Lineare Algebra

1. Allgemeines

Dreiecksungleichung $|x+y| \le |x| + |y|$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

$\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

$\mathbb{I}_n$ ist die $n \times n$-Einheitsmatrix. e_i ist der i-te Einheitsvektor.

2. Matrizen

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j.

2.1. Allgemeine Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc.)

1) $A + 0 = A$	2) $1 \cdot A = A$
3) $A + B = B + A$	4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Allg.)
5) $(A+B)+C = A+(B+C)$	6) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m\times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$

2.2. Elementare Zeilenumformungen (EZF) (gilt äquiv. für Spalten)

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Addition des λ-fachen der Zeile z_i zur Zeile z_j

2.3. Transponieren

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$

Regeln:

$(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ $\qquad (A\cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$

$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ $\qquad (A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ orth. diagbar)

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist orthogonal (Spalten-/Zeilenvektoren=ONB), falls:

$AA^\top = \mathbb{I}_n \quad \Leftrightarrow \quad A^\top = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det A = \pm 1$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

2.4. Inverse Matrix

Für die inverse Matrix A^{-1} von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$

$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad \operatorname{rang}(A) = n$

Berechnen von A^{-1} nach Gauß:

$AA^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \Rightarrow \quad (A|\mathbb{I}_n) \overset{EZF}{\longrightarrow} (\mathbb{I}_n|A^{-1})$

2x2-Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.5. Rang einer Matrix

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ (N0-Zeilen = Nicht-Null-Zeilen)

Bringe A auf ZSF

Rang (Zeilrang) $\operatorname{rang}(A)$: Anzahl N0-Zeilen

Zeilenraum $\operatorname{row}(A)$: Erzeugnis der Zeilen, $\operatorname{Basis}(\operatorname{row}(A))$ = { N0-Zeilen }

Kern: $\operatorname{kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$

Dimensionsformel: $\operatorname{rang}(A) + \dim(\operatorname{kern}(A)) = n$

Bringe A auf Spaltenstufenform (transponieren, ZSF)

Spaltenrang: Anzahl der N0-Spalten

Spaltenraum $\operatorname{col}(A)$: Erzeugnis der Spalten, $\operatorname{Basis}(\operatorname{col}(A))$ = { N0-Spalten }

Bild = Spaltenraum: Erzeugnis der Spalten

2.6. Matrixpotenzen

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Gesucht: Lösung von A^n.

- Bestimme Eigenwerte λ und Eigenvektoren v von A.
- Bestimme $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$.
- $A^n x = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k^n v_k$.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, A diagonalisierbar.

Gesucht: A^n.

- $A^n = SD^nS^{-1}$ mit $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$.

2.7. Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

Lösbarkeitskriterium:

Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$

Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim(\operatorname{kern}(A)) = n - \operatorname{rang}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A \neq 0 \quad \to \exists A^{-1}$

Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0

Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

2.8. Determinante

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

- $|A| = \sum\limits_{i \text{ oder } j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

  Entwicklung nach j-ter Spalte oder i-ter Zeile
- Determinante einer 2×2-Matrix:

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$
- Determinante einer 3×3-Matrix:

$$\det(A) = \det\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right)\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

- $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

2.9. Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind ähnlich zueinander, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $A = SBS^{-1}$. Man schreibt $A \sim B$.

Eigenschaften:

A ist inviertierbar $\Leftrightarrow$ B ist invertierbar	$\det(A) = \det(B)$
A und B haben das gleiche char. Polynom	$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$

2.10. Hauptsatz invertierbarer quadratischer Matrizen

1) A ist invertierbar	2) $\dim(\operatorname{col}(A)) = \dim(\operatorname{row}(A)) = n$
3) $\operatorname{kern}(A) = 0$	4) Die strenge ZSF von A ist $\mathbb{I}_n$
5) $\det(A) \neq 0$	6) Zeilen/Spalten von A linear unabh.
7) $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung $\forall b \in \mathbb{R}^n$	8) 0 ist kein Singulärwert von A
	9) Lineare Abbildung ist bijektiv
10) $\operatorname{rang}(A) = n$	11) 0 ist kein Eigenwert von A
12) $\operatorname{col}(A) = \mathbb{R}^n$	13) A ist Produkt elementarer Matrizen

Ist eine dieser Aussagen wahr, so sind alle Aussagen wahr!

3. Vektoren

Ein Vektor ist ein n-Tupel reeller oder komplexer Zahlen, also ein Element aus dem $\mathbb{K}^n$.

3.1. Skalarprodukt

$\langle v, w\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

1. Linear: $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \wedge \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
2. Symmetrisch: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
3. Positiv definit: $\langle v, v\rangle \ge 0 \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Kanonisches Skalarprodukt

$\langle v, w\rangle = v^\top w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$

Skalarprodukt bzgl. sym., quadr. und positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$\langle v, w\rangle_A = v^\top A w$

Skalarprodukt Polynome $\langle p(x), q(x)\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Orthogonalität $\langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

Projektion eines Vektor v längs a: $\operatorname{proj}_a(v) = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a$

Orthogonale Zerlegung eines Vektors v längs a:

$v = \operatorname{proj}_a(v) + \operatorname{proj}_{a^\perp}(v) \Rightarrow \operatorname{proj}_{a^\perp}(v) = v - \operatorname{proj}_a(v)$

Winkel $\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}\right)$

3.2. Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times b \perp a, b \qquad$ (falls $a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a, b$ linear abhängig)

$a \times b = -b \times a$

$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\measuredangle(a, b)) \mathrel{\widehat{=}}$ Fläche des Parallelogramms

Graßmann-Identität: $a \times (b \times c) \equiv b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)$

Spatprodukt

$[a, b, c] := \langle a \times b, c\rangle = \det(a, b, c) \mathrel{\widehat{=}}$ Volumen des Spates.

$[a, b, c] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a, b, c$ bilden Rechtssystem

$[a, b, c] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{a, b, c\}$ linear abhängig

4. Vektorräume (VR)

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

Bedingung $(u, v, w \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$v + w \in V \qquad \lambda v \in V$	$v + w = w + v$
$u + (v + w) = (u + v) + w$	$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
$0 \in V : v + 0 = v$	$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
$v' \in V : v + v' = 0$	$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

4.1. Untervektorraum (UVR)

$U \subset V (u, v \in U \quad \lambda \in \mathbb{R})$

1. $U \neq \emptyset \qquad (0 \in U)$
2. $u + v \in U$
3. $\lambda u \in U$

4.2. Basis (Jeder VR und jeder UVR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt Basis von V, wenn gilt:

- $\operatorname{span}(B) = V$, B erzeugt V
- B ist linear unabhängig

4.3. Dimension

$n = \dim(V) = |B| =$ Mächtigkeit von B

Mehr als n Vektoren aus V sind stets linear abhängig.

Für jeden UVR $U \subset V$ gilt: $\dim(U) \le \dim(V)$

4.4. Linearkombination

Jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ kann als Linearkombination einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{K}^n$ dargestellt werden

$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \Rightarrow$ Gauß $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & | & v \end{pmatrix}$

Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

4.5. Orthogonalität

$B \subset V$ heißt

- **Orthogonalsystem**, wenn $\forall v, w \in B : v \perp w$
- **Orthogonalbasis**, wenn B Orthogonalsystem und Basis von V
- **Orthonormalsystem**, wenn B Orthogonalssystem u. $\forall v \in B$: $\|v\| = 1$
- **Orthonormalbasis(ONB)**, wenn B Orthonormalsystem u. Basis von V ist

Eine **quadratische Matrix** A **heißt orthogonal**, wenn $A^\top A = \mathbb{I}_n$

- $A^{-1} = A^\top$
- $\det A = \pm 1$
- Spalten bilden ONB
- Zeilen bilden ONB
- $\|Av\| = \|v\|$
- Drehmatrix mit Drehung um den Ursprung: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- (Dreh-)Spiegelmatrix mit Spiegelung an der Geraden $y = tan(\frac{\alpha}{2}) \cdot x$: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Orthonormalisierungsvefahren einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nach Gram-Schmidt

1. $b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$ mit $c_1 = v_1$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$ mit $c_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} \cdot c_1$
3. $b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}$ mit $c_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} \cdot c_1 - \frac{\langle v_3, c_2\rangle}{\langle c_2, c_2\rangle} \cdot c_2$

Erweitern einer ONB von V auf eine ONB des $\mathbb{R}^n$

1. Vektor e_i mit $i \in \{1...n\}$ so wählen, sodass die Skalarprodukte möglichst einfach zu berechnen sind.
2. Gram-Schmidt für $e_i \Rightarrow$ Ergebnis zur Basis hinzufügen
3. So lange Wiederholen bis die Basis n Vektoren besitzt.
4. Alle neu hinzugefügten Vektoren bilden zusammen eine ONB von $V^\perp$

Orthogonale Projektion auf UVR

Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$, Untervektorraum $U \subset V$

1. Basis von U bestimmen
2. Orthogonalisiere Basis $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ von U
3. $\operatorname{proj}_U(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 + \ldots$
4. $\operatorname{proj}_{U^\perp}(v) = v - \operatorname{proj}_U(v)$
5. Abstand von v zu $U = \left\|\operatorname{proj}_{U^\perp}(v)\right\|$

Alternative Methode

1. Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von U bestimmen
2. Setze $A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r}$
3. Löse das LGS $A^\top Ax = A^\top v$ und erhalte den Lösungsvektor $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^\top$
4. $\operatorname{proj}_U(v) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r$

5. Norm

Euklidische Norm von Vektoren $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \qquad$ 2. $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$

6. Lineare Abbildungen

Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn
1. $f(0) = 0$
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$\Rightarrow$ Abbildung als Matrix darstellbar (siehe Abbildungsmatrix)

Injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W \; \exists x \in V : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv(Eineindeutig): f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ umkehrbar.

6.1. Koordinatenvektor bezüglich einer Basis B

Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$.
Gesucht: $[v]_B$ (Koordinaten von v bezüglich der Basis B).
1. Bestimme Basis B von V.
2. Löse das LGS $Bx = v$.
3. $[v]_B = x$.

6.2. Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix)

Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Abbildungsmatrix spaltenweise: $[f] = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}$

Allgemein $f : V \to W$ mit V, W Vektorräume
$B = (b_1, \dots, b_n)$ ist eine Basis von V, $\exists B^{-1}$.
$[f]_B := B^{-1}[f]B$.

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = b$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
- Löse das LGS $[f]_B x = B^{-1} b$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

b) $f(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, f(b_n) = \lambda_n b_n$.

$C = (c_1, \dots, c_n)$ ist eine Basis von V.

$\Rightarrow [f]_B^C = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(b_1)_C & f(b_2)_C & \cdots & f(b_n)_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.
"In der j-ten Spalte der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten des Bildes $f(b_j)$ bzgl. der Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$"

Eigenschaften von f mit Hilfe von $[f]$
- $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$
- $\mathrm{im}(f) = \mathrm{col}([f])$
- f injektiv, wenn $\ker([f]) = \{0\}$
- f surjektiv, wenn $\mathrm{im}([f]) = \mathbb{R}^m$
- f bijektiv, wenn $[f]$ invertierbar
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv

6.3. Transformationsmatrix

Transformationsmatrix der Koordinaten von B zu C: ${}_C T_B$
Regeln und Berechnung:
- ${}_{\mathbb{I}_n} T_B = T_B$: Vektoren der Basis B
- ${}_C T_B = {}_C T \cdot T_B$
- $({}_C T_B)^{-1} = {}_B T_C$
- $[v]_C = {}_C T_B \cdot [v]_B$
- $C = B \cdot {}_C T_B$

7. Diagonalisierung (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Gilt $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so nennt man
- $v \in V$ einen **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ und
- $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert** von A zum **Eigenvektor** $v \in V$

Ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man den Untervektorraum
- $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ und
- $\dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ
- $\mathrm{geo}(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$

Diagonalisieren von Matrizen
A ist diag.bar falls eine invertierbar Matrix B existiert, sodass

$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar wenn $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geo}(\lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.
- Eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.
- Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$

7.1. Rezept: Diagonalisieren

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
1. Bestimme das charakteristische Polynom von A
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$$
2. Charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerlegen.
$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} \dots (\lambda_r - \lambda)^{\nu_r}$$
Es gilt $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind die Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
Ist p_A nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegbar $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar!
3. Bestimme zu jeden Eigenwert λ_i den Eigenraum V_i
$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) = \mathrm{span}(B_i)$$
Die Vektoren der Basis B_i sind die Eigenvektoren von λ_i.

Einfacher: Der Eigenvektor v_i ist Lösung des homogenen LGS
$$(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) v_i = 0$$
$\dim(V_i) = \mathrm{geo}(\lambda_i)$ geometr. Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.
Gilt $\mathrm{geo}(\lambda_i) \neq \mathrm{alg}(\lambda_i)$ für ein i, ist A nicht diagonalisierbar!
4. $B = (v_1 \; \dots v_n)$ setzt sich aus den Eigenvektoren zusammen.
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.
$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

7.2. Orthogonale Diagonalisierbarkeit

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar.

$$D = Q^T AQ \;\Leftrightarrow\; A = QDQ^T$$

Vorgehen
- Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmten
- Eigenvektoren zum selben Eigenwert orthonormalisieren (Gram-Schmidt)
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind bereits orthogonal (ggf. noch normieren)
- $Q = (b_1 \; \dots b_n)$ setzt sich aus den orthonormalen EV zusammen.
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.

8. QR-Zerlegung

$A = QR$, wobei Q orthonormale Spalten hat und R oben dreieckig ist.
Vorgehen
- Q berechnen durch Gram-Schmidt mit den Spalten von A, **beginnend bei der ersten**
- Die Koeffizienten von R ergeben sich aus den Gram-Schmidt Gleichungen wie folgt: $r_{i,i} = ||c_i||^2$ und $r_{i,j} = \frac{\langle v_j, c_i \rangle}{r_{i,i}}$
- Alternativ gilt: $R = Q^T A$

9. Kleinstes-Quadrate-Problem

Für $Ax = b$ lautet die **Normalengleichung** $A^T A x^* = A^T b$

Lösen durch Gauß oder Umstellen: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
Für $A = QR$ lautet die Lösung $x^* = R^{-1} Q^T b$
$\Rightarrow$ optimale Lösung mit minimalem quadratischen Fehler (gibt es immer).

9.1. Rezept: Quadratische Funktion finden

Gegeben: mehrere Punkte (x_i, y_i) im Koordinatensystem
Gesucht: Koeffizienten a, b, c für $f(x) = \mathtt{a} \cdot x^2 + \mathtt{b} \cdot x + \mathtt{c} \cdot 1 = y$
Vorgehen
1. $b = (y_1, y_2, \dots)^\top \qquad A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
Falls Ausgleichsgerade gesucht: erste Spalte von A streichen
2. Lösungsvektor x^* mithilfe von A und b berechnen
3. $x^* = (\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c})^\top \to f(x) = \mathtt{a}x^2 + \mathtt{b}x + \mathtt{c}$

10. Singulärwertzerlegung

Bei der Singulärwertzerlegung wird eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Produkt dreier Matrizen V, Σ und W geschrieben

$$A = V \Sigma W^\top$$

mit $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
V und W sind orthogonal, Σ ist eine Diagonalmatrix.

10.1. Rezept: Singulärwertzerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
1. Bestimme alle Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren w_j der Matrix $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ordne sie
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ mit $r \leq n$
2. Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^n$ aus den Eigenvektoren w_j und erhalte $W = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
3. Die Singulärwerte sind $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \qquad j = 1, \dots, \min\{m, n\}$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m < n$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m > n$$
4. Bestimme $v_1, \dots, v_r$ aus $v_i = \frac{1}{\sigma_j} A w_j$ für alle $j = 1, \dots, r$ (alle $\sigma_j \neq 0$)
5. Falls $r < m$ ergänze $v_1, \dots, v_r$ zu einer ONB, bzw. zu $V = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}$ orthogonal.
6. $A = V \Sigma W^\top$

10.2. Kompression

- Rang k Matrix $A_{(k)} = V \Sigma_{(k)} W^\top$. Die Matrix $\Sigma_{(k)}$ enthält nur die Singulärwerte $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. $(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n/m}$ mit 0 ersetzen).
- Frobenius-Norm $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$
- Es gilt: $||A - A_{(k)}||_F \leq ||A - B||_F$ mit B als eine beliebige Matrix des $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $rang(B) \leq rang(A_{(k)}) = k$
- Speicheraufwand einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $rang(A) \cdot (m + n)$

10.3. Exkurs: Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Gegeben: Matrix W der Eigenvektoren von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top$
Gesucht: Projektionen der Spalten von A auf den Unterraum $U_{(k)}$ als Koordinaten bzgl. der ONB der Eigenvektoren von $AA^\top$
Vorgehen:
1. Normiere $w^1, \dots, w^k$
2. $\overline{w} = (w^1 \dots w^k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$
3. Die Koordinatenvektoren $y^1, \dots, y^k \in \mathbb{R}^k$ die Vektoren $x^1, \dots, x^n$ bzgl. der Basis $\{w^1, \dots, w^k\}$ von $U_{(k)}$ ausdrücken, sind die Spalten von
$$\overline{w}^\top A = \begin{pmatrix} (w^1)^\top \\ \vdots \\ (w^k)^\top \end{pmatrix} \cdot A$$

11. Lineare Differentialgleichungen & Rekursive Folgen

11.1. Lösen einer linearen Differentialgleichung

Gegeben: $y'(t) = \lambda y(t)$, mit $y(0) = c$
Lösung: $y(t) = ce^{\lambda t}$ mit $c \in \mathbb{R}$

11.2. Lösen eines Systems linearer Differentialgleichungen

Gegeben: $y'(t) = Ay$, mit $y_1(0), \dots, y_n(0)$
Wobei $A \in \mathbb{R}^{nxn}, y_1(0), \dots, y_n(0) \in \mathbb{R}, y, y' \in \mathbb{R}^n$.
Lösung:
1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen.
2. $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$.
3. Anfangswerte einsetzen und Werte für c_1, bis c_n bestimmen.

11.3. Rekursive Folgen

Gegeben: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$, Anfangswerte: x_0, x_1
Lösung:
1. Matrix A bestimmen.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. LGS aufstellen.
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$
3. Diagonalisieren: $A = SDS^{-1}$
4. Anfangswerte x_0, x_1 einsetzen und x_n berechnen
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = SD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

12. Definitheit und Quadratische Funktionen

12.1. Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten (EW) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ heißt:

- positiv definit: EW positiv $<=> v^\top Av > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- negativ definit: EW negativ $<=> v^\top Av < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- positiv semidefinit: EW $\geq 0 <=> v^\top Av \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- negativ semidefinit: EW $\leq 0 <=> v^\top Av \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

12.2. Quadratische Funktionen

Form: $f(x) = x^\top Ax + b^\top x + c = \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c$
Berechnen von Extrempunkten:

- positiv definit: Minimum bei $x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$
- negativ definit: Maximum bei $x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$
- positiv/negativ semidefinit: Existenz von Extremum hängt von Lösbarkeit des LGS $2Ax = -b$ ab. (nicht eindeutig!)