

순열과 조합

알린이월드 - 알형

왜 알아야 할까?

- 코딩 테스트에서 필수!!!
순열과 중복 순열은 재귀, 백트래킹, 완전 탐색(Brute Force) 문제에서 굉장히 자주 등장!
- 카카오 코딩테스트 정답률

문제 4 - 양궁 대회

정답률 : 21.16%

문제 5 - 양과 늑대

정답률 : 7.76%

문제 7 - 사라지는 발판

정답률 : 0.78%

-
-
- 현실 속 활용 예시
 - 비밀번호 조합 시도
 - 명확하게 순위를 정해야 하는 상황

순열과 중복 순열은 알고리즘 문제뿐 아니라 실제로도 많이 쓰이는 개념

순열 (Permutation)

순열 : 서로 다른 원소를 순서 있게 나열

예를 들어 숫자 1, 2, 3이 있다고 하면 총 6가지

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)

공식(n은 원소의 총 개수, r은 뽑는 개수)

$$P(n,r)=n!/(n-r)!$$

경주 메달 수여

- 예를 들어, 달리기 시합에서 5명중에 1등, 2등, 3등을 뽑는다고 생각하면
- 1등이 될 수 있는 경우: 5명
- 2등이 될 수 있는 경우: 4명
- 3등이 될 수 있는 경우: 3명
- $5 \times 4 \times 3 = 60$

중복 순열 (Permutation with Repetition)

중복 순열은 이름 그대로, 같은 원소를 여러 번 쓸 수 있는 경우를 말합니다.

예를 들어, 숫자 1, 2, 3 중에서 중복해서 2개를 뽑는다고 하면:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

이렇게 총 9가지 경우가 있음

공식: n^r

n 은 원소의 개수, r 은 뽑는 개수입니다.

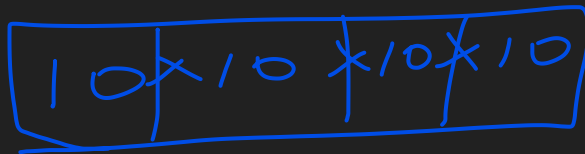
$$\boxed{3 * 3}$$
$$3^2$$

비밀번호 설정 화면

스마트폰 비밀번호를 4자리로 설정한다고 가정하면

- 사용할 수 있는 숫자: 0부터 9까지(10개)
- 4자리에 숫자를 중복해서 넣을 수 있으니까:
 $10^4 = 10,000$ 가지 경우의 수

중복 순열은 이렇게 중복 허용이 핵심 포인트!



$$10^4 = 10,000$$

순열 vs 중복 순열

$$5 \times 4 \times 3$$

$$5 \times 5 \times 5$$

5^3

구분	순열	중복 순열
중복 허용 여부	허용 안 함	허용함
공식	$P(n,r)=n!/(n-r)!$	n^r

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n^r$$

조합(Combination)

순서 X

조합은 순서에 상관없이 원소를 선택하는 방법 입니다.

즉, 어떤 원소들을 뽑았느냐만 중요하고, 나열되는 순서는 중요하지 않습니다.

조합은 순서가 중요하지 않은 경우의 수를 구할 때 사용합니다.

예를 들어, 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 뽑는 경우를 생각해 봅시다.

- (1, 2)
- (1, 3)
- (1, 4)
- (2, 3)
- (2, 4)
- (3, 4)

순열과 다르게 (2, 1)과 (1, 2)는 같은 조합 이므로 중복해서 세지 않습니다.

총 6가지 경우가 나오게 됩니다.

조합 공식은?

조합의 공식은 다음과 같습니다

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{nPr}{r!}$$

$${}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2!}$$

- n : 전체 원소 개수
- r : 선택할 원소 개수

즉, 전체에서 r 개를 선택하는 방법의 개수를 구하는 공식 입니다.

조합 예시 : 콤비네이션 피자 토핑 선택

피자를 주문할 때, 여러 가지 토핑 중에서 3가지를 선택 한다고 가정하면 토핑 종류는 치즈, 페퍼로니, 올리브, 버섯, 베이컨 총 5가지가 있습니다.

$${}^5C_3 = \frac{{}^5P_3}{3!}$$

이때, 순서는 중요하지 않으므로 조합을 사용해야 합니다.
예를 들어,

- (치즈, 페퍼로니, 올리브)
- (치즈, 페퍼로니, 버섯)
- (치즈, 페퍼로니, 베이컨)
- ...

Lotto
순서 X
$$\frac{{}^45C61}{8,145,060}$$

같은 조합이라면 순서가 바뀌어도 동일한 선택으로 간주합니다.

즉, (치즈, 페퍼로니, 올리브)와 (페퍼로니, 치즈, 올리브)는 같은 조합 입니다.

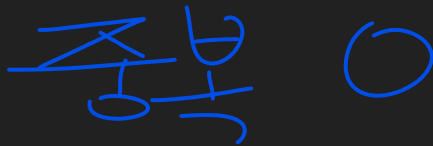
공식 적용

총 5가지 토핑 중 3개를 선택하는 경우의 수는

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

중복 조합(Combination with Repetition)

조합은 기본적으로 중복을 허용하지 않지만 ,
어떤 경우에는 같은 원소를 여러 번 선택할 수도 있습니다.
이때 사용하는 것이 바로 중복 조합입니다.



중복 조합의 공식은 다음과 같습니다.

$$nHr = \underline{n+r-1Cr}$$

이 공식은 n 개의 원소 중에서 r 개를 뽑는데, 중복 선택이 가능할 때 사용합니다.

중복조합 예시 : 아이스크림 고르기

$$20C_{10} = \frac{20P_{10}}{10!}$$

$$11H_n = 11H_{10} = 11+10C_{10}$$

$$\text{각 대기 개수} + 1$$

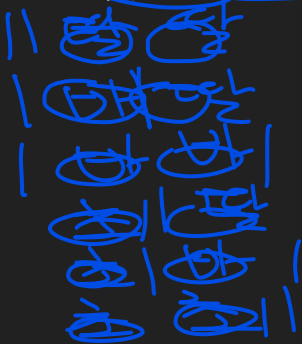
가게에서 초코, 바닐라, 딸기 3가지 맛의 아이스크림을 판매한다고 가정합니다.

이 중에서 2개를 골라서 먹고 싶은데, 같은 맛을 2번 선택해도 된다면?

$$n-1+rC_r$$

가능한 조합은 다음과 같습니다.

- (초코, 초코)
- (초코, 바닐라)
- (초코, 딸기)
- (바닐라, 바닐라)
- (바닐라, 딸기)
- (딸기, 딸기)



$$4C_2 =$$

공식에 대입해보면:

$$C(3 + 2 - 1, 2) = C(4, 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

순열 vs 조합, 차이는?

결국, 순서가 중요하면 순열, 순서가 중요하지 않으면 조합입니다.

구분	순열	조합
순서 중요 여부	✓ 중요함	✗ 중요하지 않음
공식	$P(n,r)=n!/(n-r)!$	$C(n,r)=n!/((n-r)!r!)$
예시	달리기 시합에서 1등, 2등, 3등을 정하기	콤비네이션 피자에서 3가지 토핑을 선택하기

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

