FH Vorarlberg
University of Applied Sciences

Support Vector Machines (SVM)

Computational Intelligence II

Informatik - Software and Information Engineering
Fachhochschule Vorarlberg

Erstellt von
André Hopfgartner & Matthias Rupp

Dornbirn, am 5. März 2021

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

SVM Support Vector Machine

1 Einführung

1.1 Intuition

Ziel: möglichst breites Band zwischen den 2 verschiedenen Klassen aufziehen.

1.2 Mathematische Herleitung

Gegeben sei ein Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^D$, ein Bias $b \in \mathbb{R}$ und ein beliebiger Punkt $x \in \mathbb{R}^D$. Eine Ebene im Raum kann definiert werden durch:

$$w^T x + b = 0 \tag{1.1}$$

Weil Gleichung 1.1 mit verschiedenen Skalarwerten skaliert werden kann, führen wir eine zusätzliche Bedingung ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein. Sei $x_n \in \mathbb{R}^D$ der am nächsten zur Ebene gelegene Punkt so soll gelten:

$$|w^T x_n + b| = 1 \tag{1.2}$$

Als nächsten Schritt bestimmen wir den euklidischen Normalabstand D eines beliebigen Punkts $x_k \in \mathbb{R}^D$ zu der Ebene. Hierfür ist zuerst zu bemerken, dass w normal zur definierten Ebene steht.

Lemma 1.2.1. *Eine Ebene sei definiert durch $w^T x + b = 0$. Der Vektor w steht normal zu der definierten Ebene.*

Beweis. Man wähle zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^D$ die auf der Ebene liegen. Somit muss gelten:

$$\begin{aligned} w^T x_1 + b &= 0 \\ w^T x_2 + b &= 0 \\ w^T(x_1 - x_2) &= 0 \leftrightarrow \|w^T\| \|x_1 - x_2\| \cos(\alpha) = 0 \leftrightarrow \alpha = 90^\circ \end{aligned} \tag{1.3}$$

□

Um den Normalabstand D eines beliebigen Punkts x_k zu ermitteln wählt man einen Punkt x der auf der Ebene liegt und projiziert den Vektor $(x_k - x)$ auf den

Einheitsvektor von w. Weil nur der tatsächliche Abstand zur Ebene relevant ist nimmt man den Betrag.

$$\begin{aligned} D &= |\frac{w^T}{\|w\|}(x_k - x)| = \\ &= \frac{1}{\|w\|}|(w^T x_k - w^T x)| = \\ &= \frac{1}{\|w\|}|(w^T x_k + b - (w^T x + b))| \end{aligned} \tag{1.4}$$

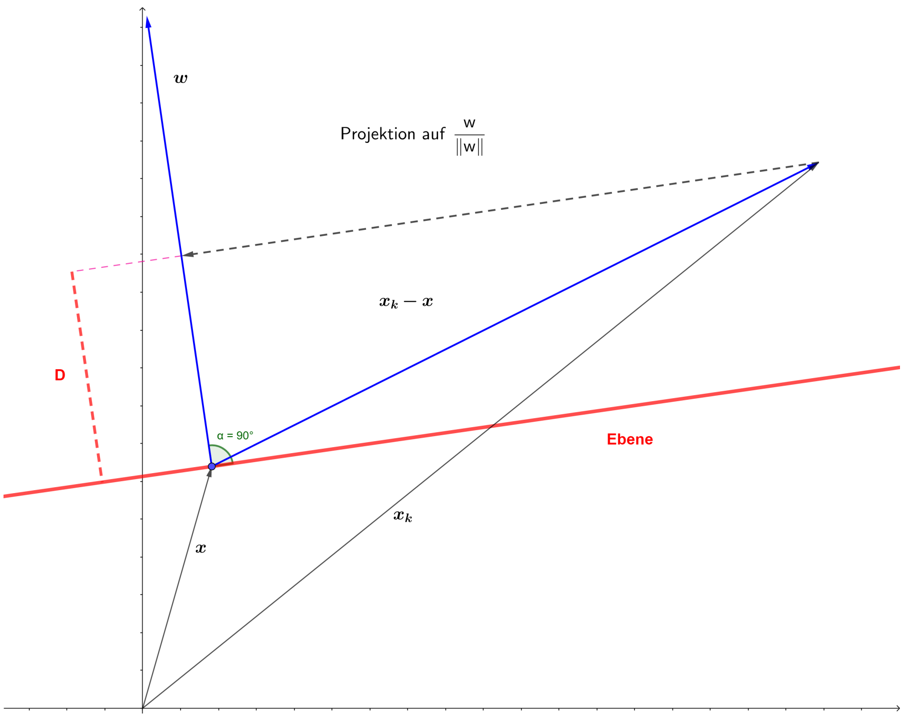

Abbildung 1.1: Durch die Projektion von $(x_k - x)$ auf den Einheitsvektor von w kann der Normalabstand D von x_k zu der Ebene bestimmt werden.

Weil der Punkt x auf der Ebene liegt gilt $w^T x + b = 0$ (Gleichung 1.1):

$$D = \frac{1}{\|w\|}|(w^T x_k + b)| \tag{1.5}$$

Aus Gleichung 1.2 gilt weiters $|(w^T x_k + b)| = 1$ wenn x_k der am nächsten zu der Ebene liegende Punkt ist. Somit ergibt sich der kleinste Abstand zur Ebene als:

$$D = \frac{1}{\|w\|} \tag{1.6}$$