TD4 : MÉTHODES ITÉRATIVES

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On décompose A sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. Dans cette exercice on se propose de démontrer une condition suffisante ($M^t + N$ est symétrique définie positive) pour que la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ converge.

1. Montrer que $\|\cdot\|_* : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_* = \sqrt{x^t A x}$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note $|||\cdot|||_*$ la norme matricielle subordonnée associée.
2. Montrer que $|||M^{-1}N|||_* = \sup\limits_{\|v\|_*=1} \|v - M^{-1}Av\|_*$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On pose $w = M^{-1}Av$.
   a) Montrer que $v^t A w = w^t M^t w$ et que $w^t A v = w^t M w$.
   b) En déduire que $\|v - w\|_*^2 = \|v\|_*^2 - w^t(M^t + N)w$.
4. On suppose désormais que $M^t + N$ est symétrique définie positive. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_* = 1$, on a $\|v - M^{-1}Av\|_* < 1$. En déduire que $|||M^{-1}N|||_* < 1$.
5. Montrer que si $M^t + N$ est symétrique définie positive alors la méthode itérative
$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \\ Mx^{k+1} = Nx^k + b, \ \forall k \geq 0. \end{cases}$$
est convergente vers la solution x de $Ax = b$.
6. `[Matlab]` Étant données deux matrices `M` et `N`, ecrire la condition sous Matlab pour vérifier si $M^t + N$ est symétrique.

Exercice 2. Soit $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de discrétisation du laplacien 1D :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On admet (cela a été démontré dans un TD précédent) que les valeurs propres de cette matrice sont :
$$\lambda_k = 4\left(\sin\left(\frac{k\,\pi}{2(n+1)}\right)\right)^2, \quad 1 \leq k \leq n.$$

1. Exprimer J la matrice de Jacobi associée à la matrice A.

2. Montrer que μ est une valeur propre de J si et seulement si $2(1-\mu)$ est une valeur propre de A.
3. En déduire les valeurs propres de J, que l'on notera $(\mu_k)_{1\leq k\leq n}$.
4. Montrer que la méthode de Jacobi est convergente pour résoudre un système linéaire de matrice A.
5. Pouvait-on déterminer la convergence de la méthode de Jacobi sans le calcul des valeurs propres ? Et la convergence de la méthode de Gauss-Seidel ?
6. Que peut-on dire du rayon spectral de J quand n tend vers l'infini ? Conclure.
7. `[Matlab]` Étant donnée une matrice `A`, écrire une commande Matlab pour construire la matrice de Jacobi `J`.

Exercice 3. Soit un entier $n \geq 3$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on définit

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det(A(\alpha,\beta)) = (\beta+(n-1)\alpha)(\beta-\alpha)^{n-1}$. A quelle condition la matrice $A(\alpha,\beta)$ est-elle inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de $A(\alpha,\beta)$.
3. A quelle condition la matrice $A(\alpha,\beta)$ est-elle symétrique définie positive ?
4. Comparer $|||A(\alpha,\beta)|||_\infty$, $|||A(\alpha,\beta)|||_1$ et $\rho(A(\alpha,\beta))$.
5. On suppose maintenant que $\beta \neq 0$. On souhaite déterminer à quelle condition la méthode de Jacobi appliquée à la résolution d'un système linéaire de matrice $A(\alpha,\beta)$ est convergente.
   a) Calculer la matrice de Jacobi $J(\alpha,\beta)$ puis déterminer son rayon spectral.
   b) En déduire que la méthode de Jacobi est convergente si et seulement si la matrice $A(\alpha,\beta)$ est inversible à diagonale strictement dominante.
6. Montrer que pour certaines valeurs de α et β la méthode de Gauss-Seidel converge alors que la méthode de Jacobi ne converge pas.
7. `[Matlab]` Étant données les paramètres `n`, `a` et `b`, écrire une commande Matlab pour construire la matrice $A(a,b)$ définie plus haut.

Exercice 4. Soient
- A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$,
- R et S deux matrices symétriques positives ($x^tRx \geq 0$ et $x^tSx \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$) telles que $A = R + S$,
- α un réel strictement positif.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^0 \in \mathbb{R}^n & & \\
(R+\alpha I)\, x^{k+1/2} & = & (\alpha I - S)\, x^k + b \\
(S+\alpha I)\, x^{k+1} & = & (\alpha I - R)\, x^{k+1/2} + b
\end{array}
\right. \qquad \forall k \in \mathbb{N}.
$$

1. Montrer que les matrices $R+\alpha I$ et $S+\alpha I$ sont symétriques définies positives.
2. Montrer que les formules itératives définissent bien une suite $(x^k)_{k\geq 0}$ (pour tout x^0 et b).
3. Vérifier que les matrices $R+\alpha I$ et $\alpha I - R$ commutent.
4. En déduire l'écriture de l'itération k sous la forme :

$$M\, x^{k+1} = N\, x^k + b.$$

   avec $M = (R+\alpha I)(S+\alpha I)/(2\alpha)$ et $N = (\alpha I - R)(\alpha I - S)/(2\alpha)$.
5. Montrer que si la suite $(x^k)_{k\geq 0}$ converge, sa limite x vérifie $Ax = b$.
6. Montrer que si la matrice symétrique $SR + RS$ est semi-définie positive, alors la méthode itérative définie dans cette exercice est convergente (*Indication :* on pourra calculer $M^t + N$).
7. [Matlab] Commenter tous les lignes du code suivant :

```
nb_iter_max = 1e4;
err_max = 1e-4;
for j = 1:nb_iter_max
    if ( norm(M*x-N*x-b) < err_max )
        break;
    end
    x = M\(N*x+b);
end
```

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont non-nuls et la décomposition classique $A = D - E - F$.

On note J la matrice de Jacobi et $\mathcal{L}_1$ la matrice de Gauss-Seidel associées.

1. Redonner les expressions (vues en cours) de J et $\mathcal{L}_1$ en fonctions des matrices D, E et F.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $B(\lambda) = \lambda D - (E+F)$. Montrer que λ est une valeur propre de J si et seulement si $\det(B(\lambda)) = 0$.
3. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $C(\mu) = \mu(D-E) - F$. Montrer que μ est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$ si et seulement si $\det(C(\mu)) = 0$.

On suppose désormais que A est une matrice tridiagonale. Soient $a = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ($b_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$) et $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

4. Soit $Q(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$. Montrer que $Q(\lambda)^{-1}C(\lambda^2)Q(\lambda) = \lambda B(\lambda)$, pour tout $\lambda \neq 0$.

5. En déduire une relation entre $\det C(\lambda^2)$ et $\det B(\lambda)$, puis une relation entre $\rho(J)$ et $\rho(\mathcal{L}_1)$.