TD2 : Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Dans cette série d'exercices, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une factorisation $A = LU$ (L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure inversible). L'objectif de cet exercice est de proposer un algorithme de calcul de L et U différent de la méthode d'élimination de Gauss vue en cours.

1. *Étude d'un exemple.* En identifiant successivement les termes de A et de LU (en suivant l'ordre : ligne 1, colonne 1, ligne 2, colonne 2, ligne 3), déterminer les coefficients inconnus l_{ij} et u_{kp} vérifiant :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

2. *Étude du cas général.* En appliquant la même technique d'identifications successives, montrer que que les coefficients de L et de U sont donnés par :
$$u_{1j} = a_{1j} \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\},$$
$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\},$$
$$\left.\begin{array}{ll} u_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}\, u_{pj} & \text{pour } j \in \{k, \dots, n\}, \\ l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\Big(a_{ik} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}\, u_{pk}\Big) & \text{pour } i \in \{k+1, \dots, n\}, \end{array}\right\} k \in \{2, \dots, n\}.$$

3. Déterminer le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour calculer la factorisation LU de A. On se contentera de préciser le terme de plus haut degré en fonction de n.

4. `[Matlab]` Étant donnés la matrices `A`, les matrices `L` et `U` de la décomposition LU, et un coefficient `k` $\in \{2, \dots, n\}$, donner une instruction en Matlab qui permet de vérifier (sans utilisation de boucle) la condition :
$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}\, u_{pj} \text{ pour } j \in \{k, \dots, n\}.$$

Exercice 2.

Soit $N \geq 3$. On se donne trois vecteurs $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, $b = (b_1, \dots, b_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $c = (c_1, \dots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On considère alors la matrice (dite “flèche”) $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

On suppose que A est inversible et que tous les coefficients de a sont non nuls.

1. Démontrer que la factorisation LU de A existe.
2. Expliciter les matrices L et U telles que $A = LU$.
3. Sous quelle condition sur les vecteurs a, b et c, la matrice A est inversible ?
4. On suppose désormais que $b = c$. Montrer que A admet une factorisation $A = LDL^t$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et D matrice diagonale.
5. `[Matlab]` Étant donnés les trois vecteurs lignes `a`, `b` et `c`, donner une instruction en Matlab qui permet de construire la matrice `A`.

Exercice 3. (Factorisations LU, LDL^t et de Cholesky : exemple)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 13 & 14 & 5 \\ 4 & 14 & 21 & 11 \\ 1 & 5 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice triangulaire inférieure L avec des 1 sur la diagonale et la matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.
2. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de U, et $V = D^{-1}U$.
   a) Vérifier que : $V = L^t$.
   b) Comment utiliser les matrices L et D pour résoudre un système linéaire de matrice A ?
   c) Quelles propriétés de la matrice D assurent que l'on peut écrire $D = \Delta.\Delta$ où Δ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels strictement positifs ?
   d) *[Factorisation de Cholesky]* Montrer que $A = B.B^t$ pour $B = L.\Delta$, puis conclure que la matrice A est symétrique définie positive.
   e) En déduire la matrice B (valeurs numériques).
3. `[Matlab]` Étant données les matrices `L` et `U` de la décomposition LU de A, donner une instruction en Matlab qui donne la matrice `B` de la factorisation de Cholesky de A.

Exercice 4.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la sous-matrice principale de A de taille k. On suppose que A est symétrique définie positive.

1. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, A_k est symétrique définie positive.

On se propose ici de démontre que pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure à diagonale strictement positive $B_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $A_k = B_k(B_k)^t$.

2. Montrer l'existence, puis calculer la matrice B_1.
3. On suppose l'existence et l'unicité de $B_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $A_k = B_k(B_k)^t$.
   a) Montrer que si B_{k+1} existe, elle est nécessairement de la forme
   $$B_{k+1} = \begin{array}{|c|c|} \hline B_k & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline Y & \alpha \\ \hline \end{array}$$
   avec $Y \in \mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$, vecteur ligne, et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
   b) Quelles équations doivent vérifier Y et α pour avoir $A_{k+1} = B_{k+1}(B_{k+1})^t$?
   c) En utilisant que A_{k+1} est définie positive, montrer que ces équations admettent un unique couple solution : $Y \in \mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$?
4. Quel résultat du cours on vient de redémontrer ?
5. `[Matlab]` Donner une instruction qui, à partir d'un vecteur ligne `Y` et d'un coefficient `a`, complète la matrice `B` en la matrice :
   $$\begin{array}{|c|c|} \hline \texttt{B} & \begin{matrix} \texttt{0} \\ \vdots \\ \texttt{0} \end{matrix} \\ \hline \texttt{Y} & \texttt{a} \\ \hline \end{array}$$