M1 Mathématiques | UPEM
Analyse Numérique et Simulation | Semestre 1 – 2018/2019

Projet : Simulation du système solaire

L'objectif de ce projet de simuler, à partir d'une date donnée, le mouvement des 5 principaux corps du système solaire (le Soleil, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) et de Pluton (voir Figure 1). Les seules forces prises en compte sont les interactions gravitationnelles. Il s'agit donc de ce que l'on appelle un *problème à 6 corps*. Rappelons qu'un corps de masse m_1 exerce sur un corps de masse m_2, situé à une distance d, la force de gravitation

$$\overrightarrow{F_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{d^2}\overrightarrow{e_{12}},$$

où $\overrightarrow{e_{12}}$ est le vecteur unitaire dirigé du corps 1 vers le corps 2 et G est la constante universelle de gravitation.

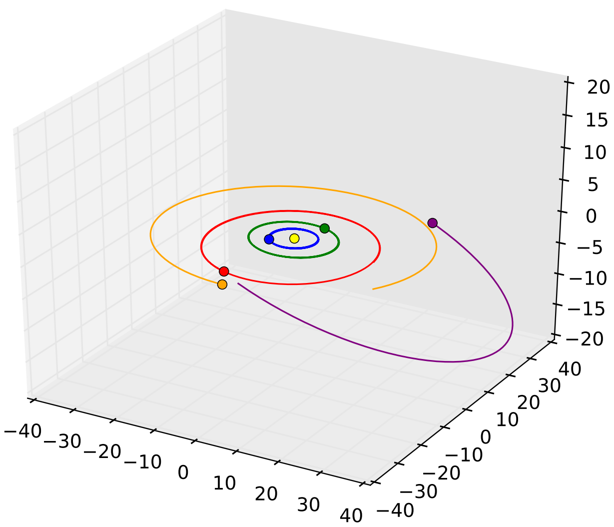

FIGURE 1 – Simulation numérique du mouvement du Soleil, de Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton.

Ce type de simulation numérique permet notamment de produire des éphémérides de haute précision. Les éphémérides sont des tables donnant les positions des corps célestes sur une période donnée. Elles sont essentielles pour effectuer des observations astronomiques ou planifier des missions spatiales.

1 Description du problème

On se place dans un référentiel galiléen muni d'un système de coordonnées cartésiennes d'axes x, y et z. Les corps sont numérotés de 1 à 6. La masse du corps i est notée m_i et la position du corps i au temps t est notée $q_i(t)$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à chaque corps, on trouve les équations différentielles

$$q_i''(t) = \sum_{1\leq j\leq 6, j\neq i} -Gm_j \frac{q_i(t) - q_j(t)}{\|q_i(t) - q_j(t)\|^3}, \qquad \forall i \in \{1, .., 6\}, \tag{1}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. En introduisant les vecteurs vitesse $v_i(t) = q_i'(t)$, ce système d'équations différentielles du second ordre peut se réécrire comme un système du premier ordre :

$$\begin{cases} v_i'(t) = \displaystyle\sum_{1\leq j\leq 6, j\neq i} -Gm_j \frac{q_i(t) - q_j(t)}{\|q_i(t) - q_j(t)\|^3} \\ q_i'(t) = v_i(t) \end{cases}, \qquad \forall i \in \{1, .., 6\}. \tag{2}$$

Naturellement, ce système d'équations différentielles doit être complété par des conditions initiales. Ces conditions, ainsi que les autres paramètres, sont précisés dans la section suivante.

1. Détailler les étapes qui permettent de déduire les équations différentielles (1) du principe fondamental de la dynamique.

On définit la fonction $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{H}(v, q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} m\|v_i\|^2 - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6} G\frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|},$$

où $v = (v_1, \ldots, v_6)$ et $q = (q_1, \ldots, q_6)$.

2. Interpréter, en termes d'énergies, les différents termes de $\mathcal{H}(v, q)$.

3. Montrer que que le système (2) est le système hamiltonien associé à $\mathcal{H}$.

4. Que peut-on dire de la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(v(t), q(t))$?

2 Données

- Les unités du système international (mètre, kilogramme, seconde) s'avèrent peu pratiques pour notre problème. Nous utiliserons donc l'unité astronomique (notée ua, égale à 149 597 870 700 m, soit la distance moyenne Terre-Soleil), la durée du jour terrestre (notée j, égale à 24 h) et la masse du soleil (notée $M_\odot$, égale à $1.98855 \cdot 10^{30}$ kg). Dans ce système d'unités, la constante gravitationnelle vaut

$$G = 2.95912208286 \cdot 10^{-4}.$$

- La date de départ de la simulation est le 1er septembre 2012 à 0h00. Le référentiel utilisé a pour origine la position du Soleil à cette date.
- Les masses des 6 corps sont données dans la Table 1. La masse du Soleil y est légèrement supérieure à 1 car on a ajouté la masse des planètes proches du Soleil et non-représentées dans la simulation (Mercure, Vénus, la Terre et Mars).
- Les positions et vitesses des 6 corps le 1er septembre 2012 à 0h00 sont données dans la Table 1. Elles proviennent du générateur d'éphémérides de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (`http://www.imcce.fr`).

5. Calculer les distances (en ua) entre le Soleil et les 5 autres corps le 1er septembre 2012 à 0h00.

3 Résolution numérique

6. Écrire les formules de la méthode d'Euler explicite appliquée au système (2).

	corps	masse	position	vitesse
1	Soleil	1.00000597682	0 0 0	0 0 0
2	Jupiter	0.000954786104043	2.2911898857058 4.4742096428394 -0.0698526085811	-0.0068140485228 0.0038022184356 0.0001366932116
3	Saturne	0.000285583733151	-8.4077274422046 -4.9386528867475 0.4206194745212	0.0025181864149 -0.0048203311629 -0.0000164411567
4	Uranus	0.0000437273164546	19.9506411858858 -2.1189594536568 -0.2505524004432	-0.0004495229028 0.0037304364206 0.0000197241717
5	Neptune	0.0000517759138449	26.3841113101207 -14.2637141476417 -0.3141826415529	0.0014665671695 0.0027825194375 -0.0000910521187
6	Pluton	1/(1.3e8)	4.7240342661351 -31.8776619468451 2.0454833905119	0.0031588952992 -0.0001620298531 -0.0008976519916

TABLE 1 – Masse (en $M_\odot$) des différents corps. Position et vitesse initiale des différents corps (en ua et $ua.j^{-1}$) le 1er septembre 2012 à 0h00.

7. Écrire une fonction `solaire_euler` qui résout numériquement le système (2) avec les données de la Section 2 par la méthode d'Euler explicite. Cette fonction prendra en paramètres le pas de temps `dt` et le nombre de pas temps `N`. Elle affichera, à la fin du calcul, les trajectoires obtenue pour les 6 corps et l'évolution de l'énergie $\mathcal{H}$ en fonction du temps.

8. Écrire les formules de la méthode de Störmer-Verlet appliquée au système (2).

9. Écrire une fonction `solaire_stormer_verlet` qui résout numériquement le système (2) avec les données de la Section 2 par la méthode de Störmer-Verlet. Cette fonction prendra en paramètres le pas de temps `dt` et le nombre de pas temps `N`. Elle affichera, à la fin du calcul, les trajectoires obtenue pour les 6 corps et l'évolution de l'énergie $\mathcal{H}$ en fonction du temps.

10. Tracer l'évolution de l'énergie et les trajectoires obtenues avec les schémas d'Euler et de Störmer-Verlet pour un pas de temps de 10 jours et une durée de simulation de 200 000 jours. Tracer l'évolution de l'énergie et les trajectoires obtenues avec le schéma de Störmer-Verlet pour un pas de temps de 200 jours et une durée de simulation de 200 000 jours. Commenter ces résultats numériques.

11. À l'aide de simulations numériques, déterminer grossièrement la période de révolution de Neptune et Pluton autour du soleil.

4 Représentation de la solution numérique sous forme d'animation

12. Écrire une fonction `solaire_anime` qui résout numériquement le système (2) avec les données de la Section 2 par la méthode de Störmer-Verlet et affiche, au fur et à mesure du calcul, la position des corps et les trajectoires déjà parcourues (comme sur la Figure 1). On pourra utiliser la structure suivante.

```
from numpy import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```
from matplotlib import pyplot as plt

def solaire_anime(N,dt):

# insérer ici la définition des paramètres et des conditions initiales

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.set_xlim3d([-40.,40.])
    ax.set_ylim3d([-40.,40.])
    ax.set_zlim3d([-20.,20.])

    lines = []
    pts = []
    colors = ["yellow","blue","green","red","orange","purple"]
    for i in range(6):
        lines += ax.plot([], [], [],color=colors[i])
        pts += ax.plot([], [], [], marker="o",color=colors[i])

    for n in range(N):

     # insérer ici le calcul des position et des vitesse de chaque corps

        for pt,line,i in zip(pts,lines,range(6)):
            line.set_data(x[i,:n],y[i,:n])
            line.set_3d_properties(z[i,:n])
            # x, y et z doivent contenir les trajectoires
            # des corps (depuis le début de la simulation)
            pt.set_data(p[i,0],q[i,1])
            pt.set_3d_properties(q[i,2])
            # q doit contenir les coordonnées des corps à l'étape n

        plt.pause(0.00001)
```