TD3 : Factorisations LU, Cholesky, QR

Exercice 1.

Soit A une matrice tridiagonale, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+c_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+c_{n-1} & -1 \\ & & & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}, \text{ avec } c_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Montrer que :
$$v^t A v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i^2 + \{v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_{i-1})^2\}.$$
2. En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.
3. Dans le cas où $c_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, montrer que la matrice B telle que $A = BB^t$ est bidiagonale et donnée par :
$$B_{i,i} = \sqrt{\frac{i+1}{i}} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \qquad B_{i+1,i} = -\sqrt{\frac{i}{i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$
4. [Matlab] Décrire et expliquer les résultats des trois lignes suivantes :
```
n=8; v=sqrt((2:n+1)./(1:n))
s=1:n+1:(n^2-n-1)
B=diag(v); B(s+1)=-1/.B(s)
```
Et si on remplace `n^2-n-1` par `n^2-1` dans la deuxième ligne ?

Exercice 2 (Factorisation QR)**.** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A^t A = R^t R$.
2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = Q\,R$.
3. Montrer que cette décomposition $A = QR$ avec R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et Q orthogonale est unique.
4. [Matlab] Étant donnée les matrices `Q` et `R`, écrire une commande qui vérifie que `Q` est orthogonale et que `R` est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On note B la matrice obtenue par la factorisation de Cholesky : $A = BB^t$.

1. En identifiant les coefficients de A et de BB^t colonne par colonne, montrer que l'on obtient successivement les coefficients de B par :

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{i1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}}, \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2} \\ b_{ij} &= \frac{1}{b_{jj}}\,(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}\,b_{jk}) \text{ pour } i \in \{j+1, \dots, n\} \end{aligned}\right\} j \in \{2, \dots, n\}$$

2. Déterminer le nombre d'opérations nécessaires (en fonction de n) pour calculer la matrice B par cette méthode.

3. `[Matlab]` Étant donnée la matrice `A`, écrire une commande qui construit la première colonne de la matrice `B` de la factorisation de Cholesky.

Exercice 4.

Soient $a = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
On considère la matrice tridiagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit δ_k le déterminant de la k-ième sous-matrice principale (avec $\delta_0 = 1$).

   a) Montrer que :

   $$\delta_1 = b_1, \quad \delta_k = b_k\,\delta_{k-1} - a_k\,c_{k-1}\,\delta_{k-2}, \text{ pour } k \in \{2, \dots, n\}$$

   b) Sous quelle condition sur la suite $\{\delta_k\}_{1 \le k \le n}$ la matrice A admet une factorisation LU.

   On suppose par la suite que A admet une factorisation $A = LU$ (avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure).

2. On dit qu'une matrice $M = [m_{ij}]$ est à propagation au plus k si $m_{ij} = 0$ pour $|i - j| > k$.

   a) Montrer qu'en général, si on a la décomposition $A = LU$ et la propagation de A qui est au plus k, alors les propagations de L et de U sont au plus k.

b) En déduire dans notre cas que les matrices L et U sont de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & l_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que les coefficients des matrices L et U sont donnés par :

$$\begin{array}{ll} l_{i,i-1} = a_i\, \delta_{i-2}/\delta_{i-1} & \forall\, 2 \leq i \leq n \\ u_{i,i} = \delta_i/\delta_{i-1} & \forall\, 1 \leq i \leq n \\ u_{i,i+1} = c_i. & \forall\, 1 \leq i \leq n-1 \end{array}$$

3. On pose $\Delta_i = \dfrac{\delta_{i-1}}{\delta_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$.
   Montrer que la résolution du système linéaire $A\,x = z$ où $z \in \mathbb{R}^n$, en résolvant d'abord $L\,y = z$, revient à construire (successivement) les suites :

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = 1/b_1, & \Delta_k = 1/\left(b_k - a_k\, c_{k-1}\, \Delta_{k-1}\right), & k = 2, \ldots, n \\ y_1 = z_1, & y_k = z_k - a_k \Delta_{k-1} y_{k-1} & k = 2, \ldots, n \\ x_n = \Delta_n y_n, & x_k = \Delta_k (y_k - c_k\, x_{k+1}), & k = n-1, \ldots, 1. \end{array}$$

4. Faire le compte des opérations nécessaires pour résoudre un système tridiagonal par cette méthode.

5. `[Matlab]` Étant donnée un nombre `k` et une matrice `A`, écrire une instruction qui vérifie que la matrice `A` est à propagation au plus `k`.