Analyse Numérique - SAGEmath/Python

Ines Abdeljaoued Tej [1]

Travaux pratiques numéro 6

Il s'agit d'abord de tester la notion de problème bien ou mal posé par la voie des matrices bien ou mal conditionnées. Ensuite, il faudra implémenter la factorisation LU et la factorisation de Cholesky et de comparer ses deux factorisations.

1 Matrice bien ou mal conditionnée

Considérons les deux systèmes suivants : $Ax = b$ avec respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 4.218613 & 6.327917 \\ 3.141592 & 4.712390 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10.546530 \\ 7.853982 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 4.218611 & 6.32791 \\ 3.141594 & 4.712390 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10.546530 \\ 7.853980 \end{pmatrix}$$

1. Dessinez les deux droites associées au premier système. Vous remarquerez que le premier système est formé de deux droites presque parallèles. Ainsi, résoudre le système revient à chercher l'intersection de ces deux droites presque parallèles.
2. Résoudre ces deux systèmes et comparer les solutions. Que remarquez-vous ? Il est clair que si on perturbe le deuxième système, l'intersection de ces deux nouvelles droites presque parallèles sera fortement modifié.
3. Calculer le nombre de conditionnement $||A||.||A^{-1}||$ de chacun de ces système. Le conditionnement étant loin de 1, ceci explique les différences des solutions. On parle de problème mal conditionné.

2 Factorisation LU et factorisation de Cholesky

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'algorithme de factorisation LU.

1. `inestej@gmail.com, http://bit.ly/1JEWZiK`

2. Comparer le résultat avec celui de la fonction python qui permet une factorisation LU.
3. En introduisant quelques modifications à l'algorithme précédent, transformez-le pour qu'il calcule une factorisation de Cholesky.
4. Appliquez l'algorithme modifié à la factorisation de la matrice symétrique définie-positive suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Méthodes itératives

Il s'agit de résoudre un système d'équation linéaires par les méthodes développées précédemment (LU, Cholesky, Jacobi, Gradient conjugué).

1. Ecrire les algorithmes de descentes puis de remontée appliqués à des matrices triangulaires (respectivement inférieures et supérieures)
2. Résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Vérifiez que A est symétrique définie-positive. Calculez la factorisation de Cholesky de A puis résoudre le système $Ax = b$.
4. La méthode de Jacobi consiste à calculer la suite $x_{k+1} = Jx_k + D^{-1}b$ avec $J = I_n + D^{-1}A$ et D la matrice diagonale contenant les éléments de la diagonale de A. Appliquez la méthode de Jacobi, en partant de $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. Vous remarquerez que $x_2 = x^*$ la solution du système $Ax = b$.
5. Résoudre le système $Ax = b$ grâce à la factorisaton de Cholesky puis grâce à la méthode de Jacobi, avec $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$