TD07: Estimation Theory

EE21: Random Signal Processing

April 2018

Zhigang SU, SU,Yajuan ZHANG
Sino-European Institute of Aviation Engineering
Civil Aviation University of China

Outline

Exercise 1

Problem Description

设有N次观测$z_i = A + \nu_i (i = 1, 2, \cdots, N)$,其中$\nu_i$为高斯白噪声且$\nu_i \sim N(0, \sigma^2)$，并与$A$统计独立；$A$在$(-A_0, A_0)$ 上服从均匀分布，证明A的最大后验概率估计为：

$$\widehat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0, & (\overline{z} < -A_0) \\ \overline{z}, & (-A_0 \leq \overline{z} \leq A_0) \\ A_0, & otherwise \end{cases}$$

其中，

$$\overline{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i$$

Exercise 1

Solution

证明：

$$
\begin{aligned}
f(z_i|A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}} \\
f(A) &= \begin{cases} \frac{1}{2A_0}, & (-A_0 < -A < A_0) \\ 0, & otherwise \end{cases} \\
f(A|z) &= \frac{f(z|A)f(A)}{f(z)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

求A的最大后验概率估计，即求使得（*1*）式最大的A值作为其估计值。由于$f(z)$与A无关，所以求（*1*）式的最大值即为求使得其分子最大的A 值。

Exercise 1

Solution

$$
\begin{aligned}
f(z|A)f(A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2\}f(A) \\
\ln\{f(z|A)f(A)\} &= \ln\{f(A)\} - \frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2 \\
&= \ln\{f(A)\} - \frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \\
&\qquad - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i^2 - 2Az_i + A^2)
\end{aligned}
$$

当$\overline{z} < -A_0$时，取$\widehat{A}_{map} = -A_0$;
当$\overline{z} > A_0$时，取$\widehat{A}_{map} = A_0$;

Exercise 1

Solution

当$|\overline{z}| \leq A_0$时，即为求使得

$$g(A) = NA^2 - 2A\sum_{i=1}^{N}(z_i)$$

最小的A值，求导使其导数为*0*,则

$$A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = \overline{z}$$

综合以上，

$$\widehat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0, & (\overline{z} < -A_0) \\ \overline{z}, & (-A_0 \leq \overline{z} \leq A_0) \\ A_0, & otherwise \end{cases}$$

Outline

Exercise 2

Problem Description

从有噪声的观测中估计天线方位角。在观测之前已知角度s在$[-1,1]$（单位为$mrad$）上均匀分布，噪声n_i是各自独立的且与s无关，噪声的分布密度为

$$f(n_i) = \begin{cases} 1 - |n_i|, & (-1 < n_i < 1) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

观测样本为$z_i = s + n_i$。

1. 求单次观测$z_i = 1.5$时的均方估计;
2. 求单次观测$z_i = 1.5$时的最大后验概率估计。

Exercise 2

Solution

(1)

$$\hat{\theta}_{ms} = E[s|z] = \int_{-\infty}^{+\infty} s f(s|z) ds$$

$$f(s|z) = \frac{f(z|s)f(s)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|s)f(s)ds}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{ms} &= E[s|z] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s f(z|s)f(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|s)f(s)ds} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s(1-|z-s|)f(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty}(1-|z-s|)f(s)ds} \\ &= \frac{\int_{0.5}^{1} s(s-0.5)f(s)ds}{\int_{0.5}^{1}(s-0.5)f(s)ds} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Exercise 2

Solution

(2)

$$f(z;s) = \begin{cases} 1 - |z-s|, & (-1 < z - s < 1) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

由最大后验概率方程，当一次观测$z_1 = 1.5$时，使得最大后验概率方程取最大值的s的值为*1*，所以：

$$\hat{s}_{map} = 1$$

Outline

1. Exercise 1
2. Exercise 2
3. **Exercise 3**
4. Exercise 4

Exercise 3

Problem Description

给定$z = \frac{s}{2} + n$,n是均值为零方差为1的高斯随机变量：

1. 求s的最大似然估计$\widehat{s}_{ml}$;
2. 对下列$f(s)$求最大后验估计$\widehat{s}_{map}$.

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp(-\frac{s}{4}), & (s \geq 0) \\ 0, & (s < 0) \end{cases}$$

Exercise 3

Solution

*(1)*首先构建s的最大似然函数：

$$f(z;s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\frac{s}{2})^2\}$$

则$\widehat{s}_{ml}$即为使上式取值最小的s值，所以：

$$\widehat{s}_{ml} = 2z$$

Exercise 3

Solution

(2) s的后验概率为：

$$f(s|z) = \frac{f(z|s)f(s)}{f(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\frac{s}{2})^2\}\frac{1}{4}\exp\{-\frac{s}{4}\}}{f(z)}$$

由于$f(z)$与s无关，所以求上式的极大值，即为求其分子的最大值。整理其分子得：

$$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{8}(s+1-2z)^2+\frac{1-4z}{8}\}$$

求得使上式最大的s作为$\widehat{s}_{map}$,则：

$$\widehat{s}_{map} = \begin{cases} 2z-1, & (z \geq \frac{1}{2}) \\ 0, & (z < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Outline

Exercise 4

Problem Description

设观测信号$z_i = A + \nu_i (i = 1, 2, \cdots, N)$,已知$\nu_i$是相互独立，具有相同分布的高斯白噪声，其均值为0，方差为σ^2;信号A也是一零均值方差为σ_A^2的高斯信号，且与噪声统计独立。通过N次观测对信号A进行估计，求信号A的最小均方估计$\widehat{A}_{ms}$，最大后验概率估计$\widehat{A}_{map}$和条件中位数估计$\widehat{A}_{med}$。

Exercise 4

Solution

(1) 先求后验概率密度

$$
\begin{aligned}
f(A|z) &= \frac{f(z|A)f(A)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|A)f(A)dA} \\
f(z|A) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-A)^2] \\
f(A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}}\exp[-\frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{N}(A-\mu_A)^2]
\end{aligned}
$$

Exercise 4

Solution

$$f(z|A)f(A) = K * \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2 - \frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{N}(A - \mu_A)^2\}$$

其中，$K = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}}$,

$$f(z|A)f(A) = K\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{1}{\sigma^2}(NA^2 - 2NA\bar{z}) + \frac{1}{\sigma_A^2}(A - \mu_A)^2]\}$$

式中，$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$。定义：

$$W(A) = \frac{1}{\sigma^2}(NA^2 - 2NA\bar{z}) + \frac{1}{\sigma_A^2}(A - \mu_A)^2$$

则

$$f(z|A)f(A) = K\exp\{-\frac{1}{2}W(A)$$

Exercise 4

Solution

$$f(A|z) = \frac{f(z|A)f(A)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|A)f(A)dA}$$
$$= \frac{exp\{-\frac{1}{2}W(A)\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-\frac{1}{2}W(A)\}dA}$$

上式的分母与A无关，$W(A)$是A的二次型，经过配方可得：

$$W(A) = \frac{1}{\sigma_{A|z}^2}(A - \mu_{A|z}) - \frac{\mu_{A|z}^2}{\sigma_{A|z}^2} + \frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2}$$

其中，

$$\sigma_{A|z}^2 = (\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_A^2})^{-1}$$
$$\mu_{A|z} = (\frac{N}{\sigma^2}\bar{z} + \frac{\mu_A}{\sigma_A^2})\sigma_{A|z}^2$$

Exercise 4

Solution

将$W(A)$带入$f(A|z)$得

$$f(A|z) = \frac{\exp[-\frac{1}{2\sigma^2_{A|z}}(A-\mu_{A|z})^2]\exp[-\frac{1}{2}(\frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2}-\frac{\mu_{A|z})^2}{\sigma^2_{A|z}})]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2_{A|z}}(A-\mu_{A|z})^2]\exp[-\frac{1}{2}(\frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2}-\frac{\mu^2_{A|z}}{\sigma^2_{A|z}})]dA}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{A|z}}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2_{A|z}}(A-\mu_{A|z})^2\}$$

由上式可以看出，后验概率密度是高斯的。
最小均方估计为被估计量的条件均值，所以

$$\hat{A}_{ms} = \mu_{A|z} = (\frac{N}{\sigma^2}\bar{z}+\frac{\mu_A}{\sigma_A^2})\sigma^2_{A|z} = \frac{\frac{N}{\sigma^2}\bar{z}+\frac{\mu_A}{\sigma_A^2}}{\frac{N}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_A^2}} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2+\sigma^2/N}\bar{z}$$

Exercise 4

Solution

令

$$k = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma^2/N}$$

则：

$$\hat{A}_{ms} = k\bar{z}$$

由于最大后验概率估计是使后验概率密度最大所对应的A值且条件中位数是A的条件概率密度的中位数，因此可得

$$\hat{A}_{map} = \hat{A}_{med} = \mu_{A|z} = \hat{A}_{ms}$$

即最大后验概率估计、条件中位数估计和最小均方估计相等。