Université de la méditerrannée Aix-Marseille II

Mémoire de D.E.A.

Mathématiques Discrètes et Fondements de l'Informatique

Étude sur le β-développement et applications

Soutenu par Julien Bernat

Dirigé par Valérie Berthé

Juin 2002

Étude sur le β-développement et applications

Bernat Julien

Table des matières

Introduction

Le but de ce stage est de présenter la notion de β-développement, en faisant une synthèse de résultats classiques sur le sujet, et de montrer le lien avec l'étude des substitutions. Cette notion a été introduite dans [21], et les premiers résultats portant sur le β-développement ont été établis dans [20].

Au lieu de s'attacher à des démonstrations compliquées et techniques, on a préféré se restreindre aux propriétés et démonstrations simples, qui permettent une étude ultérieure plus approfondie du sujet. Nous allons dans un premier temps détailler la construction du β-développement, puis ensuite établir les caractérisations utilisant des automates, ce qui fournit un premier lien avec l'étude des langages et la reconnaissance de langage par automate. Nous verrons également le lien avec la numération des entiers en base β, et enfin on montrera la similarité entre le β-développement et l'écriture fournie par un algorithme détaillé dans [9].

Le point de départ de ce sujet était de détailler le début de l'article [1], dont on trouve ici la plupart des preuves de ses affirmations. Les principaux résultats trouvés peuvent être trouvés dans [13].

Ce sujet m'a été proposé par Valérie Berthé, que je remercie pour sa patience, sa gentillesse et son souci du détail, qui m'a fait découvrir un sujet très intéressant, qui m'a épargné bien des difficultés, et sans laquelle cet article n'aurait pu être écrit.

Un grand merci également à Pierre Hyvernat, pour qui LaTeX n'a plus de secrets, qui s'est montré d'une patience à toute épreuve pour m'initier avec mes petits camarades à ce magnifique (hum ...) logiciel et m'a toujours apporté son aide.

Définitions et notations préalables

Lorsque b désigne un entier naturel, $[\![0\ldots b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à b. Lorsque x désigne un réel positif, on note $[x]$ sa partie entière, et $\{x\}$ sa partie fractionnaire.

Lorsque $\mathcal{A}$ désigne un alphabet, on définit une loi appelée concaténation que l'on note $\circ$ sur $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots finis à lettres dans $\mathcal{A}$. Ainsi $(\mathcal{A}^*,\circ)$ est un monoïde, d'élément neutre le mot vide ε. Lorsque u et v sont des mots sur $\mathcal{A}$ avec u fini, on note uv la concaténation de u avec v, et u^∞ le mot infini obtenu en répétant une infinité de fois le facteur u. On définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ le mot $a_0\ldots a_k$ comme la concaténation de $a_0\ldots a_{k-1}$ et de a_k (avec $a_0\ldots a_{-1}=\varepsilon$).

Lorsque u s'écrit $v0^\infty$, on simplifie l'écriture en omettant l'infinité de zéros apparaissant après le dernier terme non nul de v. Lorsqu'on ne le précise pas, l'écriture u où u est un mot fini désigne le mot infini $u0^\infty$ de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$, sauf mention explicite.

Lorsque u est un mot fini, on note $|u|$ le nombre de lettres de $\mathcal{A}$ constituant u, que l'on appelle taille de u, et $|u|_a$ le nombre d'occurences de la lettre a dans u.

Lorsque $\mathcal{A}$ est un alphabet muni d'un ordre total $<$, on définit sur $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ un ordre total appelé ordre lexicographique, et noté $<_{lex}$, de la façon suivante : u et v étant des mots sur $\mathcal{A}^\mathbb{N}$, on a $u <_{lex} v$ si $\exists k \in \mathbb{N} \;/\; \forall i<k, u_i = v_i$ et $u_k < v_k$. On définit aussi une inégalité large $\leqslant_{lex}$ par : $u \leqslant_{lex} v$ si et seulement si $u=v$ ou bien $u <_{lex} v$.

On définit sur l'ensemble $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ la distance entre deux éléments distincts u et v de la manière suivante : $d(u,v)=n^{-k}$, k étant l'entier vérifiant la propriété $u_k \neq v_k$ et $\forall i<k, u_i=v_i$, et n étant le cardinal de $\mathcal{A}$. Muni de cette distance, $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ est un espace métrique, et la topologie définie est appelée topologie des cylindres (les boules ouvertes pour cette topologie sont appelées cylindres de par leur structure).

On définit sur $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ une application appelée shift ou décalage ; cette application notée S envoie le mot u sur le mot v, les lettres de v étant telles que $\forall i \in \mathbb{N}, v_i = u_{i+1}$. On vérifie aisément que le shift est continu sur $\mathcal{A}^\mathbb{N}$. Un sous-ensemble E de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ sera dit stable par S si pour tout mot u de E, $S(u)$ est un mot de E.

On appelle système dynamique symbolique, ou plus communément sous-shift (de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$) un sous-ensemble fermé stable par S ; ce sous-shift est dit de type fini si les mots de ce sous-shift sont définis en interdisant un nombre fini de facteurs, et il est dit sofique si les mots de ce sous-shift sont ceux reconnus par un automate ayant un nombre fini d'états.

On appelle langage une partie de $\mathcal{A}^*$, que l'on note L. On note $F(L)$ l'ensemble des facteurs des mots de L. Un langage est dit factoriel s'il contient tous ses facteurs, et prolongeable si pour tout a dans L, il existe b et c deux mots de $\mathcal{A}$ tels que bac soit encore un mot de L. Un sous-ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tel que tout facteur d'un mot de cet ensemble soit dans $F(L)$ avec $F(L)$ factoriel et prolongeable est un sous-shift. On dit que ce sous-shift est associé au langage L, et on dit que les mots de $F(L)$ sont admissibles pour ce sous-shift.

On appelle code préfixe une partie X de $\mathcal{A}^*$ qui engendre un sous-monoïde libre de $\mathcal{A}^*$ (tout mot du monoïde engendré par X admet une unique décomposition en mots de X) telle qu'aucun mot de X ne soit préfixe d'un autre mot de X. Notons qu'un ensemble préfixe est un code. Les définitions et propriétés importantes sur ce sujet peuvent être trouvées dans [19].

Si L est un langage de $\mathcal{A}^*$, on appelle relation d'équivalence syntaxique sur $\mathcal{A}^*$ la relation définie par :

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall c, d \in \mathcal{A}^*, (cad \in L) \Leftrightarrow (cbd \in \mathcal{A}^*).$$

Cette relation est compatible avec la concaténation, et on appelle monoïde syntaxique M_L le monoïde quotient de $\mathcal{A}^*$ par cette relation. Un langage est dit rationnel si son monoïde syntaxique est fini, et on prouve qu'un sous-shift est sofique si et seulement s'il est associé à un langage rationnel factoriel prolongeable (ceci est un théorème dont la preuve sort de notre propos, on renvoie le lecteur à [19] pour de plus amples détails).

Si θ est un réel > 1 non entier, on appelle conjugués de Galois de θ les racines autres que θ du polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Z}$. Un nombre θ est dit *nombre de Pisot* si ses conjugués de Galois sont tous de module < 1. Un nombre θ est dit *nombre de Salem* si tous ses conjugués de Galois sont de module $\leqslant 1$, et si l'un des conjugués de Galois au moins est de module 1. Un nombre θ est dit *nombre de Perron* si tous ses conjugués de Galois sont de module $< \theta$.

1 Notion de β-développement

1.1 Numération en base entière, β-développement

Soit b un entier naturel, $b \geqslant 2$. Alors tout entier naturel n admet une unique écriture $\sum_{i=0}^{N} n_i b^i$ vérifiant les conditions :

1. N est l'unique entier qui vérifie $b^N \leqslant n < b^{N+1}$,
2. $\forall i \in [\![0 \dots N]\!], n_i \in [\![0 \dots b-1]\!]$.

L'entier b définit ainsi un système de numération, et est appelé base de ce système de numération. L'entier n est souvent noté $\overline{n_N n_{N-1} \dots n_1 n_0}^b$. Si $b = 10$, on retrouve la notation habituelle $n_N n_{N-1} \dots n_1 n_0$.

Maintenant on peut tout aussi bien développer un réel x compris dans l'intervalle $[0, b[$. Le réel x admet une unique écriture $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i b^{-i}$ sous les conditions :

1. $\forall i \in [\![0 \dots N]\!], x_i \in [\![0 \dots b-1]\!]$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N > n \ / \ x_N \neq b-1$.

Remarque : La condition 2 signifie que la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne devient pas stationnaire sur $b-1$ à partir d'un certain rang. Une écriture qui ne vérifie pas la condition 2 est appelée écriture impropre de n, sinon l'écriture est dite propre. On a associé à tout réel une suite dans $[\![0\dots b-1]\!]^{\mathbb{N}}$. On trouve dans de nombreux ouvrages, dont [10], le résultat suivant :

Proposition 1. *Toute suite de $[\![0\dots b-1]\!]^{\mathbb{N}}$ qui ne se termine pas par une infinité d'occurences de la lettre $b-1$ est la représentation propre d'un unique réel x dans l'intervalle $[0,b[$.*

Autrement dit, on a construit une bijection entre l'ensemble des réels de $[0,b[$ et les suites propres de $[\![0\dots b-1]\!]^{\mathbb{N}}$. Soit à présent β un réel >1 tel que $\beta\notin\mathbb{N}$. Il est légitime de vouloir généraliser la notion de développement en base b en substituant β à b, et de chercher les analogies, et surtout les différences qui apparaissent.

Soit x dans l'intervalle $[0,\beta[$. Une écriture possible de x en base β est $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\beta^{-i}$, dans laquelle on aura choisi les x_i de la façon suivante :

1. $x_0=[x]$,
2. $\forall i\in\mathbb{N}^*, x_i=[\beta^i(x-\sum_{j=0}^{i-1}x_j\beta^{-j})]$.

Cette façon de procéder, qui peut sembler laborieuse, n'est en fait rien d'autre que la généralisation de l'algorithme permettant d'obtenir les chiffres de l'écriture de x dans une base entière. La suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ainsi définie vérifie de plus : $\forall i, x_i\in[\![0\dots[\beta]]\!]$. Cette suite serait définie de manière beaucoup plus naturelle à l'aide d'une itération ; dans ce but on introduit la fonction

$$T_\beta:\mathbb{R}_+\longrightarrow[0,1[, x\longmapsto T_\beta(x)=\{\beta\{x\}\}.$$

Notons que lorsque x sera un élément de $[0,1[$, on a $T_\beta(x)=\{\beta x\}$.

On définit une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ terme à terme par les conditions :

1. $y_0=[x]$,
2. $\forall i\in\mathbb{N}^*, y_i=[\beta T_\beta^{i-1}(x)]$, avec par convention $T_\beta^0(x)=\{x\}$.

Alors : les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont identiques.

Preuve

On a bien évidemment $x_0=y_0$; pour les autres termes, il suffit de montrer par récurrence la propriété :

$$\forall n\in\mathbb{N}, T_\beta^n(x)=\beta^n(x-\sum_{k=0}^{n}y_k\beta^{-k}).$$

Pour $n=0$, cela résulte de la convention, et si l'égalité est vérifiée au rang n, alors

$T_\beta^{n+1}(x)=\{\beta^{n+1}(x-\sum_{k=0\dots n}y_k\beta^{-k})\}$

$T_\beta^{n+1}(x)=\beta^{n+1}(x-\sum_{k=0\dots n}y_k\beta^{-k})-[\beta^{n+1}(x-\sum_{k=0\dots n}y_k\beta^{-k})]$.

Donc : $T_\beta^{n+1}(x)=\beta^{n+1}(x-\sum_{k=0\dots n+1}y_k\beta^{-k})$ par définition de y_{n+1}.

$\square$

Définition 1. *La suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est appelée β-développement de x.*
On note $d_\beta(x)$ le β-développement de x.

Il est évident que cette suite peut aussi être vue comme un mot infini sur l'alphabet $[\![0 \ldots [\beta]]\!]$. Dans la suite, par abus de notation, on fait souvent ce type d'identification qui ne prête pas à confusion.

Remarques : L'algorithme permet en fait une définition a priori valable sur $\mathbb{R}_+$, cependant pour des raisons qui vont rapidement apparaître on souhaite que les composantes du β-développement soient des éléments de $[\![0 \ldots [\beta]]\!]$, ce qui ne sera pas le cas déjà pour $x \geqslant [\beta] + 1$. On se restreint donc pour le moment à $x \in [0 \ldots \beta[$.

De façon générale, dans la littérature, on définit le β-développement sur l'intervalle $[0, 1]$, en omettant le premier terme de la suite puisqu'il est alors toujours nul. Cependant il semble plus logique de ne pas faire cette omission : en effet, on a besoin à quelques reprises d'introduire de nouvelles fonctions ou propositions pour légitimer l'emploi du β-développement sur $[0, \beta[$ (en fait sur $[0, \beta]$ comme nous allons le voir au cours de l'étude), qui apparaîtront dans le théorème 1 et la proposition 11 en particulier.

Définition 2. *On parle de β-développement de x ultimement périodique lorsqu'il existe deux mots finis u et v sur l'alphabet $[\![0 \ldots [\beta]]\!]$ tels que $d_\beta(x) = uv^\infty$. On dit que le β-développement de x est fini si $\exists N \in \mathbb{N}$ / $x_N \neq 0$ et $\forall k > N, x_k = 0$.*

Remarque : Dans ce cas on peut écrire $d_\beta(x) = x_0 x_1 \ldots x_N$ pour simplifier l'écriture.

Remarque : Comme nous le verrons par la suite, contrairement au résultat concernant l'écriture en base entière, il n'y a pas unicité d'une telle écriture pour x en base β si on se contente d'omettre uniquement les développements impropres. Ainsi, si β est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, β a pour polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$: $X^2 - X - 1$, donc on a $d_\beta(1) = 10^\infty$, mais on peut écrire aussi 1 comme 0110^∞ puisque $1 = \beta^{-1} + \beta^{-2}$. De manière plus générale, comme $\sum_{k \in \mathbb{N}} [\beta] \beta^{-k} = [\beta] \frac{\beta}{\beta - 1} > \beta$, on voit aisément qu'il existe toujours une infinité d'écritures possibles pour x en base β, et en gardant notre exemple : $1 = \overline{011}^\beta = \overline{01011}^\beta = \overline{0101011}^\beta = \ldots$ (l'inégalité permet de définir une nouvelle suite en réduisant d'une unité un terme x_k non nul et en augmentant convenablement d'autres termes de rang $> k$, de sorte que la nouvelle suite ait même somme que celle initiale, comme dans l'exemple donné).

Notation 1. *Le sous-ensemble de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ des suites de β-développement de réels dans $[0, \beta[$ est noté $\mathcal{D}_\beta$.*

Les deux propositions suivantes sont issues de [13].

Proposition 2. *Soit $x \in [0, \beta[$, et soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son β-développement. Alors : $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le β-développement de $x \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j \geqslant i} x_j \beta^{-j} < \beta^{1-i}$.*

Preuve

Cela provient du fait que $\forall j \in \mathbb{N}, \beta^j (x - \sum_{i=0}^{j} x_i \beta^{-i}) < 1$ par construction de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

□

Proposition 3. *$\forall x \in [0, \beta[, d_\beta(x)$ est le plus grand développement de x en base β pour l'ordre lexicographique.*

Preuve

Posons $d_\beta(x) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et soit $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un développement de x en base β.
Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} < (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i < k, x_i = s_i$ et $x_k < s_k$.

Ainsi, avec $\sum_{i\geqslant k} x_i\beta^{-i} = \sum_{i\geqslant k} s_i\beta^{-i}$, on a : $\sum_{i\geqslant k+1} x_i\beta^{-i} \geqslant \beta^{-k} + \sum_{i\geqslant k+1} s_i\beta^{-i}$, ce qui est impossible d'après la proposition 2.

□

Proposition 4. *L'application d_β est croissante stricte pour l'ordre lexicographique.*

Preuve

Soient x et y deux réels dans $[0,\beta[$ tels que $y \leqslant x$. On distingue deux cas :

1. Soit on a directement $[y] < [x]$ donc $y_0 < x_0$ et $d_\beta(y) <_{lex} d_\beta(x)$,
2. Soit il existe k tel que $x_0 = y_0, \dots, x_k = y_k$ et $x_{k+1} \neq y_{k+1}$. Donc, pour tout $i \in [\![0\dots k-1]\!], [\beta T_\beta^i(y)] = [\beta T_\beta^i(x)]$, et :
   $T_\beta^k(y) = T_\beta(T_\beta^{k-1}(y)) = \{\beta T_\beta^{k-1}(y)\} = \beta T_\beta^{k-1}(y) - [\beta T_\beta^{k-1}(y)] = \beta T_\beta^{k-1}(y) - [\beta T_\beta^{k-1}(x)]$.

   Comme $T_\beta^k(x) = \beta T_\beta^{k-1}(x) - [\beta T_\beta^{k-1}(x)]$, on a l'équivalence :
   $T_\beta^k(y) \leqslant T_\beta^k(x) \Leftrightarrow \beta T_\beta^{k-1}(y) \leqslant \beta T_\beta^{k-1}(x) \Leftrightarrow T_\beta^{k-1}(y) \leqslant T_\beta^{k-1}(x)$.

   En itérant, on arrive à $T_\beta^k(y) \leqslant T_\beta^k(x) \Leftrightarrow T_\beta^0(y) \leqslant T_\beta^0(x)$, or on a bien $\{y\} \leqslant \{x\}$ puisque par hypothèse $y \leqslant x$ et $[y] = [x]$. Donc on en déduit que $T_\beta^k(y) \leqslant T_\beta^k(x)$, et $y_{k+1} < x_{k+1}$ puisqu'ils sont supposés distincts.

□

Remarque : Si $d_\beta(x) = d_\beta(y)$, on a $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\beta^{-k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k\beta^{-k} = y$, ce qui est une autre façon de traduire l'injectivité de d_β.

On peut même prouver que cette application est continue à droite, pour cela nous allons nous servir d'un lemme :

Lemme 1. *Si on a $\beta T_\beta^k(y) < \lambda + [\beta T_\beta^k(x)]$ et $[\beta T_\beta^{k-1}(y)] = [\beta T_\beta^{k-1}(x)]$ pour λ, x et y des réels, alors on a la relation $\beta T_\beta^{k-1}(y) < \frac{\lambda}{\beta} + \beta T_\beta^{k-1}(x)$.*

Preuve

On a par hypothèse $\beta\{\beta T_\beta^{k-1}(y)\} < \lambda + [\beta\{\beta T_\beta^{k-1}(x)\}]$, donc

$\beta\beta T_\beta^{k-1}(y) < \lambda + [\beta\beta T_\beta^{k-1}(x) - \beta[\beta T_\beta^{k-1}(x)]] + \beta[\beta T_\beta^{k-1}(y)]$.

Or on a supposé que $[\beta T_\beta^{k-1}(y)] = [\beta T_\beta^{k-1}(x)]$, et de plus $\forall a$ et b réels positifs, $[a-b]+b \leqslant a$, d'où $\beta\beta T_\beta^{k-1}(y) < \lambda + \beta\beta T_\beta^{k-1}$, et l'inégalité recherchée.

□

On en déduit :

Proposition 5. *Si x et y sont des réels tels que $x > y$ et $\exists k \ / \ \forall i \leqslant k, x_i = y_i$, alors $x < y + \beta^{-k}$.*

Preuve

En effet, on aura $x_k = y_k$, donc on pourra utiliser le lemme avec $\lambda = 1$, et on pourra itérer le lemme puisque pour tout $i < k$, on a bien $[\beta T_\beta^i(y)] = [\beta T_\beta^i(x)]$ de par l'égalité entre x_i et y_i. Ainsi on arrive à la relation : $\beta\{x\} < \beta^{1-k} + \beta\{y\}$, et avec $[x] = [y]$, $x < y + \beta^{-k}$, et on a bien établi la continuité à droite de d_β.

□

Remarque : On peut prouver que l'application $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\beta^{-k}$, qui est l'inverse de d_β sur $\mathcal{D}_\beta$, est continue et croissante. Bien entendu, d_β n'est pas continue sur $[0,\beta[$, ce qui est logique puisqu'il est impossible d'avoir un homéomorphisme entre $[0,\beta[$ et $d_\beta([0,\beta[)$ d'après les topologies définies sur ces deux ensembles.

Remarquons à ce stade que, bien que l'on ait défini le β-développement pour des réels de $[0,\beta[$ uniquement, on peut parler du β-développement de β, puisque rien n'interdit d'étendre l'algorithme définissant d_β à β, et on obtiendra bien un élément de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$.

Définition 3. *Lorsque $d_\beta(\beta)$ est ultimement périodique, on dit que β est un β-nombre, et lorsque $d_\beta(\beta)$ est fini on dit que β est un β-nombre simple.*

Notons que comme on suppose que β n'est pas un entier, les entiers n'appartiennent pas à la classe des β-nombres, alors que l'on peut écrire b comme $(b-1)^\infty$ dans toute base entière $(b \in \mathbb{N}^*, b \neq 1)$.

Proposition 6. *On peut définir une suite $d_\beta^{lim}(\beta)$ comme la suite limite lorsque x tend vers β (à gauche) du β-développement de x.*

Preuve

Commençons par montrer la convergence du β-développement de x lorsque x tend vers β. Prenons une suite de réels dans $[0,\beta[$, que l'on note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui converge vers β.

D'après la croissance de d_β, on a la propriété suivante : la première composante de chacune des suites $d_\beta(x_k)$ dans $[\![0\dots[\beta]]\!]^\mathbb{N}$ forme une suite croissante dans $[\![0\dots[\beta]]\!]$. Comme $[\![0\dots[\beta]]\!]$ est fini, il existe k_0 tel que pour tout $k > k_0$, $d_\beta(x_k)_0 = d_\beta(x_{k_0})_0$.

Ce procédé itératif définit une suite d'entiers $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, qui nous fournit à l'étape j :
$\exists k_j \ / \ \forall h > k_j, \forall i \in \mathcal{A}_{j+1}, d_\beta(x_h)_i = d_\beta(x_{k_0})_i$.

Ainsi : $\forall h$ et $l > k_j, d(d_\beta(x_h), d_\beta(x_l)) \leqslant 2^{-(j+1)}$, ce qui signifie que cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ qui est compact, donc elle converge.

Il nous reste à voir que la croissance de d_β nous assure que la limite qui est définie ne dépend pas de la suite choisie. En effet, soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers β. Définissons $d_\beta^{lim}(\beta)$ comme la limite de $d_\beta(y_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$. On extrait de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont choisis de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{\phi(k)} > y_k$, ce qui est possible puisque $y_k < \beta$.

Alors on sait que $d_\beta(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Comme toute suite extraite de $d_\beta(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite, et comme la limite de $d_\beta(x_{\phi(k)})$ est $d_\beta^{lim}(\beta)$, on a bien montré que $d_\beta^{lim} * \beta)$ est la limite lorsque k tend vers $+\infty$ de $d_\beta(x_k)$.

□

A partir de la définition de β-développement de β, on peut définir une nouvelle suite, que l'on appellera β-développement impropre de β et que l'on notera $d^*_\beta(\beta)$, de la manière suivante :

1. Si le β-développement de β n'est pas fini, alors $d^*_\beta(\beta) = d_\beta(\beta)$
2. Si $d_\beta(\beta) = x_0x_1 \dots x_N$, alors $d^*_\beta(\beta)$ est $(x_0x_1 \dots x_{N-1}(x_N - 1))^\infty$.

Remarquons dans le deuxième cas que la série associée à la nouvelle suite $d^*_\beta(\beta)$ a pour somme β, donc on a bien défini une β-écriture de β avec $d^*_\beta(\beta) \leqslant_{lex} d_\beta(\beta)$.

Proposition 7. $\forall \beta, d^{lim}_\beta(\beta) = d^*_\beta(\beta)$.

Preuve

Si β n'est pas un β-nombre simple, cela résulte du fait que $d^*_\beta(\beta) = d_\beta(\beta)$ est composé d'une infinité de termes non nuls, donc c'est bien la limite de $d_\beta(x_k)$ pour $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers β.

Si β est un β-nombre simple, posons $d_\beta(\beta) = (a_i)_{i=0\dots N}$, et $x_k = (a_0 \dots a_{N-1}(a_N - 1))^k a_0$. Cette écriture est bien un β-développement d'après la proposition 2. De plus, on a :
$\forall k \in \mathbb{N}, x_k < \beta$ (car β n'est pas entier et $x_k \leqslant [\beta]$). Les kN premières composantes de x_k et de $d^*_\beta(\beta)$ coïncident, donc d'après la proposition 5, on a $\beta < x_k + \beta^{1-kN}$, ce qui signifie que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ vers $d^*_\beta(\beta)$.

□

Exemple : On reprend β la racine >1 du polynôme $X^2 - X - 1$. Elle vérifie la relation $\beta = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta^{-2i}$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \sum_{i=0}^n \beta^{-2i}$ converge bien vers β et son β-développement est $(10)^n1$, ce qui donne directement le β-développement impropre de β : $d^*_\beta(\beta) = (10)^\infty$.

Corollaire 1. *Pour tout* $x \in [0, \beta[, d_\beta(x) <_{lex} d^*_\beta(\beta)$.

Preuve

Si x est un réel $\in [0, \beta[$, il peut être vu comme le premier terme d'une suite strictement croissante convergeant vers β, et la croissance de d_β fournit le résultat.

□

1.2 β-shift

Notation 2. *On appelle β-shift la fermeture topologique de $\mathcal{D}_\beta$, et on note cet ensemble $\mathcal{S}_\beta$.*

Nous allons donc nous intéresser aux structures des ensembles $\mathcal{D}_\beta$ et $\mathcal{S}_\beta$, car nous verrons que $\mathcal{S}_\beta$ possède notamment la propriété d'avoir une caractérisation simple des éléments le constituant. Commençons par démontrer les propriétés suivantes :

Proposition 8. *L'ensemble $\mathcal{D}_\beta$ est stable par S.*

Preuve

Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}_\beta$. Alors il existe $x \in [0, \beta[$ tel que $d_\beta(x) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Maintenant regardons la suite $d_\beta(\beta\{x\})$: on a bien $(d_\beta(\beta\{x\}))_0 = [\beta\{x\}] = (d_\beta(x))_1$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, (d_\beta(\beta\{x\}))_k = [\beta T^{k-1}_\beta\{\beta\{x\}\}] = [\beta T^k_\beta(x)] = (d_\beta(x))_{k+1}$.

□

Proposition 9. *L'ensemble $\mathcal{S}_\beta$ est stable par S.*

Preuve

Soit $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_\beta$. Alors il existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathcal{D}_\beta$ convergente vers u. Quitte à prendre une sous-suite des $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que cette suite vérifie :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![0 \dots k]\!], (x_k)_i = u_i.$

La suite des $\sigma(x_k)$ est donc une suite d'éléments dans $\mathcal{D}_\beta$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i > k$, les suites (x_k) ont les mêmes $i-1$ premiers éléments, ce qui veut dire que $\sigma(x_\beta)$ converge dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vers $S(u)$, donc dans la fermeture de $\mathcal{D}_\beta$, qui est bien par définition $\mathcal{S}_\beta$. Ainsi, $\mathcal{S}_\beta$ est un sous-shift de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

$\square$

Remarques :

1. $d^*_\beta(\beta) \in \mathcal{S}_\beta$ (cet élément est une limite d'élements dans $\mathcal{D}_\beta$),
2. Si $d^*_\beta(\beta) \neq d_\beta(\beta)$, alors $d_\beta(\beta) \notin \mathcal{S}_\beta$ (car $d^*_\beta(\beta)$ est le plus grand mot dans $\mathcal{S}_\beta$, et $d_\beta(\beta) >_{lex} d^*_\beta(\beta)$),
3. $d^*_\beta \notin \mathcal{D}_\beta$ (la somme associée est β, or les éléments de $\mathcal{D}_\beta$ représentent les réels $\in [0, \beta[$).

En vue d'obtenir un diagramme commutatif nous amenant un théorème important concernant le β-développement, on définit l'application : $\tilde{T}_\beta : [0, \beta[\longrightarrow [0, \beta[, x \longmapsto \tilde{T}_\beta(x) = \beta\{x\}$. Alors :

Proposition 10. *$\forall x \in [0, \beta[, \sigma(d_\beta(x)) = d_\beta(\tilde{T}_\beta(x))$, d'où le diagramme suivant, adaptation de celui figurant dans [3] :*

$$\begin{tikzcd}
{[0,\beta[} \arrow[r, "\tilde{T}_\beta"'] \arrow[d, "d_\beta"] & {[0,\beta[} \arrow[d, "d_\beta"] \\
D_\beta \arrow[r, "\sigma"'] & D_\beta
\end{tikzcd}$$

Preuve

Soit x un réel de $[0, \beta[$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son β-développement. Désignons par $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les suites $\sigma(d_\beta(x))$ et $d_\beta(\tilde{T}_\beta(x))$ respectivement. On a immédiatement : $\forall k \in \mathbb{N}, y_k = x_{k+1}$ par définition. Comme $z_0 = [\tilde{T}_\beta(x)] = [\beta\{x\}]$, on a bien $z_0 = x_1$ puisque $T^0_\beta(x) = \{x\}$ par convention, et $\forall k \in \mathbb{N}^*, z_k = [\beta T^{k-1}_\beta(\tilde{T}_\beta(x))] = [\beta T^{k-1}_\beta(\beta\{x\})]$.
Or $x_{k+1} = [\beta T^k_\beta(x)] = [\beta T^{k-1}_\beta(T(x))] = [\beta T^{k-1}_\beta(\{\beta\{x\}\})]$, donc on a bien l'égalité $z_k = x_{k+1}$ puisque $\forall y \in \mathbb{R}_+, T_\beta(y) = T_\beta(\{y\})$.

$\square$

Théorème 1. *On a : $s \in \mathcal{D}_\beta \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S^n(s) <_{lex} d^*_\beta(\beta)$.*

Preuve (On reprend ici celle fournie par [13])

On a déjà vu que $\forall x \in [0, \beta[, d_\beta(x) < d^*_\beta(\beta)$; de plus $\forall n \in \mathbb{N}, S^n(d_\beta(x)) = d_\beta(\tilde{T}^n_\beta(x))$.

Or, d_β étant strictement croissante avec $\beta\{x\} < \beta$, on en déduit que si s est une suite de $\mathcal{D}_\beta$, alors il existe $x \in [0, \beta[$ tel que $s = d_\beta(x)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$S^n(s) = S^n(d_\beta(x)) = d_\beta((\tilde{T}^n_\beta(x)) <_{lex} d^*_\beta(\beta)$.

La réciproque est un peu plus délicate. Posons $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = d^*_\beta(\beta)$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}_\beta$.

Lemme 2. *Si pour tout* $r \in \mathbb{N}$, $(b_n b_{n+1} \dots b_{n+r}) <_{lex} (a_m a_{m+1} \dots a_{m+r})$, *alors* $\sum_{j=n}^{n+r} b_j \beta^{n-j} < \sum_{j=m}^{m+r} a_j \beta^{m-j}$.

Preuve du lemme : on montre la propriété par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$:

1. Si $r = 0$, c'est évident puisque $<_{lex}$ coïncide avec $<$ sur les mots de longueur 1.
2. Supposons que la propriété soit vraie $\forall j \in [\![0 \dots r-1]\!]$, donc $(b_n \dots b_{n+r}) <_{lex} (a_m \dots a_{m+r})$. Si $b_n = a_m$, alors $(b_{n+1} \dots b_{n+r}) <_{lex} (a_{m+1} \dots a_{m+r})$ et on applique directement l'hypothèse de récurrence ; on trouve ainsi la relation souhaitée.

   Si $b_n < a_m$, on utilise le fait que $(b_{n+1} \dots b_{n+r}) <_{lex} (a_0 \dots a_{r-1})$ d'après la caractérisation des $d_\beta(x)$.
   Ainsi : $b_n + \sum_{i=1}^{r} b_{n+i}\beta^{-i} \leqslant b_n + \sum_{i=0}^{r-1} a_i \beta^{-i-1} < b_n + 1 \leqslant a_m \leqslant \sum_{i=0}^{r} a_{m+i}\beta^{-i}$
   (car $\sum_{i=0}^{r-1} a_i \beta^{-i-1} < \beta^{-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \beta^{-i} = 1$), donc on a bien le résultat voulu.

Il ne reste plus qu'à remarquer qu'en passant à la limite, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S^n(s) <_{lex} d^*_\beta(\beta) \Rightarrow \sum_{k \geqslant n} b_k \beta^{n-k} < \sum_{k\geqslant 0} a_k \beta^{-k-1} < \beta.$$

Or d'après la proposition 2 cela équivaut à dire que $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le β-développement d'un réel.

$\square$

Proposition 11. *On a :* $s \in \mathcal{S}_\beta \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, S^n(s) \leqslant_{lex} d^*_\beta(\beta)$.

Preuve

Comme $d^*_\beta(\beta)$ est écrit avec une infinité de termes non nuls, si s vérifie la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, S(s) \leqslant_{lex} d^*_\beta(\beta)$, on peut facilement construire une suite d'éléments de $\mathcal{D}_\beta$ d'après le théorème en tronquant la suite s, donc s est bien la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}_\beta$ ce qui prouve que $s \in \mathcal{S}_\beta$ implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S^n(s) \leqslant_{lex} d^*_\beta(\beta)$. La réciproque provient de la définition de $\mathcal{S}_\beta$.

$\square$

Remarque : Toujours avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = d^*_\beta(\beta)$, on a en particulier :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, (a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}} <_{lex} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $d^*_\beta(\beta) \in \mathcal{S}_\beta$.

Remarque [13] : $d_\beta(\beta)$ ne peut jamais être purement périodique. En effet, supposons par l'absurde que cela soit le cas, donc : $\beta = a_0 + a_1\beta^{-1} + \ldots + a_{n-1}\beta^{1-n} + a_0\beta^{-n} + a_1\beta^{-(n+1)} \ldots$, donc $\beta = a_0 + a_1\beta^{-1} + \ldots + a_{n-1}\beta^{1-n} + \beta^{-n}(a_0 + a_1\beta^{-1} + \ldots) = a_0 + a_1\beta^{-1} + \ldots + (a_{n-1}+1)\beta^{1-n}$.

On se trouve dans l'un des deux cas suivants : soit $a_{n-1}+1 \in \mathcal{A}$ et alors on a écrit β en base β avec un mot $>_{lex} d_\beta(\beta)$, ce qui est absurde, soit $a_{n-1}+1 \notin \mathcal{A}$, ce qui n'est possible que si $a_{n-1} = [\beta] = a_0$. Ainsi on a $a_{n-1}a_0 \dots a_i \leqslant_{lex} a_0 \dots a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0 \dots n-2]\!]$, et avec $a_{n-1} = a_0$, cela implique que $a_i = a_0$ pour tout $i \in [\![1 \dots n-1]\!]$, donc que $\beta = a_0^\infty$ et donc $\beta = [\beta]\frac{\beta}{\beta-1}$, ce qui est absurde.

Proposition 12. *Soit $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels satisfaisant les conditions :*

1. $s_0 \neq 0$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, s_k \leqslant s_0$,
3. $s \neq a_0 0^\infty$ *pour un certain* a_0.

Alors : $\exists! \beta > 1$ solution de l'équation $\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^{-k} = x$.
De plus, $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est exactement $d_\beta(\beta)$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n(s) < s$.

Exemples : On prend la suite 85321^∞, alors il existe β définissant une β-numération avec $d_\beta(\beta) = 85321^\infty$.

On vérifie que le polynôme $X^3 - X - 1$ possède une racine β qui est un nombre de Pisot. Une écriture possible de β en base β est 011 puisque $\beta = \beta^{-1} + \beta^{-2}$, cependant cette écriture n'est pas le β-développement de β puisque $S(011) >_{lex} 011$. Le β-développement de ce nombre est en fait 10001, ce qui provient du fait que le β ici étudié est aussi racine du polynôme $X^5 - X^4 - 1$, et l'écriture 10001 vérifie bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S^n(10001) <_{lex} 10001$.

Si la suite s est 10110, elle ne vérifie pas la condition supplémentaire requise dans la proposition, donc 10110 est une β-écriture d'un certain β qui n'est pas son β-développement.

Preuve

Soit la série entière $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^{k+1}$. Comme on a $|f(x)| \leqslant |x| s_0 \sum_{k\in\mathbb{N}} |x|^k$, le rayon de convergence de cette série est $\geqslant 1$. De plus, les termes de s étant des entiers, la série est croissante et continue sur $[0, 1[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to 1}(f(x)) > 1$ (ou éventuellement $+\infty$) puisque $s \neq 10^\infty$ implique l'existence d'un j tel que $s_j \geqslant 1$. On en déduit bien l'existence d'un unique $x \in]0, 1[$ satisfaisant $\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k x^{k+1} = 1$, ou encore $\beta = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k \beta^{-k}$ et $\beta > 1$ en posant $\beta = \frac{1}{x}$, ce qui termine la première partie de la preuve.

Supposons que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n(s) < s$. On distingue deux cas :

1. Supposons $d_\beta(\beta)$ infini ; on a donc $d^*_\beta(\beta) = d_\beta(\beta)$. Supposons de plus $s \neq d_\beta(\beta)$. Par la proposition 3, on a $d_\beta(\beta) >_{lex} s$, donc par transitivité $\forall n \in \mathbb{N}, d_\beta(\beta) >_{lex} S^n(s)$, et d'après le théorème 1 on a $s \in \mathcal{D}_\beta$, ce qui est absurde puisque la somme associée à s est β, qui n'est pas dans $[0, \beta[$.
2. Supposons que $d_\beta(\beta) = a_0 \dots a_n$, on a alors ou bien $s <_{lex} d^*_\beta(\beta)$ et on applique encore le théorème 1, ce qui nous donne une contradiction, ou bien $d^*_\beta(\beta) \leqslant_{lex} s$. Dans ce dernier cas, comme s ne peut pas être périodique (cela contredirait le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n(s) <_{lex} s$), on peut l'écrire sous la forme :
   $s = (a_0 \dots a_n - 1)^j w$ pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$ (ce qui signifie que $w = S^{j(n+1)}(s)$), en ayant choisi w et j tels que le mot $a_0 \dots a_n - 1$ ne soit pas préfixe de w, autrement dit tel que les $n+1$ premières composantes de s et de w ne soient pas les mêmes. Comme $s \geqslant_{lex} d^*_\beta(\beta)$, avec coïncidence des $n+1$ premières composantes, on a $w \geqslant_{lex} d^*_\beta(\beta)$, mais on a aussi $w \leqslant_{lex} s$, et comme les $n+1$ premières composantes de $d^*_\beta(\beta)$ et de s sont les mêmes, on a forcément que les $n+1$ premières composantes de w sont celles de s, ce qui est absurde par définition de w.

La réciproque est une conséquence directe du fait que si s est exactement $d_\beta(\beta)$ pour un certain $\beta > 1$, alors on a deux possibilités :

1. Si s est fini, on a $s >_{lex} d^*_\beta(\beta)$. On définit alors s^* comme $d^*_\beta(\beta)$; $s^* \in \mathcal{S}_\beta$ et d'après la proposition 11 on a comme voulu $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n(s) \leqslant_{lex} s^* < s$.
2. Si s est infini et $s \in \mathcal{S}_\beta$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, S^n(s) \leqslant s$ avec égalité seulement si s est périodique, mais on a vu précédemment que $d_\beta(\beta)$ ne pouvait pas être périodique.

□

Définition 4. *On dit qu'une suite d'entiers naturels s, finie ou non, de premier terme non nul qui vérifie la propriété :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, S^n(s) <_{lex} s$ *vérifie la condition de Parry.*

Remarque : Comme nous venons de le voir, cette condition assure l'existence d'un β tel que la suite soit égale à $d_\beta(\beta)$, en rajoutant l'hypothèse que s ne soit pas sous la forme $a_0 0^\infty$.

Corollaire 2. *Soit* β *une racine >1 du polynôme* $P(X) = X^m - \sum_{i=1}^m a_i X^{m-i}$*, avec les* $(a_i)_{i \in [\![1 \ldots m]\!]}$ *une suite décroissante de* $\mathbb{N}^*$*, alors* β *est un* β*-nombre simple.*

Preuve

Une β-écriture de β est $a_1 \ldots a_m$, par hypothèse sur les termes de la suite $(a_i)_{i \in [\![1 \ldots m]\!]}$. Cette écriture est pour l'ordre lexicographique plus grande que tous ses shifts, donc on déduit de la proposition prédédente que $d_\beta(\beta)$ est bien $a_1 \ldots a_m$ qui est fini, ainsi β est un β-nombre simple.

□

Corollaire 3. *En conservant les hypothèses du corollaire précédent,* β *est l'unique racine positive du polynôme* P.

Preuve

On voit que le cas $m = 1$ se ramène au cas où β est entier, ce qui ne nous intéresse pas ici. Supposons donc que $m \geqslant 2$. Commençons par remarquer que la dérivée en tout ordre $k < m$ de P en 0 est négative. Si on dérive $m - 2$ fois le polynôme P on se réduit à étudier le polynôme $m(m-1)X^2 - 2a_1(m-1)X - 2a_2$, dont le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ est de la forme suivante, avec x_0 un réel > 0 :

X	0		x_0		$+\infty$
$f(X)$	-	$\searrow$	0	$\nearrow$	+

On voit clairement que si une dérivée k-ème de P est telle que sa dérivée a un tableau de variation de cette forme, alors ce polynôme $P^{(k)}$ a aussi ce tableau de variation, puisque toute dérivée k-ème de P tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit par récurrence : nécessairement, le polynôme P a pour tableau de variation un tableau du même type que celui établi pour sa dérivée $(m-2)$-ème, donc il a exactement une racine positive qui est β.

□

Remarque : On peut même prouver que dans ce cas β est un nombre de Pisot (la démonstration complète est technique, elle nécessite la lecture des articles [6] et [15]).

Remarque : Les corollaires 2 et 3 restent vrais si on suppose que la suite $(a_i)_{i\in[\![1...m]\!]}$ vérifie la condition de Parry, mais par contre dans ce cas β peut ne pas être un nombre de Pisot, comme le prouve l'exemple $X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3$.

Une autre propriété intéressante du β-développement est :

Proposition 13. *Soient α et β des réels > 1, alors : $\alpha < \beta \Leftrightarrow d_\alpha(\alpha) <_{lex} d_\beta(\beta)$.*

Preuve

D'après la proposition précédente, si α et β sont deux réels $>$1 distincts on ne peut avoir $d_\alpha(\alpha) = d_\beta(\beta)$. Supposons donc que l'on ait $d_\alpha(\alpha) >_{lex} d_\beta(\beta)$ et $\alpha < \beta$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k < n$, $a_k = b_k$ et $a_n > b_n$. Or $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{n+k}\beta^{-k} < b_n + 1 \leqslant a_n \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n+k}\beta^{-k}$, la première inégalité provenant du lemme 2, et on conclut directement à une contradiction via l'égalité des $(a_k)_{k=0...n}$ et des $(b_k)_{k=0...n}$.

□

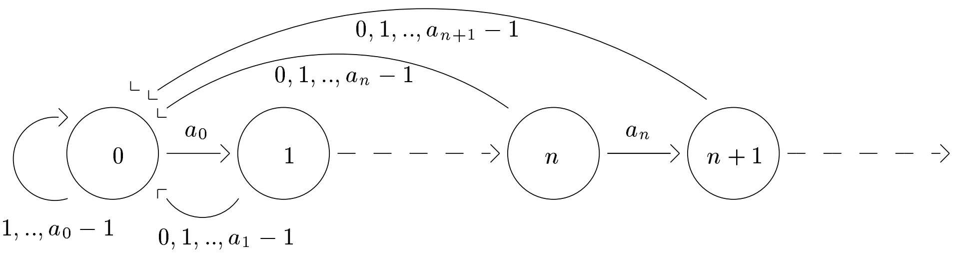
Maintenant que nous avons donné de nombreuses propriétés et caractérisations des ensembles $\mathcal{D}_\beta$ et $\mathcal{S}_\beta$, nous allons regarder quels liens nous pouvons définir avec la reconnaissance par automate d'un langage.

2 Langage associé au β-shift

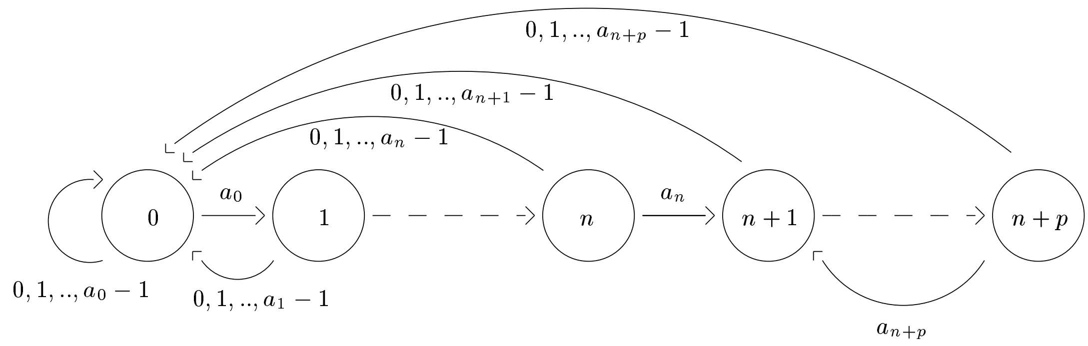
2.1 Automate de reconnaissance

Le théorème 1 et la proposition 11 ouvrent naturellement la voie à la reconnaissance par automates, puisqu'on a la caractérisation suivante des suites constituant le β-développement d'un élément de $[0, \beta]$.

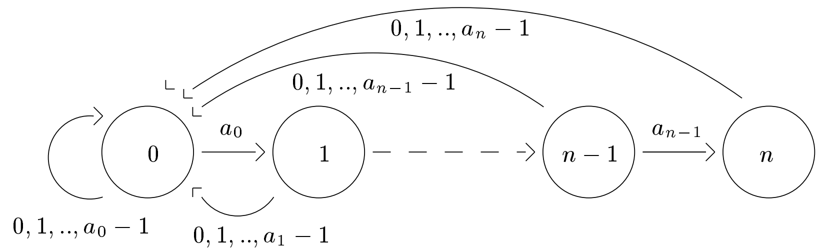
Caractérisation des éléments du sous-shift $\mathcal{S}_\beta$ lorsque β admet pour β-développement $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:



Caractérisation des éléments du sous-shift $\mathcal{S}_\beta$ lorsque β admet pour β-développement $a_0 \dots a_n(a_{n+1} \dots a_{n+p})^\infty$:



Caractérisation des éléments du sous-shift $\mathcal{S}_\beta$ lorsque β admet pour β-développement $a_0 \dots a_n$:



Interprétation des automates : on se donne une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $[\![0 \dots [\beta]]\!]$ et on veut vérifier si elle appartient à $\mathcal{S}_\beta$. On se place en l'état 0, et on lit le premier terme de la suite, qui est inférieur ou égal à $a_0 = [\beta]$. Dans le premier cas, on reste en l'état 0, dans le deuxième, on se place en l'état 1. Dans les deux cas, on passe à la lecture du terme suivant de la suite, sachant que si on est en l'état 1 alors il faut que le nouveau terme de la suite soit inférieur ou égal à a_1, et on poursuit ...

Dans la deuxième caractérisation, une fois arrivé en l'état $n + p$, le terme de la suite que l'on lit à ce moment doit être inférieur ou égal à a_{n+p}, et en cas d'égalité on a fini la lecture d'un bloc $a_n \dots a_{n+p}$ intervenant une infinité de fois consécutivement dans $d^*_\beta(\beta)$, donc on se retrouve en l'état n et on va soit commencer la lecture d'un nouveau bloc en lisant a_n, soit se retrouver en l'état 0 après avoir lu un terme strictement inférieur à a_n qui signifie que la suite que l'on est en train de tester n'est pas $d_\beta(\beta)$.

Dans la troisième caractérisation, une fois arrivé en l'état n, si on lit un terme inférieur ou égal à $a_n - 1$ on revient à l'état 0 puisque l'on vient de tester un bloc de la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui se révèle être inférieur pour l'ordre lexicographique à $(a_0 \dots a_n - 1)$, ce qui est bien une caractérisation souhaitée puisque le β-shift est dans ce cas celui constitué des écritures inférieures pour l'ordre lexicographique à $(a_0 \dots (a_n - 1))^\infty$.

Nous allons voir qu'en réalité, cette caractérisation est associée à la reconnaissance d'un langage, dans lequel les mots seront en fait les facteurs des éléments de $\mathcal{S}_\beta$.

Définissons l'ensemble M par :

1. Si β est un β-nombre simple avec $d_\beta(\beta) = a_0 \dots a_N$,

$$M = \bigcup_{k=0}^{N-1} \{a_0 \dots a_{k-1} i\} \text{ lorsque } \; i \in [\![0 \dots a_k - 1]\!].$$

2. Si $d_\beta(\beta) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a_0 \dots a_{k-1} i\} \text{ lorsque } \; i \in [\![0 \dots a_k - 1]\!].$$

Alors M est un code préfixe qui contient a_k mots de longueur $k+1$. En effet, par construction de M, aucun de ces mots ne peut être préfixe d'un autre mot.

Exemples : Si β est la racine >1 du polynôme $X^2 - X - 1$, on a $M = \{0, 10\}$. Si β est la racine >1 du polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$, on a $M = \{0, 10, 110\}$.

Théorème 2. *[2]*
Le code préfixe M engendre le β-shift $\mathcal{S}_\beta$.

Preuve
Clairement les mots de M sont dans $\mathcal{S}_\beta$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que les mots $b_0 \dots b_{n-1}$ de longueur n dans $\mathcal{S}_\beta$ sont des facteurs de mots dans M^* :

1. Si $n = 1$, on a soit $b_0 < a_0$ et b_0 est un mot de M, soit $b_0 = a_0$ et on distingue deux cas : ou bien il existe $h > 0$ tel que a_h est non nul et alors b_0 est un facteur de $a_0 \dots a_h$, ou bien ce h n'existe pas et dans ce cas β est un entier puisqu'il vérifie $\beta = a_0$, et $d^*_\beta(\beta) = (a_0 - 1)^\infty$, donc a_0 ne fait pas partie de $\mathcal{S}_\beta$, d'où contradiction.
2. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, à savoir tout mot de $\mathcal{S}_\beta$ de longueur inférieure ou égale à n est un facteur d'un mot de M^*. Si $b_0 < a_0$, alors b_0 est un mot de M, $b_1 \dots b_n$ aussi par hypothèse de récurrence et par concaténation $b_0 \dots b_n$ aussi. Si $b_0 = a_0$, et s'il existe $h \leqslant n$ tel que $b_0 \dots b_h = a_0 \dots a_{h-1}(a_h - 1)$, alors $b_0 \dots b_h$ est un mot de M^*, $b_{h+1} \dots b_n$ est de longueur $< n$ et $b_0 \dots b_n$ est bien un facteur d'un mot de M^*. Enfin, si $b_0 \dots b_n = a_0 \dots a_n$, ou bien $\exists h > 0 / a_{n+h} > 0$ et dans ce cas $b_0 \dots b_n$ est facteur de $a_0 \dots a_{n+h-1}(a_{n+h} - 1)$, ou bien un tel h n'existe pas, ce qui signifie que $d_\beta(\beta) = a_0 \dots a_n = b_0 \dots b_n$ et ce mot n'est pas dans $\mathcal{S}_\beta$.

□

Remarque : On dit aussi que le β-shift $\mathcal{S}_\beta$ est codé par M.

Corollaire 4. *$\mathcal{S}_\beta$ est un β-shift de type fini $\Leftrightarrow$ β est un β-nombre simple.*

Preuve
En effet, dire que β est un β-nombre simple équivaut à dire que M est fini, donc nécessairement M engendre un β-shift fini, et si M contient une infinité de facteurs, il ne peut engendrer un β-shift de type fini puisque c'est un code préfixe (tous les mots constituant M sont donc obligatoires, on ne peut les réduire à un ensemble fini qui engendrerait le même langage).

□

Théorème 3. *([2])*
$\mathcal{S}_\beta$ est sofique $\Leftrightarrow$ β est un β-nombre.

Preuve

Commençons par montrer que $\mathcal{S}_\beta$ est sofique implique que β est un β-nombre par contraposition : supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas ultimement périodique. Alors il existe une infinité d'indices $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tels que les suites $((a_{i_j}+n)_{n\in N^*})_{j\in N^*}$ soient toutes distinctes.

Lorsque l'on choisit deux éléments i_j et i_k, on aura ainsi :
$\exists p \in \mathbb{N}$ / $a_{i_j+1}\dots a_{i_j+p-1} = a_{i_k+1}\dots a_{i_k+p-1}$, avec a_{i_j+p} différent de a_{i_k+p}, donc $a_{i_j+p} < a_{i_k+p}$ par exemple. Alors le mot $a_{i_k+1}\dots a_{i_k+p-1}(a_{i_k+p}-1)$ prolonge le mot $a_0\dots a_{i_k}$, mais pas le mot $a_0\dots a_{i_j}$ puisque ce dernier mot serait $>_{lex} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que les mots considérés n'appartiennent pas à la même classe d'équivalence pour la relation d'équivalence syntaxique ; ainsi le monoïde syntaxique du langage $\mathcal{S}_\beta$ est infini et $\mathcal{S}_\beta$ n'est pas sofique.

L'autre sens de l'implication a déjà été démontré, puisque l'on a même fourni de façon explicite les automates de reconnaissance.

□

Diverses autres relations existent entre la nature algébrique de β et la nature du β-shift associé, dont :

Théorème 4. *Si β est un nombre de Pisot, alors $\mathcal{S}_\beta$ est sofique.*

La preuve de ce théorème provient en fait de la proposition suivante :

Proposition 14. *Si β est un nombre de Pisot, alors :*
$d_\beta(x)$ ultimement périodique si et seulement si $x \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Preuve

Le sens $d_\beta(x)$ ultimement périodique implique $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ résulte du fait que si
$d_\beta(x) = a_0\dots a_n(a_{n+1}\dots a_{n+p})^\infty$, alors on a $x = \sum_{i=0}^n a_i\beta^{-i} + \frac{\beta^p}{\beta^p-1}\sum_{i=1}^p a_{n+i}\beta^{-n-i} \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Démontrons que si β est un nombre de Pisot, et x un élément de $\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,\beta]$, alors $d_\beta(x)$ est ultimement périodique.

Soit $P(X)$ le polynôme minimal de β, de degré d, et soient $(\beta_i)_{i=2\dots n}$ les conjugués de Galois de β (on pose $\beta_1 = \beta$). On peut écrire $x = q^{-1}\sum_{i=0}^{d-1} p_i\beta^i$ en choisissant $q \in \mathbb{N}^*$ et les $p_i \in \mathbb{Z}$, avec q minimal pour avoir unicité d'une telle écriture.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le β-développement de x. On a $T_\beta^n(x) = \beta^n(x - \sum_{k=0}^n x_k\beta^{-k})$. On définit de nouveaux termes $r_{j,n}$ en substituant les racines β_j à β dans le membre de droite, ainsi :

$$r_{j,n} = \beta_j^n(q^{-1}\sum_{i=0}^{d-1} p_i\beta_j^i - \sum_{k=0}^{n} x_k\beta_j^{-k}) \text{ pour } j \in [\![1\dots d]\!].$$

Posons $\eta = Max_{j=2\dots d}|\beta_j| < 1$ puisque β est un nombre de Pisot.

Comme $\forall k, x_k \leqslant [\beta]$, on a $|r_{j,n}| \leqslant q^{-1}\sum_{i=0}^{d-1}|p_i|\eta^{n+i} + [\beta]\sum_{k=0}^{n-1}\eta^k$ lorsque $j \neq 1$, avec les $r_{1,n}$ des éléments de $[0,\beta[$, alors $|r_{j,n}|$ reste borné indépendamment de $j \in [\![1,d]\!]$ et de $n \in \mathbb{N}$.

Soit R_n le vecteur de taille d ayant pour composantes les $r_{j,n}$, et B la matrice carrée de taille d telle que $B[i,j] = \beta_j^{-i}$. On notera que B est inversible, puisque les racines β_j sont forcément deux à deux distinctes (sinon P ne serait pas un polynôme minimal !).

On a alors la propriété suivante :

Lemme 3. *Si* $x = q^{-1}\sum_{i=0}^{d-1} p_i\beta^i$*, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! d$*-uplet* Z_n *de coordonnées* $z_{j,n}$ *dans* $\mathbb{Z}^d$ *tel que* $R_n = q^{-1}Z_nB$.

La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

1. Lorsque $n = 0$, on a $r_{0,j} = q^{-1}\sum_{i=0}^{d-1} p_i\beta_j^i$, donc si on prend le vecteur Z_0 ayant pour coordonnées les $(p_i)_{i\in[\![0...d-1]\!]}$, on a bien un vecteur à coordonnées entières tel que $R_0 = q^{-1}Z_0B$
2. Supposons la propriété vraie au rang n. Après un petit calcul préalable, on arrive à établir la relation : $r_{j,n+1} = \beta_j r_{j,n} - \frac{x_{n+1}}{q}$. Si on a pu mettre $r_{j,n}$ sous la forme $q^{-1}\sum_{i=1}^{d} z_{i,n}\beta_j^{-i}$ avec les $z_{i,n} \in \mathbb{Z}$, alors on aura :

   $r_{j,n+1} = q^{-1}(\sum_{i=1}^{d} z_{i,n}\beta_j^{-i+1} - x_{n+1}) = q^{-1}(\sum_{i=2}^{d} z_{i,n}\beta_j^{-i+1} + z_{1,n} - x_{n+1})$, donc

   $r_{j,n+1} = q^{-1}(\sum_{i=1}^{d-1} z_{i+1,n}\beta_j^i + (z_{1,n} - x_{n+1})(\sum_{i=1}^{d} a_i\beta_j^{-i}))$, la dernière égalité provenant du fait que les β_j sont toutes racines du polynôme $X^d - \sum_{i=1}^{d} a_iX^{d-i}$.

   On a bien réussi à obtenir une écriture du type souhaité :

   $$r_{j,n+1} = \sum_{i=1}^{d-1}(z_{i+1,n} + (z_{1,n} - x_{n+1})a_i)\beta_j^i + (z_{1,n} - x_{n+1})a_d\beta_j^d.$$

   Les coefficients sont tous entiers puisque les $(x_i)_{i\in N}$ et $(a_i)_{i\in[\![1...d]\!]}$ sont entiers par définition, et les $(z_{i,n})_{i\in[\![1...d]\!],n\in\mathbb{N}}$ sont entiers par hypothèse de récurrence.

Ainsi, comme B est une matrice inversible, et comme on a prouvé que les quantités $(r_{j,n})_{j\in[\![1...d]\!],n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, le vecteur R_n est borné en norme, ce qui veut dire que le vecteur Z_n l'est aussi, or ce vecteur est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, et toute intersection de $\mathbb{Z}^d$ avec un ensemble borné étant finie, on a nécessairement : il existe m et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $Z_m = Z_{m+p}$, et on en déduit que $r_m = r_{m+p}$. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique, or comme par définition $r_{1,n} = T_\beta^n(x)$, cela signifie que le β-développement de β est ultimement périodique.

□

Comme $\beta \in \mathbb{Q}(\beta)$, on a bien que β nombre de Pisot implique $d_\beta(\beta)$ périodique, ce qui signifie que β est un β-nombre, donc que $\mathcal{S}_\beta$ est sofique, et on a bien prouvé le théorème 4.

Remarque : Une conséquence importante de ce que l'on vient de démontrer est que si l'on sait que β est un nombre de Pisot, alors le fait de connaître son polynôme minimal ne fournit aucune indication a priori sur le β-développement de β ; en revanche ceci implique l'existence d'un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet β comme racine et qui peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes : $P(X) = X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} a_iX^{n-i}$ ou $P(X) = X^{n+p+1} - \sum_{i=0}^{n+p} a_iX^{n+p-i} - X^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_iX^{n-i}$, respectivement si β est un β-nombre simple ou un β-nombre non simple, avec $(a_i)_{i\in[\![0...n-1]\!]}$ une suite telle que n'importe lequel de ses décalages lui soit $<_{lex}$, car cette suite est exactement $d_\beta(\beta)$ si β est un β-nombre simple, sinon il s'agit des $n+p+1$ premières composantes de $d_\beta(\beta)$. On remarque de plus que le degré du polynôme caractéristique peut être arbitrairement grand.

Exemple : soit $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors le polynôme minimal de β est $X^2 - 3X + 1$, qui est le polynôme recherché puisque $d_\beta(\beta) = 21^\infty$ et que ce polynôme peut s'écrire $X^2 - 2X - 1 - X + 2$.

Remarque : Il n'y a pas de lien entre β-nombre simple et nombre de Pisot. En effet, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ est un nombre de Pisot ayant pour β-développement 21^∞ donc c'est un β-nombre qui n'est pas simple, et on vérifie que le polynôme $X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3$ possède une plus grande racine positive qui est donc un β-nombre simple d'écriture 3203, mais ce polynôme est aussi annulé en un réel <-1 donc le β-nombre en question n'est pas un nombre de Pisot.

Dans le cas où les automates sont finis, on peut associer à chacun de ces automates une matrice M_β, que l'on définit terme à terme selon la règle suivante :

Si β est un β-nombre simple, avec $d_\beta(\beta) = a_0 \dots a_n$:

1. $\forall i \in [\![1, n+1]\!], M_\beta[i,1] = a_{i-1}$
2. $\forall i \in [\![1, n]\!], M_\beta[i, i+1] = 1$
3. $M[i,j] = 0$ sur les termes non encore définis.

Si β est un β-nombre (qui n'est pas simple) avec $d_\beta(\beta) = a_0 \dots a_n (a_{n+1} \dots a_{n+p})^\infty$:

1. $\forall i \in [\![1, n+p+1]\!], M_\beta[i,1] = a_{i-1}$
2. $\forall i \in [\![1, n+p]\!], M_\beta[i, i+1] = 1$
3. $M[n+p+1, n+1] = 1$
4. $M[i,j] = 0$ sur les termes non encore définis.

La matrice est construite de telle sorte que le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne désigne le nombre de lettres menant de l'état i à l'état j dans l'automate.

Le polynôme caractéristique de telles matrices est dans le premier cas $X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$, et dans le deuxième cas $X^{n+p+1} - \sum_{i=0}^{n+p} a_i X^{n+p-i} - X^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$. On reconnait exactement les polynômes que l'on a défini dans une remarque précédente, ce qui permet d'établir que β est une racine du polynôme caractéristique des matrices ainsi définies, que l'on peut aussi voir en utilisant les relations $\beta = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^{-i}$ ou $\beta = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^{-i} + \frac{\beta^p}{\beta^p - 1} \sum_{i=1\dots p} a_{n+i} \beta^{-n-i}$, selon que β est un β-nombre simple ou un β-nombre non simple.

Exemples : Prenons l'automate associé à la reconnaissance du β-shift dans lequel β est le nombre d'or. Alors comme $d^*_\beta(\beta) = 10^\infty$, la matrice est ici

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si on regarde maintenant l'automate associé au nombre de Tribonacci, la matrice est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposition 15. *Si β est un β-nombre, alors la matrice M_β est primitive.*

Preuve

On sait (résultat de théorie des graphes, [16]) que l'irréductibilité d'une telle matrice équivaut à la forte connexité du graphe de l'automate, ce qui est le cas ici. Comme de plus ce graphe contient un cycle de longueur 1(car $M_\beta[1,1] \neq 0$), la matrice est aussi acyclique, donc primitive.

$\square$

Corollaire 5. *Si β est un β-nombre, alors β est un nombre de Perron.*

Preuve

En effet, β est une racine positive du polynôme caractéristique associé à M_β ; il s'avère que c'est la plus grande en module, et le théorème de Perron-Frobenius nous assure le résultat par la primitivité de M_β. En effet, la plus grande valeur propre en module est forcément strictement positive, ce qui donne le résultat en utilisant le corollaire 3 lorsque β est un β-nombre simple. Lorsque β n'est pas un β-nombre simple, la preuve est plus compliquée et est établie dans [17] et [8].

$\square$

On note que comme β est une racine du polynôme caractéristique de la matrice, le polynôme minimal de β divise le polynôme caractéristique de la matrice, mais a priori on ne peut pas trouver d'autres relations entre les deux polynômes. Cependant, quand les coefficients du polynôme minimal vérifient la condition de Parry, les deux polynômes coïncident, ce qui est en fait une condition nécessaire et suffisante puisque le polynôme caractéristique de la matrice est le polynôme unitaire de plus bas degré admettant β pour racine et tel que ses coefficients vérifient la condition de Parry.

La réciproque de ce corollaire est fausse, puisqu'on vérifie que le nombre de Perron $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ n'admet pas de β-développement ultimement périodique.

Remarque : En particulier, ce résultat établit que la numération définie par un β rationnel ou racine n-ème d'un entier (par exemple $\frac{3}{2}$ ou $\sqrt{2}$) n'est pas sofique.

2.2 Exemples

Dans l'abondante littérature traitant du β-développement, on trouvera presque systématiquement tous les exemples suivants (certains même on déjà été cités, nous les reprenons dans le seul souci de fixer les idées au lecteur et d'utiliser les théorèmes et propositions établies). Néanmoins leur simplicité permet de mieux comprendre toutes les notions préalablement établies, aussi nous allons une fois de plus faire l'étude des cas suivants : Fibonacci, Tribonacci, et de manière plus générale l'étude des nombres de Pisot d'ordre 2.

Le β-développement du nombre d'or Φ est 110^∞, donc d'après le théorème 3, $\mathcal{S}_\Phi$ est sofique, et c'est même un sous-shift de type fini d'après le corollaire 4. Notons que Φ peut aussi s'écrire en base Φ : 10110^∞, 1010110^∞, ...

Les écritures des mots de $\mathcal{S}_\beta$ sont obtenues à partir du code préfixe $M = \{0, 10\}$. Un mot sur l'alphabet $\{0,1\}$ est un mot de $\mathcal{S}_\beta$ si chaque occurence de 1 est suivie par une occurence de 0 . Il y a un nombre infini de mots interdits, mais cet ensemble est caractérisé par le fait que tous ces mots soient exactement ceux contenant le facteur $\{11\}$.

Le nombre de Tribonacci est la racine >1 de l'équation $X^3 = X^2 + X + 1$. On vérifie aisément que ce nombre, que l'on notera γ, est un nombre de Pisot, et on a : $d_\gamma(\gamma) = 1110^\infty$, donc le β-shift associé est de type fini. Le code préfixe engendrant le β-shift est $\{0, 10, 110\}$ et l'ensemble des mots interdits est exactement l'ensemble des mots contenant le facteur $\{111\}$.

Si β est un nombre de Pisot ayant pour polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ un polynôme de degré 2, alors nécessairement ce polynôme peut se mettre sous la forme $P(X) = X^2 - aX - b$ avec les conditions $a > 0$ et $|b+1| < a$, et lorsque a et b sont entiers, il ne reste que les deux cas suivants à distinguer :

1. Si β est un nombre de Pisot ayant pour polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$: $X^2 - aX - b$ avec a et b entiers positifs, alors on a $d_\beta(\beta) = ab$ et $d^*_\beta(\beta) = (a(b-1))^\infty$. Notons que l'on retrouve ici le cas particulier où β est le nombre d'or.
2. Si β est un nombre de Pisot ayant pour polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$: $X^2 - aX + b$ avec a et b entiers positifs, alors on a $d_\beta(\beta) = (a-1)(a-b-1)^\infty = d^*_\beta(\beta)$ et $d_\beta(\alpha) = 0b$, α étant le conjugué de Galois de β.

Les calculs effectués pour obtenir ces résultats sont assez faciles et ne sont pas très longs, mais ne présentent pas d'intérêt particulier à être exposés ici.

Le plus petit nombre de Pisot est la racine >1 du polynôme $X^3 - X - 1$ (résultat difficile). Remarquons que si l'on désigne par β ce nombre de Pisot, alors on a $\beta = \beta^{-1} + \beta^{-2}$, d'où $1 = \overline{011}^\beta$, or comme $S(011) = 11 >_{lex} 011$ cette dernière écriture ne nous donne pas le β-développement de β qui est en fait 10001 puisque β est aussi racine de $X^5 - X^4 - 1$, avec $d_\beta(\beta) = 10001$. On retrouve bien le fait que dans le cas général, à l'exception de la divibilité, il n'y a pas de lien entre le polynôme minimal de β et le polynôme caractéristique de l'automate de reconnaissance qui fournit l'écriture de $d_\beta(\beta)$.

Une étude exhaustive des β-nombres simples d'ordre 3 a été faite dans [1], où est démontrée la propriété suivante : si β est un β-nombre simple d'ordre 3, alors β est un nombre de Pisot.

De plus, si le polynôme minimal de β est $M_\beta(X) = X^3 - aX^2 - bX - c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$, alors : β est un nombre de Pisot si et seulement si on a simultanément les deux inégalités $|b-1| < a+c$ et $(c^2 - b) < signe(c)(1+ac)$ (comme dans le polynôme minimal le terme constant est non nul, on a soit $c > 0$ et $signe(c) = 1$, soit $c < 0$ et $signe(c) = -1$).

β est un β-nombre simple si et seulement si on se trouve dans l'un des cas suivants :

1. $b \geqslant 0$ et $c > 0$
2. $-a < b < 0$ et $b + c \geqslant 0$
3. $b \leqslant -a$ et $b(k+1) + c(k+2) \leqslant (k-2) - (k-1)a$, où k est l'entier de $[\![2 \ldots a-2]\!]$ qui vérifie, en posant $e_k = 1 - a + \frac{(a-2)}{k}$ l'encadrement $e_k \leqslant b + c < e_{k-1}$.

Les calculs effectués pour obtenir ces résultats sont assez long, pour plus de détails on renvoie à l'article [1].

Des travaux sur les proprieétés des nombres de Pisot et des nombres de Salem ont été effectués respectivement dans [4] et [5], nous ne nous attarderons pas ici sur les résultats établis. On rappelle cependant que savoir si les nombres de Salem sont des β-nombre demeure une question ouverte (on conjecture que cela est vrai).

2.3 Numération sur les entiers

Définition 5. *Une suite $d = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée* échelle de numération *lorsque $d_0 = 1$, et lorsque ses éléments forment une suite d'entiers naturels strictement croissante.*

Il est aisé de voir que tout entier naturel n admet une écriture $n = \sum_{i=0}^{k} n_i d_i$ avec les $(n_i)_{i\in[\![0\dots k]\!]}$ entiers naturels, mais a priori on n'a pas unicité d'une telle écriture. En revanche, le mot $n = n_k \dots n_0$ associé à ce développement est unique si l'inégalité suivante est vérifiée : $\sum_{i=0}^{j} n_i d_i < d_{j+1}$ pour tout j dans $[\![0\dots k]\!]$, avec $n_i \leqslant [\frac{d_{i+1}}{d_i}]$ (on reconnait ici l'utilisation de l'algorithme glouton pour le calcul des n_i, ce qui explique l'unicité du choix de ces entiers). L'ensemble de telles écritures est noté $\mathcal{L}(d)$, et est appelé langage de numération.

Supposons maintenant que notre suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous soit fournie par les relations $d_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i d_{n-i} + 1$, la suite $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition de Parry (dans ce cas, on dit que la suite d est $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Alors :

Proposition 16. *On a : $\mathcal{L}(d) = \{n_k \dots n_0 \in [\![0\dots[\beta]]\!]^{k+1}\ /\ \forall j \leqslant k, n_j \dots n_0 \leqslant_{lex} a_0 \dots a_j\}$.*

Preuve (on suit ici celle donnée dans [18])

Comme la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, elle forme un système de numération. Nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 4. *Si $n = n_k \dots n_0$ et $m = m_k \dots m_0$ sont deux mots de $\mathcal{L}(d)$, alors on a :*
$n_k \dots n_0 \leqslant_{lex} m_k \dots m_0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} n_i d_i \leqslant \sum_{i=0}^{k} m_i d_i$.

En effet, si les deux sommes sont égales, et si les deux mots n et m sont distincts, on prend le plus grand indice i_0 pour lequel n_{i_0} et m_{i_0} diffèrent ; on utilise alors le fait que n et m sont des mots de $\mathcal{L}(d)$ et l'hypothèse sur la construction de la suite d pour parvenir à une contradiction. Le cas d'inégalité se démontre par récurrence sur la taille des mots considérés, en reprenant la démonstration de la preuve du lemme 2, ce qui termine la démonstration de ce lemme.

Soit maintenant $j \in [\![0\dots k]\!]$. Comme $\sum_{i=0}^{j} n_i d_i < d_{j+1}$, on a la relation $\sum_{i=0}^{j} n_i d_i \leqslant \sum_{i=0}^{j} a_i d_{j-i}$ puisque $d_{j+1} = 1 + \sum_{i=0}^{j} a_i d_{j-i}$, ce qui prouve que les mots de $\mathcal{L}(d)$ vérifient bien la condition $n_j \dots n_0 \leqslant_{lex} a_0 \dots a_j$ d'après le lemme précédent. Il nous reste à voir que cette condition caractérise exactement les mots de $\mathcal{L}(d)$.

Fixons n, et montrons par récurrence sur $k \leqslant n$ que le mot $a_{n-k} \dots a_n$ est dans le langage $\mathcal{L}(d)$:

1. Au rang 0, il s'agit de montrer que $a_n \leqslant a_0$, ce qui est le cas puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Parry.
2. Supposons que pour un entier $k \leqslant n$, $a_{n-k+1} \dots a_n$ soit un mot de $\mathcal{L}(d)$ (et donc pour tout $h < k, a_{n-h} \dots a_n$ est aussi un mot de $\mathcal{L}(d)$). L'hypothèse de récurrence appliquée au rang $k-1$ nous donne : $\forall j \leqslant k-1$, $\sum_{i=0}^{j} a_{n-i} d_i < d_{j+1}$. Pour avoir $a_{n-k} \dots a_n$ mot de $\mathcal{L}(d)$, il faut montrer que cette relation est aussi vraie lorsque $j = k$.

   Comme $(a_{m+k})_{k\in\mathbb{N}} <_{lex} (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a nécessairement $a_{n-k} \dots a_n \leqslant_{lex} a_0 \dots a_k$. En cas d'égalité, clairement $a_{n-k} \dots a_n = a_0 \dots a_k$ est un mot de $\mathcal{L}(d)$ puisque $d_{k+1} > \sum_{i=0}^{k} a_i d_{k-i}$ (c'est même l'écriture de $d_{k+1} - 1$), sinon il existe un plus petit entier $p \leqslant k$ tel que $a_{n-k+p} < a_p$.

Si $p = k$, alors $\sum_{i=0}^{k} a_{n-i}d_i = a_n d_0 + \sum_{i=1}^{k} a_{n-i}d_i = a_n d_0 + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}d_i$, donc $\sum_{i=0}^{k} a_{n-i}d_i = (a_n - a_k)d_0 + \sum_{i=0}^{k} a_{k-i}d_i < d_{k+1}$ puisque $a_n < a_k$.

Si $p < k$, alors $a_{n-k+p+1} \ldots a_n$ est dans $\mathcal{L}(d)$ par hypothèse de récurrence. On a ainsi : $\sum_{i=0}^{k} a_{n-i}d_i = \sum_{i=0}^{k-p} a_{n-i}d_i + \sum_{i=k-p+1}^{k} a_{n-i}d_i = \sum_{i=0}^{k-p} a_{n-i}d_i + \sum_{i=k-p+1}^{k} a_{k-i}d_i$. Or on a $a_{n-k+p} \ldots a_n \leqslant_{lex} a_0 \ldots a_k$, ce qui équivaut d'après la propriété précédente à $\sum_{i=0}^{k-p} a_{n-i}d_i \leqslant \sum_{i=0}^{k-p} a_{k-i}d_i$. On peut donc majorer $\sum_{i=0}^{k} a_{n-i}d_i$ par $\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}d_i$, qui est $< d_{k+1}$, et on a bien le résultat voulu.

Comme pour tout entier j le mot $a_0 \ldots a_j$ est dans $\mathcal{L}(d)$, on obtient le résultat souhaité en remarquant que le système de numération préserve l'ordre, donc que les mots inférieurs pour l'ordre lexicographique à $a_0 \ldots a_j$ sont aussi des mots de $\mathcal{L}(d)$ puisqu'ils représentent des entiers plus petits que celui représenté par $a_0 \ldots a_j$.

□

On peut établir alors :

Proposition 17. *Si d est une suite $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette dernière suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, alors $\mathcal{L}(d)$ est un β-shift $\mathcal{S}_\beta$, β étant le réel de β-développement égal à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Preuve (aussi établie dans [18])

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Parry et qu'elle ne devient pas nulle à partir d'un certain rang, elle est bien égale à $d_\beta^*(\beta) = d_\beta(\beta)$ pour un certain β. Comme les mots finis de $\mathcal{L}(d)$ peuvent être vus comme des mots infinis en les concaténant avec 0^∞, on a la même caractérisation des ensembles $\mathcal{S}_\beta$ et $\mathcal{L}(d)$, et le plus grand mot possible du sous-shift est $d_\beta^*(\beta) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par définition.

□

3 Lien avec les substitutions

3.1 Substitutions

Définition 6. *Une substitution σ est une application d'un alphabet $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^* - \{\varepsilon\}$, qui s'étend en un morphisme sur $\mathcal{A}^*$ par la concaténation.*

Tout comme on a préalablement associé une matrice à un automate, on peut aussi définir une matrice, dite matrice d'incidence de la substitution σ et notée M_σ, par la relation : $M_\sigma[i,j] = |\sigma(a_j)|_{a_i}$. On remarque que la taille de la matrice est égale au cardinal de $\mathcal{A}$.

On souhaite faire l'opération inverse, qui consiste à définir une substitution à partir d'une matrice associée à un automate, donc à une β-numération sofique.

Cependant, pour une matrice M donnée à coefficients entiers de taille d, qui est associée à la donnée d'un langage sofique d'après ce qui précède, il y a dans le cas général de nombreuses substitutions distinctes ayant cette matrice pour matrice d'incidence. Mais on peut définir une substitution, que l'on dit substitution canonique de la matrice, de la manière suivante : on commence par munir $\mathcal{A}$ d'un ordre, par exemple en donnant un poids, de façon à pouvoir ordonner complètement les lettres de $\mathcal{A}$ (deux lettres distinctes doivent avoir deux poids différents). Ainsi on peut écrire en ordonnant les lettres par poids : $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_d\}$.

Si $(u_i)_{i \in [\![1 \dots d]\!]}$ désigne la i-ème colonne de la matrice M, on pose $\sigma(a_i) = a_1^{u_1} \dots a_d^{u_d}$. On a bien défini une substitution, et on voit immédiatement que sa matrice d'incidence est M.

Si β est un β-nombre, il permet ainsi de définir une substitution. En effet, le calcul de $d_\beta(\beta)$ permet d'établir la matrice associée à l'automate de reconnaissance des éléments de $\mathcal{S}_\beta$, donc la substitution canonique associée que l'on vient de définir.

Définition 7. *Une substitution est dite de type Pisot si l'une des valeurs propres de sa matrice d'incidence est > 1 et les autres sont de module < 1.*

Remarque : Si une substitution est de type Pisot, alors la plus grande valeur propre en module du polynôme caractéristique de la matrice associée à la substitution est un nombre de Pisot. En revanche, si β est un nombre de Pisot, il ne définit pas forcément une substitution de type Pisot, puisque si le polynôme minimal de β diffère du polynôme caractéristique de la matrice associée à l'automate de reconnaissance des mots de $\mathcal{S}_\beta$, alors on a rajouté des racines dans le polynôme caractéristiques qui a priori n'ont aucune raison de se trouver dans le cercle unité. Par exemple, on sait que le plus petit nombre de Pisot est la racine > 1 du polynôme $X^3 - X - 1$, mais le polynôme caractéristique est $X^5 - X^4 - 1 = (X^3 - X - 1)(X^2 - X + 1)$, et ce dernier admet deux racines complexes de module 1, donc la substitution associée n'est pas de type Pisot. On note au passage que la définition d'une substitution de type Pisot n'équivaut donc pas à demander à ce que l'une des valeurs propres de la matrice d'incidence soit un nombre de Pisot.

Définition 8. *Une substitution est dite primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout a et $b \in \mathcal{A}$, $|\sigma^k(a)|_b \geqslant 1$.*

Exemple : On reprend le cas du nombre de Tribonacci. Soit β la racine telle que $\beta > 1$ du polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$. Alors la substitution σ associée à la matrice d'incidence de l'automate reconnaissant les β-développements est définie sur un alphabet à 3 lettres, que l'on ordonne $a < b < c$, et l'on a : $\sigma(a) = ab, \sigma(b) = ac, \sigma(c) = a$. Cette substitution a été étudiée en particulier par G. Rauzy.

Un résultat plus intéressant est le suivant : au lieu d'associer une matrice à notre substitution, on peut lui associer un graphe, de sorte que la matrice que l'on vient de définir sera en fait la matrice d'incidence du graphe. En effet, la substitution étant définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ ayant pour lettres $(a_i)_{i \in [\![1 \dots n]\!]}$, on définit un graphe à n sommets et on associe un nombre d'arcs allant du sommet a au sommet b égal à $|\sigma(a)|_b$.

3.2 Automate préfixe-suffixe

La substitution σ étant donnée, on peut naturellement définir un automate, appelé automate préfixe-suffixe, de la façon suivante : la substitution étant définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, on commence par définir la liste $(u_k)_{k \in [\![1 \dots n]\!]}$ des mots tels que $u_k = \sigma(a_k)$ pour $k \in [\![1 \dots n]\!]$. Ces mots $(u_k)_{k \in [\![1 \dots n]\!]}$ peuvent se mettre sous la forme pas, a désignant une lettre de $\mathcal{A}$, p et s désignant respectivement les facteurs apparaissant avant et après l'occurence de a considérée, ce qui nous fournit en tout $|u_k|$ décompositions possibles pour chaque mot u_k, puisque la taille de p peut varier entre 0 (si $p = \varepsilon$, alors a est la première lettre de u_k et s le mot u_k dans lequel on a omis la première lettre) et $|u_k| - 1$ (si p est le mot u_k auquel on a retiré la dernière lettre qui est a, et $s = \varepsilon$).

Alors l'automate est constitué de n sommets, et chaque triplet (p, a, s) définit un arc joignant a à b, où b est un élément tel que $\sigma(b) = pas$.

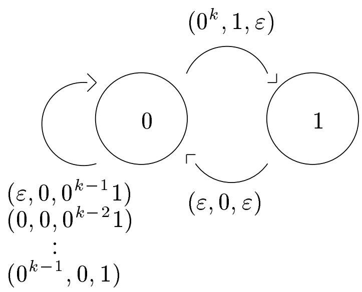
La notion d'automate préfixe-suffixe a été introduite par G. Rauzy ; elle est abordée par A. Siegel dans [11], qui se réfère aux articles [7] et [14].

On remarque qu'un automate préfixe-suffixe peut être vu comme un automate de reconnaissance d'un langage. En effet, il suffit de garder les sommets de ces graphes, et de modifier les arcs orientés (p, a, s) par des arcs ayant mêmes points initiaux et terminaux et renommés x_p, ce nombre désignant la quantité $|p|$.

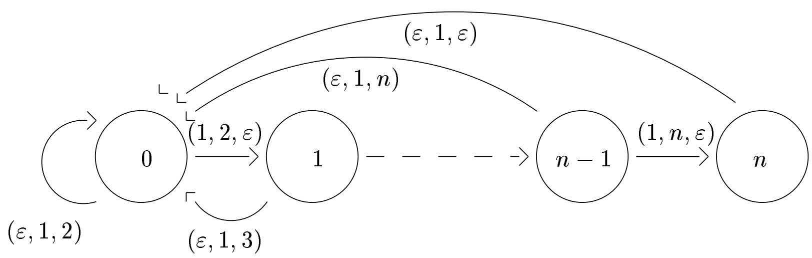
Remarque : La substitution est primitive si et seulement si l'automate préfixe-suffixe est fortement connexe et si le pgcd des cycles le constituant est égal à un. Cette propriété est une conséquence de la définition de la primitivité d'une substitution.

Exemples

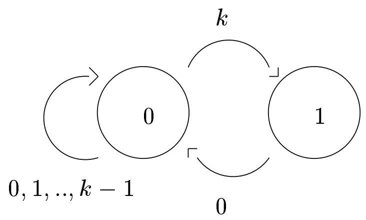
Prenons la substitution σ_1 définie sur l'alphabet $\{0, 1\}$ par $\sigma_1(0) = 0^k 1$ et $\sigma_1(1) = 0$, k étant un élément de $\mathbb{N}^*$. Les triplets (p, a, s) sont ici :
$(\varepsilon, 0, 0^{k-1}1), (0, 0, 0^{k-2}1), \ldots, (0^{k-1}, 0, 1), (0^k, 1, \varepsilon), (\varepsilon, 0, \varepsilon)$ et l'automate préfixe-suffixe est :

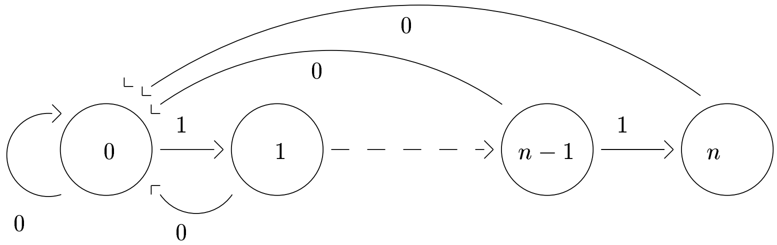


Prenons la substitution σ_2 définie sur l'alphabet $[\![1 \ldots n]\!]$ par $\sigma_2(j) = 0(j+1)$ pour $j \in [\![1 \ldots n-1]\!]$ et $\sigma_2(n) = 1$. Cette substitution est usuellement appelée dans la littérature Multinacci, car elle généralise les substitutions de Fibonacci et Tribonacci lorsque $n = 2$ ou 3. L'automate préfixe-suffixe est ici :



Les automates de reconnaissance pour σ_1 et σ_2 sont respectivement :





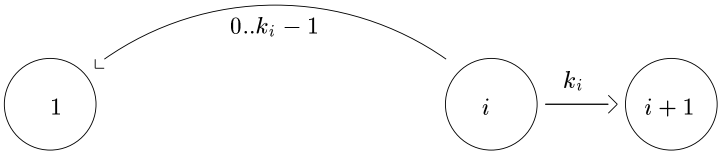
Le plus grand mot reconnu par le premier automate est $(k0)^\infty$, ce mot est supérieur ou égal à ses translatés, et la somme associée à ce mot est $x = k + \frac{1}{x}$, donc x est une racine du polynôme $X^2 - kX - 1$, ce qui signifie d'après un résultat préalable que ce x est un nombre de Pisot, donc un β-nombre, et qu'il définit un β-shift de type fini, ce que l'on peut aisément voir sur son automate associé qui est l'automate que l'on vient de construire.

De même, dans le deuxième automate, le plus grand mot reconnu est $(1^{n-1}0)^\infty$; il désigne le β-nombre simple racine de l'équation $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} X^i$.

Soit σ une substitution définie sur l'alphabet $\{a_1, \dots, a_n\}$ par $\sigma(a_i) = a_1^{k_i} a_{i+1}$ pour $i \in [\![1 \dots n-1]\!]$ et $\sigma(a_n) = a_1^{k_n}$, avec $(k_i)_{i \in [\![1 \dots n]\!]}$ une suite telle que $(k_i)_{i \in [\![1 \dots n]\!]}$ vérifie la condition de Parry. On construit l'automate de reconnaissance associé à l'automate préfixe-suffixe de cette substitution, et on constate qu'il appartient à la famille des automates préalablement construits lors de la caractérisation des β-nombres simples.

Définition 9. *On dit qu'une substitution pouvant se mettre sous cette forme est une substitution simple de Parry.*

On constate de même que les substitutions définies ainsi sont exactement celles qui ont un automate de reconnaissance associé de la même forme que ceux établis lors de la caractérisation des β-nombres simples. On peut aussi voir ceci grâce au fait que dans l'automate de reconnaissance, le morceau



peut exactement être traduit par la relation $\sigma(a_i) = a_1^{k_i} a_{i+1}$.

Dans ce cas, les automates sont ceux reconnaissant les mots d'un β-shift, avec $d_\beta^*(\beta)$ le plus grand mot reconnu qui est $(k_1 \dots k_n - 1)^\infty$, donc $d_\beta(\beta) = k_1 \dots k_n$. Ainsi β est racine du polynôme $X^n - \sum_{i=1}^{n} k_i X^{n-i}$.

De même, on déduit de l'automate de reconnaissance des éléments de $\mathcal{S}_\beta$ lorsque β désigne un β-nombre n'étant pas simple la forme requise pour la substitution :
pour tout $i \in [\![1 \ldots n+p-1]\!]$, $\sigma(a_i) = a_1^{k_i} a_{i+1}$, et $\sigma(a_{n+p}) = a_1^{k_{n+p}} a_{n+1}$.

Cependant, on note que toutes les substitutions sous cette forme ne définissent pas nécessairement un automate de reconnaissance constitué d'un nombre d'états minimal. Prenons par exemple la substitution définie sur $\{a, b, c\}$ par $\sigma_1(a) = aab$, $\sigma_1(b) = ac$, $\sigma_1(c) = ab$. Alors cette substitution fait partie de la famille définie dans la remarque précédente avec $l = 3$ et $j = 2$, la suite $k_1k_2k_3 = 211$ vérifie la condition de Parry, pourtant le plus grand mot reconnu par l'automate de reconnaissance associé à l'automate préfixe-suffixe est 21^∞, qui peut être reconnu par un automate à deux états, qui serait défini sur un alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ par $\sigma_2(a) = aab$ et $\sigma_2(b) = ab$. De même, si on définit σ_3 par $\sigma_3(a) = aab$, $\sigma_3(b) = ac$ et $\sigma_3(c) = ac$, alors l'automate de reconnaissance associé à σ_3 reconnaît les mêmes mots que celui défini par σ_2, donc il ne contient pas un nombre minimal d'états.

Pour définir une substitution associée à un β-nombre non simple, il faut donc rajouter la condition : la substitution étant définie sur un alphabet $a_1 \ldots a_l$, on doit pouvoir écrire le β-nombre associé $a_1 \ldots a_n(a_{n+1} \ldots a_{n+p})^\infty$ avec $l = n + p$, et n et p minimaux. Cette condition n'était bien sur pas respectée dans les deux exemples précédents, puisque l'on avait écrit $2(11)^\infty$ et 211^∞, qui sont aussi des écritures de 21^∞, mais avec p et n non tous deux minimaux (l'existence du couple (n, p) avec n et p minimaux provient du fait que les écritures d'un mot ultimement périodique ont une longueur périodique qui est multiple d'une plus petite longueur p, et une fois ce p établi on trouve la plus petite prépériode, qui est de longueur n).

Définition 10. *On dit qu'une substitution pouvant se mettre sous la forme précédente, vérifiant la condition de minimalité sur n et p est une substitution non simple de Parry.*

Définition 11. *On dit qu'une substitution qui est soit une substitution simple de Parry, soit une substitution non simple de Parry est une substitution de Parry.*

Remarque : La matrice d'incidence de l'automate est primitive, puisque β est alors un β-nombre, donc la substitution est primitive.

Remarque : On a déjà vu que lorsque β est un β-nombre, le polynôme minimal de β est égal au polynôme caractéristique de la matrice associée à l'automate reconnaissant les mots du β-shift si et seulement si les coefficients du polynôme minimal de β vérifient la condition de Parry. On en déduit avec ce qui précède que si on se donne une suite qui vérifie la condition de Parry, elle est associée à un β-nombre, et elle définit un unique automate minimal de reconnaissance du β-shift associé (minimal au sens où il est impossible de trouver un automate ayant strictement moins d'états ou de flèches caractérisant les mots du β-shift), et qu'en revanche si une substitution ne peut se mettre sous l'une des formes préalablement établies, alors ou bien elle ne caractérise pas un β-shift, ou bien elle n'est pas minimale (on peut trouver une substitution avec strictement moins de lettres dont l'automate associé admettra exactement les mêmes éléments).

Exemples : On considère la substitution définie sur $\{a, b\}$ par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = ab$. Alors le plus grand mot reconnu par l'automate de reconnaissance associé est 1^∞, or on sait que le β associé est alors l'entier 2, et les écritures en base 2 peuvent être reconnues à partir d'un automate ayant un seul état, dont la substitution associée serait $\sigma'(a) = aa$, donc cette substitution n'est pas une substitution de Parry.

On considère la substitution définie par $\sigma(a) = ac$, $\sigma(b) = abb$ et $\sigma(c) = ab$, qui n'est pas sous la forme souhaitée. On constate que les valeurs propres de la matrice d'incidence associée sont $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ et 1, et que le polynôme minimal du β-nombre $1+\sqrt{2}$ est $X^2 - 2X - 1$, et ce nombre peut être reconnu par un automate à 2 états, donc l'automate défini par cette substitution n'est pas minimal. Notons que cet automate reconnaît comme plus grand mot 112^∞, qui ne vérifie pas la condition de Parry.

On considère la substitution définie par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = aa$. Alors la suite $(k_i)_{i\in[\![1\dots 2]\!]}$ ne vérifie pas la condition de Parry, et l'automate associé à cette substitution reconnaît les mêmes mots que celui du premier exemple, donc encore une fois on a obtenu un automate qui n'est pas minimal.

On considère la substitution définie par $\sigma(a) = aaab$, $\sigma(b) = aac$ et $\sigma(c) = ab$, alors l'automate préfixe-suffixe de cette substitution a pour automate de reconnaissance associé l'automate défini par le β-nombre (non simple) $3(21)^\infty$. On obtient un β-nombre non simple, puisque la substitution appartient à la deuxième famille définie ($\sigma(a_{n+p}) = a_1^{k_{n+p}}a_{n+1}$, avec ici $n = 1$, $p = 2$, et $k_1k_2k_3 = 321$).

3.3 Algorithme glouton appliqué aux mots

De la même manière que l'on peut, ayant une base de numération, écrire un entier dans cette base de numération, on peut aussi connaissant une substitution σ donner une écriture de tout mot faisant intervenir, non plus une suite d'entiers qui correspond à la base de numération, mais une suite de mots obtenus comme la suite $(\sigma^k(a_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Cette idée a été développée dans [9].

Pour le moment, on se contentera de supposer que la substitution permet de définir un unique point fixe de longueur infinie ; cette condition est bien moins restrictive que de demander à la substitution d'être de Parry. Ainsi, on reste dans un cadre plus général.

Soit n un entier, alors on considère le préfixe de taille n du mot $\sigma^\infty(a_1)$ (qui existe car on suppose que $\sigma(a_1)$ est un mot de taille au moins 2 commençant par a_1, donc il existe un point fixe qui est $\sigma^\infty(a_1)$). Alors il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que w soit facteur de $\sigma^{l+1}(a_1)$ et $\sigma^l(a_1)$ soit facteur de w. Posons $\sigma(a_1) = a_1a_2\dots a_t$, alors on peut écrire de façon plus précise :
$w = \sigma^l(a_1)\dots\sigma^l(a_i)w_1$, avec $i \leqslant t$, et w_1 facteur strict de $\sigma^l(a_{i+1})$ (si $i = t$, alors $w_1 = \varepsilon$). On réitère l'opération jusqu'à avoir une décomposition de w sous la forme
$\sigma^l(p_l)\sigma^{l-1}(p_{l-1})\dots\sigma^1(p_1)p_0$, où les p_i sont tous des préfixes stricts des $\sigma(a)$, $a \in \mathcal{A}$. On note que p_l admet nécessairement a_1 pour préfixe par définition de l'entier l, donc $p_l \neq \varepsilon$.

Exemples : Si la substitution est définie sur $\{a, b\}$ par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$, alors pour $l = 12$ le mot *abaababaabaa* peut s'écrire $abaababaabaa = \sigma^4(a)\sigma^3(\varepsilon)\sigma^2(a)\sigma(\varepsilon)a$, ce qui peut aussi être dit en écrivant $12 = 1 + 3 + 8$, donc on a bien écrit 12 comme somme de facteurs de la suite de Fibonacci sans prendre deux termes de cette suite consécutifs.

Si la substitution est définie par $\sigma(a) = aab$ et $\sigma(b) = a$, alors le mot *aabaabaaabaabaa* s'écrit $\sigma^2(aa)\sigma(\varepsilon)\sigma^0(a)$, et on retrouve bien $15 = \overline{201}$ en numération $\beta = 1+\sqrt{2}$, nombre de Pisot défini par cette substitution.

Nous allons revenir plus en détail sur ces propriétés ; pour cela on va avoir besoin de quelques définitions et lemmes :

Définition 12. *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet de lettres ordonnées $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ et une substitution σ définie sur cet alphabet. On dit qu'une suite finie $(m_i, a_i)_{i \in [\![1 \dots k]\!]}$ de $(\mathcal{A}^* \times \mathcal{A})^k$ est admissible si pour tout $i \in [\![1 \dots k]\!]$, $m_{i-1}a_{i-1}$ est préfixe de $\sigma(a_i)$. La suite est dite a-admissible si de plus $m_k a_k$ est préfixe de $\sigma(a)$.*

Remarque : Les mots m_i pouvant constituer des suites admissibles sont nécessairement des préfixes stricts de mots de la forme $\sigma(b)$, $b \in \mathcal{A}$.

Remarque : Tout comme on peut lire un nombre écrit en base β en suivant un chemin dans l'automate de reconnaissance défini par β, une suite a-admissible peut être vue comme un chemin parcouru dans l'automate préfixe-suffixe, en prenant une substitution définie par β. Par exemple, si β est le nombre de Tribonacci, alors l'écriture $56 = 44 + 7 + 4 + 1$ (on a décomposé 56 en somme de termes de la suite de Tribonacci sans en prendre 3 consécutifs) équivaut à dire que le préfixe du point fixe pour la substitution de Tribonacci ($\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$, $\sigma(c) = a$) de longueur 56 est exactement $\sigma^6(a)\sigma^3(a)\sigma^2(a)a$.

On remarque que la substitution de Tribonacci possède une propriété intéressante : en effet, le nombre N écrit en base de Tribonacci se termine par 0, 1 ou 2 occurences de 0 modulo 3 si le préfixe de longueur N du point fixe se termine par respectivement a, b ou c (cela est vrai pour 0, 1 ou 2 occurence(s) de 0, et parce que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sigma^{i+3}(a) = \sigma^{i+2}(a)\sigma^{i+1}(a)\sigma^i(a)$, donc pour tout préfixe u du point fixe, $\sigma^3(u) = \sigma^2(u)\sigma(u)u$. Il serait particulièrement intéressant de regarder si cette propriété admet une généralisation pour les substitutions de Parry, mais nous ne nous attarderons pas ici sur ce point.

Lemme 5. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $(m_i, a_i)_{i \in [\![0 \dots n]\!]}$ est admissible, alors $\sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| < |\sigma^n(m_n a_n)|$.*

Preuve

Elle se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, c'est évident puisque $|m_0 a_0| = |m_0| + 1 > |m_0|$. Si on suppose la propriété vraie au rang $n-1$, alors $\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(m_j)| < |\sigma^{n-1}(m_{n-1}a_{n-1})|$, donc $\sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| < |\sigma^{n-1}(m_{n-1}a_{n-1})| + |\sigma^n(m_n)|$, or la suite est admissible, donc $|\sigma^{n-1}(m_{n-1}a_{n-1})| \leqslant |\sigma^{n-1}(\sigma(a_n))|$, d'où la relation recherchée.

□

Lemme 6. *Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(a)$ commence par a. Soient N, n et $n' \in \mathbb{N}$ et deux suites a-admissibles $(m_i, a_i)_{i \in [\![0 \dots n]\!]}$ et $(m'_i, a'_i)_{i \in [\![0 \dots n']\!]}$ telles que $m_n \neq \varepsilon$, $m'_n \neq \varepsilon$ et $N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n'} |\sigma^j(m'_j)|$. Alors : $n = n'$.*

Preuve

Par l'absurde, supposons que l'on ait $n' > n$. On a forcément $|\sigma^{n'}(m'_{n'})| \leqslant N$, et $N < |\sigma^n(m_n a_n)|$ d'après le lemme précédent. Alors $N \geqslant |\sigma^n(\sigma(m'_{n'}))| \geqslant |\sigma^n(\sigma(a))|$ (car $m_n a_n$ est préfixe de $\sigma(a)$, avec $m_n \neq \varepsilon$ et a aussi préfixe de $\sigma(a)$). D'où : $|\sigma^n(m_n a_n)| > N \geqslant |\sigma^n(\sigma(a))|$, ce qui est absurde. Le cas $n > n'$ se traite de la même façon.

□

Lemme 7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a \in \mathcal{A}$, deux suites a-admissibles $(m_i, a_i)_{i\in[\![0\ldots n]\!]}$ et $(m'_i a'_i)_{i\in[\![0\ldots n']\!]}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m'_j)|$. Alors pour tout $i \in [\![0 \ldots n]\!]$, on a $(m_i, a_i) = (m'_i, a'_i)$.*

Preuve

Elle se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: lorsque $n = 0$, $|m_0| = |m'_0|$ donc $|m_0 a_0| = |m'_0 a'_0|$ et ce sont tous les deux des préfixes de $\sigma(a)$ donc nécessairement $m_0 = m'_0$. Si le lemme est vrai au rang $n-1$, et si on suppose que $|m_n| \neq |m'_n|$, disons $|m_n| > |m'_n|$, alors m peut s'écrire $m'_n a'_n u$ avec $u \in \mathcal{A}^*$. D'où : $N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| \geqslant |\sigma^n(m_n)| \geqslant |\sigma^n(m'_n a'_n)| > \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)|$, ce qui est absurde. Ainsi $m_n = m'_n$ et $a_n = a'_n$, et comme par hypothèse de récurrence on a l'égalité jusqu'au rang $n-1$ on a bien égalité jusqu'au rang n, ce qui finit la preuve de ce lemme.

□

Lemme 8. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathcal{A}$ et $m \in \mathcal{A}^*$ un préfixe strict de $\sigma^k(a)$. Alors il existe $(m', a') \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}$ et $m'' \in \mathcal{A}^*$ tels que $m'a'$ soit préfixe de $\sigma(a)$, m'' soit préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a')$ et $m = \sigma^{k-1}(m')m''$.*

Preuve

Posons $\sigma(a) = a_1 \ldots a_l$, avec $l \in \mathbb{N}^*$ et les $a_i \in \mathcal{A}$. Si $|m| < |\sigma^{k-1}(a_1)|$, alors m est préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a_1)$ donc $m' = \varepsilon$, $a' = a_1$ et $m'' = m$ conviennent.

Dans le cas où $|m| \geqslant |\sigma^{k-1}(a_1)|$, il existe $j \in [\![1 \ldots l-1]\!]$ tel que $\sum_{h=1}^{j} |\sigma^{k-1}(a_h)| \leqslant |m| < \sum_{h=1}^{j+1} |\sigma^{k-1}(a_h)|$. On pose alors $m' = a_1 \ldots a_j$ et $a = a_{j+1}$, et on vérifie que $\sigma^{k-1}(m')$ est préfixe de m (puisque $a_1 \ldots a_j$ est préfixe de $\sigma(a)$).

On a bien mis m sous la forme $\sigma^{k-1}(m')m''$; de plus, m est préfixe de $\sigma^{k-1}(a_1 \ldots a_l)$ donc m'' est préfixe de $\sigma(a')$, et c'est même un préfixe strict d'après l'inégalité $|m| < \sum_{h=1}^{j+1} \sigma_{k-1}(a_h)$, ce qui signifie que le triplet (m', a', m'') convient.

□

On rappelle que l'on s'intéresse ici aux substitutions σ définies sur un alphabet $[\![1 \ldots n]\!]$, avec a_1 préfixe strict de $\sigma(a_1)$, ce qui implique l'existence d'un unique point fixe commençant par a_1.

Théorème 5. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et une unique suite $(m_i, a_i)_{i\in[\![0\ldots n]\!]}$ tels que :*

1. *cette suite soit a_1-admissible,*
2. *$m_n \neq \varepsilon$,*
3. *$u_1 \ldots u_N = \sigma^n(m_n) \ldots \sigma^0(m_0)$.*

Preuve

Une fois prouvée l'existence d'une suite vérifiant les conditions demandées, on note que les lemmes préalables permettent d'obtenir l'unicité de n (lemme 6), puis des termes (m_i, a_i) (lemme 7).

Soit donc N donné, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sigma^n(a_1)| \leqslant N < |\sigma^{n+1}(a_1)|$. Donc $m = u_1 \ldots u_N$ est préfixe strict de $\sigma^{n+1}(a_1)$ et on peut appliquer le lemme précédent avec $k = n+1$ et $a = 0$, ce qui nous fournit un triplet (m_n, a_n, m'') avec $m_n \neq \varepsilon$ puisque

$|m| = N \geqslant |\sigma^n(a_1)|$. Comme m'' est un préfixe strict de $\sigma_{k-1}(a')$, on réitère l'application du lemme précédent pour obtenir une suite $(m_i, a_i)_{i \in [\![0 \ldots n]\!]}$ qui convient.

□

Remarque : Ces lemmes et ce théorème présentent le grand avantage d'expliquer la construction d'une telle suite, par une méthode qui peut être appelée algorithme glouton appliqué aux mots.

Exemples

Si on prend une substitution de longueur constante b (il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $|\sigma(a)| = b$), alors on a immédiatement $|\sigma^l(a)| = b^l$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, et la représentation que l'on est en train de définir est la représentation usuelle en base b puisque on écrit $N = \sigma_{j=0}^n |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^n b_j l^j$, avec les b_j des éléments de $[\![0 \ldots b-1]\!]$ puisqu'ils représentent la taille des m_j, qui sont tous des préfixes stricts de mots de longueur b, et $b_n \neq 0$ puisque $m_n \neq \varepsilon$.

Si on prend la substitution de Fibonacci ($\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = a$), alors les préfixes stricts possibles sont a et ε ; deux m_i consécutifs ne peuvent être tous deux égaux à a. En effet, si on avait $\sigma^j(a)\sigma^{j-1}(a)$ facteur du mot considéré avec $m_{j+1} = \varepsilon$ (ce que l'on peut toujours supposer en prenant le plus grand j possible), alors si on modifie le triplet (m_{j+1}, m_j, m_{j-1}) qui est (ε, a, a) en $(a, \varepsilon, \varepsilon)$ on a une nouvelle suite a-admissible, ce qui contredit l'unicité de la suite a-admissible établie dans le précédent théorème. On remarque que si le j en question est n, alors une telle hypothèse contredit même l'unicité du n établie par le lemme 6. Ainsi on obtient la représentation en base de Fibonacci en posant $N = \sum_{j=0}^n |m_j| F_j$, F_j désignant le j-ème terme de la suite de Fibonacci.

En reprenant notre premier exemple, c'est-à-dire $m = abaababaabaa$, cela donne $N = 12$, $n = 4$ et la suite $((m_i, a_i))_{i \in [\![0 \ldots 4]\!]}$ est $((a, b), (\varepsilon, a), (a, b), (\varepsilon, a), (a, b))$.

3.4 Extension aux réels

On suppose ici que les hypothèses du paragraphe précédent sont vérifiées, en rajoutant la condition : la substitution considérée est primitive (donc elle nous fournit un nombre de Perron θ). Posons pour $a \in \mathcal{A}$: $h(a) = \lim_{n \to \infty} |\sigma^n(a)| \theta^{-n}$. Cette limite existe, puisque en fait elle désigne à une constante près une composante du vecteur propre normalisé (formé de composantes strictement positives) de la matrice M_σ associé à la valeur propre θ (ce résultat est fourni par le théorème de Perron-Frobenius).

On note que l'on a $h(\sigma(a)) = \lim_{n \to \infty} |\sigma^{n+1}(a)| \theta^{-n} = \theta h(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

On dit qu'une suite infinie $((m_i, a_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est a-admissible ($a \in \mathcal{A}$) si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, m_i est un mot sur $\mathcal{A}$, a_i est une lettre de $\mathcal{A}$, et tel que $m_i a_i$ soit préfixe de $\sigma(a_{i-1})$, et même préfixe strict pour une infinité de valeurs de i (avec $a_0 = a$). Notons que cette définition est la généralisation de l'admissibilité d'une suite finie donnée par la définition 9.

Lemme 9. *Soit $((m_i, a_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite a_0-admissible. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ $r_k = \sum_{j \geqslant k} h(m_j) \theta^{k-j}$. Alors $r_k < \theta h(a_{k-1})$.*

Preuve

Comme les m_k de la suite sont tous des préfixes des $\sigma(a_i)$, ils sont uniforméments bornés, ce qui assure la convergence de la suite puisque $\theta > 1$. Comme pour tout $j \geqslant k$, $m_{j+1}a_{j+1}$ est préfixe de σa_j, on a $h(\sigma(a_j)) = \theta h(a_j) \geqslant h(m_{j+1}) + h(a_{j+1})$, et ainsi :

$$r_k = h(m_k a_k) + \sum_{j \geqslant k+1} (h(m_j a_j) - h(a_j))\theta^{k-j} = h(m_k a_k) - \sum_{j \geqslant k} (\theta h(a_j) - h(m_{j+1}a_{j+1})\theta^{k-j-1}).$$

Cela prouve que que $r_k \leqslant h(\sigma(a_{k-1}))$, et l'égalité implique $r_k = h(m_k a_k)$ et pour tout $j \geqslant k$, $\sigma(a_j) = m_{j+1}a_{j+1}$, ce qui contredit le fait qu'il existe une infinité d'indices pour lesquels $m_{j+1}a_{j+1}$ est préfixe strict de $\sigma(a_j)$.

□

Théorème 6. *Soit $a \in \mathcal{A}$ et x un réel tel que $0 \leqslant x < h(a)$. Alors il existe une unique suite a-admissible $((m_i, a_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} h(m_i)\theta^{-i}$.*

Preuve

Commençons par construire par récurrence une telle suite a-admissible. Au rang 1, comme $0 \leqslant x < h(a)$, on a $\theta x < \theta h(a)$, donc $\theta x < h(\sigma(a))$, ce qui signifie que l'on peut trouver m_1 et a_1 tels que $m_1 a_1$ soit préfixe de $\sigma(a)$ avec $h(m_1) \leqslant \theta x < h(m_1 a_1)$.

Supposons construits les termes $((m_i, a_i))_{i\in[\![1\ldots k]\!]}$ vérifiant la condition $0 \leqslant \theta^k(x - \sum_{i=1}^k h(m_i)\theta^{-i}) < h(a_k)$. Alors $\theta^{k+1}(x - \sum_{i=1}^k h(m_i)\theta^{-i}) < \theta h(a_k)$, or $\theta h(a_k) = h(\sigma(a_k))$, donc il existe m_{k+1} et a_{k+1} tels que $h(m_{k+1}) \leqslant \theta^{k+1}(x - \sum_{i=1}^k h(m_i)\theta^{-i}) < h(m_{k+1}a_{k+1})$ et $m_{k+1}a_{k+1}$ préfixe de $\sigma(a_k)$, ce qui finit la récurrence.

L'unicité d'une telle suite est assurée par la construction algorithmique de cette suite, c'est de plus une conséquence du lemme précédent.

□

Exemple

Si on prend une substitution de longueur constante $\sigma(a) = a^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, alors on a $\theta = k$, $h(a) = 1$ puisque $|\sigma^j(a)| = k^j$, et on écrit x dans $[0, 1[$ sous la forme $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} h(m_i)k^{-i}$ avec $h(m_i)$ un entier de $[\![0\ldots k-1]\!]$, donc on retrouve le développement en base k.

Remarque

Notons que le coefficient $h(m_i)$ n'a en général aucune chance d'être entier. On remarque cependant que si m_i est constitué d'une seule lettre a, alors on peut écrire $h(m_i) = |m_i|h(a)$ et dans ce cas :

$$\frac{x}{h(a)} = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} |m_i|\theta^{-i}.$$

On a déjà pu reconnaître lors de la construction par récurrence de la suite a-admissible l'algorithme initial d'obtention des chiffres de l'écriture de $\frac{x}{h(a)}$ en base θ, et on voit que l'on a la relation $\frac{x}{h(a)} = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} |m_i|\theta^{-i}$.

Proposition 18. *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $|m_i| \leqslant [\theta]$.*

Preuve

Cette inégalité provient du fait que θ est la plus grande valeur propre de la matrice d'incidence associée à la substitution, donc pour tout e_i vecteur canonique, $\frac{||Me_i||}{||e_i||} < \theta$ puisqu'un vecteur propre non nul associé à theta ne peut avoir de composantes nulles d'après le théorème de Perron-Frobenius ; mais la quantité $\frac{||Me_i||}{||e_i||} = ||Me_i||$ représente la taille de $\sigma(a_i)$ puisque c'est la somme des coefficients de la i-ème ligne de M, donc on doit avoir $|m_i| \leqslant \max_{i\in[\![1\ldots l]\!]}(||Me_i||) - 1$, puisque m_i est toujours préfixe strict d'un $\sigma(b)$ pour une certaine lettre b (l désigne bien sur le cardinal de $\mathcal{A}$).

□

On a prouvé que l'écriture précédente de $\frac{x}{h(a)}$ est une écriture en base θ.

Lemme 10. *Si σ est une substitution de Parry, alors pour tout $b \in \mathcal{A}$, $h(b) \leqslant h(a_1)$.*

Preuve

En effet, il suffit de constater que l'on a pour tout $b \in \mathcal{A}$, $|\sigma(b)| \leqslant |\sigma(a_1)|$, puisque pour tout $i \in [\![1\ldots l]\!]$, $|\sigma(a_i)| = 1 + k_i$, et la suite des $(k_i)_{i\in[\![1\ldots l]\!]}$ vérifie la condition de Parry, donc pour tout $i \in [\![1\ldots l]\!]$, $k_i \leqslant k_1$.

□

Théorème 7. *Si σ est une substitution de Parry, alors la θ-écriture de $\frac{x}{h(a_1)}$ est le θ-développement de $\frac{x}{h(a_1)}$.*

Preuve

D'après le lemme précédent, pour tout $b \in \mathcal{A}$, $h(b) \leqslant h(a_1)$, et d'après le lemme 9, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_k = \sum_{j\geqslant k} h(m_j)\theta^{k-j} < \theta h(a_{k-1})$. On en déduit : $\sum_{j\geqslant k} |m_j|\theta^{-j} < \theta^{1-k}\frac{h(a_{k-1})}{h(a_1)}$, donc $\sum_{j\geqslant k} |m_j|\theta^{-j} < \theta^{1-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et la proposition 2 permet d'affirmer qu'alors $(|m_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $m_0 = \varepsilon$ est le θ-développement de $\frac{x}{h(a_1)}$.

□

On a donc prouvé que lorsque β est un β-nombre, le β-développement d'un réel $x < 1$ peut être obtenu à partir de la substitution canoniquement associée à β.

Conclusion

On a pu à travers ce rapport découvrir le lien entre base de numération à pas constant, reconnaissance par automate de langage et substitutions, et selon le problème considéré, le fait de se placer dans l'un de ces cadres permet souvent d'établir des propriétés intéressantes dans les autres.

Étant donné un β-nombre, on peut établir un β-shift, qui définit un langage. Ce β-shift est reconnu par un automate, qui peut être transformé en un automate préfixe-suffixe et définir de façon canonique une substitution primitive dont l'étude du point fixe se ramène en partie à l'étude de β-développements. Réciproquement, sous de bonnes conditions, une substitution définit un β-nombre et une numération dont les propriétés découlent de l'étude de la substitution.

En associant les lettres de l'alphabet à des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut définir par projection des ensembles fractals, dont le plus étudié est sans doute le fractal de Rauzy, obtenu à partir de la substitution de Tribonacci. On renvoie le lecteur à [11] pour l'étude détaillée de cet exemple.

4 Bibliographie

Références

[1] F. Bassino, A characterization of cubic simple beta-numbers, prépublication.

[2] A. Bertrand-Mathis, Développement en base θ, répartition modulo 1 de la suite $(x\theta^n)_{n\geqslant 0}$, langages codes et θ-shift, Bulletin de la société mathématique de France **114** (1986), pp. 271–323.

[3] F. Blanchard, β-expansions and symbolic dynamics, Theoretical Computer Science **65** (1989), pp. 131–141.

[4] D. W. Boyd, On beta expamsions for Pisot nombers, Mathematics of computation **214** (1996), volume 65, pp. 841–860

[5] D. W. Boyd, On the beta expansion for Salem numbers of degree 6, Mathematics of computation **214** (1996), volume 65, pp. 861–875

[6] A. Brauer, On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle, Math. Nachr. **4** (1951), pp. 250–257.

[7] V. Canterini - A. Siegel, Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive, J. Théor. Nombres (Bordeaux).

[8] M. Denker - C. Grillenberg - K. Sigmund, Ergodic theory on compact space, Lecture Notes in Mathematics (1976, Berlin), Springer, Volume 527.

[9] J-M. Dumont - A. Thomas, Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions, Theoretical Computer Science **65** (1989), pp. 153–169.

[10] S. Eilenberg, Automata, langages and machines vol. A, London Academic Press (1974).

[11] P. Fogg, Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics.

[12] C. Frougny - B. Solomyak, Finite beta-expansions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **12** (1992), pp. 713–723.

[13] C. Frougny, Numeration systems, in Algebraic combinatorics on words, pp. 203–236.

[14] C. Holton - L. Q. Zamboni, Directed graphs and substitutions, Theory Comput. Syst.

[15] A. Hurwitz, Mathematische Werke (1933), pp. 626–631.

[16] D. Lind - B. Marcus, An introduction to symbolic dynamics and coding, Cambridge University Press.

[17] D. Lind, The entropies of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers, Ergodic Theory Dynamical Systems **4** (1984), pp. 283–300.

[18] N. Loraud, β-shift, systèmes de numération et automates, prépublication.

[19] Lothaire, Algebraic combinatorics on words.

[20] W. Parry, On the β-expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **11** (1960), pp. 401–416.

[21] A. Rényi, Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8** (1957), pp. 477–493.