Simulation_SVD

March 26, 2020

0.1 Leçon 2 : SVD

L’imagerie numerique a longtemps ete un exemple d’application de la SVD. Maintenant, il existe des moyens plus elabores et plus efficaces. Reste que la SVD est un outils interessant pour le transfert d’image. Une photo en noir et blanc peut etre assimilee a une matrice A dont les elements correspondent a des niveaux de gris pour les differents pixels qui constituent l’image. Chaque $a_{i,j}$ donne le niveau de gris du pixel (i, j) de l’image : $_{ai,j} \in [0, 1]$ avec par exemple $a_{i,j} = 0$ pour un pixel (i, j) blanc et $a_{i,j} = 1$ pour un pixel $a_{i,j}$ noir.

En mathématiques, le procédé d’algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières (ou SVD, de l’anglais singular value decomposition) d’une matrice est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. Ses applications s’étendent du traitement du signal aux statistiques, en passant par la météorologie.

Le théorème spectral énonce qu’une matrice normale peut être diagonalisée par une base orthonormée de vecteurs propres. On peut voir la décomposition en valeurs singulières comme une généralisation du théorème spectral à des matrices arbitraires, qui ne sont pas nécessairement carrées.

Soit A une matrice $m * n$ dont les coefficients appartiennent au corps K, où K est le corps des réels ou celui des complexes. Alors il existe une factorisation de la forme : $A = U\Sigma V^*$ avec U une matrice unitaire $m * m$ sur K, Σ une matrice $m * n$ dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls, et V^* est la matrice adjointe à V, matrice unitaire $n * n$ sur K. On appelle cette factorisation la `décomposition en valeurs singulières` de A.

- La matrice V contient un ensemble de vecteurs de base Base orthonormale|orthonormés de K^n, dits `d'entrée` ou `d'analyse` ;
- La matrice U contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés de K^m, dits `de sortie` ;
- La matrice Σ contient dans ses coefficients diagonaux les valeurs singulières de la matrice A, elles correspondent aux racines des valeurs propres de A^*A.
- Une convention courante est de ranger les valeurs σ_i par ordre décroissant. Alors, la matrice Σ est déterminée de façon unique par A (mais U et V ne le sont pas).

Existence

Soit A une matrice complexe $m * n$. Alors A^*A est positive semi-définie, donc hermitienne. D’après le théorè

$V^*A^*AV = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où Λ est diagonale, définie positive et de même rang r que A. Pour obtenir U, on considère AA^*.