# TD07:Estimation Theory

## EE21:Random Signal Processing

**Exercise 1:**

设有$N$次观测$z_i = A + \nu_i (i = 1, 2, \cdots, N)$,其中$\nu_i$为高斯白噪声且$\nu_i \sim N(0, \sigma^2)$，并与$A$统计独立；$A$在$(-A_0, A_0)$ 上服从均匀分布，证明A的最大后验概率估计为：

$$\widehat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0, & (\overline{z} < -A_0) \\ \overline{z}, & (-A_0 \leq \overline{z} \leq A_0) \\ A_0, & otherwise \end{cases}$$

其中，

$$\overline{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i$$

**证明：**

$$f(z_i|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_i-A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(A) = \begin{cases} \frac{1}{2A_0}, & (-A_0 < -A < A_0) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$f(A|z) = \frac{f(z|A)f(A)}{f(z)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

求$A$的最大后验概率估计，即求使得（1）式最大的$A$值作为其估计值。由于$f(z)$与$A$无关，所以求（1）式的最大值即为求使得其分子最大的$A$ 值。

$$f(z|A)f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2\} f(A)$$

$$\begin{aligned} ln(f(z|A)f(A)) &= lnf(A) - \frac{N}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2 \\ &= lnf(A) - \frac{N}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i^2 - 2Az_i + A^2) \end{aligned}$$

当$\overline{z} < -A_0$时，取$\widehat{A}_{map} = -A_0$;
当$\overline{z} > A_0$时，取$\widehat{A}_{map} = A_0$;
当$|\overline{z}| \le A_0$时，即为求使得

$$g(A) = NA^2 - 2A\sum_{i=1}^{N}(z_i)$$

最小的$A$值，求导使其导数为0,则

$$A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = \overline{z}$$

综合以上，

$$\widehat{A}_{map} = \begin{cases} -A_0, & (\overline{z} < -A_0) \\ \overline{z}, & (-A_0 \le \overline{z} \le A_0) \\ A_0, & otherwise \end{cases}$$

**Exercise 2：**

从有噪声的观测中估计天线方位角。在观测之前已知角度$s$在$[-1,1]$（单位为$mrad$）上均匀分布，噪声$n_i$是各自独立的且与$s$无关，噪声的分布密度为

$$f(n_i)=\begin{cases}1-|n_i|, & (-1<n_i<1)\\ 0, & (otherwise)\end{cases}$$

观测样本为$z_i=s+n_i$。

(1)求单次观测$z_i=1.5$时的均方估计;

(2)求单次观测$z_i=1.5$时的最大后验概率估计。

**解：**

(1)

$$\hat{\theta}_{ms} = E[s|z] = \int_{-\infty}^{+\infty} sf(s|z)ds$$

$$f(s|z) = \frac{f(z|s)f(s)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|s)f(s)ds}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{ms} &= E[s|z] \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} sf(z|s)f(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|s)f(s)ds} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s(1-|z-s|)f(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty}(1-|z-s|)f(s)ds} \\
&= \frac{\int_0 .5^1 s(s-0.5)f(s)ds}{\int_0 .5^1 (s-0.5)f(s)ds} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

(2)

$$f(z;s) = \begin{cases} 1-|z-s|, & (-1 < z-s < 1) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

由最大后验概率方程，当一次观测$z_1 = 1.5$时，使得最大后延概率方程取最大值的$s$的值为1，所以：

$$\hat{s}_{map} = 1$$

**Exercise 3：**

给定$z = \frac{s}{2} + n$,$n$是均值为零方差为1的高斯随机变量：
(1)求$s$的最大似然估计$\widehat{s}_{ml}$;
(2)对下列$f(s)$求最大后验估计$\widehat{s}_{map}$.

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}exp(-\frac{s}{4}), & (s \geq 0) \\ 0, & (s < 0) \end{cases}$$

**解:**

(1)首先构建$s$的最大似然函数：

$$f(z;s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\frac{s}{2})^2\}$$

则$\widehat{s}_{ml}$即为使上式取值最小的$s$值，所以：

$$\widehat{s}_{ml}=2z$$

(2)$s$的后验概率为：

$$\begin{aligned}f(s|z)&=\frac{f(z|s)f(s)}{f(z)}\\&=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\frac{s}{2})^2\}\frac{1}{4}exp\{-\frac{s}{4}\}}{f(z)}\end{aligned}$$

由于$f(z)$与$s$无关，所以求上式的极大值，即为求其分子的最大值。整理其分子得：

$$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}exp\{-\frac{1}{8}(s+1-2z)^2+\frac{1-4z}{8}\}$$

求得使上式最大的$s$作为$\widehat{s}_{map}$,则：

$$\widehat{s}_{map}=\begin{cases}2z-1, & (z\geq\frac{1}{2})\\0, & (z<\frac{1}{2})\end{cases}$$

**Exercise 4：**

设观测信号$z_i = A + \nu_i (i = 1, 2, \cdots, N)$,已知$\nu_i$是相互独立，具有相同分布的高斯白噪声，其均值为0，方差为$\sigma^2$;信号$A$也是一零均值方差为$\sigma_A^2$的高斯信号，且与噪声统计独立。通过N次观测对信号$A$进行估计，求信号$A$的最小均方估计$\widehat{A}_{ms}$，最大后验概率估计$\widehat{A}_{map}$和条件中位数估计$\widehat{A}_{med}$。

**解:**

(1)先求后验概率密度

$$
\begin{aligned}
f(A|z) &= \frac{f(z|A)f(A)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|A)f(A)dA} \\
&= \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} exp[-\frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{N}(A-\mu_A)^2]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i - A)^2] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} exp[-\frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{N}(A-\mu_A)^2]dA} \\
&= \frac{exp\{-\frac{1}{2}[\frac{1}{\sigma^2}(NA^2 - 2NA\bar{z}) + \frac{1}{\sigma_A^2}(A-\mu_A)^2]\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-\frac{1}{2}[\frac{1}{\sigma^2}(NA^2 - 2NA\bar{z}) + \frac{1}{\sigma_A^2}(A-\mu_A)^2]\}dA} \\
&= \frac{exp\{-\frac{1}{2}W(A)\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-\frac{1}{2}W(A)\}dA} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

上式中

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$$

为样本均值，$W(A)$为

$$W(A) = \frac{1}{\sigma^2}(NA^2 - 2NA\bar{z}) + \frac{1}{\sigma_A^2}(A-\mu_A)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

注意到(1)式的分母与A无关，$W(A)$是A的二次型，经过配方可以把(2)式写成：

$$W(A) = \frac{1}{\sigma_{A|z}^2}(A - \mu_{A|z}) - \frac{\mu_{A|z}^2}{\sigma_{A|z}^2} + \frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2} \cdots\cdots\cdots (3)$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\sigma_{A|z}^2 &= (\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_A^2})^{-1} \\
\mu_{A|z} &= (\frac{N}{\sigma^2}\bar{z} + \frac{\mu_A}{\sigma_A^2})\sigma_{A|z}^2
\end{aligned}
$$

将(3)式带入(1)式得

$$
\begin{aligned}
f(A|z) &= \frac{exp[-\frac{1}{2\sigma_{A|z}^2}(A-\mu_{A|z})^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2} - \frac{\mu_{A|z})^2}{\sigma_{A|z}^2})]}{\int_{-\infty}^{+\infty} exp[-\frac{1}{2\sigma_{A|z}^2}(A-\mu_{A|z})^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2} - \frac{\mu_{A|z}^2}{\sigma_{A|z}^2})]dA} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{A|z}^2} exp[-\frac{1}{2\sigma_{A|z}^2}(A - \mu_{A|z}^2)]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)
\end{aligned}
$$

由(4)式可以看出，后验概率密度是高斯的。由于最小均方估计为被估计量的条件均值，所以

$$\hat{A}_{ms} = (\frac{N}{\sigma^2}\bar{z} + \frac{\mu_A}{\sigma_A^2})\sigma_{A|z}^2 = \frac{\frac{N}{\sigma^2}\bar{z} + \frac{\mu_A}{\sigma_A^2}}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_A^2}} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma^2/N}\bar{z}$$

令

$$k = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma^2/N}$$

则：

$$\hat{A}_{ms} = k\bar{z}$$

另外，由于最大后验概率估计是使后验概率密度最大所对应的A值且条件中位数是$A$的条件概率密度的中位数，因此由(4)式可得

$$\hat{A}_{map} = \hat{A}_{med} = \mu_{A|z} = \hat{A}_{ms}$$

即最大后验概率估计、条件中位数估计和最小均方估计相等。