TD6 : Valeurs singulières, moindres carrés

Exercice 1 (Cours)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r \leq p = \min(m,n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^t A V = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_p)$$

où les ν_i sont les valeurs singulières de A. On note $(U_i)_{1\leq i\leq m}$ les vecteurs colonnes de U et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ ceux de V.

1. Quel sens donne-t-on ici à la notation $\mathrm{diag}(\nu_1, \cdots, \nu_p)$? Quelle conséquence a l'hypothèse $\mathrm{rang} A = r$ sur les valeurs singulières ? (On pourra ordonner les valeurs singulières de telle façon que les premières soient non nulles).
2. Montrer que : $A = \sum_{i=1}^{r} \nu_i U_i V_i^t$ et que : $A^t A = \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 V_i V_i^t$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \cdots, V_n\}$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(A^t) = \mathrm{Vect}\{V_1, V_2, \cdots, V_r\}$ et $\mathrm{Ker}(A^t) = \mathrm{Vect}\{U_{r+1}, \cdots, U_m\}$.
5. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^t)$, $\mathrm{Ker}(A^t)$ à l'aide de U et V.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs singulières de A.
2. Quel est le rang de A ?
3. Déterminer la décomposition en valeurs singulières de A.
4. Calculer la pseudo-inverse $A^\dagger$.
5. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
6. Déterminer une solution au sens des moindres carrés du système $Ax = b$.
7. Cette solution est-elle unique ?
8. `[Matlab]` Étant donnée une matrice `A`, écrire un code qui renvoie les valeurs singulières non nulles de `A` ordonnées par ordre décroissant.

Exercice 3.

1. Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur ligne. On considère v comme une matrice $1 \times n$. Calculer ses valeurs singulières et son pseudo-inverse. Quel est le rang de v ?
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $A^\dagger$, $B^\dagger$, $(AB)^\dagger$ et $B^\dagger A^\dagger$.
3. `[Matlab]` Soit `v` un vecteur. Écrire un code qui renvoie son pseudo-inverse.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire avec $p \leq n$. On considère le système linéaire $AX = b$, noté dans la suite $(\mathcal{S})$.

1. Déterminer dans quels espaces sont situés l'inconnue X et le second membre b.
2. Déterminer dans quel cas $(\mathcal{S})$ n'a pas de solution.
3. Déterminer dans quel cas $(\mathcal{S})$ admet au moins une solution et dans quel cas cette solution est unique.
4. On suppose que X est solution de $(\mathcal{S})$. Vérifier que X est alors solution de $A^tAX = A^tb$, système noté $(\mathcal{S}')$.
5. Démontrer que le système $(\mathcal{S}')$ admet toujours une solution et préciser dans quel cas elle est unique.
6. On suppose maintenant $\mathrm{rang}(A) = p$ et on note X_0 la solution de $(\mathcal{S}')$. Démontrer que $b - AX_0$ est orthogonal à l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(A)$. En déduire que X_0 est la solution au sens des moindres carrés du système $(\mathcal{S})$.

Exercice 5. On dispose de la fonction suivante :

```
function [ y ] = d( A, b)
    x = (A'*A) \ (A'*b);
    y = norm(Ax-b);
end
```

1. Quelle est la nature des variables d'entrée et des variables de sortie ?
2. Commenter le code (ligne par ligne).
3. Que rend en sortie la fonction d ?
4. Si la valeur retournée est 0, que peut on dire de `b` par rapport à `A` ?
5. Et si `d(A',b) == norm(b)` est vrai, que peut on dire de `b` par rapport à `A` ?