TD5 : Méthodes itératives et conditionnement

Exercice 1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire usuel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose dans tout l'exercice que A vérifie :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\alpha\|x\| \leq \|Ax\|$.
3. En déduire que $\alpha \leq |||A|||$.
4. Soit $\rho \in \mathbb{R}^*$. On définit la méthode itérative $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné,} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho(Ax^{(k)} - b). \end{cases} \tag{1}$$

   a) Montrer que si la suite converge, sa limite x est solution de $Ax = b$.

   b) Soit x la solution du système $Ax = b$. Montrer que

   $$\|x^{(k+1)} - x\|^2 = \|x^{(k)} - x\|^2 - 2\rho\left(x^{(k)} - x, A(x^{(k)} - x)\right) + \rho^2\|A(x^{(k)} - x)\|^2.$$

   c) En déduire que, pour tout $\rho < 0$,

   $$\|x^{(k+1)} - x\| \geq (1 - \rho\alpha)\|x^{(k)} - x\| \quad \forall k \geq 0$$

   et que la méthode (1) n'est pas convergente.

   d) Montrer que, pour tout $\rho > 0$, on a :

   $$\|x^{(k)} - x\|^2 \leq (\theta(\rho))^k\|x^{(0)} - x\|^2, \quad \forall k \geq 0,$$

   où θ est un polynôme du second degré en ρ dont les coefficients dépendent de α et $|||A|||$.

   e) Déterminer un ensemble de valeurs de ρ pour lesquelles la méthode (1) est convergente.

   f) Déterminer dans cet ensemble la valeur de ρ pour laquelle la convergence de la suite $(\theta(\rho)^k)_{k\geq 0}$ est la plus rapide.

5. On suppose désormais que A est symétrique et on note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

   a) Montrer que A est définie positive.

   b) Pour quelles valeurs de ρ la méthode (1) est-elle convergente ? Comparer avec le résultat obtenu dans la question précédente.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) une matrice symétrique définie positive qui admet une décomposition $A = M - N$ avec M symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $\alpha \neq 0$, on définit la méthode itérative :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha M^{-1} r^{(k)}, \text{ avec } r^{(k)} = b - Ax^{(k)}. \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que si la méthode (2) converge alors la limite $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ est solution du système linéaire $Ax = b$.
2. Justifier l'existence de la décomposition $M = U\Delta U^t$ avec U matrice orthogonale et Δ matrice diagonale réelle, puis la définition de la racine carrée de M : $M^{1/2} = U\Delta^{1/2}U^t$ et de $M^{-1/2} = U\Delta^{-1/2}U^t$.
3. Montrer que la méthode (2) est équivalente à
$$\begin{cases} y^{(0)} = M^{1/2}x^{(0)}, \\ y^{(k+1)} = y^{(k)} + \alpha\rho^{(k)}, \text{ avec } \rho^{(k)} = M^{-1/2}b - M^{-1/2}AM^{-1/2}y^{(k)}. \end{cases} \tag{3}$$
4. Montrer que (3) est une méthode de gradient à pas constant.
5. En déduire la valeur optimale du paramètre α. Montrer qu'elle s'exprime en fonction des valeurs propres de $M^{-1}A$.
6. `[Matlab]` Écrire le code de la méthode itérative décrite par (2). On considérera `a` (à la place de α), `A`, `M`, `b` et le `x` initial ($= x^{(0)}$) donnés et de tailles compatibles.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

1. Quelle relation existe-t-il en général entre $\kappa(A^2)$ et $(\kappa(A))^2$?
2. Montrer que si A est symétrique alors $\kappa_2(A^2) = (\kappa_2(A))^2$.
3. Soit $A = QR$ la décomposition QR de A (Q matrice orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive). Montrer que $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
4. Donner une minoration de $\kappa_2(A)$ en fonction des éléments diagonaux de R.
5. `[Matlab]` Étant donnée la matrice `R` de la décomposition QR de A, écrire l'instruction qui donne la minoration trouvé dans la question précédente.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \\ a_{i1} = 1 & \text{pour tout } 2 \leq i \leq n, \\ a_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer A^{-1}.
2. En déduire $\kappa_\infty(A)$ et $\kappa_1(A)$.
3. Expliquer le code suivant en précisant quelle quantité connue est calculée :

```
max(sum(abs(A')))
```

Exercice 5. Soit A la matrice de discrétisation par différences finies de l'opérateur $-\dfrac{d^2}{dx^2}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

1. Donner les valeurs propres de A.
2. En déduire la valeur de $\kappa_2(A)$.
3. Donner un équivalent de $\kappa_2(A)$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Expliquer le code suivant ligne par ligne et globalement. Donner l'allure de la courbe obtenue.

```
t = 1:100;
c = zeros(length(t));
for n = t
    A = diag(-1*ones(1,n-1),1) + ...
        diag(-1*ones(1,n-1),-1) + ...
        2*eye(n);
    c(n) = cond(A);
end
loglog(t,c);
```