notebook2

April 5, 2016

```
<h1>Introdução histórica</h1>
    <p>Historicamente falando a FFT tem sua peculiaridade,começando em 1805 quando Gauss tentou traçar a
    <hr>

<h1>Transformada de Fourier</h1>

   <p> A motivação para a transformada de Fourier veio com o estudo da série de Fourier. No estudo da sé
   <img src="img.gif" alt="Smiley face"> <div style="text-align:center">caso a imagem não apareça, aces
   <p>No primeiro frame da animação, a função $\textit{f}$ é solucionada usando a série de Fourier : co
```

Teste da transformada rápida de Fourier (FFT)

Nessa parte do trabalho iremos testar como o cálculo da FFT irá se comportar com as bibliotecas **Numpy** e **Scipy**. Cooley e Tukey mostraram que é possível dividir a DFT em duas partes similiares. Portanto pela pela definição da DFT teremos:

$$y[k] = \sum_{n=0}^{\text{N-1}} W_n x[n]$$

$$W_n = e^{-2\pi j \frac{km}{N}}$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot e^{-i\ 2\pi\ k\ (2m)\ /\ N} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot e^{-i\ 2\pi\ k\ (2m+1)\ /\ N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot e^{-i\ 2\pi\ k\ m\ /\ (N/2)} + e^{-i\ 2\pi\ k\ /\ N} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot e^{-i\ 2\pi\ k\ m\ /\ (N/2)}$$

Concluindo que dessa forma, podemos obter uma forma de calcular a FFT. Iremos calcular a FFT de um vetor com 4096 valores aleatórios usando as bibliotecas propostas e assim iremos analisar o tempo de compilação de cada.

```
In [56]: #Definindo as Bibliotecas que iremos usar
         import cmath as mt
         from tabulate import tabulate
         import time
         import scipy as sc  #criando um objeto sc da classe scipy
         import numpy as nm  #criando um objeto nm da classe numpy
         import matplotlib.pyplot as plt #criando um objeto plt da classe matplotlib.pyplot
         %matplotlib inline
         import random
         import warnings
         warnings.filterwarnings('ignore')
```

In [57]:
```
#-----------------Definindo quais serão os 4096 números------------------

N = 4096 #tendo 4096 amostras
x=[[int(1000*random.random()) for i in range(N)]]  #Gerando 4096 amostras com N variando de 0-


#-----------------Usando o Scipy para FFT------------------

start_time = time.time()
y=sc.fft(x)
timeScipy=(time.time() - start_time)
print("Para o Scipy teremos o tempo de %s segundos ---" % timeScipy)

#-----------------Usando o Numpy para FFT------------------

start_time = time.time()
y1=nm.fft.fft(x)
timeNumpy=(time.time() - start_time)
print("Para o NUmpy teremos o tempo de %s segundos ---" % timeNumpy)
```

```
Para o Scipy teremos o tempo de 0.0010008811950683594 segundos ---
Para o NUmpy teremos o tempo de 0.0009996891021728516 segundos ---
```

In [58]:
```
start_time = time.time()
N=4096
#vetor que irá conter todos os nossos valores
x=[]
#vetor que vai conter todos os valores das  posições pares
par=[]
#vetor que vai conter todos os valores das  posições impares
impar=[]
#vetor que irá conter o valor final da nossa FFT
vetorFinal=[]
k=0
for i in range(N):
    x.append(int(1000*random.random()))
for i in range(N):
    aux=k%2
    if aux == 0:
        par.append(x[k])
    if aux == 1:
        impar.append(x[k])
    k=k+1
tamanhoPar=len(par)
tamanhoImpar=len(impar)
k2=0
for i in range(tamanhoPar):
    par[i]=par[i]*mt.exp(-1j*2*mt.pi*k2/tamanhoPar) + mt.exp(-1j*mt.pi/N)
    for j in range(tamanhoImpar) :
        impar[j]=par[i]*impar[j]*mt.exp(-1j*2*mt.pi*k2/tamanhoImpar)
    k2=k2+1

vetorFinal=nm.concatenate((par,impar),axis=0)
timeMyFFt=(time.time() - start_time)
print("Para a código de FFT que desenvolvemos teremos o tempo de %s segundos ---" % timeMyFFt)
```

```
Para a código de FFT que desenvolvemos teremos o tempo de 5.602217435836792 segundos ---
```

Teste da transformada rápida de Fourier inversa (IFFT)

Nessa parte do trabalho iremos testar como o cálculo da IFFT irá se comportar com as bibliotecas **Numpy** e **Scipy** Cooley e Tukey mostraram que é possível dividir a IDFT em duas partes similiares. Pela definição da IDFT teremos:

$$y[k] = \frac{1}{N} \times \sum_{n=0}^{\text{N-1}} W_n x[n]$$

$$W_n = e^{2\pi j \frac{km}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \times \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot e^{i\ 2\pi\ k\ (2m)\ /\ N} + \frac{1}{N} \times \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot e^{i\ 2\pi\ k\ (2m+1)\ /\ N}$$

$$= \frac{1}{N} \times \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot e^{i\ 2\pi\ k\ m\ /\ (N/2)} + e^{i\ 2\pi\ k\ /\ N} \frac{1}{N} \times \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot e^{i\ 2\pi\ k\ m\ /\ (N/2)}$$

Concluindo que dessa forma, podemos obter uma forma de calcular a IFFT. Iremos calcular a IFFT de um vetor com 4096 valores aleatórios usando as bibliotecas propostas e assim iremos analisar o tempo de compilação de cada.

```
In [59]: #-----------------Definindo quais serão os 4046 números------------------

         N = 4096 #tendo 4046 amostras
         x=[[int(1000*random.random()) for i in range(N)]]  #Gerando 4046 amostras com N variando de 0-


         #-----------------Usando o Scipy para IFFT------------------

         start_time = time.time()
         y=sc.ifft(x)
         timeScipy2=(time.time() - start_time)
         print("Para o Scipy teremos o tempo de %s segundos ---" % timeScipy2)

         #-----------------Usando o Numpy para IFFT------------------

         start_time = time.time()
         y1=nm.fft.ifft(x)
         timeNumpy2=(time.time() - start_time)
         print("Para o NUmpy teremos o tempo de %s segundos ---" % timeNumpy2)
```

```
Para o Scipy teremos o tempo de 0.0014994144439697266 segundos ---
Para o NUmpy teremos o tempo de 0.0015010833740234375 segundos ---
```

```
In [60]: start_time = time.time()
         N=4096
         #vetor que irá conter todos os nossos valores
         x=[]
         #vetor que vai conter todos os valores das  posições pares
         par=[]
         #vetor que vai conter todos os valores das  posições impares
         impar=[]
         #vetor que irá conter o valor final da nossa FFT
         vetorFinal=[]
```

```
k=0
for i in range(N):
    x.append(int(1000*random.random()))
for i in range(N):
    aux=k%2
    if aux == 0:
        par.append(x[k])
    if aux == 1:
        impar.append(x[k])
    k=k+1
tamanhoPar=len(par)
tamanhoImpar=len(impar)
k2=0
for i in range(tamanhoPar):
    par[i]=1/N*par[i]*mt.exp(-1j*2*mt.pi*k2/tamanhoPar) + mt.exp(-1j*mt.pi/N)
    for j in range(tamanhoImpar) :
        impar[j]=1/N*par[i]*impar[j]*mt.exp(-1j*2*mt.pi*k2/tamanhoImpar)
    k2=k2+1

vetorFinal=nm.concatenate((par,impar),axis=0)
timeMyIFFt=(time.time() - start_time)
print("Para a código de IFFT que desenvolvemos teremos o tempo de %s segundos ---" % timeMyIFF
```

```
Para a código de IFFT que desenvolvemos teremos o tempo de 6.79473876953125 segundos ---
```

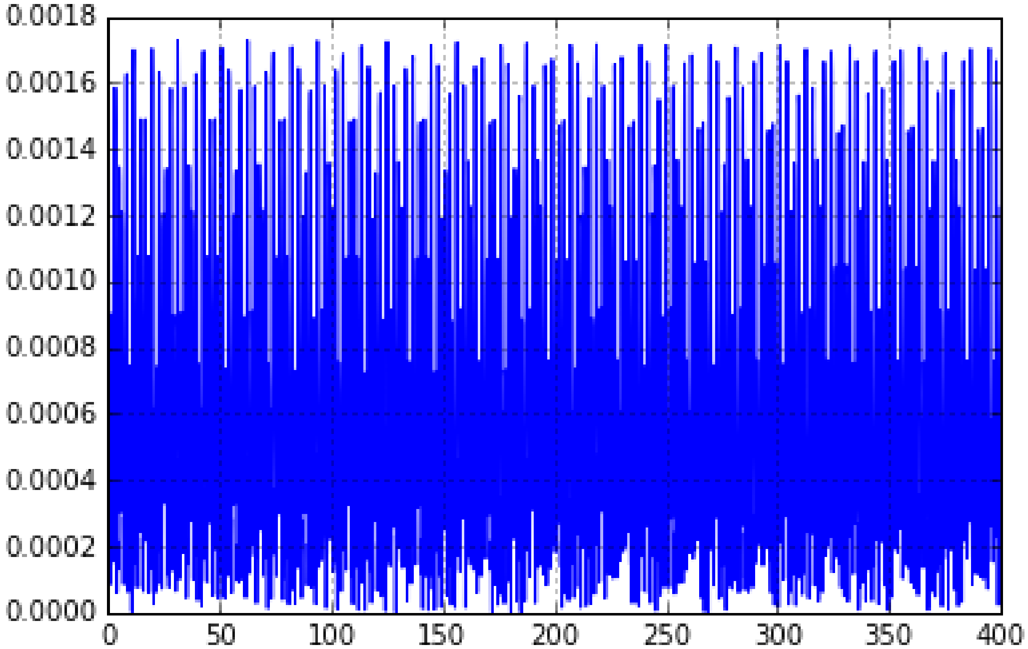
0.1 # Exemplo

Para poder exemplificar o uso da FFT e da IFFT de uma forma ainda mais clara, iremos utilizar a soma de dois cossenos,onde:

$$2 \times \cos(30x \times 5\pi) + 1.54 \times \sin(20x \times 2\pi)$$

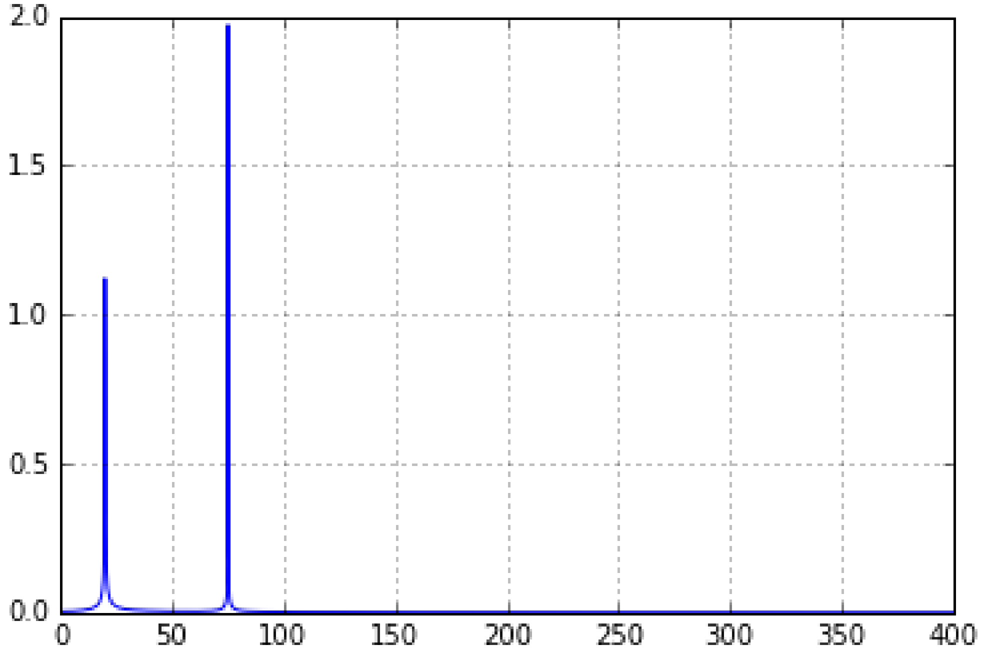
Teremos $N = 4096$ amostras aleatórias e um período de $T = \frac{1}{800}$, assim poderemos testar como o **Scipy** e o **Numpy** irão trabalhar com a parte matemática e gráfica do resultado. Lembrando que anteriormente testamos as duas bibliotecas para calcular a FFT e a IFFT de um vetor com 4096 valores aleatórios.

```
In [61]: N = 4096
         T = 1.0 /800.0
         x = nm.linspace(0.0, N*T, N)
         y = 2*nm.cos(5*nm.pi*(30*x) ) + 1.54*nm.cos(2*nm.pi*(20*x) )

         xf = nm.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)
         plt.plot(xf, 2.0/N * nm.abs(y[0:N/2]))
         plt.grid()
         plt.show()
```



Usando FFT
Resolução do exemplo usando scipy

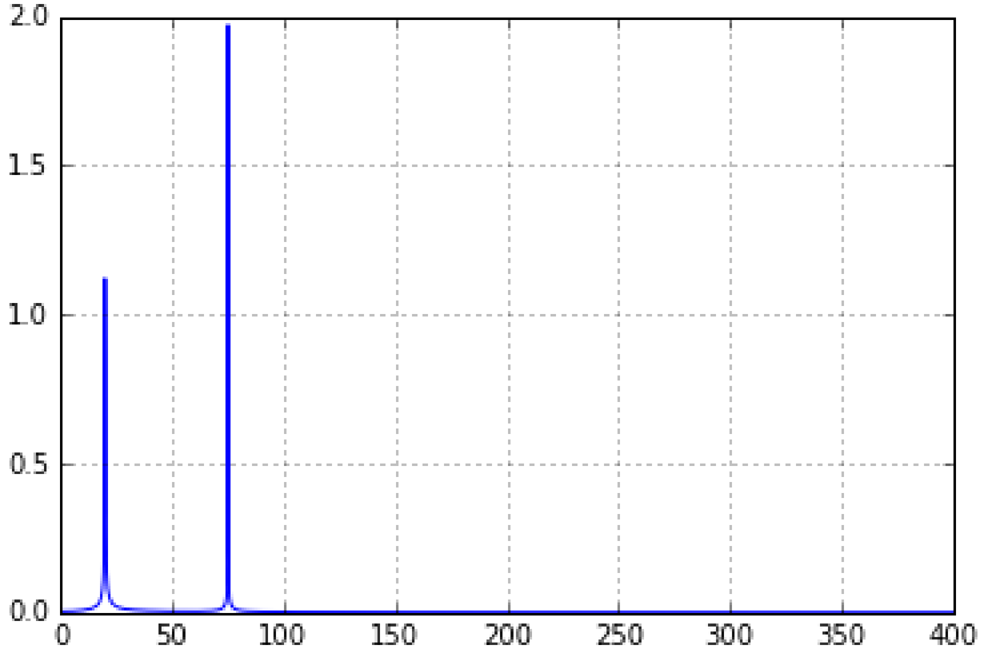
In [62]:
```
start_time = time.time()
N = 4096
T = 1.0 / 800.0
x = sc.linspace(0.0, N*T, N)
y = 2*nm.cos(5*nm.pi*(30*x) ) + 1.54*nm.cos(2*nm.pi*(20*x) )
yf = sc.fft(y)
xf = sc.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)


plt.plot(xf, 2.0/N * nm.abs(yf[0:N/2]))
plt.grid()
plt.show()
timePlotScipyFft=time.time() - start_time
print("Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de %s segundos ---" % timePlotScipyFft)
```




```
Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de 0.16166067123413086 segundos ---
```

Resolução do exemplo usando numpy

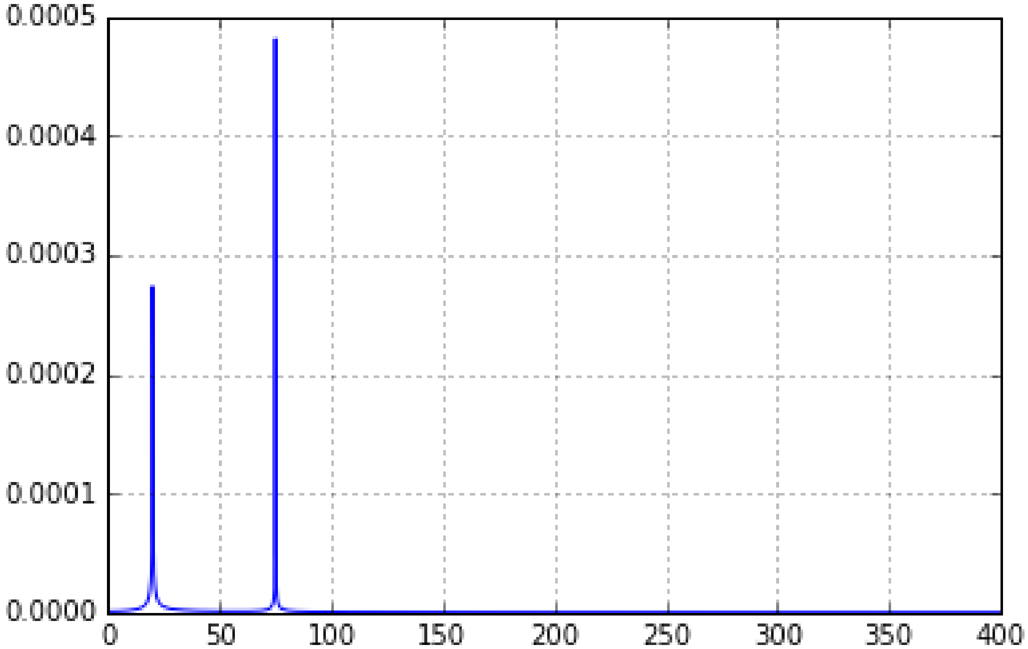
```
In [63]: start_time = time.time()
         N = 4096
         T = 1.0 / 800.0
         x = nm.linspace(0.0, N*T, N)
         y = 2*nm.cos(5*nm.pi*(30*x) ) + 1.54*nm.cos(2*nm.pi*(20*x) )
         yf = nm.fft.fft(y)
         xf = nm.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)


         plt.plot(xf, 2.0/N * nm.abs(yf[0:N/2]))
         plt.grid()
         plt.show()
         timePlotNumpyFft=time.time() - start_time
         print("Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de %s segundos ---" % timePlotNumpyFft)
```




```
Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de 0.1510636806488037 segundos ---
```

Resolução do exemplo usando numpy
Usando IFFT
Resolução do exemplo usando scipy

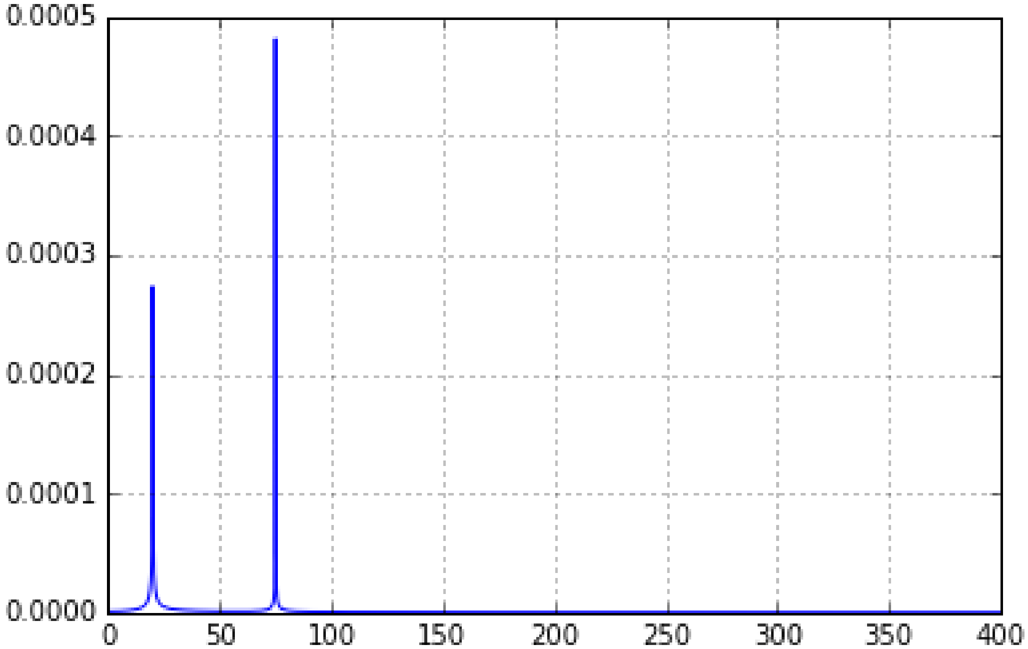
```
In [64]: start_time = time.time()
         N = 4096
         T = 1.0 / 800.0
         x = sc.linspace(0.0, N*T, N)
         y = 2*nm.cos(5*nm.pi*(30*x) ) + 1.54*nm.cos(2*nm.pi*(20*x) )
         yf = sc.ifft(y)
         xf = sc.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)


         plt.plot(xf, 2.0/N * nm.abs(yf[0:N/2]))
         plt.grid()
         plt.show()
         timePlotScipyIfft= time.time() - start_time
         print("Tempo de compilação para a biblioteca Scipy é de %s segundos ---" % timePlotScipyIfft)
```




```
Tempo de compilação para a biblioteca Scipy é de 0.17903995513916016 segundos ---
```

Resolução do exemplo usando numpy

```
In [65]: start_time = time.time()
         N = 4096
         T = 1.0 / 800.0
         x = nm.linspace(0.0, N*T, N)
         y = 2*nm.cos(5*nm.pi*(30*x) ) + 1.54*nm.cos(2*nm.pi*(20*x) )
         yf = nm.fft.ifft(y)
         xf = nm.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N/2)


         plt.plot(xf, 2.0/N * nm.abs(yf[0:N/2]))
         plt.grid()
         plt.show()
         timePlotNumpyIfft= time.time() - start_time
         print("Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de %s segundos ---" % timePlotNumpyIfft)
```



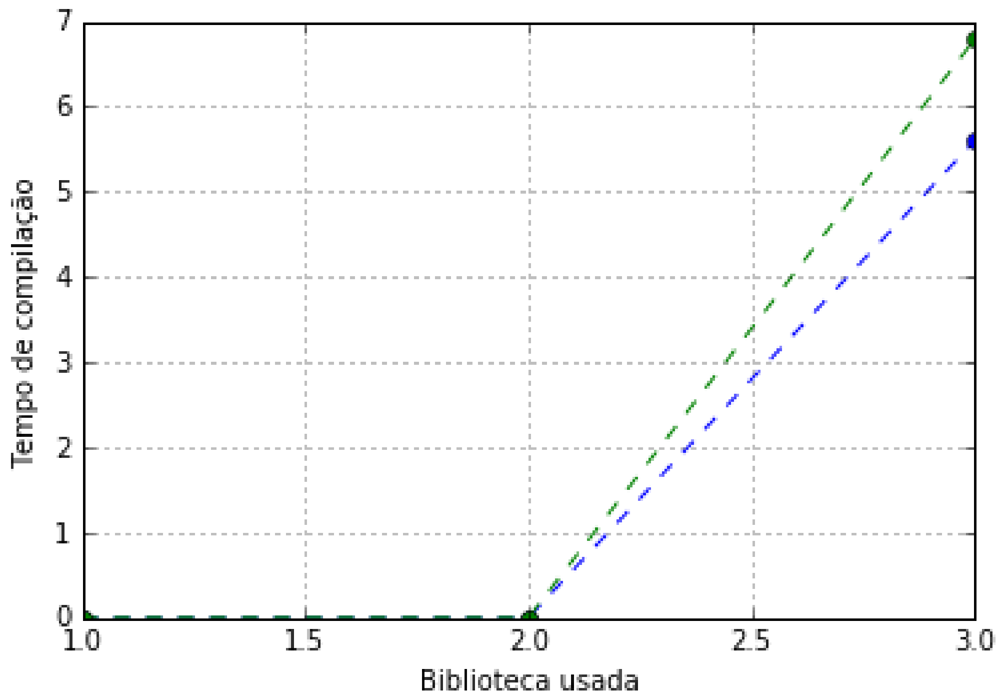

```
Tempo de compilação para a biblioteca Numpy é de 0.16051268577575684 segundos ---
```

0.2 # Conclusão

Para o teste com o vetor de 4096 valores aleatórios temos o gráfico abaixo

```
In [66]: k=[1,2,3]
         c=[timeScipy,timeNumpy,timeMyFFt]
         b=[timeScipy2,timeNumpy2,timeMyIFFt]
         plt.grid()
         plt.xlabel('Biblioteca usada')
         plt.ylabel('Tempo de compilação')
         plt.plot(k,c,'--o',k,b,'--o')
```

```
Out[66]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x18013f37e80>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x18013f375f8>]
```



Onde temos que o verde representa o tempo de compilação da IFFT e o azul, temos o tempo de compilação da FFT onde a mesma tende a ter um tempo de compilação menor.A FFT tende nesse caso a ter um tempo de compilação menor,pois o intuito dela é converter um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência

```
In [67]: table = [["Scipy - FFT",timeScipy],["Numpy - FFT",timeNumpy],["MyFFt",timeMyFFt],["Scipy - IFF
                  ["Numpy - IFFT",timeNumpy2],["MyIFFT",timeMyIFFt]]
         headers = ["Biblioteca usada", "Tempo de compilação (segundos)"]
         print(tabulate(table, headers, tablefmt="grid"))
```

Biblioteca usada	Tempo de compilação (segundos)
Scipy - FFT	0.00100088
Numpy - FFT	0.000999689
MyFFt	5.60222
Scipy - IFFT	0.00149941
Numpy - IFFT	0.00150108
MyIFFT	6.79474

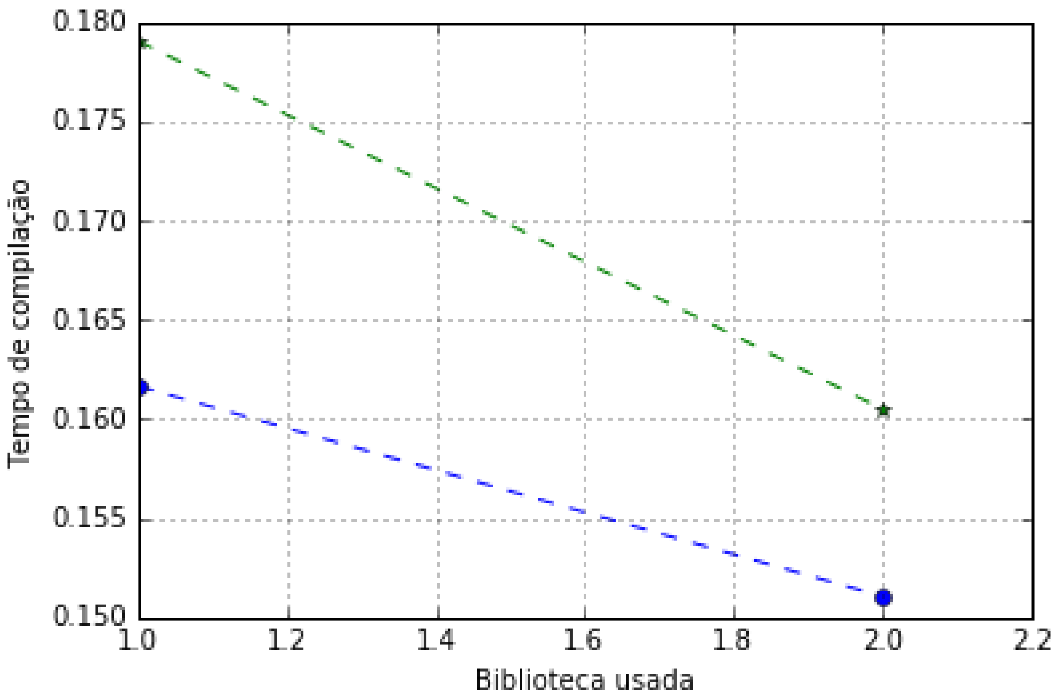
Tabela referente ao tempo gasto para que cada biblioteca compile o cálculo da FFT e IFFT

Conclusão do exemplo

Agora iremos construir um gráfico para melhor vizualizarmos de como as bibliotecas se comportam com a resolução completa -cálculo matemático e construção do gráfico- da soma dos cossenos.

In [68]:
```
k=[1,2]
c=[timePlotScipyFft,timePlotNumpyFft]
b=[timePlotScipyIfft,timePlotNumpyIfft]
plt.grid()
plt.xlabel('Biblioteca usada')
plt.ylabel('Tempo de compilação')
plt.plot(k,c,'--o',k,b,'--*')
```

Out[68]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x18013f38710>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x18013d39048>]
```



Como o esperado, o tempo gasto para poder calcular a FFT tende a ser menor que o tempo gasto para calcular a IFFT

In [69]:
```
table = [["Scipy - FFT",timePlotScipyFft],["Numpy - FFT",timePlotNumpyFft],
          ["Scipy - IFFT",timePlotScipyIfft],["Numpy - IFFT",timePlotNumpyIfft]]
headers = ["Biblioteca usada", "Tempo de compilação (segundos)"]
print(tabulate(table, headers, tablefmt="grid"))
```

```
+--------------------+--------------------------------+
| Biblioteca usada   |   Tempo de compilação (segundos) |
+====================+================================+
| Scipy - FFT        |                       0.161661 |
+--------------------+--------------------------------+
| Numpy - FFT        |                       0.151064 |
+--------------------+--------------------------------+
| Scipy - IFFT       |                       0.17904  |
+--------------------+--------------------------------+
| Numpy - IFFT       |                       0.160513 |
+--------------------+--------------------------------+
```

Tabela referente ao tempo gasto para que cada biblioteca compile o cálculo e a construção do gráfico da soma dos cossenos, usando FFT e IFFT

Problemas encontrados

Para esse projeto tivemos alguns problemas no decorrer do desenvolvmento.O problema a ser destacado foi o usa e a instação do pyFFTW, não conseguimos instalar e nem usar,tentamos tanto no windows como no linux, não obtivemos sucesso

<h1>Referências</h1>
Taneja, HC (2008), "Chapter 18: Fourier integrals and Fourier transforms", Advanced Engineering Mat
www.astro.if.ufrgs.br/med/imagens/fourier.htm
www.en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform#CITEREFTaneja2008
www.docs.scipy.org/doc/numpy-1.10.1/index.html
www.cis.rit.edu/class/simg716/Gauss_History_FFT.pdf
www2.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/fs2008/nas/woerner.pdf
www.en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_transform_time_and_frequency_domains_(small).gif
www.pypi.python.org/pypi/tabulate
www.researchgate.net/post/Why_do_we_use_IFFT
www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/