Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones, Vol. XIX, No.2, 1

# WAVELETS: Multirresolución espacial y en frecuencia para comprimir secuencias ecocardiográficas

*J. J. Aranda*

*Instituto Central de Investigación Digital (ICID), Ciudad de La Habana, Cuba*

**RESUMEN / *ABSTRACT***

La transformada **Wavelet** (TW) descompone la información en múltiples niveles de resolución y separa altas y bajas frecuencias, lo que posibilita mantener simultáneamente información espacial y de frecuencias, y constituye gran ventaja al estudiar procesos aleatorios no estacionarios. Expuesta bajo un aparato matemático complejo, es simple de instrumentar y alcanza velocidades de ejecución comparables a las obtenidas con otras transformadas con mayor ahorro de memoria. Ha sido aplicada a la compresión de imágenes, alcanzándose razones elevadas con bajo nivel de pérdida. Este trabajo expone de forma simple la TW, así como las pruebas realizadas para comprimir secuencias de imágenes ecocardiográficas.

*The **Wavelet** transform (WT) descomposes data in multiscale levels of resolution maintaining both spatial and frequency information, which constitutes an advantage in the study of nonstationary random processes. Although the WT is commonly exposed with a deep mathematical apparatus, it is easy to implement. The obtained program is very fast and it uses less memory than other transforms implementation. The WT has been applied in image's compression with very good results: high compression ratios and minimum loss of information. This paper exposes the **Wavelet** transform without the mathematical apparatus and also the obtained results by using it to compress echocardiographic image's sequences.*

Recibido: Enero de 1996

## INTRODUCCIÓN

La compresión, cuyo objetivo es reducir la redundancia de la imagen, extrae la información con mayor entropía, que corresponde a detalles a preservar. Este problema, especialmente con secuencias ecocardiográficas, ha sido objeto de varios trabajos desde hace algunos años en los cuales se presentan y discuten los resultados obtenidos. No obstante, es objetivo permanente encontrar medios cada vez más efectivos de resolverle con la mayor calidad, la mejor razón de compresión y en el menor tiempo de ejecución.

Desde finales de la década de los ochenta, la literatura referencia con creciente auge el uso de la transformada **Wavelet** (TW) como poderosa herramienta para estudiar imágenes debido a que permite descomponer la información en múltiples niveles de resolución -octavas- por medio de pares de filtros que separan detalles -altas frecuencias- y referencias -zonas de baja frecuencia-.

Estas características posibilitan mantener simultáneamente las informaciones espacial y de frecuencias, lo que constituye una gran ventaja y facilita analizar procesos aleatorios no estacionarios. Desafortunadamente, la exposición realizada por la mayoría de los autores emplea un aparato matemático complejo que la hace difícil de acometer ante una primera lectura.

No obstante su solidez teórica, es simple de aplicar y alcanza velocidades de ejecución comparables y en algunos casos superiores, a las obtenidas de la ejecución de algoritmos típicos como la transformada rápida de Fourier y la discreta del coseno,

Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones, Vol. XIX, No.2, 1

# WAVELETS: Multirresolución espacial y en frecuencia para comprimir secuencias ecocardiográficas

*J. J. Aranda*

*Instituto Central de Investigación Digital (ICID), Ciudad de La Habana, Cuba*

**RESUMEN / *ABSTRACT***

La transformada **Wavelet** (TW) descompone la información en múltiples niveles de resolución y separa altas y bajas frecuencias, lo que posibilita mantener simultáneamente información espacial y de frecuencias, y constituye gran ventaja al estudiar procesos aleatorios no estacionarios. Expuesta bajo un aparato matemático complejo, es simple de instrumentar y alcanza velocidades de ejecución comparables a las obtenidas con otras transformadas con mayor ahorro de memoria. Ha sido aplicada a la compresión de imágenes, alcanzándose razones elevadas con bajo nivel de pérdida. Este trabajo expone de forma simple la TW, así como las pruebas realizadas para comprimir secuencias de imágenes ecocardiográficas.

*The **Wavelet** transform (WT) descomposes data in multiscale levels of resolution maintaining both spatial and frequency information, which constitutes an advantage in the study of nonstationary random processes. Although the WT is commonly exposed with a deep mathematical apparatus, it is easy to implement. The obtained program is very fast and it uses less memory than other transforms implementation. The WT has been applied in image's compression with very good results: high compression ratios and minimum loss of information. This paper exposes the **Wavelet** transform without the mathematical apparatus and also the obtained results by using it to compress echocardiographic image's sequences.*

Recibido: Enero de 1996

## INTRODUCCIÓN

La compresión, cuyo objetivo es reducir la redundancia de la imagen, extrae la información con mayor entropía, que corresponde a detalles a preservar. Este problema, especialmente con secuencias ecocardiográficas, ha sido objeto de varios trabajos desde hace algunos años en los cuales se presentan y discuten los resultados obtenidos. No obstante, es objetivo permanente encontrar medios cada vez más efectivos de resolverle con la mayor calidad, la mejor razón de compresión y en el menor tiempo de ejecución.

Desde finales de la década de los ochenta, la literatura referencia con creciente auge el uso de la transformada **Wavelet** (TW) como poderosa herramienta para estudiar imágenes debido a que permite descomponer la información en múltiples niveles de resolución -octavas- por medio de pares de filtros que separan detalles -altas frecuencias- y referencias -zonas de baja frecuencia-.

Estas características posibilitan mantener simultáneamente las informaciones espacial y de frecuencias, lo que constituye una gran ventaja y facilita analizar procesos aleatorios no estacionarios. Desafortunadamente, la exposición realizada por la mayoría de los autores emplea un aparato matemático complejo que la hace difícil de acometer ante una primera lectura.

No obstante su solidez teórica, es simple de aplicar y alcanza velocidades de ejecución comparables y en algunos casos superiores, a las obtenidas de la ejecución de algoritmos típicos como la transformada rápida de Fourier y la discreta del coseno, con un uso más racional de la memoria, lo que equivale a mayor ahorro de esta.

Se ha aplicado a la compresión, donde se alcanzan razones muy elevadas con bajo nivel de pérdida. No se han encontrado referencias de su empleo con secuencias de imágenes ecocardiográficas.

Este trabajo expone de forma simple la TW y presenta los resultados obtenidos hasta el momento con vistas a comprimir secuencias de imágenes ecocardiográficas, los cuales confirman las ventajas de la transformada **Wavelet**.

## TRANSFORMADA WAVELET

Una transformación[4] puede interpretarse como la descomposición de los datos de la imagen en un espectro generalizado bidimensional. Cada componente espectral en el dominio de la transformada corresponde a la cantidad de energía de la función espectral en la información original. El concepto de frecuencia puede generalizarse para incluir transformaciones con otras funciones que no sean seno y coseno.

Otra forma de visualizar una transformación es considerarla como rotación de coordenadas multidimensional, mientras que una tercera aproximación es considerar una imagen expresada por un conjunto de funciones matemáticas, donde el núcleo de la transformada es llamado función base y los coeficientes de la transformada son la ampliutd de dichas funciones base.

Para obtener alta razón de compresión es necesario quitar las partes no importantes para la visualización. Identificar qué se debe mantener es un problema complejo, estudiado en Reconocimiento de Patrones. La información requerida para localizar elementos de interés está, en muchos casos, en las componentes de alta frecuencia espectral: bordes de la imagen, apreciable por la habilidad humana para reconocer objetos a partir de sus contornos delineados.

Una de las mayores dificultades de la representación basada en bordes es integrar en ellos toda la información de la imagen. Muchos detectores de bordes están basados en mediciones locales de las variaciones de intensidad en la imagen. Estos se definen como los puntos donde dicha intensidad tiene su máxima variación. Debido a la detección de contornos de estructuras pequeñas y de objetos grandes se ha introducido[5] la idea de detección multiescala: la imagen original es suavizada varias escalas y los puntos de bordes se detectan usando operadores diferenciales de primero y(o) segundo orden.

Mallat[6,7] ha planteado que se puede definir una representación de bordes multiescala completa y estable basada en la TW, lo cual reviste gran interés:

- Para análisis -caso en que Rioul[8] propone el empleo en su forma continua- *Continuous Wavelet Transform* (CWT).
- Para compresión -usada en su forma discreta-: *Discrete Wavelet Transform* (DWT): donde se está imponiendo, pues constituye un método muy efectivo de disminuir la redundancia. Davis[9] plantea que elimina mucha redundancia espacial en cada nivel de resolución, lo que conduce a técnicas eficientes.

La TW es un conjunto de **funciones bases** que permiten expresar cualquier función en el espacio como combinación lineal de **traslaciones** en el tiempo (para seleccionar la parte de la señal que desea analizarse) y **dilataciones** que emplean un parámetro de escala $2^J$, de una función simple. Han sido introducidas como instrumento para la representación y análisis local en el tiempo y(o) en la frecuencia de señales no estacionarias, lo que constituye una de sus principales diferencias con la transformada de Fourier, que solo produce una descripción completa de señales **estacionarias**.

Tewfik *et al.*[10] plantean que cualquier imagen que represente una función de cuadrado integrable, puede representarse en términos de traslaciones y dilataciones de una función **Wavelet** $W(t)$ simple como:

$$f(t) = \sum b(J,k)\, W(2^{J} t - k) \qquad \text{...(1)}$$

Esta descomposición permite un análisis multirresolución de $f(t)$, especialmente los coeficientes $b(J,k)$ contienen la información de $f(t)$ cerca de la frecuencia $2^J$ y el instante de tiempo $2^{-J}k$. Para $J$ fijo, la suma parcial de la expresión (1) en $k$, produce detalles de la función $f(t)$ en la escala $2^J$.

La **Wavelet** $W(t)$ no es arbitraria, tiene que satisfacer ciertas condiciones que aseguren que la descomposición (1) es válida para cualquier función de cuadrado integrable. Además las traslaciones y dilataciones necesitan ser ortogonales y esto puede lograrse en la propia construcción de la TW.[6,10,11]

De Vore *et al.*[12] analizan el método general de obtener las descomposiciones para funciones $f$ uniformemente continuas del espacio $L^p(R^d)$, $0 < p < \infty$ con $d = 1, 2, \ldots$ Esta generalización incluye como caso especial las **Wavelets** ortogonales, desarrolladas por Mallat, Meyer y Daubechies.

Existe una extensión llamada transformada rápida **Wavelet**: *Fast Wavelet Transform* (FWT), eficiente instrumentación de la transformada discreta **Wavelet** (DWT). La DWT[13] es la TW aplicada a una sucesión de datos muestreados regularmente y presenta pasos discretos en el tiempo en un eje y pasos discretos de resolución en otros. Otra superioridad sobre la transformada discreta de Fourier (DFT) está en localizar simultáneamente frecuencia y tiempo, algo que esta no puede hacer. Cada nivel de transformada representa la mitad de la gama de la frecuencia de la del nivel por encima y dos veces de la del nivel por debajo de él. Recíprocamente, la escala del tiempo en cada nivel es dos veces la del nivel por debajo y la mitad de la del nivel por encima de él.

Cody[14] presenta el código en **C** de la instrumentación del algoritmo WPT (*Wavelet Packet Transform*) que generaliza el análisis de frecuencia-tiempo de la TW. Este algoritmo produce una familia de bases de transformadas ortonormales de las cuales la base de la TW es un miembro.

Perdrieau y Pecot[15] tratan la décorrelación. Revisan los tipos de familias de filtros candidatos: cuadratura en espejo (QMF), cuadratura conjugada (CQF) y biortogonales en el marco de la descomposición a través de octavas separables, e introducen las estructuras de filtros equivalentes en *lattices*, que alcanzan reconstrucción perfecta sin considerar sus coeficientes de cuantización.

Feauveau *et al.*[16] presentan y estudian bancos de filtros recursivos biortogonales con reconstrucción perfecta como alternativa frente a los filtros de respuesta finita (FIR) para obtener imágenes con menos entropía y mayor discriminación de bordes que las originales, lo que facilita la compresión.

La literatura afirma que los métodos basados en **Wavelets** están más cerca que los anteriores de la solución óptima dentro de una clase general de transformadas basadas en métodos no lineales de compresión de imágenes.

## INSTRUMENTACIÓN DEL ALGORITMO

Se empleó la formulación propuesta por DeVore *et al.*[12] caracterizada por obtener simultáneamente la referencia y los bordes horizontales, verticales y diagonales. Como filtro paso bajo usa el promedio de los cuatro pixeles que se van a decimar y como paso alto la primera derivada aproximada como la diferencia finita entre cada pixel y su correspondiente vecino en la dirección deseada:

Referencia

$$[i^{J-1}, j^{J-1}] = \begin{pmatrix} I[i^J, j^J] + I[i+1^J, j+1^J] + \\ + I[i^J, j+1^J] + I[i+1^J, j^J] \end{pmatrix} / 4 \quad \text{...(2)}$$

Detalle horizontal

$$[i^{j-1}, j^{J-1}] = I[i^J, j+1^J] - I[i^J, j^{-J}] \quad \text{...(3)}$$

Detalle vertical

$$[i^{J-1}, j^{J-1}] = I[i+1^J, j^J] - I[i^J, j^{-J}] \quad \text{...(4)}$$

Detalle diagonal

$$[i^{J-1}, J^{J-1}] = I[i+1^J, j+1^J] - I[i^J, j^{-J}] \quad \text{...(5)}$$

$$\forall i \in [0 \ldots 2^J - 1], j \in [0 \ldots 2^J - 1] \; y \; J \in [5 \ldots 8]$$

La memoria total consumida es mínima: el doble del tamaño de la imagen, ya que en cada nivel la referencia solo ocupa la cuarta parte de la memoria del nivel precedente y los detalles quedan bien diferenciados, lo que permite razones muy elevadas de compresión.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se programó en **Borland Pascal V 7.0 para MSDOS V 6.20**, sobre una **386 DX-33** MHz compatible, sin coprocesador aritmético y con 8 Mbit de RAM. La tarjeta digitalizadora de imágenes empleada fue la **Cortex I**, de ImageNation Corp. Inc., en el modo de trabajo: 243 líneas de 256 pixeles cada una, con 256 posibles niveles de gris por pixel.

La tabla 1 muestra la media ($\mu_c$) y la varianza ($\sigma_c^2$) de la imagen comprimida, la media ($\mu_D$) y la varianza de la imagen diferencia ($\sigma_c^2$) y la relación señal-ruido (SNR) para secuencias tipo de

Tabla 1
Caracterización de la compresión (cálculos en entero)

| Imagen | $\mu_c$ | $\sigma^2_c$ | $\mu_D$ | $\sigma^2_D$ | SNR |
|---|---|---|---|---|---|
| Apical | | | | | |
| 1 | 40,297 | 0,116 | 8,701 | 24,326 | 6,117 |
| 2 | 40,382 | 0,117 | 8,731 | 24,401 | 6,134 |
| 3 | 40,361 | 0,118 | 8,688 | 24,603 | 6,081 |
| 4 | 40,307 | 0,117 | 8,732 | 24,248 | 6,171 |
| Mitral | | | | | |
| 1 | 47,377 | 0,141 | 12,479 | 29,341 | 6,012 |
| 2 | 47,597 | 0,138 | 12,271 | 28,442 | 6,335 |
| 3 | 48,169 | 0,144 | 12,664 | 28,970 | 6,288 |
| 4 | 48,393 | 0,148 | 12,884 | 29,457 | 6,234 |
| Papilar | | | | | |
| 1 | 44,084 | 0,134 | 10,693 | 26,915 | 6,231 |
| 2 | 43,594 | 0,131 | 10,527 | 26,746 | 6,216 |
| 3 | 44,025 | 0,137 | 10,814 | 27,395 | 6,138 |
| 4 | 44,135 | 0,138 | 11,004 | 27,869 | 6,012 |

cuatro imágenes de las tres vistas estudiadas, operando con aritmética entera.

Como se observa, la varianza de la imagen comprimida refleja buena reducción de la redundancia presente en la original. La media y la varianza de la diferencia tienen valores elevados, indicativos de que debe mejorarse la selección de los pares de filtros empleados, ya que de ellos depende la posterior reconstrucción con mayor calidad. La cuantificación realizada por los filtros causa el cuadriculado apreciado en las imágenes recuperadas. Estos factores provocan que la SNR esté lejos de los 20 dB tolerados por el ojo humano como límite para no advertir diferencias entre la original y la recuperada. Ante esos resultados, se calculó la referencia con aritmética flotante y los detalles a partir de la diferencia entre el promedio y el pixel en la dirección deseada del nivel previo.

La tabla 2 presenta estos resultados, que -aunque mejores que los obtenidos con aritmética entera-, reafirman la necesidad de emplear filtros de mayor tamaño para mejorar la SNR hasta niveles aceptables.

Los tiempos de ejecución (en segundos) y las frecuencias (en cuadros por segundo) obtenidas con aritmética entera fueron los que se exponen en la tabla 3.

En los tiempos de ejecución y las frecuencias con operaciones en flotante subieron a lo expuesto en la tabla 4.

Tabla 2
Caracterización de la compresión (cálculos en flotante)

| Imagen | $\mu_e$ | $\sigma^2_e$ | $\mu_D$ | $\sigma^2_D$ | SNR |
|---|---|---|---|---|---|
| Apical | | | | | |
| 1 | 40,281 | 0,091 | 5,750 | 16,612 | 8,280 |
| 2 | 40,290 | 0,091 | 5,625 | 16,714 | 8,787 |
| 3 | 40,221 | 0,090 | 5,561 | 16,564 | 8,836 |
| 4 | 40,268 | 0,090 | 5,621 | 16,547 | 8,854 |
| Mitral | | | | | |
| 1 | 46,808 | 0,108 | 7,928 | 19,763 | 8,748 |
| 2 | 47,237 | 0,115 | 7,924 | 19,885 | 8,840 |
| 3 | 47,566 | 0,111 | 8,114 | 19,896 | 8,882 |
| 4 | 47,652 | 0,113 | 8,219 | 20,145 | 8,882 |
| Papilar | | | | | |
| 1 | 43,412 | 0,105 | 6,648 | 17,623 | 9,101 |
| 2 | 43,114 | 0,103 | 6,579 | 17,896 | 8,931 |
| 3 | 43,281 | 0,109 | 6,834 | 18,515 | 8,725 |
| 4 | 43,415 | 0,109 | 6,825 | 18,414 | 8,807 |

Tabla 3
Tiempos y frecuencias obtenidos con aritmética entera

| | Apical | | Mitral | | Papilar | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Tiempo | Frecuencia | Tiempo | Frecuencia | Tiempo | Frecuencia |
| Generación | 19,61 | 0,204 0 | 19,00 | 0,210 5 | 19,60 | 0,209 9 |
| Recuperación | 15,38 | 0,260 1 | 15,22 | 0,282 8 | 14,94 | 0,267 7 |

Tabla 4
Con operaciones en flotante

| | Apical | | Mitral | | Papilar | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Tiempo | Frecuencia | Tiempo | Frecuencia | Tiempo | Frecuencia |
| Generación | 28,40 | 0,140 8 | 27,58 | 0,145 0 | 27,68 | 0,144 5 |
| Recuperación | 22,41 | 0,178 5 | 21,97 | 0,182 1 | 21,92 | 0,182 5 |

Estos valores, aunque aceptables, deben mejorar si se usa una computadora más potente: Pentium o 486.

## Conclusiones y recomendaciones

Las ventajas de la TW están en mantener y analizar simultáneamente la información espacial y de frecuencias, por lo que posibilitan analizar procesos aleatorios no estacionarios. En comparación con otras transformadas, su ejecución es rápida y sus requerimientos de memoria mínimos, ya que el total consumido es solo el doble del tamaño de la imagen.

Los resultados alcanzados, aunque inferiores en calidad a los obtenidos con el método de cuantificación vectorial,[3] permiten afirmar que la transformada **Wavelet** debe constituir una poderosa herramienta para comprimir secuencias de imágenes ecocardiográficas, ya que los detalles se obtienen con nitidez a lo largo de las mismas. Estos detalles facilitan ubicar el ventrículo izquierdo (VI) en cada cuadro, así como seguir su movimiento a lo largo de toda la secuencia. Para lograr este objetivo, debe estudiarse cuidadosamente la selección de los pares de filtros en espejo para las imágenes ecocardiográficas.

## Referencias


1. **ARANDA ABOY, J. J.:** "Implementación del algoritmo de Huffman para la compresión de ficheros", Revista *CID*, No. 19, pp. 4-6, 1989.
2. **ARANDA ABOY, J. J.** *et al.*: "Evaluación de algoritmos para la compresión de imágenes". *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, Vol. XIV, No. 3, pp. 65-69, 1993.
3. **ARANDA, ABOY, J. J.:** "Compresión de secuencias de imágenes ecocardiográficas", *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, Vol. XVI, No. 3, 1995.
4. **PRATT, W.:** *Digital Image Processing*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, Inc., 1991.
5. **BURT, P. J.:** "Smart Sensing with a Pyramid Vision Machine", *Proc. of the IEEE*, Vol. 76, No. 8, pp. 1006-1015, August, 1988.
6. **MALLAT, S.:** "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", *IEEE Trans. on PAMI*, Vol. 11, No. 7, pp. 674-693, July, 1989.
7. **MALLAT, S. & S. ZHONG:** "Compact Image Coding from Edges with Wavelt", *Proc. of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP'91, pp. 2745-2747, Toronto, Canadá, May, 14-17, 1991.

8. **RIOUL, O:** "Fast Algorithms for the Continuos Wavelet Transform", *Proc. of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'91*, pp. 2213-2216, Toronto, Canadá, May, 14-17, 1991.
9. **DAVIS, G.:** "Self-Quantized Wavelet Subtrees: A Wavelet-Based Theory for Fractal Image Compression", *Proc. Data Compression Conference*, pp. 232-241, Snowbird, Utah, USA, March, 28-30, 1995.
10. **TEWFIK, A. H. & P. E. JORGENSEN:** "On the Choice of a Wavelet for Signal Coding and Processing", *Proc. of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'91*, pp. 2025-2028, Toronto, Canadá, March, 14-17, 1991.
11. **CHI, C. K.:** *An Introduction to Wavelets*, Ed. Academic Press, Inc., 1991.
12. **DEVORE, R. A.; B. JAWERTH & B. J. LUCIER:** "Image Compression through Wavelet Transform Coding", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp. 719-746, March, 1992.
13. **CODY, M. A.:** "The Fast Wavelet Transform", *Dr. Dobb's Journal*, pp. 16-28, April, 1992.
14. ______: "The Wavelet Packet Transform", *Dr. Dobb's Journal*, pp. 44-52, April, 1994.
15. **PERDRIEAU, L. & M. PECOT:** "Filtres en Treillis et Analyse en Sous-Bandes D'images", **Reveu Tech. Thomson-CSF**, Vol. 25, No. 1, pp. 305-333, March, 1993.
16. **FEAUVEU, J. C.** *et al.*: "Recursive Biorthogonal Wavelet Transform for Image Coding", *Proc. of International Conference on Acoustics, Speechand Signal Processing, ICASSP'91*, pp. 2649-2652, Toronto, Canadá, May, 14-17, Toronto, Canadá.

## AUTORES

**Juan José Aranda Aboy**

Licenciado en Ciencias de la Computación, Investigador Auxiliar, Profesor Auxiliar Adjunto, Trabaja en Investigaciones sobre Detección Automática de Contornos en Imágenes Médicas