Lineare Algebra

1 Allgemeines

Dreiecksungleichung	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung:	$\|\langle x, y\rangle\| \leq \\|x\\| \cdot \\|y\\|$

$\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
$\mathbb{I}_n$ ist die nxn-Einheitsmatrix. e_i ist der i-te Einheitsvektor.

2 Matrizen

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j.

2.1 Allgemeine Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc.)

1) $A + 0 = A$ 2) $1 \cdot A = A$
3) $A + B = B + A$ 4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Allg.)
5) $(A+B)+C = A+(B+C)$ 6) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$

2.2 Elementare Zeilenumformungen (EZF) (gilt äquiv. für Spalten)

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Addition des λ-fachen der Zeile z_i zur Zeile z_j

2.3 Transponieren

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$
Regeln:
$(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ $(A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ orth. diagbar)
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist orthogonal (Spalten-/Zeilenvektoren=ONB), falls:
$AA^\top = \mathbb{I}_n \quad \Leftrightarrow \quad A^\top = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det A = \pm 1$
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

2.4 Inverse Matrix von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Für die inverse Matrix A^{-1} von A gilt: $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$
$(A^{-1})^{-1} = A$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad \operatorname{rang}(A) = n$

Berechnen von A^{-1} nach Gauß:
$AA^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \Rightarrow \quad (A|\mathbb{I}_n) \xrightarrow{EZF} (\mathbb{I}_n|A^{-1})$
2x2-Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.5 Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

(N0-Zeilen = Nicht-Null-Zeilen)

Bringe A auf ZSF
Rang (Zeilrang) $\operatorname{rang}(A)$: Anzahl N0-Zeilen
Zeilenraum $\operatorname{row}(A)$: Erzeugnis der Zeilen, $\operatorname{Basis}(\operatorname{row}(A)) = \{$ N0-Zeilen $\}$
Kern: $\operatorname{kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$
Dimensionsformel: $\operatorname{rang}(A) + \dim(\operatorname{kern}(A)) = n$

Bringe A auf Spaltenstufenform (transponieren, ZSF)
Spaltenrang: Anzahl der N0-Spalten
Spaltenraum $\operatorname{col}(A)$: Erzeugnis der Spalten, $\operatorname{Basis}(\operatorname{col}(A)) = \{$ N0-Spalten $\}$
Bild = Spaltenraum: Erzeugnis der Spalten

2.6 Matrixpotenzen

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^n$.
Gesucht: Lösung von A^n.

- Bestimme Eigenwerte λ und Eigenvektoren v von A.
- Bestimme $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$.
- $A^n x = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k^n v_k$.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, A diagonalisierbar.
Gesucht: A^n.

- $A^n = SD^nS^{-1}$ mit $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$.

2.7 Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

Lösbarkeitskriterium:
Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$
Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim(\operatorname{kern}(A)) = n - \operatorname{rang}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A \neq 0 \quad \to \exists A^{-1}$
Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0
Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

2.8 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(A) = |A|$

- $|A| = \sum\limits_{i/j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$
  Entwicklung nach i-ter Zeile/j-ter Spalte
- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

2.9 Äquivalente Aussagen für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

1) A ist invertierbar
2) $\dim(\operatorname{col}(A)) = \dim(\operatorname{row}(A)) = n$
3) $\operatorname{kern}(A) = 0$
4) Die strenge ZSF von A ist $\mathbb{I}_n$
5) $\det(A) \neq 0$
6) Zeilen/Spalten von A linear unabhängig
7) $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung $\forall b \in \mathbb{R}^n$
8) 0 ist kein Singulärwert von A
9) Lineare Abbildung ist bijektiv
10) $\operatorname{rang}(A) = n$
11) 0 ist kein Eigenwert von A

3 Vektoren

Ein Vektor ist ein n-Tupel reeller oder komplexer Zahlen, also ein Element aus dem $\mathbb{K}^n$.

3.1 Skalarprodukt $\langle v, w\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

1. Linear: $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \wedge \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
2. Symmetrisch: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
3. Positiv definit: $\langle v, v\rangle \geq 0 \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Kanonisches Skalarprodukt
$\langle v, w\rangle = v^\top w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$

Skalarprodukt bzgl. sym., quadr. und positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\langle v, w\rangle_A = v^\top Aw$

Skalarprodukt Polynome $\langle p(x), q(x)\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Orthogonalität $\langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow a \perp b$
Projektion eines Vektor v längs a: $\operatorname{proj}_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a$
Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:
$v = \operatorname{proj}_a(v) + \operatorname{proj}_{a^\perp}(v) \Rightarrow \operatorname{proj}_{a^\perp}(v) = v - \operatorname{proj}_a(v)$
Winkel $\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{\\|a\\|\\|b\\|} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\\|a\\|\\|b\\|}\right)$

3.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times b \perp a, b$ (falls $a \times b = 0 \Leftrightarrow a, b$ linear abhängig)
$a \times b = -b \times a$
$\\|a \times b\\| = \\|a\\| \cdot \\|b\\| \cdot \sin(\measuredangle(a, b)) \mathrel{\widehat{=}}$ Fläche des Parallelogramms
Graßmann-Identität: $a \times (b \times c) \equiv b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)$

Spatprodukt
$[a, b, c] := \langle a \times b, c\rangle = \det(a, b, c) \mathrel{\widehat{=}}$ Volumen des Spates.
$[a, b, c] > 0 \Leftrightarrow a, b, c$ bilden Rechtssystem
$[a, b, c] = 0 \Leftrightarrow \{a, b, c\}$ linear abhängig

4 Vektorräume (VR)

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
Bedingung $(u, v, w \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

1. $v + w \in V \qquad \lambda v \in V$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $0 \in V : v + 0 = v$
4. $v' \in V : v + v' = 0$
5. $v + w = w + v$
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
8. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
9. $1v = v$

4.1 Untervektorraum (UVR) $U \subset V (u, v \in U \quad \lambda \in \mathbb{R})$

1. $U \neq \emptyset \qquad (0 \in U)$
2. $u + v \in U$
3. $\lambda u \in U$

4.2 Basis (Jeder VR und jeder UVR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt Basis von V, wenn gilt:

- $\operatorname{span}(B) = V$, B erzeugt V
- B ist linear unabhängig

4.3 Dimension

$n = \dim(V) = |B| =$ Mächtigkeit von B
Mehr als n Vektoren in V sind stets linear abhängig.
Für jeden UVR $U \subset V$ gilt: $\dim(U) \leq \dim(V)$

4.4 Linearkombination

Jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ kann als Linearkombination einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{K}^n$ dargestellt werden

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \Rightarrow \text{Gauß} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & | & v \end{pmatrix}$$

Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

4.5 Orthogonalität

$B \subset V$ heißt

- **Orthogonalsystem**, wenn $\forall v, w \in B : v \perp w$
- **Orthogonalbasis**, wenn B Orthogonalsystem und Basis von V
- **Orthonormalsystem**, wenn B Orthogonalssystem u. $\forall v \in B$: $\\|v\\| = 1$
- **Orthonormalbasis(ONB)**, wenn B Orthonormalsystem u. Basis von V ist

Eine **quadratische Matrix** A **heißt orthogonal**, wenn $A^\top A = \mathbb{I}_n$

- $A^{-1} = A^\top$
- $\det A = \pm 1$
- Spalten bilden ONB
- Zeilen bilden ONB
- $\\|Av\\| = \\|v\\|$
- Drehmatrix mit Drehung um den Ursprung: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- (Dreh-)Spiegelmatrix mit Spiegelung an der Geraden $y = tan(\frac{\alpha}{2}) \cdot x$: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Orthonormalisierungsvefahren einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nach Gram-Schmidt

1. $b_1 = \frac{c_1}{\\|c_1\\|}$ mit $c_1 = v_1$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_2 = \frac{c_2}{\\|c_2\\|}$ mit $c_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} \cdot c_1$
3. $b_3 = \frac{c_3}{\\|c_3\\|}$ mit $c_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} \cdot c_1 - \frac{\langle v_3, c_2\rangle}{\langle c_2, c_2\rangle} \cdot c_2$

Erweitern einer ONB von V auf eine ONB des $\mathbb{R}^n$

1. Vektor e_i mit $i \in \{1 \ldots n\}$ so wählen, sodass die Skalarprodukte möglichst einfach zu berechnen sind.
2. Gram-Schmidt für $e_i \Rightarrow$ Ergebnis zur Basis hinzufügen
3. So lange Wiederholen bis die Basis n Vektoren besitzt.
4. Alle neu hinzugefügten Vektoren bilden zusammen eine ONB von $V^\perp$

Orthogonale Projektion auf UVR
Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$, Untervektorraum $U \subset V$

1. Basis von U bestimmen
2. Orthogonalisiere Basis $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ von U
3. $\operatorname{proj}_U(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 + \ldots$
4. $\operatorname{proj}_{U^\perp}(v) = v - \operatorname{proj}_U(v)$
5. Abstand von v zu $U = \left\\|\operatorname{proj}_{U^\perp}(v)\right\\|$

Alternative Methode

1. Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von U bestimmen
2. Setze $A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}$
3. Löse das LGS $A^\top Ax = A^\top v$ und erhalte den Lösungsvektor $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^\top$
4. $\operatorname{proj}_U(v) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r$

5 Norm

Norm von Vektoren $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$
$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

6 Lineare Abbildungen

Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn

1. $f(0) = 0$
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$\Rightarrow$ Abbildung als Matrix darstellbar (siehe Abbildungsmatrix)

Injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W \; \exists x \in V : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv(Eineindeutig): f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ umkehrbar.

6.1 Koordinatenvektor bezüglich einer Basis B

Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$.
Gesucht: $[v]_B$ (Koordinaten von v bezüglich der Basis B).

1. Bestimme Basis B von V.
2. Löse das LGS $Bx = v$.
3. $[v]_B = x$.

6.2 Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix)

Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Abbildungsmatrix spaltenweise: $[f] = \begin{pmatrix} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{pmatrix}$

Allgemein $f : V \to W$ mit V, W Vektorräume
$B = (b_1, \ldots, b_n)$ ist eine Basis von V, $\exists B^{-1}$.
$[f]_B := B^{-1}[f]B$.

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = b$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
- Löse das LGS $[f]_B x = B^{-1}b$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
b) $f(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, f(b_n) = \lambda_n b_n$.

$C = (c_1, \ldots, c_n)$ ist eine Basis von V.

$\Rightarrow [f]_B^C = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(b_1)_C & f(b_2)_C & \cdots & f(b_n)_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.
"In der j-ten Spalte der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten des Bildes $f(b_j)$ bzgl. der Basis $C = (c_1, \ldots, c_m)$"

Eigenschaften von f mit Hilfe von $[f]$

- $\mathrm{kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$
- $\mathrm{im}(f) = \mathrm{col}([f])$
- f injektiv, wenn $\mathrm{kern}([f]) = \{0\}$
- f surjektiv, wenn $\mathrm{im}([f]) = \mathbb{R}^m$
- f bijektiv, wenn $[f]$ invertierbar
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv

6.3 Transformationsmatrix

Transformationsmatrix der Koordinaten von B zu C: ${}_C T_B$
Regeln und Berechnung:

- ${}_{\mathbb{I}_n} T_B = T_B$: Vektoren der Basis B
- ${}_C T_B = {}_C T \cdot T_B$
- $({}_C T_B)^{-1} = {}_B T_C$
- $[v]_C = {}_C T_B \cdot [v]_B$
- $C = B \cdot {}_C T_B$

7 Diagonalisierung (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Gilt $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so nennt man

- $v \in V$ einen **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ und
- $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert** von A zum **Eigenvektor** $v \in V$

Ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man den Untervektorraum

- $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ und
- $\dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ
- $\mathrm{geo}(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$

Diagonalisieren von Matrizen
A ist diag.bar falls eine invertierbar Matrix B existiert, sodass

$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

- Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar wenn $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geo}(\lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.
- Eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.
- Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$

7.1 Rezept: Diagonalisieren

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Bestimme das charakteristische Polynom von A
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$$
2. Charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerlegen.
$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{\nu_r}$$
Es gilt $\nu_1 + \cdots + \nu_r = n$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind die Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
Ist p_A nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegbar $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar!
3. Bestimme zu jeden Eigenwert λ_i den Eigenraum V_i
$$V_i = \mathrm{kern}(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) = \mathrm{span}(B_i)$$
Die Vektoren der Basis B_i sind die Eigenvektoren von λ_i.

Einfacher: Der Eigenvektor v_i ist Lösung des homogenen LGS
$$(A - \lambda_i \mathbb{I}_n)v_i = 0$$
$\dim(V_i) = \mathrm{geo}(\lambda_i)$ geometr. Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.
Gilt $\mathrm{geo}(\lambda_i) \neq \mathrm{alg}(\lambda_i)$ für ein i, ist A nicht diagonalisierbar!
4. $B = (v_1 \;\ldots v_n)$ setzt sich aus den Eigenvektoren zusammen.
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.
$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

8 QR-Zerlegung

$A = QR$, wobei Q orthogonal und R oben dreieckig.
Vorgehen

- Q berechnen durch Gram-Schmidt mit den Spalten von A, **beginnend bei der ersten**
- Die Koeffizienten von R ergeben sich aus den Gram-Schmidt Gleichungen wie folgt: $r_{i,i} = ||c_i||^2$ und $r_{i,j} = \frac{\langle v_j, c_i \rangle}{r_{i,i}}$
- Alternativ gilt: $R = Q^T A$

9 Kleinstes-Quadrate-Problem

Für $Ax = b$ lautet die **Normalengleichung** $A^T Ax^* = A^T b$

Lösen durch Gauß oder Umstellen: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
Für $A = QR$ lautet die Lösung $x^* = R^{-1} Q^T b$
$\Rightarrow$ optimale Lösung mit minimalem quadratischen Fehler (existiert immer).

10 Singulärwertzerlegung

Bei der Singulärwertzerlegung wird eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Produkt dreier Matrizen V, Σ und W geschrieben

$$A = V \Sigma W^\top$$

mit $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
V und W sind orthogonal, Σ ist eine Diagonalmatrix.

10.1 Rezept: Singulärwertzerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. Bestimme alle Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren w_j der Matrix $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ordne sie
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ mit $r \leq n$
2. Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^n$ aus den Eigenvektoren w_j und erhalte $W = \begin{pmatrix} w_1 & \ldots & w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
3. Die Singulärwerte sind $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \qquad j = 1, \ldots, \min\{m, n\}$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m < n$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m > n$$
4. Bestimme $v_1, \ldots, v_r$ aus $v_i = \frac{1}{\sigma_j} A w_j$ für alle $j = 1, \ldots, r$ (alle $\sigma_j \neq 0$)
5. Falls $r < m$ ergänze $v_1, \ldots, v_r$ zu einer ONB, bzw. zu $V = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{pmatrix}$ orthogonal.
6. $A = V \Sigma W^\top$

10.2 Kompression

- Rang k Matrix $A_{(k)} = V \Sigma_{(k)} W^\top$. Die Matrix $\Sigma_{(k)}$ enthält nur die Singulärwerte $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. ($\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{n/m}$ mit 0 ersetzen).
- Frobenius-Norm $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j}^2}$
- Es gilt: $||A - A_{(k)}||_F \leq ||A - B||_F$ mit B als eine beliebige Matrix des $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $rang(B) \leq rang(A_{(k)}) = k$
- Speicheraufwand einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $rang(A) \cdot (m + n)$

11 Lineare Differentialgleichungen und Rekursive Folgen

11.1 Lösen einer linearen Differentialgleichung

Gegeben: $y'(t) = \lambda y(t)$, mit $y(0) = c$
Lösung: $y(t) = ce^{\lambda t}$ mit $c \in \mathbb{R}$

11.2 Lösen eines Systems linearer Differentialgleichungen

Gegeben: $y'(t) = Ay$, mit $y_1(0), \ldots, y_n(0)$
Wobei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $y_1(0), \ldots, y_n(0) \in \mathbb{R}$, $y, y' \in \mathbb{R}^n$.
Lösung:

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen.
2. $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} v_n.$
3. Anfangswerte einsetzen und Werte für c_1, bis c_n bestimmen.

11.3 Rekursive Folgen

Gegeben: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$, Anfangswerte: x_0, x_1
Lösung:

1. Matrix A bestimmen.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. LGS aufstellen.
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$
3. Diagonalisieren: $A = SDS^{-1}$
4. Anfangswerte x_0, x_1 einsetzen und x_n berechnen
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = SD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

12 Definitheit und Quadratische Funktionen

12.1 Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Eigenwerten (EW) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißt:

- positiv definit: EW positiv $<=>$ $v^\top Av > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- negativ definit: EW negativ $<=>$ $v^\top Av < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- positiv semidefinit: EW ≥ 0 $<=>$ $v^\top Av \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- negativ semidefinit: EW ≤ 0 $<=>$ $v^\top Av \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

12.2 Quadratische Funktionen

Form: $f(x) = x^\top Ax + b^\top x + c = \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$
Berechnen von Extrempunkten:

- positiv definit: Minimum bei $x^* = -\frac{1}{2} A^{-1} b$
- negativ definit: Maximum bei $x^* = -\frac{1}{2} A^{-1} b$
- positiv/negativ semidefinit: Existenz von Extremum hängt von Lösbarkeit des LGS $2Ax = -b$ ab. (nicht eindeutig!)