) Determine a área de um trapézio de bases 4 e 14 cujos lados oblíquos medem 6 e 8.

71) Determine a área de um trapézio retângulo de diagonais perpendiculares cujas bases medem 4 e 2,25.

72) Um trapézio retângulo de diagonais perpendiculares tem bases iguais a 4 cm e 25 cm. Determine sua área.

73) Determine a área de um trapézio inscrito em um semicírculo de raio 2 cm sabendo que suas bases são o lado do hexágono regular e o lado do triângulo equilátero inscritos.

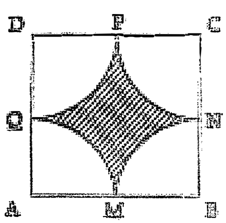
74) Determine a área máxima de um triângulo ABC, sabendo que a distância do seu ortocentro, que é o vértice A, até o seu circuncentro mede 3,0 cm.

75) Dobrando convenientemente um arame, constrói-se um triângulo equilátero de área $4\sqrt{3}\,cm^2$. Desfaz-se o triângulo e aproveita-se o arame totalmente para construir um quadrado. Determine a área desse quadrado.

76) Determine a razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito a um mesmo círculo.

77) Determine a razão entre as áreas de dois triângulos equiláteros inscrito e circunscrito a um mesmo círculo.

78) A figura abaixo é formada pelo quadrado ABCD de lado 6 cm e pelos arcos QM, MN, NP e PQ, centrados, respectivamente, nos vértices A, B, C e D. Determine a área hachurada, sabendo-se que M, N, P e Q são pontos médios dos lados do quadrado.



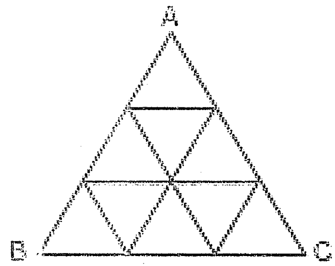
79) Três círculos de raios iguais a 4 cm cada, são tangentes exteriores, dois a dois. Determine a área da região compreendida entre eles.

QUESTÕES DE CONCURSOS

80) (CM) Um quadrado inscrito numa circunferência tem 512 cm^2 de área. Qual é a medida de um dos lados de um hexágono regular inscrito nessa mesma circunferência?

a) 8 cm
b) 10 cm
c) 12 cm
d) 14 cm
e) 16 cm

81) (CAP - UFRJ) A figura abaixo representa um triângulo equilátero ABC de 6 cm de lado. Cada lado está dividido em 3 segmentos congruentes, e por esses pontos traçam-se paralelas aos lados, obtendo-se 9 triângulos. Nessas condições, determine a área da região sombreada.



82) (CM) Observe a figura. Ela representa um triângulo inscrito em um retângulo de base 12 - a e altura b. Sabendo que MS = 2, QS = a e que SP = NP, podemos afirmar que a área do triângulo NPS é igual a:

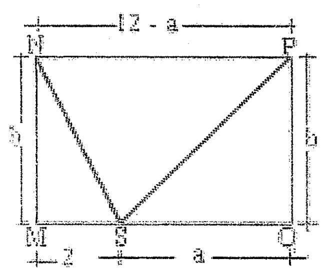
a) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

b) $7.\sqrt{3}$

c) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

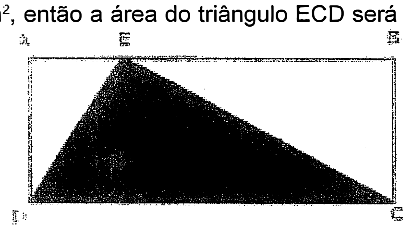
d) $7.\sqrt{6}$

e) $7.\sqrt{5}$



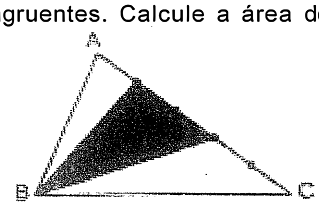
83) (CM) Se na figura abaixo ABCD é um retângulo de área igual a 56 m^2, então a área do triângulo ECD será igual a:

a) 20 m^2
b) 22 m^2
c) 24 m^2
d) 26 m^2
e) 28 m^2



84) (CM) O triângulo ABC da figura abaixo possui área igual a 75 cm^2 e os pontos assinalados sobre o lado AC o dividem em partes congruentes. Calcule a área do triângulo sombreado.

a) 15 cm^2
b) 17,5 cm^2
c) 22,5 cm^2
d) 25 cm^2
e) 30 cm^2



85) (CM) Se, na figura abaixo, ABCD é um quadrilátero, os ângulos BAD e DCB são iguais a 90º, o lado $\overline{BC}$ = 3cm, o ângulo CBD = 45º e o ângulo ABD = 60º, então a razão $\frac{S_1}{S_2}$,

sendo S_1 a área do triângulo BAD e S_2 a área do triângulo DCB, é igual a:

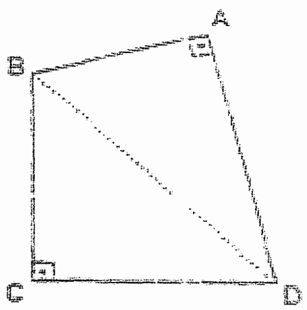
a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

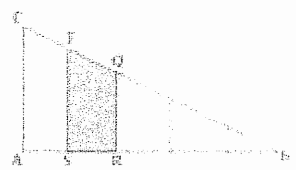
e) $\sqrt{6}$



86) **(CN)** Em lugar do quadrado de lado igual a 1 (um) centímetro, tomou-se como unidade de área o triângulo equilátero de lado igual a 1 (um) centímetro. Qual será, nessa nova unidade, o número que expressa a área de um retângulo de base igual a 6(seis) centímetros e altura igual a 4 (quatro) centímetros?
a) 24
b) $6\sqrt{3}$
c) $18\sqrt{3}$
d) $24\sqrt{3}$
e) $32\sqrt{3}$

87) **(CPII)** Num triângulo retângulo ABC, cujo maior cateto mede o dobro do menor cateto, a área mede $25m^2$.

O cateto $\overline{AB}$ está dividido em cinco partes iguais, como está indicado na figura abaixo.
Calcule a medida da área do quadrilátero PQRS.



88) **(CN)** Em um trapézio cujas bases medem a e b, os pontos M e N pertencem aos lados não paralelos. Se o segmento $\overline{MN}$ divide esse trapézio em dois outros trapézios equivalentes, então a medida do segmento $\overline{MN}$ corresponde a:
a) média aritmética de a e b.
b) média geométrica das bases.
c) raiz quadrada da média aritmética de a^2 e b^2.
d) raiz quadrada da média harmônica de a^2 e b^2.
e)média harmônica de a e b.

89) **(CN)** Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área de $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?
a) vazio
b) unitário
c) finito
d) {3, 5, 7, 9, 11,...}
e) {11, 17, 23, 29,...}

90) **(CN)** Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo 'h' a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos, nesse conjunto tem área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?
a) Infinitos.
b) Mais de dezesseis e menos de trinta.
c) Mais de quatro e menos de quinze.
d) Apenas um.
e) Nenhum.

91) **(CN)** O número de triângulos de perímetro igual a 19 e uma das alturas igual a 4, inscritíveis num círculo de raio 5, e cujos lados têm medidas expressas por números inteiros é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

92) **(CM)** Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir **18k** cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a **k**, então, a área do círculo, em cm^2, é:
a) 144π
b) 100π
c) 98π
d) 81π
e) 72π
Obs.: Pode ser útil saber a lei dos senos que diz que "em todo triângulo a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro do círculo a ele circunscrito".

93)**(CN)** Sejam os triângulos ABC e A' B' C' onde os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, congruentes aos lados $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'C'}$. Sabendo que os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ possuem a mesma medida, considere as seguintes afirmativas:
I. Os triângulos ABC e A' B' C' possuem o mesmo perímetro.
II. Os triângulos ABC e A' B' C' possuem a mesma área.
III. Os ângulos C e C' podem ser suplementares.
Logo pode-se afirmar que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e II são verdadeira
e) I, II e III são verdadeira

94)**(CN)** Num triângulo retângulo, se diminuirmos cada um dos catetos de 4 cm, a área diminuirá de 506 cm^2. A soma dos catetos em cm, vale:
a) 182
b) 248
c) 250
d) 257
e) 260

95)**(CEFET)** O maior lado de um retângulo mede 8 cm e o menor 2 cm. Calcule os lados de um retângulo semelhante a esse, cujo perímetro, em cm, é expresso pelo número que representa a área daquele primeiro.

96)**(CM)** Um trapézio isósceles circunscrito a um círculo tem perímetro igual a 26 cm e a medida de uma das bases excede a outra de 5 cm. A área do círculo é:
a) 3π cm^2
b) 6π cm^2
c) 9π cm^2
d) 16π cm^2
e) 36π cm^2

97)**(CEFET)** Uma chapa em forma de losango cuja área é 1716 cm^2, deve levar um reforço ao longo de cada uma de suas diagonais. Para a medição desses reforços, foram usados um palito de 4 cm e uma caneta de medida desconhecida. A diagonal maior da chapa mede 6 canetas mais um palito e meio; a diagonal menor mede 4 canetas menos um palito. Quanto mede essa caneta?

98)**(CN)** Dado um trapézio qualquer, de bases 6 e 8, traça-se paralelamente às bases um segmento de medida x que o divide em outros dois trapézios equivalentes. Podemos afirmar que:

a) $x = 6{,}5$
b) $x = 4\sqrt{3}$
c) $x = 7$
d) $x = 5\sqrt{2}$
e) $x = 7{,}5$

99) **(CN)** Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio e é perpendicular a um dos lados não paralelos, qual é a área desse trapézio?

a) $75\sqrt{3}$
b) $105\sqrt{3}$
c) $180\sqrt{3}$
d) $225\sqrt{3}$
e) $275\sqrt{3}$

100) **(EPCAR)** Analise as alternativas abaixo e marque **(V)** para verdadeiro e **(F)** para falso.

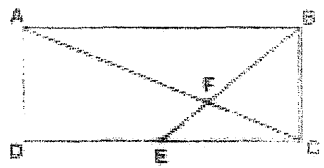
( ) Num trapézio, cujos lados paralelos medem 4 e 6, as diagonais interceptam-se de tal modo que os menores segmentos determinados em cada uma delas medem 2 e 3. A medida da maior diagonal é 4,5
( ) Dois lados opostos de um quadrado têm um aumento de 40% e os outros dois lados opostos têm um decréscimo de 40%. A área desse novo quadrilátero é 84% da área do quadrado original.
( ) Na figura abaixo tem-se BC = 4 cm e AE = 8 cm. Pode-se afirmar, então, que a área do quadrilátero ABDE é $10\sqrt{3}$ cm².

A sequência correta é:
a) F, V, F
b) F, V, V
c) V, V, F
d) V, F, V

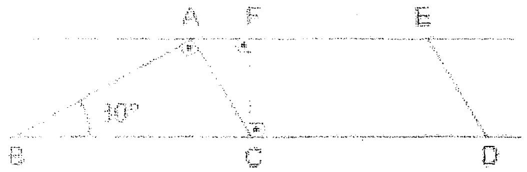
101) **(EPCAR)** Considere o retângulo ABCD da figura abaixo, cuja diagonal $\overline{AC}$ mede 18 cm, o lado $\overline{AD}$ mede 6 cm e E é o ponto médio de $\overline{CD}$ e, a seguir analise as proposições a seguir.

I) O lado mede 12cm.
II) A medida do segmento é cm.
III) O triângulo ABF tem altura relativa ao lado igual a 3 cm.
IV) A área do triângulo CEF é de cm².

Está(ão) correta(s)
a) todas as proposições.
b) apenas **I** e **IV**.
c) apenas **I**.
d) apenas **II** e **III**.



102) (EPCAR) Em um triângulo ABC, M e N são pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. Duas retas paralelas passam por M e N e cortam o lado BC em Q e P, respectivamente. Se **S** é a área do triângulo ABC, então a soma das áreas dos triângulos BQM e CPN é igual a:



a) $\dfrac{s}{2}$ b) $\dfrac{3s}{4}$ c) $\dfrac{s}{3}$ d) $\dfrac{s}{4}$

103)**(CN)** Sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC tomam-se os pontos D e E, respectivamente, de modo que os triângulos ABC e ADE sejam semelhantes. Considere as 4 afirmações abaixo:

I. $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

II. $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{E} = \hat{C}$

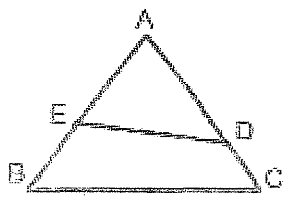
III. $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

IV. Se a razão entre as áreas dos triângulos ABC e ADE é 16, então a razão de semelhança é 4.

Pode-se concluir que o número de afirmações corretas é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

104) **(CN)** O triângulo ADE da figura é equivalente ao quadrilátero BCDE. Se $\overline{AE} = 2/3$ de $\overline{AB}$, então $\overline{AD}$ é qual fração de $\overline{AC}$?

a) 2/3
b) 3/4
c) 1/2
d) 4/5
e) 5/8



105) **(CEFET)** Um pedaço de arame de 44 cm de comprimento é cortado em 2 partes e cada parte é dobrada em forma de um quadrado. A soma das áreas dos dois quadrados é 61 cm². Calcule as medidas dos lados dos quadrados.

106) **(UNICAMP)** Um triângulo escaleno ABC tem área igual a 96 m². Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente.
Faça uma figura e calcule a área do quadrilátero BMNC.

107) **(CEFET)** Na figura abaixo, *ABC* é um triângulo isósceles de base AB. Se *CP* e *PQ* são, respectivamente, perpendiculares aos lados AB e BC, BQ = 1cm e ACP = 60°, pode-se afirmar que a área de ABC, em cm², é igual a

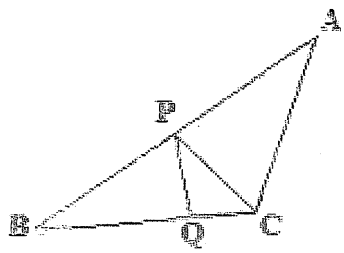
a) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

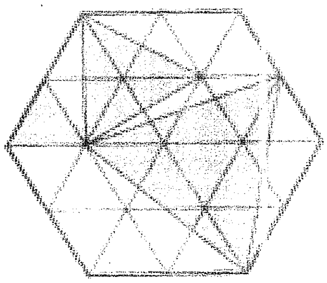
d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

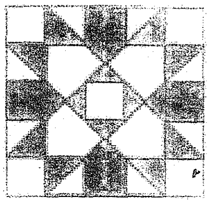


108) **(CEFET)** A figura abaixo consta de um hexágono formado por 24 triângulos equiláteros de lado 1. A área sombreada é formada por três triângulos equiláteros de tamanhos distintos entre si.
Se S é a área sombreada e B é a área não sombreada do hexágono, o valor de $\frac{B}{S}$ é:

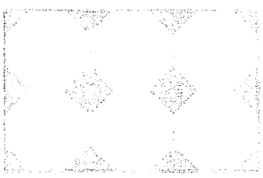
a) $\frac{11}{24}$
b) $\frac{15}{24}$
c) $\frac{9}{11}$
d) $\frac{13}{11}$



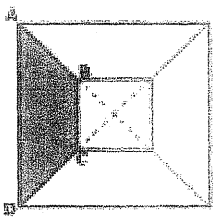
109) **(CEFET)** A figura a seguir é composta apenas por quadrados e triângulos isósceles. A área sombreada representa que porcentagem da área total?
(a) 36%
(b) 40%
(c) 45%
(d) 48%



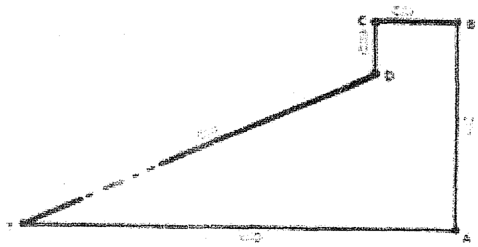
110) **(ENEM)** Seis octógonos regulares de lado 2 são justapostos em um retângulo, como representado na figura adiante.
A soma das áreas das regiões sombreadas na figura é:
a) 16
b) $16\sqrt{2}$
c) 20
d) $20\sqrt{2}$
e) 24



111) **(CPII)** Na figura ao lado, o lado do quadrado externo mede 20 cm e o lado do quadrado interno mede 8 cm e as diagonais dos dois quadrados se cruzam no mesmo ponto. Calcule a medida da área do quadrilátero ABCD.



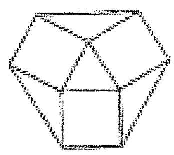
112) **(CPII)** Uma formiga saiu de sua toca, localizada no ponto T, em busca de alimento. Ela andou 16 m até o ponto A, girou 90º para a esquerda e andou metade do percurso anterior até o ponto B. Ela repete o mesmo padrão: virar 90º para a esquerda e andar metade do percurso imediatamente anterior, até chegar ao ponto D, onde está localizado um alimento. Do ponto D, a formiga caminha em linha reta de volta à sua toca, localizada em T.
O percurso descrito acima foi todo feito no plano e está representado na figura a seguir.
a) Determine a distância entre os pontos D e T. (Considere $\sqrt{5} \approx 2{,}2$)
b) Determine a área do polígono TABCD.



113) **(CM)** Um pedaço de barbante de 18 m de comprimento foi dobrado, convenientemente, de modo a formar um retângulo cuja área é 14 m². A diagonal desse retângulo mede, em metros:
a) 9
b) 7
c) 5
d) $3\sqrt{5}$
e) $\sqrt{53}$

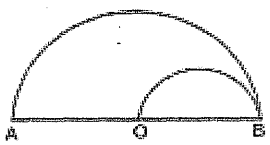
114) **(CM)** Um jardineiro possui 36 m de tela e quer construir um cercado retangular, apoiando as extremidades da tela em parte de um muro já existente. Qual deve ser a medida do maior lado desse cercado, sabendo-se que o jardineiro quer cercar a maior área possível?
a) 20 m
b) 18 m
c) 16 m
d) 9 m
e) 8 m

115) **(EPCAR)** A figura plana abaixo representa o logotipo de ume empresa. Ele foi projetado a partir de um triângulo equilátero central, cujo perímetro mede 0,30 m. Expandiu-se o desenho, acoplando em cada lado desse triângulo um quadrado. Para fechar a figura, foram traçados 3 segmentos retilíneos, completando assim o logotipo.
Nos preparativos para a Copa do Mundo de 2010, esse logotipo será pintado com tintas de mesma qualidade e textura, a saber:
- o triângulo central, na cor branca;
- os demais triângulos, na cor verde;
- os quadrados, na cor amarela.

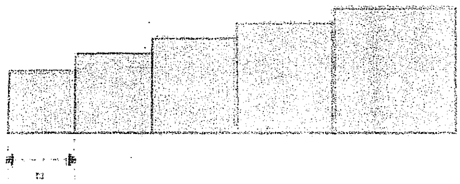


Sabe-se que cada figura será pintada apenas uma vez e que cada mililitro de tinta cobre 1 cm² de área.
Considere $\sqrt{3} = 1{,}74$ e marque a alternativa correta.
a) O consumo total de tinta será de mais de meio litro.
b) As áreas branca e verde juntas equivalem a 58% da área amarela.
c) O consumo de tinta amarela será o dobro do consumo de tinta verde.
d) A área branca corresponde a 30% da área verde.

116) **(CEFET)** Sabendo-se que o raio do semicírculo de centro O que contém os pontos A e B é 1/p cm, então a área do semicírculo de diâmetro $\overline{OB}$ é:
a) $1/\pi$ cm²
b) $1/2\pi$ cm²
c) $1/4\pi$ cm²
d) $1/6\pi$ cm²
e) $1/8\pi$ cm²

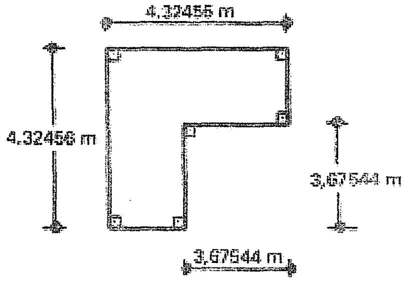


117) **(CPII)** Na sequência de quadrados a seguir representada, as medidas dos lados dos quadrados são números consecutivos. Nesta sequência de quadrados, a soma das áreas dos três menores é igual à soma das áreas dos dois maiores.

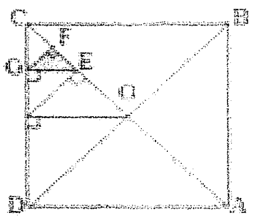


Determine as medidas dos lados desses quadrados.

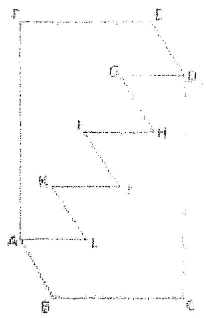
118) **(CN)** Qual a área do terreno da figura abaixo?
a) 5,19296 m²
b) 5,28386 m²
c) 5,29176 m²
d) 5,31266 m²
e) 5,38756 m²



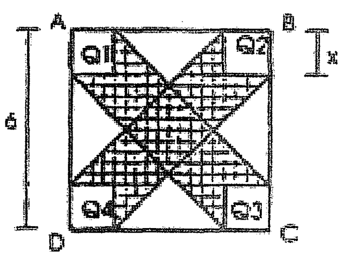
119) (CPII) Observe a construção a seguir feita a partir do quadrado ABCD, de centro O, cujo lado mede 8 cm. Calcule a medida da área do triângulo EFG.



120) **(CEFET)** O polígono ABCDEF da figura abaixo apresenta 3 pares de lado paralelo e congruente entre si. Além disso, ED // GH // IJ // KL // AB e EF // DG // HI // JK // LA // BC e AB = AL, AFE = BCD = 90° e DEF = 120°.
Sabendo que med (FE) = 6cm e med (AB) = 3cm, determine a área do polígono ABCDEF.



121) **(UFRJ)** Na figura abaixo, o quadrado ABCD tem lado 6. Q1, Q2, Q3 e Q4 são quadrados de lado x. A região hachurada tem área 16.



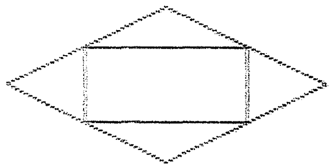
Determine x.

122) **(CN)** Considere três quadrados de bases AB, CD e EF, respectivamente. Unindo-se o vértice A com F, B com C e D com E, observa-se que fica formado um triângulo retângulo. Pode-se afirmar que:

I. O perímetro do quadrado de maior lado é igual à soma dos perímetros dos outros dois quadrados.
II. A área do quadrado de maior lado é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.
III. A diagonal do quadrado maior é igual à soma das diagonais dos outros dois quadrados.

Logo, apenas:
a) a afirmativa I é verdadeira.
b) a afirmativa II é verdadeira.
c) a afirmativa III é verdadeira.
d) as afirmativas I e II são verdadeiras.
e) as afirmativas II e III são verdadeiras.

123) **(CN)** Considere um retângulo inscrito em um losango, conforme a figura abaixo. Se as diagonais do losango medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm e a área do retângulo é 24 cm², então o perímetro desse retângulo, em cm, é igual a:
a) 28
b) 24
c) 22
d) 20
e) 18



124) **(CN)** Considere um losango de lado L e área S. A área do quadrado inscrito no losango, em função de L e S é:

a) $\dfrac{4S^2}{L^2+2S}$

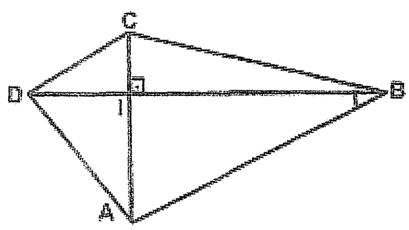
b) $\dfrac{16S^2}{4L^2+S}$

c) $\dfrac{S^2}{L^2+S}$

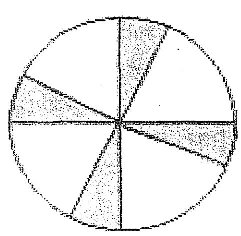
d) $\dfrac{4S^2}{4L^2+S}$

e) $\dfrac{S^2}{L^2+2S}$

125) **(CN)** No quadrilátero ABCD da figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 90° e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. Qual é a área desse quadrilátero, sabendo que $\overline{BI}=9$, $\overline{DI}=4$ e $\overline{CI}=2$?
a) 26
b) 39
c) 52
d) 65
e) 104

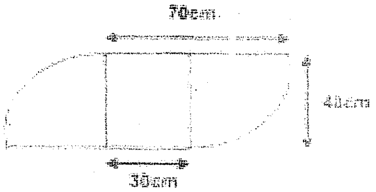


126) **(CM)** Na figura ao lado os quatro setores circulares sombreados são limitados por arcos de uma mesma circunferência, de raio igual a $5\sqrt{3}$ cm; os quais correspondem a ângulos, centrais de 30 graus. Nestas condições, qual é a área da soma desses quatro setores circulares?
a) 20π cm²
b) 25π cm²
c) 30π cm²
d) 35π cm²
e) 40π cm²



127) **(CEFET)** Usando 2 setores circulares e 1 retângulo, um arquiteto projetou um ventilador de teto com uma única hélice em acrílico conforme figura abaixo. A área da hélice em metros quadrados é: (considere p = 3,14)

a) 0,3712;
b) 0,628;
c) 1,7024;
d) 6,28;
e) 7,12.



128) **(CM)** Duas circunferências, de raios iguais a 9 m e 3 m, são tangentes externamente num ponto T. Uma reta r tangencia estas duas circunferências em dois pontos distintos, R e S. A área em m², do triângulo RST é:

a) $27\sqrt{3}$

b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

c) $9\sqrt{3}$

d) $27\sqrt{2}$

e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

129) **(ITA)** Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo eqüilátero de lado ℓ. A área da coroa circular formada por essas circunferências é dada por:

a) $\frac{\pi\ell^2}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}\,\pi\ell^2}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}\,\pi\ell^2}{2}$

d) $\sqrt{3}\,\pi\ell^2$

e) $\frac{\pi\ell^2}{2}$

130) **(CM)** Um triângulo ABC tem $\overline{AB}$ = 8 cm, med $\hat{A}$ = 100º e med $\hat{B}$ = 20º. Podemos afirmar que a área da região interna à circunferência circunscrita a esse triângulo é igual a:

a) 16
b) 16 π cm²

c) $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^2$

d) $\frac{64\pi}{3}\text{cm}^2$

e) $\frac{32\pi}{3}\text{cm}^2$

131) **(CN)** Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre:
(Considere p=3,14)

a) vinte e um e vinte e dois.
b) vinte e dois e vinte e três.
c) vinte e três e vinte e quatro
d) vinte e quatro e vinte e cinco.
e) vinte e cinco e vinte e seis.

132) **(EPCAR)** Sabendo-se que o raio do círculo menor é r e do círculo maior é 2r, calcule a área hachurada da figura abaixo.

a) πr^2

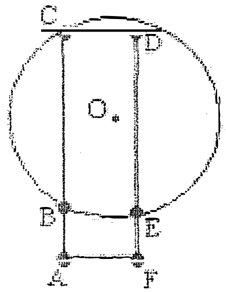
b) $\frac{2\pi r^2}{3}$

c) $\frac{\pi r^2}{2}$

d) $2\pi r^2$

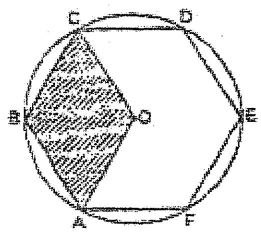
133) **(CM)** Na figura a seguir, ACDF é retângulo, B ∈ $\overline{AB}$ e E∈ $\overline{FD}$. Os pontos B, C e E pertencem à circunferência de centro O. Sabe-se que $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$ são congruentes e, além disso, a medida de $\overline{OA}$ é 8 cm e a medida de $\overline{OC}$ é 5 cm. Calcule a área do retângulo ACDF em cm².

a) 24
b) 32
c) 36
d) 39
e) 48



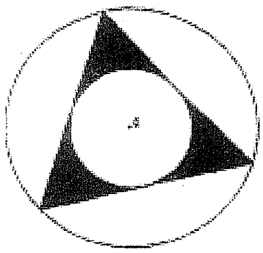
134) **(CM)** Na figura abaixo, o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência de centro O. Se a área do quadrilátero ABCO é $32\sqrt{3}\text{cm}^2$, então o raio da circunferência de centro O, em centímetros, mede:

a) 8
b) 6
c) 4
d) $6\sqrt{3}$
e) $4\sqrt{3}$

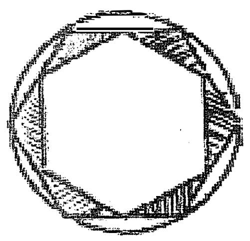


135) **(CM)** Se na figura abaixo o ponto O é o centro das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}$ cm, então a área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a:

a) $27(3\sqrt{3} - \pi)$
b) $9(3\sqrt{2} - \pi)$
c) $6(2\sqrt{3} - \pi)$
d) $3(8\sqrt{3} - \pi)$
e) $7(2\sqrt{2} - \pi)$

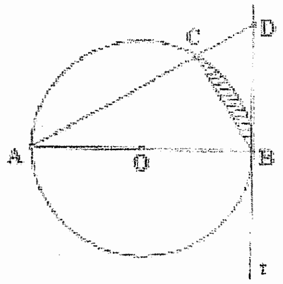


136) **(CEFET)** Calcule a área da região sombreada na figura abaixo, considerando o raio do círculo igual a 2 cm e os polígonos regulares.



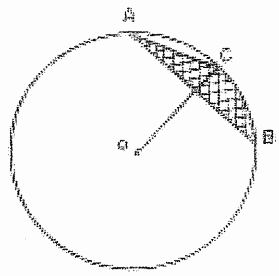
137) **(CN)** S é a área do segmento circular do ângulo de 40º de um círculo de raio 6. Logo, pode-se afirmar que:
a) 0,4 < S < 1,5
b) 1,5 < S < 2,4
c) 2,4 < S < 3,5
d) 3,5 < S < 4,4
e) 4,4 < S < 5,0

138) **(CM)** Na figura abaixo $\overline{AB}$ é um diâmetro do círculo, t é tangente à circunferência em B, $\overline{AD}$ = 25 cm e $\overline{CD}$ = 9 cm. Considerando p = 3,14; CÂB = 40º e sen 40º = 0,6, a medida da área hachurada é uma dízima periódica de período:



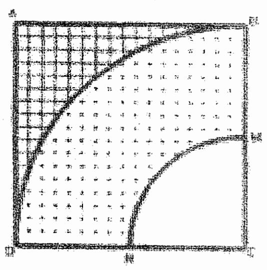
139) **(CN)** Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, os lados do quadrado e do octógono regular inscritos no círculo de centro 0 e raio r. A área hachurada é dada por:

a) $\frac{r^2}{8}(\pi + 4 - 2\sqrt{2})$
b) $\frac{r^2}{8}(\pi + 4 + 2\sqrt{2})$
c) $\frac{r^2}{8}(4 - \pi + \sqrt{2})$
d) $\frac{r^2}{8}(4 + 2\sqrt{2} - \pi)$
e) $\frac{r^2}{8}(\pi - 4 + 2\sqrt{2})$

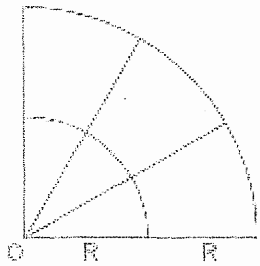


140) **(EPCAR)** Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna abaixo. Considere duas cordas paralelas ao diâmetro de um semicírculo de raio 6, que determinam neste semicírculo arcos de 60° e 120°. A área compreendida entre essas cordas é ____ da área do semicírculo.
a) 1/4
b) 1/9
c) 1/6
d) 1/3

141) **(CEFET)** ABCD é um quadrado, M e N são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. Os arcos BD e MN têm centro em C. Sabendo que a área da região quadriculada é igual a 344 cm², utilize ð = 3,14 para determinar o perímetro da região pontilhada, em centímetros.



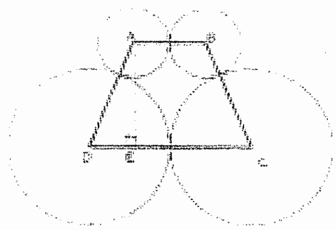
142) **(UFRJ)** A figura abaixo mostra dois arcos de circunferências de centro O, raios R e 2R e três ângulos iguais. Calcule a razão entre as áreas das regiões hachurada e não hachurada.



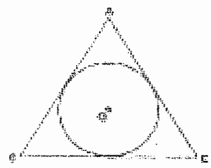
143) **(CN)** Um triângulo retângulo de perímetro 2p está inscrito num círculo de raio R e circunscrito a um círculo de raio r. Um expressão que dá a altura relativa à hipotenusa do triângulo é:

a) $\frac{\pi r}{R}$
b) $\frac{\pi + r}{R}$
c) $\frac{R}{\pi r}$
d) $\frac{R}{\pi + r}$
e) $\frac{2\pi r}{R}$

144) **(CPII)** Na figura abaixo, os quatro círculos são tangentes dois a dois. Os raios dos círculos menores medem 4 cm cada um. A altura do trapézio ABCD mede 12 cm. Calcule a medida da área do trapézio ABCD.
a) 94,2
b) 134,2
c) 80
d) 120

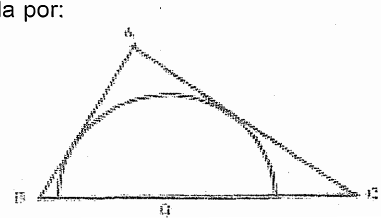


145) **(EPCAR)** A figura abaixo representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do "Colégio Alfa".
Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito num triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm e a altura relativa a esse lado mede 16 cm.
O círculo será pintado com tina cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 cm².
Adote $\pi = 3$
Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a:
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12



146) **(CN)** Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, o ponto O é o centro do semicírculo de raio r, tangente aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Sabendo-se que $\overline{OB} = r\sqrt{3}$, a área do triângulo ABC é dada por:

a) $\frac{r^2}{3}(2\sqrt{2} + 4)$
b) $\frac{r^2}{4}(2\sqrt{3} + 4)$



c) $\frac{r^2}{4}\left(3\sqrt{2}+3\right)$

d) $\frac{r^2}{4}\left(3\sqrt{2}+4\right)$

e) $\frac{r^2}{3}\left(4\sqrt{3}+4\right)$

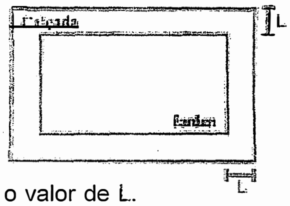
147) **(EPCAR)** A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190 m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto.
Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura).
Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é x dm, então, a soma dos algarismos de x é igual a:
a) 22
b) 23
c) 24
d) 25

148) **(EPCAR)** Numa gincana de Matemática de um determinado colégio uma das equipes participantes pintou, em suas camisas, o símbolo da equipe: um quadrado ABCD de 10 cm de lado com os pontos E e F sobre os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, formando um triângulo BEF equilátero.
Considerando-se $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a área do triângulo BEF, em cm^2, é um número compreendido entre.
a) 39 e 47
b) 47 e 55
c) 23 e 31
d) 31 e 39

149) **(EPCAR)** Em um projeto original de uma casa estavam previstas três salas A, B e C quadradas com áreas iguais. Houve uma mudança nos planos e as salas B e C foram transformadas em retângulos, sendo mantida uma de suas medidas originais como largura e tendo alterado o comprimento.
Após a mudança
- A sala B ficou com 4/3 de sua área original;
- A sala C teve o dobro do acréscimo em m^2 do que o ocorrido na sala B.
Se foram empregadas exatamente 12 caixas com 12 ladrilhos quadrados de 0,5 m de lado cada um, para cobrir o piso dessas 3 salas juntas, não havendo perdas, é correto afirmar que
a) O total da área original das 3 salas sofreu um acréscimo de 25% com as mudanças.
b) No piso da sala C, foi utilizado o mesmo número de ladrilhos empregados nas salas A e B juntas.
c) Se não houvesse a mudança das medidas das salas B e C, 100 ladrilhos seriam suficientes para cobrir o piso das três salas A, B e C juntas.
d) A sala C ficou 1 m mais comprida que a sala B após a mudança no projeto.

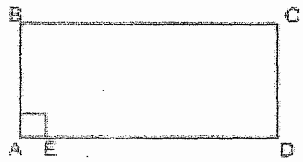
150) (ENEM) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.
Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm).
O valor da segunda encomenda será
a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobram.
b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

151) **(UFF)** Num terreno retangular com 104 m^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 9 m por 4 m, contornado por uma calçada de largura L, como indica a figura.



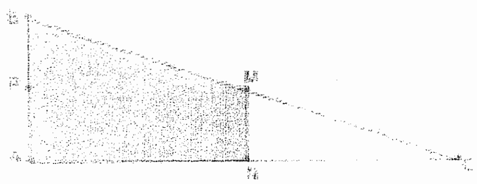
Calcule o valor de L.

152)**(ENEM)** O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que AB – BC/2, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual AE = AB/5 é lado do quadrado.



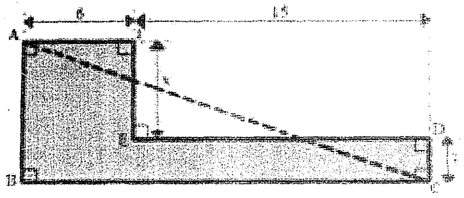
Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele:
a) duplicasse a medida do lado do quadrado.
b) triplicasse a medida do lado do quadrado.
c) triplicasse a área do quadrado.
d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

153) **(ENEM)** Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocas três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.
Nessas condições, a área a ser calçada corresponde
a) à mesma área do triângulo AMC.
b) à mesma área do triângulo BNC.
c) à mesma da área formada pelo triângulo ABC.
d) ao dobro da área do triângulo MNC.
e) ao triplo da área do triângulo MNC.

154) **(CPII)** Na figura a seguir estão representados um polígono ABCDEF e um triângulo ABC.



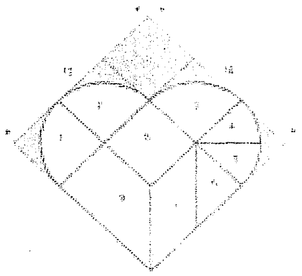
Com base nas dimensões dadas, em centímetros, faça o que se pede:

a) Usando x, escreva uma fórmula que expresse a área do polígono ABCDEF.

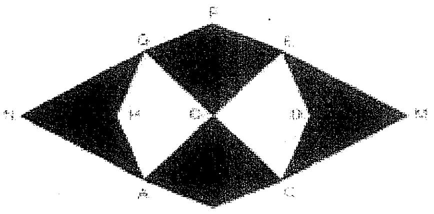
b) Usando x, escreva uma fórmula que expresse a área do triângulo ABC.

c) Calcule o valor de x para que a medida da área do polígono ABCDEF seja igual à medida da área do triângulo ABC.

155) **(CPII)** Mariana gosta muito de quebra-cabeça geométricos. Seu favorito é o quebra-cabeça "Coração Partido". A partir de um quadrado de lado 12cm, o coração é formado por nove peças: três setores de 90°, dois setores de 45°, um triângulo retângulo, um paralelogramo, um quadrado e um trapézio retângulo, conforme ilustra a figura. A parte em cinza do quadrado é descartada do quebra-cabeça.
Determine a área do coração, em cm². (Adote $\pi = 3,14$.)



156) **(EPCAR)** O dono de um restaurante, desejando uma logomarca moderna para a fachada de seu ponto comercial, encomendou a um desenhista um logotipo. O esquema que lhe foi entregue está representado na figura abaixo.



Dados :

1) $\overline{AB}\ ''\ \overline{BC}\ ''\ \overline{CD}\ ''\ \overline{DE}\ ''\ \overline{EF}\ ''\ \overline{FG}\ ''\ \overline{GH}\ ''\ \overline{HA}$

2) $\overline{AO}\ ''\ \overline{BO}\ ''\ \overline{CO}\ ''\ \overline{DO}\ ''\ \overline{EO}\ ''\ \overline{FO}\ ''\ \overline{GO}\ ''\ \overline{HO} = 2m$

3) $\overline{AG}\ ''\ \overline{AN}\ ''\ \overline{NG}\ ''\ \overline{CM}\ ''\ \overline{EM}\ ''\ \overline{CE}$

A área pintada do logotipo, em cm², será de

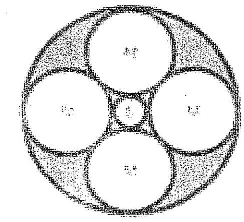
a) $4(\sqrt{3}+1)$

b) $2(\sqrt{3}+1)$

c) $4(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$

d) $[2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+4)]$

157) **(EPCAR)** A figura a seguir representa um canteiro "C" circular de raio R que será replantado e que receberá, ao centro, um círculo L de raio igual a 1 metro, onde serão plantados lírios. Tangentes a L e ao contorno do canteiro serão colocados 4 canteiros M de mesma área, também circulares, tangentes entre si, dois a dois, onde serão plantadas margaridas. A região hachurada deverá ser gramada e tem área $S = \pi r\ m^2$. Com base nisso, é correto afirmar que:



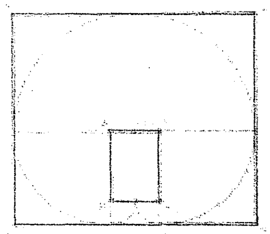
a) A área total das regiões M é $(12+2\sqrt{2})$ vezes a área de L.

b) O raio R do canteiro mede mais de 6 metros.

c) Na área $S = \alpha\pi\ m^2$, $\alpha \in [9, 10]$

d) A área S corresponde a 2/3 da área do canteiro

158) **(CEFET)** Na figura abaixo, os retângulos PQRS e ABCD, com PQ // AB, representam, respectivamente o terreno e a casa da família Pinto Teixeira que ali vive com a cadelinha "poodle", Hanna. A parte S, sombreada da figura, representa a superfície do terreno que Hanna pode alcançar, quando presa a uma guia de 30m que está fixada no ponto M, médio de AB. Sabendo ainda que AB = 12m e que BC = 18m, calcule o valor da área de S, usando 3 como valor aproximado de π.



159) **(CM)** Para proteger um terreno circular com raio de 12 m, amarra-se um cão feroz num ponto da circunferência que contorna o terreno. A corda que prende o cão também tem 12 m; logo, só uma parte do terreno fica protegida. A área do terreno que está sob a proteção do cão é, aproximadamente:

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$)

a) 164 m²

b) 177 m²

c) 195 m²

d) 217 m²

e) 266 m²

160) **(EPCAR)** No logotipo da Olimpíada de Matemática da EPCAR, são usadas as cores branco, preto e cinza que colorem a figura abaixo (considerando desprezível o espaço ocupado pelas letras O, M e E). Nela são desenhados três círculos de raio r tangentes exteriormente dois a dois e tangentes internamente a um circulo maior de raio R

Considere $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$

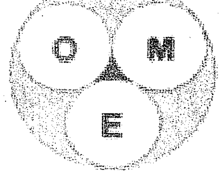
Se a área da região branca é x vezes maior que a área da região preta, então x é um número compreendido entre

a) 31 e 36

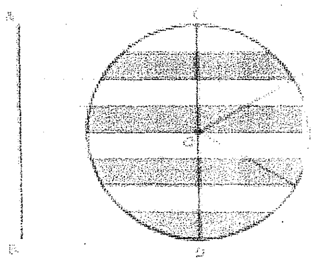
b) 36 e 41

c) 41 e 46

d) 46 e 50



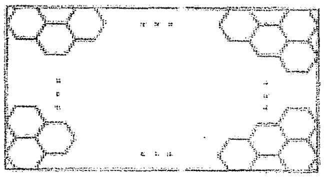
161) **(CEFET)** Na figura a seguir, o segmento AB é paralelo ao diâmetro CD e foi dividido em 8 partes iguais. Os segmentos pontilhados são paralelos entre si e perpendiculares ao diâmetro CD. A área hachurada é igual a $128\pi m^2$. Qual é o comprimento, em metros, do menor arco EF?



162) **(CEFET)** “As formas poliédricas são encontradas na natureza. Os alvéolos que compõem o favo de mel das abelhas lembram prismas hexagonais que se encaixam perfeitamente compondo o favo de mel. Com eles, as abelhas obtêm, para uma certa quantidade de cera, um máximo espaço”.

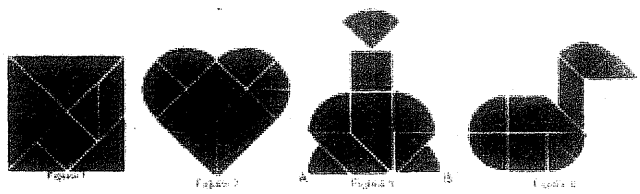
(TRECHO RETIRADO DO ARTIGO Poliedros, abelhas, arquitetura e... futebol, DO PROFESSOR LUIZ IMENES)

Considere que um favo de comprimento 3,8 dm e 8,5 cm de largura é constituído de alvéolos organizados como a figura acima e que a distância entre dois vértices opostos de cada alvéolo é 5 mm. Desprezando as sobras de espaço entre alvéolos e as paredes do favo, quantos alvéolos completos constituem esse favo? (aproxime $\sqrt{3}$ para 1,7).



a) 1970
b) 1950
c) 2870
d) 3920

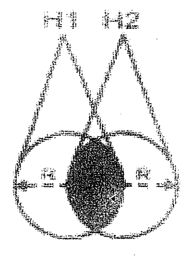
163) **(CEFET)** O tangram é um conhecido quebra-cabeça de sete peças que tem formas geométricas bem conhecidas, originados da decomposição de um quadrado (figura 1). Hoje já se tem conhecimento do surgimento de vários tipos de quebra-cabeças geométricos planos, muitas vezes também chamados de tangram e que também tem origem em recorte de alguma figura plana. Abaixo se encontra o tangram coração, cujas peças são obtidas recortando-se um coração plano de acordo com o esquema da figura 2, composta de: 3 setores de 90º de um círculo, 2 setores de 45º de um círculo, 1 triângulo retângulo, 1 quadrado, 1 paralelogramo e 1 trapézio retângulo. Utilizando-se todas as nove peças é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 3 e 4.



Se a base AB do vidro de perfume mostrado na figura 3 mede 3 cm, então a área da figura 4, que representa um “patinho” mede:

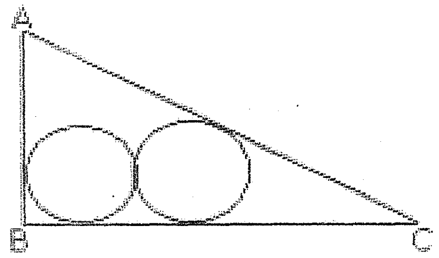
a) $4 + \pi$ cm²
b) $2(4 + \pi)$ cm²
c) $2\pi + 4$ cm²
d) $2\pi + 2$ cm²

164) **(ENEM)** Dois holofotes iguais, situados em H1 e H2, respectivamente, iluminam regiões circulares, ambas de raio R. Essas regiões se sobrepõem e determinam uma região S de maior intensidade luminosa, conforme figura. Área do setor circular: $aR^2/2$, a em radianos.
Área da região S, em unidades de área, é igual a:



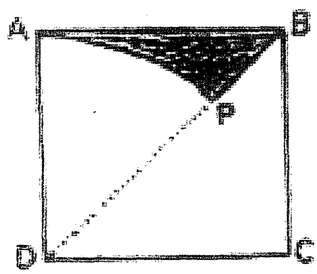
a) $2\pi R^2/3 - \sqrt{3}R^2/2$
b) $(2\pi - 3\sqrt{3})R^2/12$
c) $\pi R^2/12 - R^2/8$
d) $\pi R^2/2$
e) $\pi R^2/3$

165) **(CM)** Na figura abaixo o triângulo ABC é retângulo em B e as medidas dos catetos AB e BC são iguais a 12cm e 16cm, respectivamente. As duas circunferências são tangentes exteriores, possuem o mesmo raio, e são tangentes aos catetos e a hipotenusa. Qual a medida do raio das circunferências?



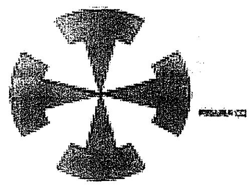
a) $\frac{8}{3}$ cm
b) 3cm
c) $\frac{7}{3}$ cm
d) $\frac{5}{3}$
e) 2cm

166) **(CM)** Na figura abaixo ABCD é um quadrado e o arco AP tem centro em D. Se a diagonal DB do quadrado mede $3\sqrt{2}$ cm, então a área da região hachurada, em cm², mede:

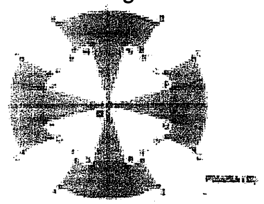


a) $\frac{36 - 8\pi}{9}$
b) $\frac{9}{4} - \frac{9\pi}{8}$
c) $\frac{38 - 9\pi}{8}$
d) $\frac{36 - 9\pi}{4}$
e) $\frac{9}{2} - \frac{9\pi}{8}$

167) **(EPCAR)** O símbolo para a “Cooperativa Agrícola Bequeana” é o desenho da figura abaixo.



Tal símbolo foi elaborado seguindo as indicações na figura a seguir.



Dados: $\overline{OA}$ ″ $\overline{OB}$ ″ $\overline{OC}$ ″ ... ″ $\overline{OH} = 20$cm
$\overline{OA'}$ ″ $\overline{OM}$ ″ $\overline{ON}$ ″ $\overline{OB'}$ ″ ... ″ $\overline{OU}$ ″ $\overline{OH'} = 15$cm

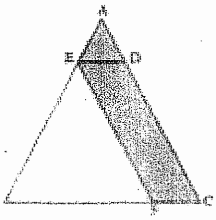
Na figura (II) o espaço entre duas linhas retas tracejadas e consecutivas, indica um ângulo central de 15º.
A área hachurada da figura, em cm², mede:

a) $\frac{475\pi}{3}$ b) $\frac{575\pi}{6}$ c) $\frac{435\pi}{2}$ d) $\frac{575\pi}{3}$

168) **(CPII)** Observe o triângulo equilátero ABC e o triângulo ADE onde $\overline{AB} = 4\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$.

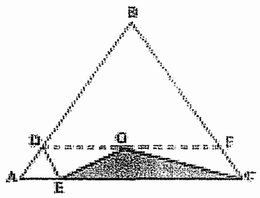
Marca-se um ponto F sobre o lado $\overline{BC}$, de modo que o segmento $\overline{EF}$ seja paralelo ao lado $\overline{AC}$.

Sabendo que $\overline{AB}$ mede 16 cm, calcule a medida da área do trapézio AE



169) **(CPII)** Observe o triângulo equilátero ABC e o triângulo ADE onde $\overline{AB} = 5\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Marca-se um ponto F sobre o lado $\overline{BC}$, de modo que o segmento $\overline{DF}$ seja paralelo ao lado $\overline{AC}$. A seguir, marca-se um ponto qualquer G sobre o segmento $\overline{DF}$.

Sabendo que $\overline{AB}$ mede 20 cm, calcule a medida da área do triângulo EGC.



170) **(CM)** Sabendo-se que o polígono ABCDEF é um hexágono regular com lado medindo 8 cm, determine, em cm², a área do triângulo CGH.

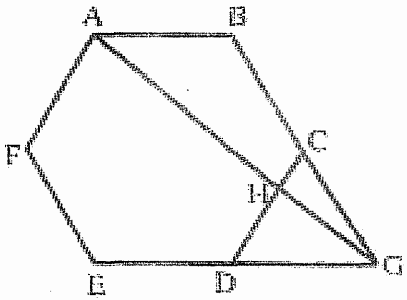
a) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{19\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

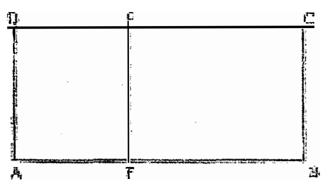
d) $\frac{13\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$



171) **(CN)** O retângulo ABCD da figura abaixo, tem base igual a x + y. O segmento $\overline{AF}$ tem medida z. Sabe-se que $x^2 + y^2 + z^2 = 3{,}54$ e que $xz + yz - xy = 0{,}62$. A área do quadrado FBCE é:

a) 2
b) 2,3
c) 2,5
d) 2,7
e) 3



172) **(CN)** Na figura, tem-se um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AD}$ e os semicírculos de diâmetros $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e de centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente. Sabendo-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ e que $\overline{AO} = R$, a área hachurada é igual a:

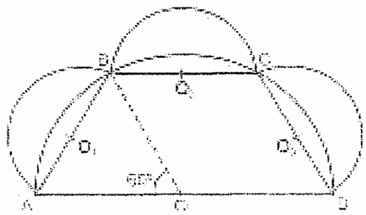
a) $\frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{4}$

b) $\frac{R^2}{8}(6\sqrt{3} - \pi)$

c) $\frac{\pi r R^2}{4}$

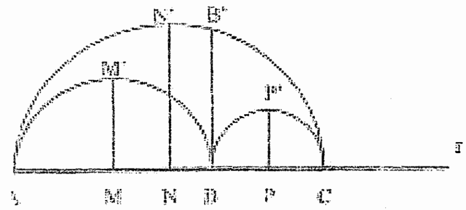
d) $\frac{\pi r R^2}{16}(2\sqrt{3} + \pi)$

e) $\frac{R^2(5\sqrt{3} + \pi)}{24}$



173) **(CN)** Observe a figura abaixo que representa três semicircunferências de centros M, N e P, tangentes duas a duas, respectivamente, nos pontos A, B e C.
Os segmentos MM', NN', BB' e PP' são perpendiculares à reta r. Se a medida do segmento BB' é 6 cm, a área do triângulo M'N'P', em cm², é igual a:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 18
e) 36



174) **(CN)** Uma pizza circular de raio 30 cm foi dividida em 6 partes iguais para seis pessoas. Contudo, uma das pessoas resolveu repartir ao meio o seu pedaço, conforme mostra a figura abaixo. O valor de x é:

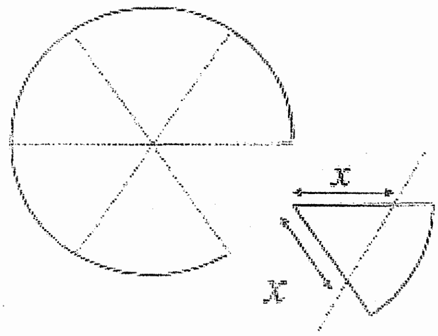
a) $10\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

b) $10\sqrt{\frac{3\pi}{3}}$

c) $10\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

d) $10\sqrt{\frac{3\pi}{\sqrt{3}}}$

e) $10\sqrt{\frac{5\pi}{\sqrt{3}}}$



175) **(CN)** O polígono regular convexo de 18 vértices $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{18}$ está inscrito em uma circuferência de raio R. Traçam-se as diagonais $\overline{A_1A_7}$ e $\overline{A_2A_5}$. A área da parte do círculo compreendida entre essas diagonais é:

a) $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$

b) $\frac{\pi R^2}{3}$

c) $R^2(\pi - \sqrt{3})$

d) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$

e) $\frac{\pi R^2}{6}$

176) **(CN)** Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

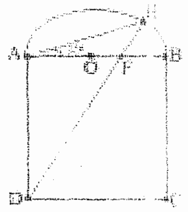
a) $2(3\sqrt{3} + 3)$

b) $6(4\sqrt{3} - 3)$

c) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

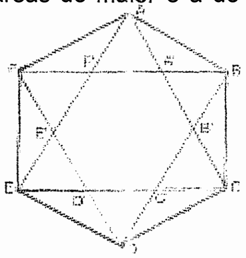
d) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$

e) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$



177) **(CN)** As diagonais $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EA}$ e $\overline{FB}$ de um hexágono regular ABCDEF interceptam-se formando outro hexágono A'B'C'D'E'F', conforme a figura abaixo. Qual a razão entre as áreas do maior e a do menor hexágono?

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $3/2$
d) 2
e) 3

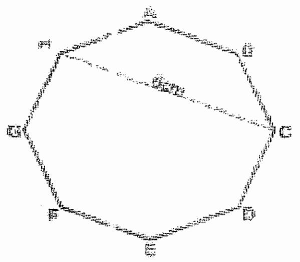


178) **(CN)** Considere um ponto P interno a um hexágono regular de lado igual a 6 cm. A soma das distâncias de P a cada uma das retas suportes dos lados desse hexágono:

a) depende da localização de P
b) é igual de 36 cm
c) é igual a 18 cm
d) é igual a $12\sqrt{3}$ cm

179) **(EPCAR)** A figura abaixo representa um octógono regular tal que $\overline{CH} = 6$cm.
A área desse polígono, em cm², é igual a:

a) $56\left(\sqrt{2}-1\right)$
b) $64\left(\sqrt{2}-1\right)$
c) 72
d) 80
e) é igual a $18\sqrt{3}$ cm



180) **(CN)** Um triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A, os catetos AB e AC medem respectivamente $6\sqrt{3}$ cm e 6 cm. Traça-se o segmento AM, M pertencente e interno ao segmento BC. Sabendo-se que o ângulo $M\hat{A}C$ mede 15°, a razão entre as áreas dos triângulos AMC e ABC é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) impossível de se determinar com apenas esses dados.

181) **(CN)** No triângulo ABC, retângulo em A, da figura, AB = c, AC = b, AM = 2 e AH é a altura relativa ao lado BC. Qual é a área do triângulo AHM?

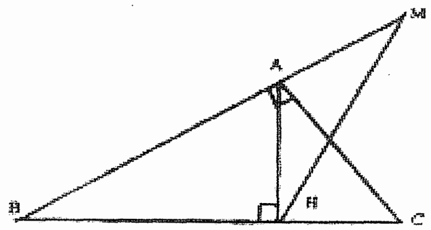
a) $\dfrac{bc}{b^2+c^2}$

b) $\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

c) $\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}$

d) $\dfrac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$

e) $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$



182) **(CM)** Determine a área do triângulo hachurado em função da área S do triângulo ABC, sabendo que os pontos assinalados em cada lado dividem esse lado em partes iguais.

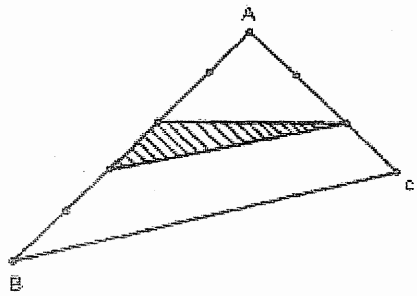
a) $\dfrac{S}{5}$

b) $\dfrac{2S}{7}$

c) $\dfrac{2S}{15}$

d) $\dfrac{S}{15}$

e) $\dfrac{S\sqrt{2}}{15}$



183) **(CM)** Na figura abaixo, o quadrado ABCD possui área S.
Se $AF = \frac{1}{2}AB$ e $AE = \frac{1}{3}AB$, a área hachurada mede:

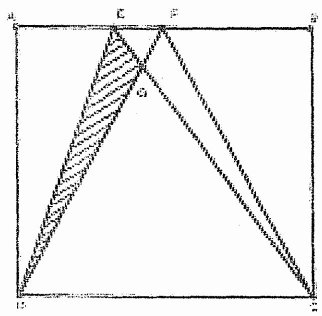
a) $\dfrac{S}{12}$

b) $\dfrac{S}{14}$

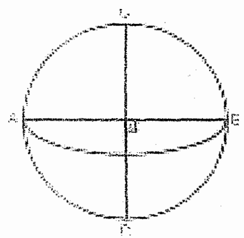
c) $\dfrac{S}{18}$

d) $\dfrac{11S}{70}$

e) $\dfrac{31S}{420}$



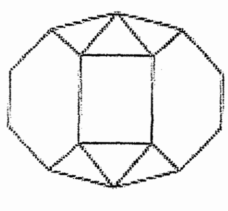
184) **(UFF)** A circunferência representada abaixo tem raio 2 cm e os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, perpendiculares. Com centro em C e raio $\overline{CA}$ foi traçado o arco $\widehat{AB}$.



Determine a área da região hachurada.

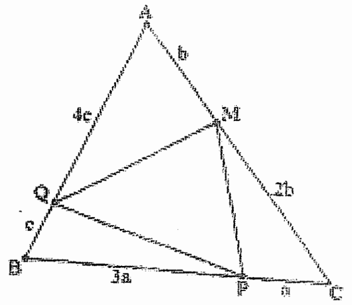
185) **(UERJ)** O decágono de figura abaixo foi dividido em 09 partes: 1 quadrado no centro, 2 hexágonos regulares e 2 triângulo equiláteros, todos com os lados congruentes ao do quadrado, e mais 4 outros triângulos. Sendo T a área de cada triângulo equilátero e Q a área do quadrado, pode-se concluir que a área do decágono é equivalente a:

a) 14T + 3Q
b) 14T + 2Q
c) 18T + 3Q
d) 18T + 2Q



186) **(CN)** Considere a figura abaixo.

A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é:



a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{7}{8}$

187) **(CN)** O triângulo de lados 0,333...cm, 0,5cm e 0,666...cm é equivalente ao triângulo isósceles de base 0,333...cm e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{151}}{24}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{257}}{48}$

e) $\frac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

188) **(CN)** Sendo: h_a, h_b e h_c as medidas das alturas; m_a, m_b e m_c as medidas das medianas; b_a, b_b e b_c as medidas das bissetrizes internas de um triângulo ABC, analise as afirmativas a seguir.

I – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}$ e $\frac{1}{h_c}$ é semelhante ao triângulo ABC.

II – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{m_a}, \frac{1}{m_b}$ e $\frac{1}{m_c}$ é semelhante ao triângulo ABC

III – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{b_a}, \frac{1}{b_b}$ e $\frac{1}{b_c}$ é semelhante ao triângulo ABC

Pode-se concluir que:
a) apenas I é sempre verdadeira
b) apenas II é sempre verdadeira
c) apenas III é sempre verdadeira
d) I, II e III são sempre verdadeiras
e) I, II e III são sempre falsas

189) **(CN)** Os lados do triângulo ABC medem: AB = 2; AC = $2\sqrt{3}$ e BC = 4. A área da intersecção entre o círculo de centro B e raio $\overline{BA}$, o círculo de centro C e raio $\overline{CA}$ e o triângulo ABC, é:

a) $\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3}$

b) $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

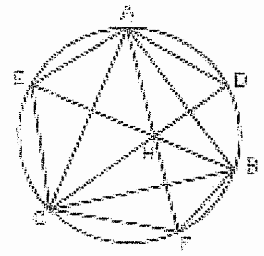
c) $\frac{5\pi}{4} - 2\sqrt{3}$

d) $\frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

e) $\frac{6\pi}{5} - 2\sqrt{3}$

190) **(CN)** Considere na figura abaixo, o triângulo ABC de lados $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 10$ e $\overline{BC} = 12$ e seja H o seu ortocentro. As retas que passam por A e H, B e H e C e H intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos F, E e D, respectivamente. A área do hexágono de vértices A, D, B, F, C e E é igual a:

a) $30\sqrt{7}$
b) $18\sqrt{7}$
c) 80
d) 70
e) 65



191) **(CN)** Na figura abaixo AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo AP = 2PC e AQ = 3QM, qual o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

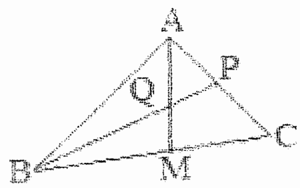
a) $\frac{S}{16}$

b) $\frac{S}{18}$

c) $\frac{S}{20}$

d) $\frac{S}{21}$

e) $\frac{S}{24}$



192) **(CN)** Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AC e a hipotenusa BC medem, respectivamente, 10 e 40. Sabe-se que os segmentos CX, CY e CZ dividem o ângulo ACB em quatro ângulos de medidas iguais, e que AX, XY, YZ e ZB são segmentos consecutivos contidos internamente no segmento AB. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 são, respectivamente, as áreas dos triângulos CAX, CXY, CYZ e CZB, qual será o valor da razão $\frac{S_1S_3}{S_2S_4}$?

a) 0,25
b) 0,5
c) 0,75
d) 1
e) 1,25

193) **(CN)** Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo. SE: as medidas dos triângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triângulo PAM; S_2 é a área do triângulo QBN; S_3 á a área do triângulo PMC; e S_4 é área do triângulo QNC, analise as afirmativas:

I – S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.
II – S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.
III – S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que:
a) apenas a afirmativa 1 é verdadeira.
b) apenas as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) apenas as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) apenas as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

194) **(CN)** Seja ABC um triângulo com lados AB = 15, AC = 12 e BC = 18. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que PC = 3AP. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero APQB seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?
a) 3,5
b) 5
c) 6
d) 8
e) 8,5

195) **(CN)** Tem-se o quadrado de vértices ABCD com lados medindo 'k' cm. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área ABCD, a área do triângulo PBC equivale a:
(a) 18%
(b) 24%
(c) 27%
(d) 30%
(e) 36%

196) **(CN)** Num paralelogramo ABCD de altura CP = 3, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja 'M' o ponto médio de AB e 'P' o pé da altura de ABCD baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a

a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

197) **(CN)** O vértice E de um triângulo equilátero ABE está no interior de um quadrado ABCD, e F é o ponto de intersecção da diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AE}$. Se a medida de $\overline{AB}$ é igual a $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, então a área do triângulo BEF é:
a) $\sqrt{3} - 3/4$
b) $1 - \sqrt{3}/4$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
e) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

198) **(CN)** ABC é um triângulo equilátero. Seja P ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo APB é igual a 60°, que PA = 6 e PC = 8, a medida de PQ será
a) $\frac{24}{7}$
b) $\frac{23}{5}$
c) $\frac{19}{6}$
d) $\frac{33}{14}$
e) $\frac{11}{4}$

199) **(CN)** Considere os triângulos ABC e MNP. Se as medidas dos lados do segundo triângulo são, respectivamente, iguais às medidas das medianas do primeiro, então a razão da área de MNP para a área de ABC é igual a:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{6}$

200) **(CN)** Sejam C_1 e C_2 dois círculos ortogonais de raios R_1 e R_2. A distância entre os centros é p. A soma das áreas dos círculos é igual a:
a) $\frac{3\pi^2}{2}$
b) $\frac{\pi^2}{4}$
c) π^2
d) π^3
e) $\frac{5\pi^2}{4}$

201) **(CN)** Sobre o lado maior de um retângulo de base 1 e altura 2 constrói-se um retângulo de base 2 e altura 3; sobre o maior lado desse último constrói-se um retângulo de base 3 e altura 4; e assim sucessivamente, até se construir o retângulo de base 99 e altura 100. com quantos zeros termina o produto das áreas de cada um desses retângulos?
a) 39
b) 40
c) 46
d) 78
e) 80

GABARITO

1) 21 cm²
2) 19 cm
3) 65
4) $\sqrt{3}\text{cm}^2$
5) 12 cm²
6) $9\sqrt{3}\text{cm}^2$
7) 24 cm²
8) $9\sqrt{3}\text{cm}^2$
9) 180 cm²
10) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

11) 20 cm^2
12) $8\sqrt{14}\,cm^2$
13) 84 cm^2
14) 234 cm^2
15) 40 cm^2
16) 240 cm^2
17) $\left(3-2\sqrt{2}\right)p^2$
18) 36 cm^2
19) 44
20) 192 cm^2
21) $36\sqrt{3}cm^2$
22) 192 cm^2
23) $36\sqrt{3}\,m^2$
24) 20 m^2
25) $24\sqrt{3}$
26) 3 cm
27) 32 cm^2
28) 2
29) 18 cm^2
30) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{7}cm^2$
31) 33 cm^2
32) $32\sqrt{3}\,m^2$
33) $72\sqrt{3}\,cm^2$
34) 105
35) 16 m
36) 80 cm^2
37) 26 m
38) 30 cm^2
39) $36(\pi-2)\,cm^2$
40) $3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)cm^2$
41) 6,25
42) 45π
43) 3m e 5m
44) $3\pi^2\,cm^2$
45) $4\pi\,m^2$
46) $24\sqrt{3}\,m^2$
47) $\frac{75\sqrt{3}}{2}cm^2$
48) 4π
49) $216\pi\,cm^2$
50) $16\pi\,cm^2$
51) 31,5 cm^2
52) a) 12
b) 4
53) 100 cm^2
54) $5\,L^2$
55) $\frac{a}{4}$
56) 0,5 cm
57) 7,2 cm
58) 36
59) $\frac{\pi-2}{8}$
60) $8(\pi-2)\,cm^2$
61) $18(\pi-2)\,cm^2$
62) $27(4-\pi)\,cm^2$
63) $36(4-\pi)\,m^2$
64) 2,25 cm^2
65) $27\sqrt{7}\,cm^2$
66) $50\pi\,m^2$
67) $36\sqrt{3}\,m^2$
68) 82%
69) 84%
70) 43,2
71) 9,375
72) 145 cm^2
73) 2 cm^2
74) 9 cm^2
75) 9 cm^2
76) $\frac{1}{2}$
77) $\frac{1}{4}$
78) $9(4-\pi)\,cm^2$
79) $\left(16\sqrt{3}-8\pi\right)cm^2$
80) E
81) $6\sqrt{3}\,cm^2$
82) D
83) E
84) E
85) B
86) E
87) 7 m^2
88) C
89) A
90) E
91) A
92) D
93) C
94) D
95) 1,6 cm e 6,4 cm
96) C
97) 12 cm
98) D
99) D
100) A
101) B
102) D
103) B
104) B
105) 5 cm e 6 cm
106) 72 m^2
107) A
108) D.
109) B
110) E
111) 84 cm^2
112) a) 13,2 cm
b) 68 m^2
113) E
114) B
115) B
116) E
117) 10, 11, 12, 13 e 14
118) A
119) 1 cm^2
120) $54\sqrt{3}\,cm^2$
121) 1 ou 2
122) B
123) D
124) C
125) C
126) B
127) A
128) B
129) A
130) D
131) E
132) A
133) D
134) A
135) A
136) $\frac{3\sqrt{3}}{2}cm^2$
137) A
138) D
139) E
140) D
141) B
142) $\frac{5}{7}$
143) A
144) 156 cm^2
145) A
146) D
147) B
148) A
149) D
150) B
151) 2m
152) C
153) E
154) a) $6x-63$
b) $\frac{21x+63}{2}$
c) 7 cm
155) 112 cm^2
156) A
157) C
158) 2268 m^2
159) B
160) C
161) $\frac{16\pi}{3}m$
162) A
163) A
164) A
165) A
166) E
167) D
168) 28cm^2
169) $16\sqrt{3}\,cm^2$
170) C
171) B
172) B
173) A
174) D
175) E
176) D
177) E
178) E
179) C
180) D
181) C
182) C
183) B
184) $(2\pi-4)\,cm^2$
185) A
186) B
187) B
188) A
189) D
190) A
191) B
192) A
193) E
194) C
195) D
196) B
197) E
198) A
199) D
200) D
201) C

SIGLAS UTILIZADAS NO LIVRO

1) **CAP-UFRJ**: Colégio de Aplicação da UFRJ
2) **CEFET**: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
3) **CEFETEQ**: Centro Federal de Educação de Química
4) **CESGRANRIO(*)**: Fundação Cesgranrio
5) **CPII**: Colégio Pedro II
6) **CM**: Colégio Militar
7) **CN**: Colégio Naval
8) **E.E.Aer**: Escola de Especialistas de Aeronáutica
9) **ENEM**: Exame Nacional do Ensino Médio
10) **EPCAR**: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
11) **EsPCEx**: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
12) **FUVEST**: Fundação Universitária para o Vestibular
13) **IME**: Instituto Militar de Engenharia
14) **ITA**: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
15) **PUC**: Pontifícia Universidade Católica-RJ
16) **UERJ**: Universidade Estadual do Rio de Janeiro
17) **UFF(*)**: Universidade Federal Fluminense
18) **UFRJ(*)**: Universidade Federal do Rio de Janeiro ou Universidade do Brasil
19) **UNICAMP**: Universidade Estadual de Campinas
20) **UNIFICADO**: Concurso Vestibular Unificado

(*) Os concursos onde há este símbolo foram descontinuados, porém há neles questões clássicas que achamos interessante incluir nesta obra.