
TD2 : MÉTHODES DIRECTES DE RÉOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans cette série d'exercices, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une factorisation $A = LU$ (L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure inversible). L'objectif de cet exercice est de proposer un algorithme de calcul de L et U différent de la méthode d'élimination de Gauss vue en cours.

1. Étude d'un exemple. En identifiant successivement les termes de A et de LU (en suivant l'ordre : ligne 1, colonne 1, ligne 2, colonne 2, ligne 3), déterminer les coefficients inconnus l_{ij} et u_{kp} vérifiant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Étude du cas général. En appliquant la même technique d'identifications successives, montrer que que les coefficients de L et de U sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j} \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}, \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{u_{11}} \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\}, \\ u_{kj} &= a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj} \quad \text{pour } j \in \{k, \dots, n\}, \\ l_{ik} &= \frac{1}{u_{kk}} (a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}) \quad \text{pour } i \in \{k+1, \dots, n\}, \end{aligned} \right\} k \in \{2, \dots, n\}.$$

3. Déterminer le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour calculer la factorisation LU de A . On se contentera de préciser le terme de plus haut degré en fonction de n .
4. [Matlab] Étant donnés la matrices **A**, les matrices **L** et **U** de la décomposition LU , et un coefficient **k** $\in \{2, \dots, n\}$, donner une instruction en Matlab qui permet de vérifier (sans utilisation de boucle) la condition :

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj} \text{ pour } j \in \{k, \dots, n\}.$$

Exercice 2.

Soit $N \geq 3$. On se donne trois vecteurs $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, $b = (b_1, \dots, b_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $c = (c_1, \dots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On considère alors la matrice (dite “flèche”) $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

On suppose que A est inversible et que tous les coefficients de a sont non nuls.

1. Démontrer que la factorisation LU de A existe.
2. Expliciter les matrices L et U telles que $A = LU$.
3. En déduire à quelle condition (sur a , b et c) la matrice A est inversible.
4. On suppose désormais que $b = c$. Montrer que A admet une factorisation $A = LDL^t$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et D matrice diagonale.
5. [Matlab] Étant donnés les trois vecteurs lignes **a**, **b** et **c**, donner une instruction en Matlab qui permet de construire la matrice **A**.

Exercice 3. (Factorisations LU , LDL^T et de Cholesky : exemple)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 13 & 14 & 5 \\ 4 & 14 & 21 & 11 \\ 1 & 5 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice triangulaire inférieure L avec des 1 sur la diagonale et la matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.
2. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de U , et $V = D^{-1}U$.
 - a) Vérifier que : $V = L^T$.
 - b) Comment utiliser les matrices L et D pour résoudre un système linéaire de matrice A ?
 - c) Quelles propriétés de la matrice D assurent que l'on peut écrire $D = \Delta \cdot \Delta$ où Δ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels strictement positifs ?
 - d) [Factorisation de Cholesky] Montrer que $A = B \cdot B^T$ pour $B = L \cdot \Delta$, puis conclure que la matrice A est symétrique définie positive.
 - e) En déduire la matrice B (valeurs numériques).
3. [Matlab] Étant données les matrices **L** et **U** de la décomposition LU de A , donner une instruction en Matlab qui donne la matrice **B** de la factorisation de Cholesky de A .

Exercice 4.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la sous-matrice principale de A de taille k . On suppose que A est symétrique définie positive.

1. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, A_k est symétrique définie positive.

On se propose ici de démontrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure à diagonale strictement positive $B_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $A_k = B_k(B_k)^t$.

2. Montrer l'existence, puis calculer la matrice B_1 .
3. On suppose l'existence et l'unicité de $B_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $A_k = B_k(B_k)^t$.
 - a) Montrer que si B_{k+1} existe, elle est nécessairement de la forme

$$B_{k+1} = \begin{array}{|c|c|} \hline B_k & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline Y & \alpha \\ \hline \end{array}$$

avec $Y \in \mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$, vecteur ligne, et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

- b) Quelles équations doivent vérifier Y et α pour avoir $A_{k+1} = B_{k+1}(B_{k+1})^t$?
 - c) En utilisant que A_{k+1} est définie positive, montrer que ces équations admettent un unique couple solution : $Y \in \mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$?
4. Quel résultat du cours on vient de redémontrer ?
5. [\[Matlab\]](#) Donner une instruction qui, à partir d'un vecteur ligne Y et d'un coefficient a , complète la matrice B en la matrice :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline Y & a \\ \hline \end{array}$$