

sketchometry



Herausgeber

Universität Bayreuth
Forschungsstelle für Mobiles Lernen mit digitalen Medien sketchometry
Universitätsstraße 30
95447 Bayreuth

Internet

http://heftreihe.sketchometry.org



Lizenz

Diese Publikation ist unter folgender Lizenz erschienen: http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/



Titel Heft

sketchometry 9

Die zentrische Streckung – Eine Unterrichtssequenz

Autorin

Carolin Gehring

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik – Universität Bayreuth Bayreuth

Erscheinungsjahr ISSN

2015 2364-5520



Vorwort

Seit mehr als 20 Jahren gehören Konzepte zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht zu den Forschungsschwerpunkten des Lehrstuhls für Mathematik und ihre Didaktik. Es geht dabei vor allem um die Entwicklung dynamischer Mathematiksoftware und um die Erprobung zugehöriger Unterrichtskonzepte. Erfolgreiche Projekte sind die Softwareprodukte GEONET (1995–1999) und GEONE_XT (1999–2013), die Grafikbibliothek JSXGraph (seit 2007) sowie die innovative gestengesteuerte Software sketchometry (seit 2011). All diese Aktivitäten werden seit 2013 durch die Forschungsstelle *Mobiles Lernen mit digitalen Medien* der Universität Bayreuth gebündelt.

Modellversuch

In einem Modellversuch erproben Lehrkräfte den Einsatz von sketchometry an zwei Bayreuther Schulen. Die Forschungsstelle Mobiles Lernen mit digitalen Medien stellt dazu zwei Klassensätze Tablets und die zugehörige Infrastruktur zur Verfügung. Mitglieder der Forschungsstelle unterstützen die beteiligten Lehrkräfte sowohl inhaltlich als auch technisch. Zudem findet eine begleitende Evaluation statt.

Am Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasium wird bereits seit Frühjahr 2013 im Geometrieunterricht der Jahrgangsstufe 7 regelmäßig mit sketchometry gearbeitet. Die Schule wurde dafür mit 15 Tablets (Apple iPad, 4. Generation) ausgestattet. Zwei Schülerinnen und Schüler "teilen" sich jeweils ein Tablet. Darüber hinaus haben sie die Möglichkeit, ihre Bildschirminhalte drahtlos an einen Projektor zu übertragen. Im Klassenzimmer steht zudem eine elektronische Tafel mit einem Computer bereit.

An der Johannes-Kepler-Realschule werden seit Anfang 2015 Tablets (insgesamt 20 Geräte, Samsung Galaxy Tab 4) mit sketchometry in siebten, achten und neunten Klassen im Geometrieunterricht eingesetzt. Auch hier arbeiten je zwei Schülerinnen bzw. Schüler zusammen an einem Tablet. Die Bildschirminhalte können ebenfalls drahtlos zu einem Projektor übertragen werden. Damit sind sowohl die Lehrkräfte als auch die Schülergruppen in der Lage, ihre Ergebnisse der gesamten Klasse zu präsentieren.

Die Erfahrungen und Ergebnisse der Schulversuche werden unmittelbar bei der Weiterentwicklung der Software, der Konzepte für den Unterrichtseinsatz sowie bei der Erstellung von Unterrichtsmaterialien berücksichtigt.



Unterrichtsbeobachtungen

Die Mitglieder des sketchometry-Teams besuchen regelmäßig die Klassen des Modellversuchs, um den Einsatz von sketchometry live mitzuerleben.

Darüber hinaus hatten Studierende im Rahmen eines Seminars (Lehramtsausbildung im Fach Mathematik an der Universität Bayreuth) die Gelegenheit, Geometriestunden mit Tableteinsatz an den beiden Bayreuther Schulen zu erleben. Aus diesen Beobachtungen entstanden Unterrichtsprotokolle, die einen Einblick in die Arbeit der Schülerinnen und Schüler mit sketchometry gewähren.

Praxisbericht

Der folgende Praxisbericht gibt einen Einblick in eine Sequenz von sechs Geometriestunden mit sketchometry in einer neunten Klasse der Johannes-Kepler-Realschule in Bayreuth.



Die zentrische Streckung

Eine Unterrichtssequenz

Zentrische Streckung mit sketchometry

In der beschriebenen Unterrichtssequenz (sechs Schulstunden) wird das Thema "Zentrische Streckung" in einer neunten Klasse der Johannes-Kepler-Realschule in Bayreuth unter Verwendung von Tablets und der dynamischen Geometriesoftware sketchometry behandelt.

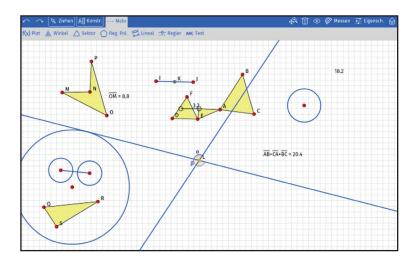
Da in dieser neunten Klasse der Unterricht zum ersten Mal mit Tablets gestaltet wird, dient die erste Hälfte einer Doppelstunde der Einführung. Die bereits nummerierten Tablets werden den Schülerinnen und Schülern paarweise ausgehändigt. Nach dieser Zuordnung, die für alle weiteren Tableteinsätze gilt, gibt die Lehrkraft eine kurze Einführung in sketchometry. Dabei werden folgende Fragen geklärt:

- ► Wie kann eine neue Zeichenfläche geöffnet werden?
- ► Was ist ein Zug- bzw. Konstruktionsmodus (Ziehen und Konstruieren)?
- ► Wie wird ein Punkt gesetzt?
- ► Wie werden Strecke, Halbgerade und Gerade gezeichnet?
- ► Wie konstruiert man ein Dreieck?
- ► Wie kann ein Kreis mit bestimmtem Radius erzeugt werden?
- ► Was ist ein Spurmodus?
- ▶ Wie funktioniert das Umbenennen von Punkten?

Erste Schritte mit sketchometry

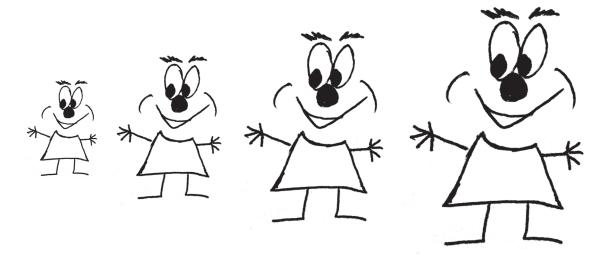
Daran anschließend erhält die Klasse zehn Minuten Zeit, um sich mit der Software vertraut zu machen. Ein großes im Klassenzimmer aufgehängtes Plakat liefert eine Gestenübersicht, an der sich die Jugendlichen orientieren, um erste einfache Konstruktionen selbstständig zu erzeugen:





Nach diesem eher spielerischen Erstkontakt erklärt die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern die Übertragung der Bildschirminhalte auf den Projektor, sodass einzelne Arbeitsgruppen ihre Versuche präsentieren können.

Zu Beginn der zweiten Hälfte der Doppelstunde drehen alle Arbeitsgruppen ihre Tablets um. Die Aufmerksamkeit der Lernenden wird somit wieder auf die Lehrperson gelenkt, die der Klasse nun das Bild einer Comic-Figur mithilfe des Tageslichtprojektors an die Wand projiziert. Die Lehrkraft schiebt den Tageslichtprojektor näher an die Wand und dann weiter davon weg und bittet die Schülerinnen und Schüler, dabei das Bild zu beobachten:

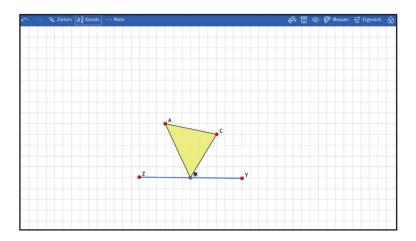


Es wird erkannt, dass die Figur kleiner wird, wenn der Tageslichtprojektor näher an die Wand geschoben wird. Befindet sich jedoch der Tageslichtprojektor weiter im Raum, vergrößert sich die Figur. Die Größe des Bildes scheint also abhängig von der Entfernung zur Wand zu sein.

Die Lehrkraft erläutert den Lernenden, dass die Möglichkeit ein Bild zu verkleinern und zu vergrößern, in der Mathematik mittels einer Abbildung dargestellt werden könne. In den kommenden fünf Unterrichtsstunden wird sich die Klasse damit beschäftigen.



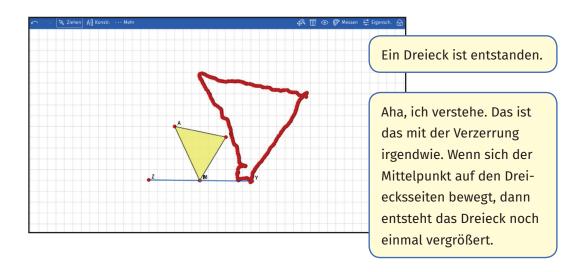
Die Schülerinnen und Schüler drehen die Tablets zum Arbeiten wieder um und öffnen sketchometry. Dort importieren sie nach Anleitung eine von der Lehrperson vorbereitete Konstruktion.



Erste Experimente

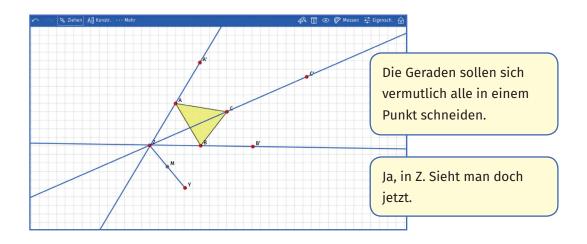
Die Klasse erhält 15 Minuten Zeit, um aus dieser Vorkonstruktion Erkenntnisse zu gewinnen. Die dazugehörigen Arbeitsaufträge werden im Folgenden mit einzelnen Schülerlösungen und -aussagen beispielhaft dargestellt:

1. Bewege Y so, dass M genau auf B liegt. Setze Y nun in den Spurmodus. Bewege Y so, dass sich M entlang der Dreiecksseiten bewegt. Notiere deine Beobachtungen.

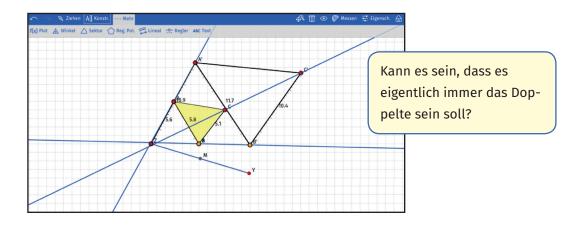




2. Setze nun die Eckpunkte des durch die Spur entstanden Dreiecks und bezeichne die passenden Eckpunkte mit A', B' und C'. Lösche die Spur und bewege die Strecke [ZY] so zur Seite, dass sie nicht stört. Lege nun jeweils eine Gerade durch A und A', B und B' sowie C und C'. Notiere erneut deine Beobachtung.



3. Miss nun mithilfe der Linealfunktion die Strecken [AB] und [A'B'], [ZA] und [ZA'], [BC] und [B'C'], usw. Notiere deine Beobachtungen.



Die Lehrkraft beendet die Bearbeitungszeit und lässt die Bildschirminhalte einer Arbeitsgruppe übertragen; die Ergebnisse werden im Plenum besprochen. Dabei wird thematisiert, dass eine solche geometrische Abbildung "Zentrische Streckung" genannt wird.



Am Ende dieser ersten Doppelstunde werden die bisherigen Erkenntnisse in einem Hefteintrag festgehalten.

Zentrische Streckung	23.06.20
Punkte und Figuren der Ebene lassen sich durch zentrische Streclang	
auf Billpundele und Bildfiguren der Ehene abbilden. Eine zentrische	
Strackung wird festgelegt durch brought aines Strackungs zentrums Z	
und eines Streelangsfaktors K.	
Man schribt: P Z; k > P'	
lies: Dor Panket P wird mit dem Zontrum Z und dem Strechungsfalctor	4
and den Panlet P'abzebildet.	

Der Streckungsfaktor

Die dritte Unterrichtsstunde zur "Zentrischen Streckung", die sich mit dem Streckungsfaktor k befasst, beginnt zunächst mit einer mündlichen Wiederholung.

Bei der zentrischen Streckung werden Punkte nach der folgenden Vorschrift abgebildet:

$$P \xrightarrow{Z; k} P'$$

Der Urpunkt P wird mithilfe des Streckungszentrums Z und des Streckungsfaktors k auf den Bildpunkt P' abgebildet.

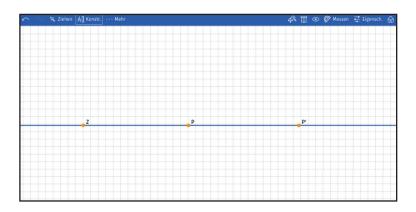
Die Lehrkraft fragt nun, welche Angaben für diesen Bildpunkt P' benötigt würden. Die Schülerinnen und Schüler nennen das Streckungszentrum Z, k als Streckungsfaktor sowie auf Nachfrage den Urpunkt P. Auf die Frage, was allgemein für die Länge der Strecke $\overline{ZP'}$ gelte, gibt ein Schüler die Formel $\overline{ZP'}$ = k \cdot \overline{ZP} an.

Um herauszufinden, was mit dem Streckungsfaktor k überhaupt gemeint sei, bearbeiten die Neuntklässlerinnen und Neuntklässler ein Arbeitsblatt unter Verwendung von sketchometry.



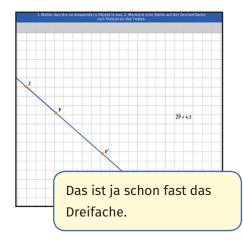
Im Folgenden werden die Arbeitsanweisungen mit exemplarischen Schülerlösungen aufgezeigt:

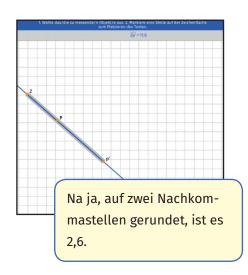
1. Zeichne eine beliebige Gerade. Lege auf diese die Gleiter Z, P und P'.



2. Bewege die Gleiter Z, P und P' entlang der Geraden. Notiere die verschiedenen Anordnungen und miss dabei jeweils die Längen ZP und ZP'.

Berechne nun den jeweiligen Streckungsfaktor k.





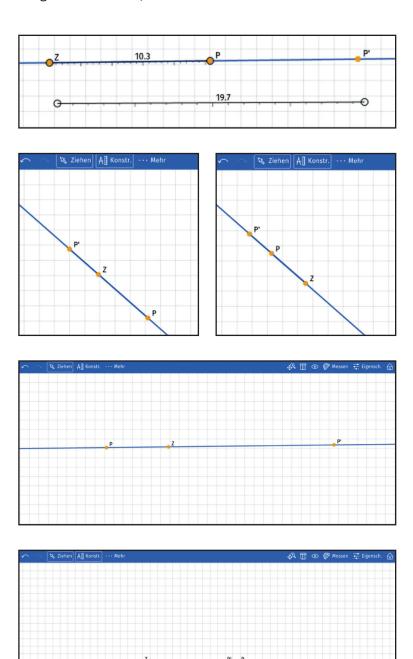
Während des Unterrichtsverlaufs lässt sich die Lehrperson bei dieser Teilaufgabe die entsprechende Gleichung von den Schülerinnen und Schülern nennen und notiert diese nach dem Streckungsfaktor k aufgelöst an die Tafel: $k = \frac{\overline{ZP^i}}{7\overline{p}}$.

Bei der Messung der Streckenlänge gehen die Arbeitsgruppen unterschiedlich vor. Es werden sowohl die Lineal- als auch die Messfunktion eingesetzt. Außerdem kann beobachtet werden, dass die Lernenden zwar die Gleiter verschieben, um andere Messwerte zu erhalten, dabei aber die Reihenfolge der Punkte Z, P und P' nicht verändern. Da bei der Formulierung "Anordnung" in der Aufgabenstellung dieser Teilaufgabe augenscheinlich Verständnisprobleme bei der Klasse auftreten, konkretisiert die Lehrkraft die Aufgabenstellung mündlich:



Die Ausgangssituation sei Z, P, P'. Die Anordnung dieser drei Punkte könne und solle nun aber verändert werden. Der Punkt P könne also beispielsweise auch nach links von Z gezogen werden.

Nach diesem Hinweis finden die Arbeitsgruppen neben der Ausgangssituation noch weitere Anordnungen der Gleiter Z, P und P':





3. Überlege dir eine allgemeine Aussage über den Streckungsfaktor k und seine Auswirkung auf die Lage des Bildpunktes.

Aufgrund der vorangeschrittenen Zeit werden die Teilaufgabe 2 und 3 gemeinsam im Plenum besprochen. Hierfür drehen die Schülerinnen und Schüler ihre Tablets um und folgen den übertragenen Bildschirminhalten des Lehrertablets. Diese Feststellungen werden dabei gemacht:

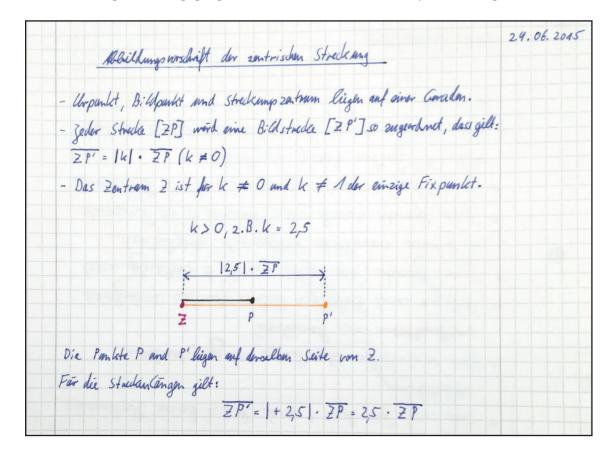
- ► Ist der Streckungsfaktor k kleiner 1, liegt der Bildpunkt P' zwischen dem Punkt Z (Streckungszentrum) und dem ursprünglichen Punkt P. Es liegt eine Verkleinerung bzw. Stauchung vor.
- ▶ Ist der Streckungsfaktor k größer 1, liegt der Bildpunkt P' rechts vom ursprünglichen Punkt P. Es liegt eine Vergrößerung bzw. Streckung vor.

Die Besonderheit bei der Anordnung P', Z, P arbeitet die Lehrkraft gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern fragend-entwickelnd heraus.

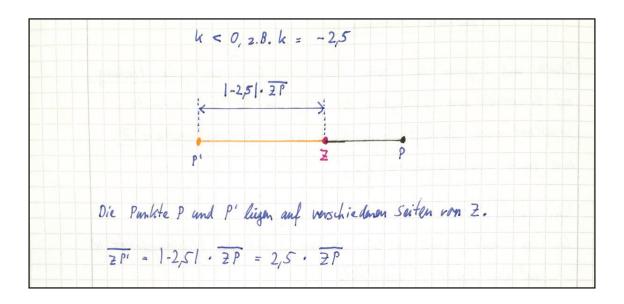
Liegt der Urpunkt P auf der rechten Seite und der Bildpunkt P' auf der linken Seite des Streckungszentrums Z, ist der Streckungsfaktor k negativ.

Ein Schüler begründet das negative Vorzeichen von k folgendermaßen: "Der Bildpunkt liegt in der Gegenrichtung des ursprünglichen Punktes. Er wird also auf die andere Seite gespiegelt."

Der Hefteintrag der vorangegangenen Stunde wird durch das Besprochene ergänzt:







Arbeiten ohne Tablets

Bei der anschließenden Unterrichtseinheit handelt es sich abermals um eine Doppelstunde, die sich dem Streckungsfaktor widmet. In der ersten Unterrichtsstunde arbeiten Lehrkraft und Klasse auf herkömmliche Weise – mit Tafel und Arbeitsblatt. Es wird bewusst auf den Einsatz von Tablets verzichtet.

Das Arbeitsblatt enthält folgende Aufträge:

► Max muss das Dreieck ABC um den Streckungsfaktor k = 1,5 strecken. Z ist der Ursprung. Er weiß jedoch leider nicht, wie es geht. Hilf ihm dabei.

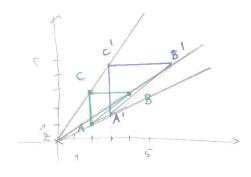
Die zentrische Streckung wird lehrerzentriert an der Tafel durch Berechnung vollzogen:

$$\overline{ZA'}$$
 = k · \overline{ZA} = 1,5 · 2,2 cm = 3,3 cm

$$\overline{ZB}$$
' = k · \overline{ZB} = 1.5 · 5.0 cm = 7.5 cm

$$\overrightarrow{ZC}$$
 = k $\cdot \overline{ZC}$ = 1,5 \cdot 3,6 cm = 5,4 cm

Die Streckenlängen werden mit dem Zirkel abtragen. Bei Verbindung der Seiten entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, was folgende Skizze erkennen lässt:





Alternativ wäre hier ein konstruktiver Vorgang denkbar gewesen: Halbiere \overline{ZA} und addiere das Ergebnis zu \overline{ZA} . Auf diese Weise würde man 1,5 · \overline{ZA} . erhalten.

Die nächste Aufgabe wird analog zur ersten behandelt.

► Strecke das Dreieck ABC mit A (1|1), B (6|1) und C (2|3) mit k = 2 und Zentrum A.

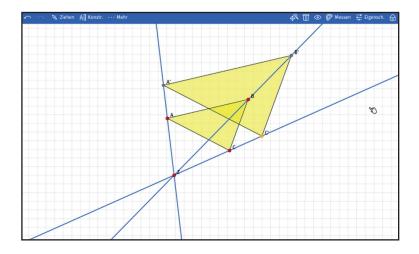
Auch hier hätte sich ein konstruktiver Einsatz des Zirkels angeboten, da jede Strecke verdoppelt wird.

Die dritte und vierte Aufgabe bearbeiten die Schülerinnen und Schüler eigenständig.

- ► Strecke das Dreieck ABC mit A (1|1), B (6|1) und C (2|3) mit Z (3,5|2) und k = 0,5.
- ► Strecke das Dreieck ABC mit A (1/1), B (6/1) und C (2/3) mit Z (3,5/2) und k = -2.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

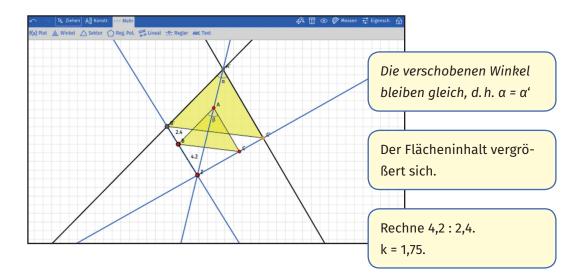
In der zweiten Unterrichtshälfte bearbeitet die Klasse ein Arbeitsblatt zu "Eigenschaften der zentrischen Streckung" mit sketchometry. Hierfür wird eine von der Lehrkraft vorgefertigte Konstruktion importiert und als Ausgangssituation übernommen.



Die Lernenden werden angewiesen, den Zugmodus (Ziehen) auszuschalten und lediglich Messungen zur Bearbeitungen der nachfolgenden Arbeitsaufträge vorzunehmen.

▶ Untersuche die zentrisch Streckung auf verschiedene Eigenschaften (z.B. Umlaufsinn des Dreiecks, Größe der Winkel, Längen der Strecken, Verhältnis der Streckenlängen, …). Notiere deine Beobachtungen.





► Ein Kreis bzw. eine Gerade werden zentrisch gestreckt. Welche Vermutungen hast du über die entstandenen Bildfiguren? Notiere diese. Überprüfe danach deine Vermutung durch eine Konstruktion in einer neuen Zeichenfläche (z. B. mit k = 2).

Beobachtungen zufolge zeichnen und konstruieren die Schülerinnen und Schüler zwar, tun dies jedoch zum Teil wenig zielgerichtet. Eine Erleichterung könnte daher beispielsweise die Nennung eines Punkt-Bildpunkt-Paares sowie eine Auflistung der abzuarbeitenden Eigenschaften auf dem Arbeitsblatt in etwaiger Form sein:

Nach ca. zehnminütiger Bearbeitungszeit gehen jeweils zwei Tabletgruppen zusammen, um sich über ihre Erkundungen auszutauschen. Nach weiteren sieben Minuten werden die Ergebnisse im Plenum besprochen und an der Tafel festgehalten. Folgende Eigenschaften der zentrischen Streckung werden genannt:

Die Dreiecke haben den gleichen Umlaufsinn.

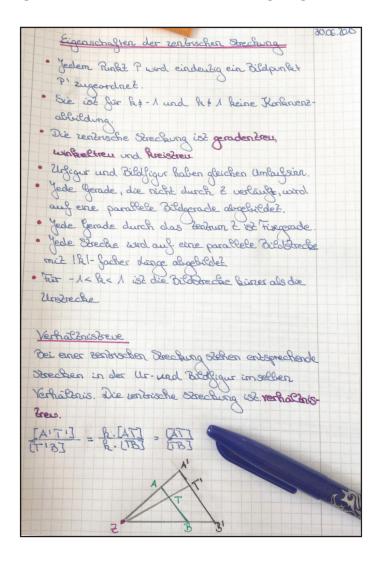
Geradentreu.

Die Innenwinkel sind gleich geblieben.



Eine Verdeutlichung am Projektor wäre gerade bei der Eigenschaft, dass der Umlaufsinn erhalten bleibt, hilfreich. Die Streckung eines Kreises wird theoretisch an der Tafel durchgeführt, allerdings ohne die Vorgabe von Punkt und Bildpunkt. Es wird erklärt, dass die Figur, die entsteht, wenn ein Kreis gestreckt wird, ebenfalls wieder ein Kreis sei. Eine Schülerin fügt hinzu, dass der Umfang größer werde. Auf Nachfrage der Lehrkraft, wie es sich bei einer Geraden verhalte, wirft ein Schüler das Stichwort "geradentreu" ein.

Diese genannten Eigenschaften werden in einem Hefteintrag festgehalten und ergänzt:



In der abschließenden Unterrichtsstunde zum Thema "Zentrische Streckung" findet zunächst eine Hausaufgabenverbesserung mit integrierter Wiederholung statt. Über eine Dokumentenkamera wird hierfür der Hefteintrag eines Schülers für alle sichtbar an die Wand projiziert. Der Schüler beschreibt sein Vorgehen und löst die Aufgabe mit Streckungsfaktor k = -2 richtig. Die Lehrperson fragt bei der Klasse nach, was man im Allgemeinen über die Lage des Bildpunktes bei negativem Streckungsfaktor k aussagen könne und lässt die aus letzter Stunde bekannten Eigenschaften der zentrischen Streckung aufzählen:



Der Flächeninhalt verändert sich.

Die Urfigur und die Bildfigur haben den gleichen Umlaufsinn.

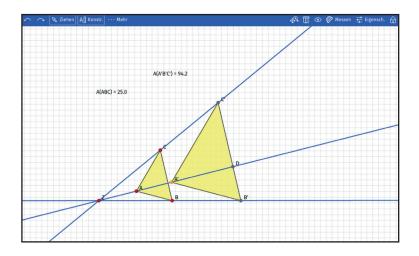
Die Gerade die durch das Zentrum Z läuft ist eine Fixgerade. Die zentrische Streckung ist winkel- und verhältnistreu.

Die Lehrkraft greift die Schüleraussage zum Flächeninhalt auf und kommuniziert diesen als Stundeninhalt.

Gruppenteiliges Erarbeiten

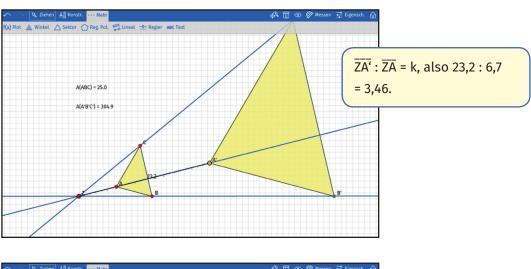
Die Klasse wird in zwei Gruppen eingeteilt. Die Wandreihe beschäftigt sich mit einem Arbeitsblatt zum Flächeninhalt von Dreiecken, die Türseite mit dem Flächeninhalt von Rechtecken. Die Schülerinnen und Schüler erhalten ihre zugeteilten Tablets und importieren je nach Gruppe die entsprechende der beiden vorgefertigen sketchometry-Konstruktionen zu Dreiecken bzw. Rechtecken.

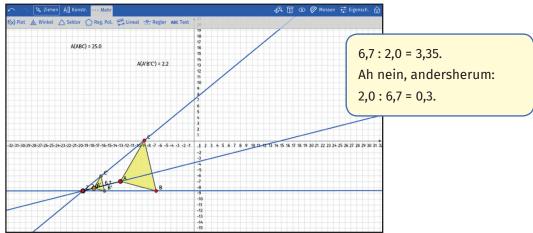
Nachfolgend sind die Gruppenarbeiten der Wandreihe zum Thema Flächeninhalt von Dreiecken bei der zentrischen Streckung musterhaft dargestellt:



▶ Bewege A'. Bestimme jeweils den Streckungsfaktor k und miss den Flächeninhalt der Dreiecke ABC und A'B'C'. Notiere deine Beobachtungen.







► Finde eine Formel für den Flächeninhalt bei der zentrischen Streckung.

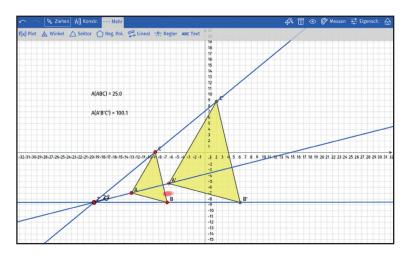
Nach etwa zehn Minuten fragt die Lehrkraft, was den Gruppen bei der Verschiebung von A' bisher aufgefallen sei. Eine Schülerin beschreibt ihre Beobachtung wie folgt: "Es kommt immer darauf an, wie weit die Bildfigur von Z entfernt ist. Wenn sie weit entfernt ist, wird der Flächeninhalt größer und wenn sie näher an Z dran ist, kleiner."

Die Lehrperson gibt abermals mündlich die Anweisung, dass der Streckungsfaktor von zwei, drei Situationen zu berechnen sei. Die Schülerinnen und Schüler sollen einen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt der Bildfigur und dem Flächeninhalt der Urfigur finden. Die Lehrkraft erkundigt sich, ob die Klasse bereits etwas herausgefunden habe. Eine Schülerin stellt folgende Behauptung auf: "Fläche der Bildfigur = $k \cdot F$ läche der Urfigur". Nachdem keine weiteren Vorschläge bzw. Einwände kommen, stellt die Lehrkraft die korrekte Formel "Fläche der Bildfigur = $k^2 \cdot F$ läche der Bildfigur" auf und nennt ein Beispiel: Angenommen der Flächeninhalt der Urfigur betrage 24,3 cm² und der Streckungsfaktor sei 2. So erhalte man eine Bildfigur mit der Fläche von ungefähr 100 cm².



Mithilfe von sketchometry sollen die Jugendlichen dieses Beispiel überprüfen und hierfür den Bildpunkt A' so verschieben, dass Streckungsfaktor k = 2 gilt.

Ein beobachtetes Schülerpaar verschiebt den Bildpunkt A' so, dass der Flächeninhalt des Bilddreiecks mit 100 angezeigt wird.



Die Unterrichtsstunde wird mit nachfolgendem Merksatz ins Heft beendet:

Flächeninhalt bei der zentrischen Streckung

Bei einer zentrischen Streckung beträgt der Flächeninhalt der Bildfigur das k^2 -fache des Flächeninhalts der Urfigur: $A' = k^2 \cdot A$

Fazit

Der Einstieg in die Arbeit mit sketchometry erfolgt erfahrungsgemäß eher spielerisch. Die Schülerinnen und Schüler malen, skizzieren und zeichnen einfache Figuren. Dennoch genügen meist zehn Minuten, um mit der Software vertraut zu werden.

Der punktuelle Einsatz von sketchometry wird in der geschilderten Unterrichtssequenz deutlich. Durch die sofortige Verfügbarkeit der Software bietet sich diese Einsatzweise an. Unterstützt werden die tabletfreien Phasen durch das Umdrehen der Geräte.

Da immer zwei Schülerinnen und Schüler an einem Tablet arbeiten entsteht eine fachliche Kommunikation. Der Ablenkungsfaktor der eingesetzten Tablets ist relativ gering – sie verfügen bewußt über keine Internetverbindung.

http://sketchometry.org



sketchometry