Kruskal's Algorithm

이종서(leejseo)

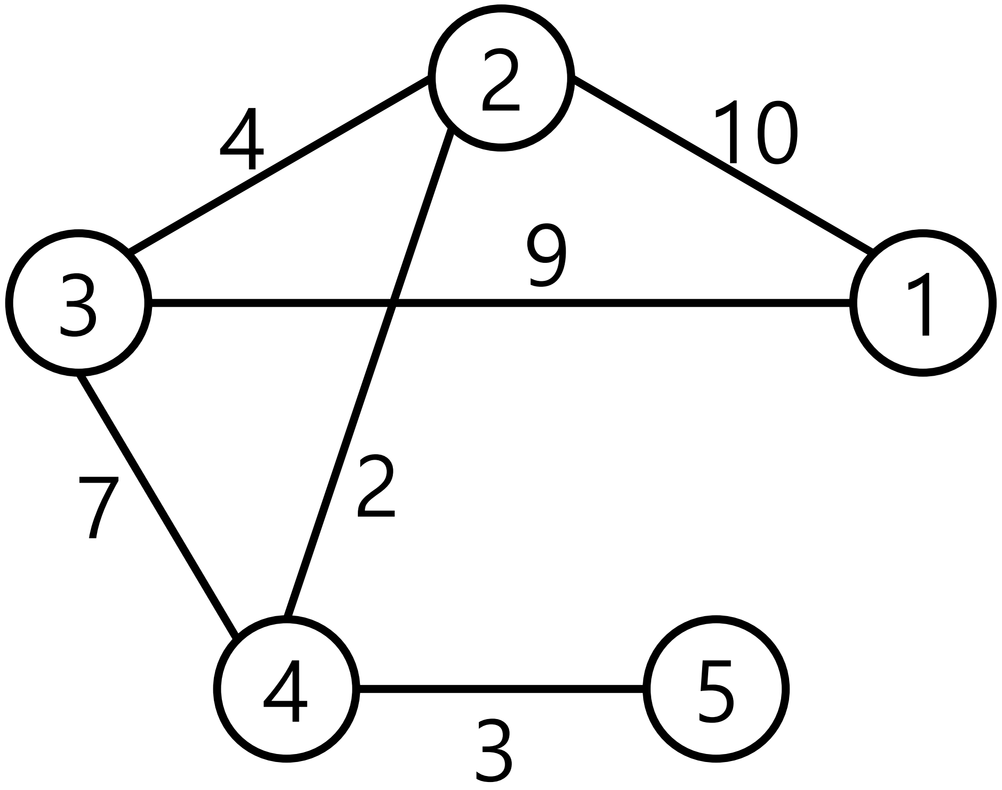
Minimum Spanning Tree

- 어떤 연결 그래프 G의 부분 그래프 T가 스패닝 트리임은 다음과 같음으로 정의된다.
  - V(G) = V(T); G와 T가 정점 집합이 같음
  - T가 트리
- 최소 스패닝 트리: 간선의 가중치의 합이 최소인 스패닝 트리

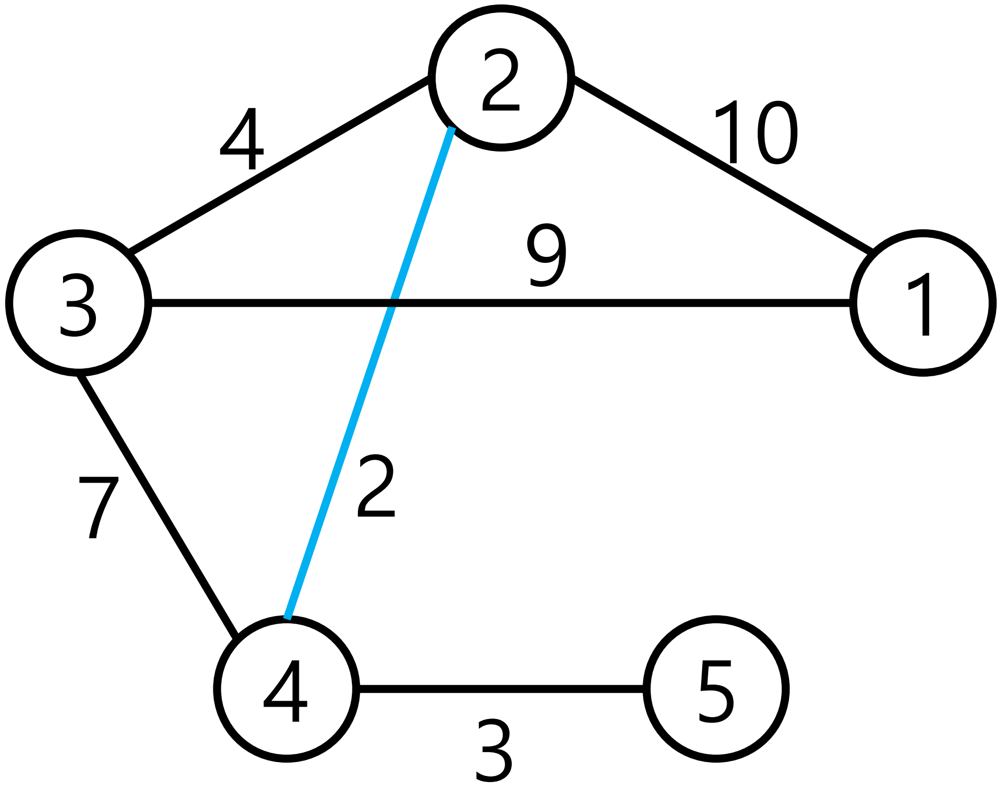
Kruskal's Algorithm

- Input connected graph $G = (V, E, w)$
- $T = \{\}$
- sort $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}\}$ so that $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_{|E|})$
- for $i := 1, 2, \ldots, |E|$:
  - if ($T + e_i$ contains no cycle) $T := T + e_i$
- output T

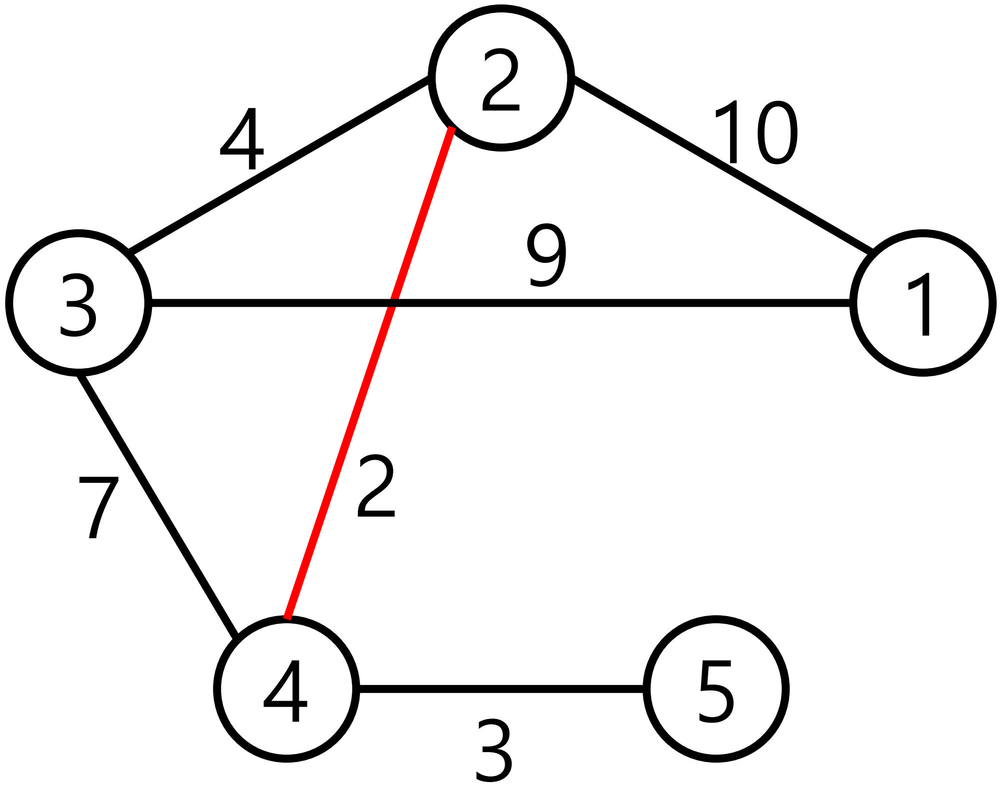
Kruskal’s Algorithm



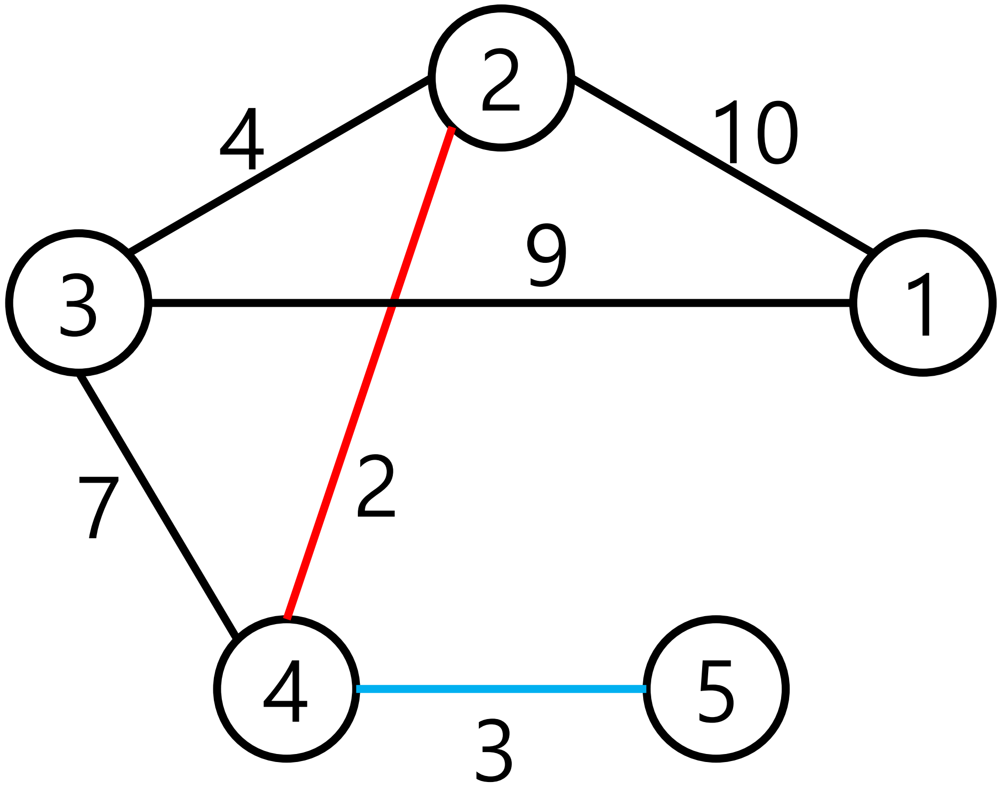
Kruskal's Algorithm



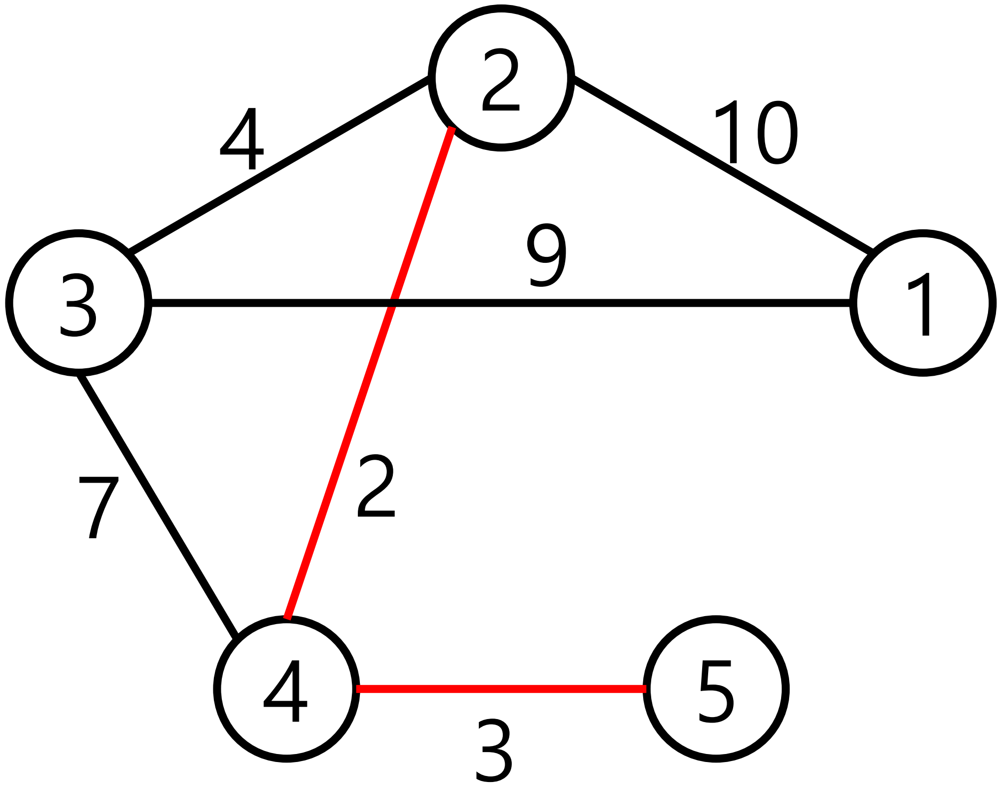
Kruskal's Algorithm



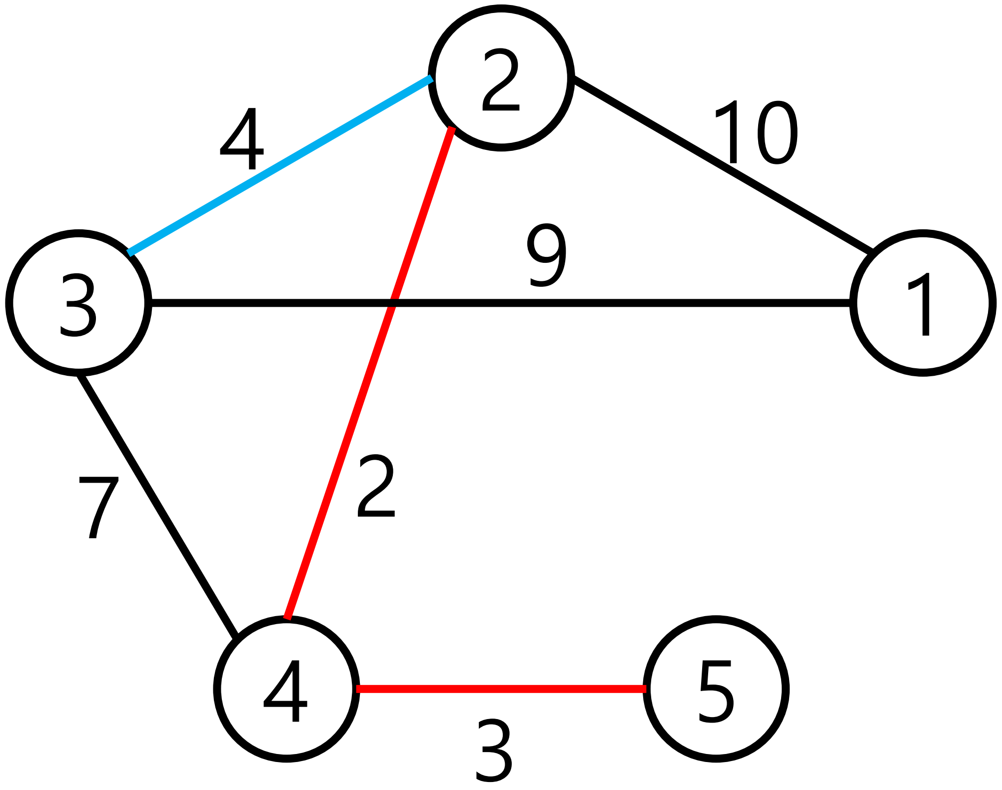
Kruskal’s Algorithm



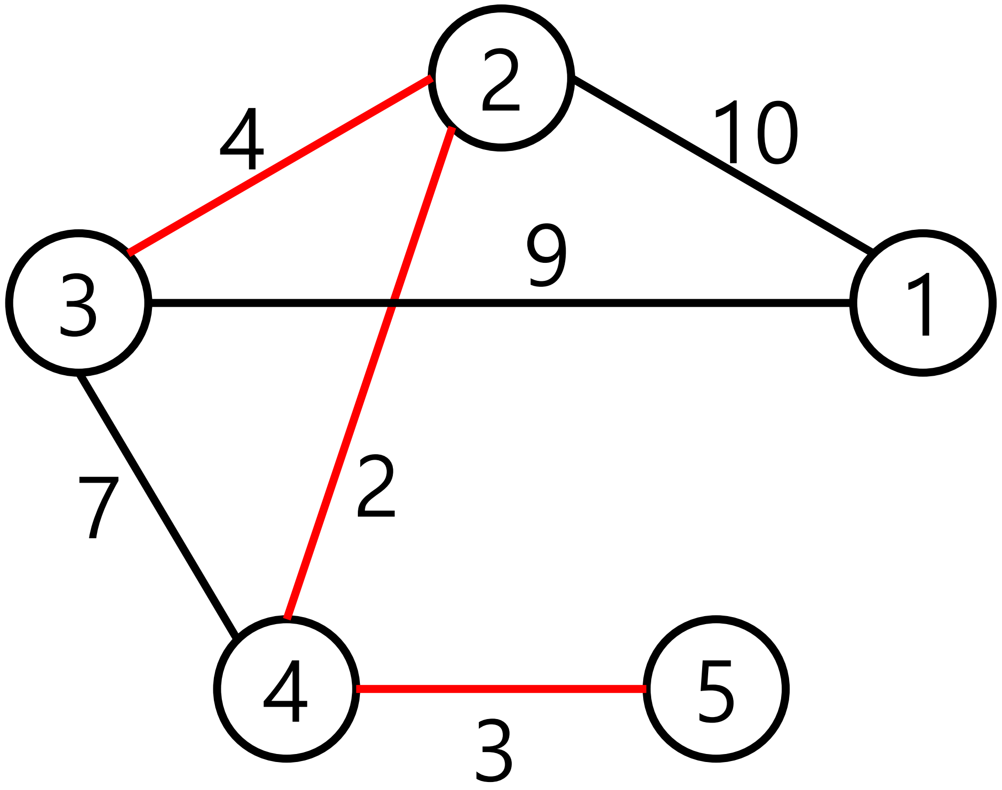
Kruskal's Algorithm



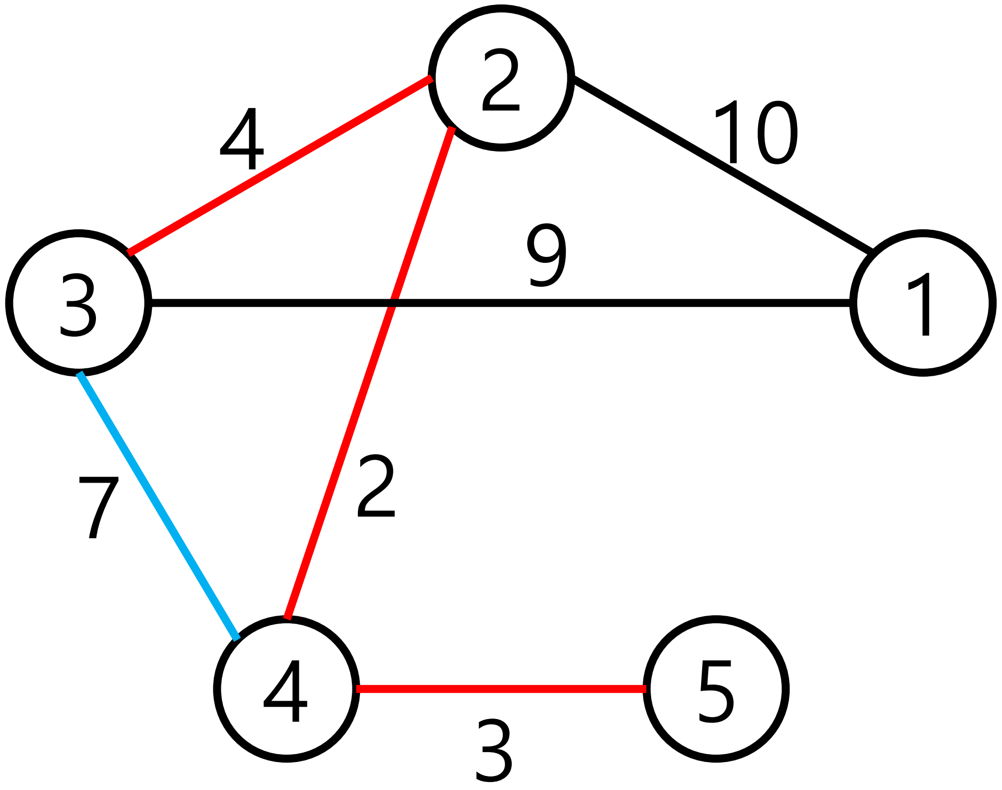
Kruskal's Algorithm



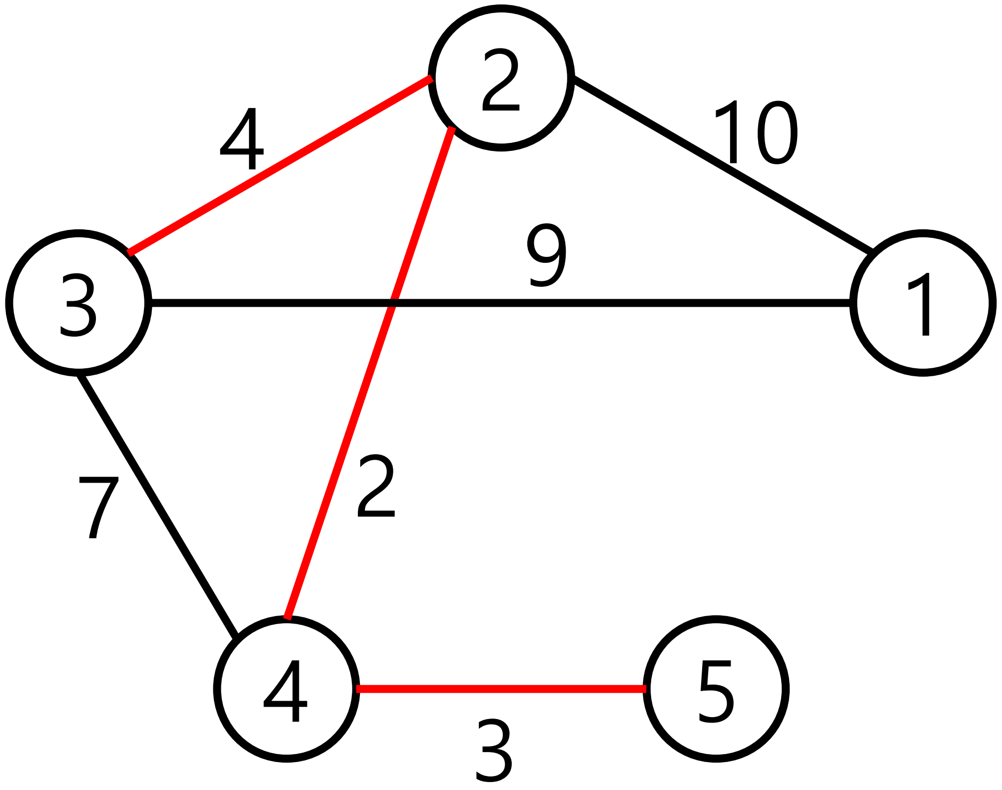
Kruskal's Algorithm



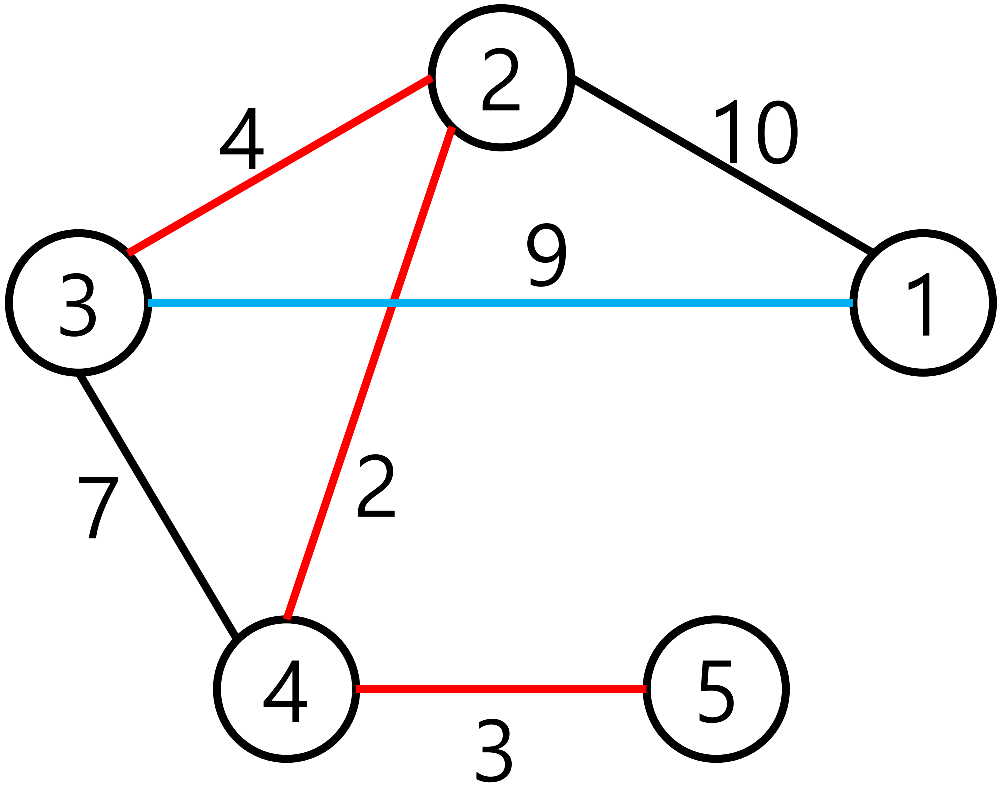
Kruskal’s Algorithm



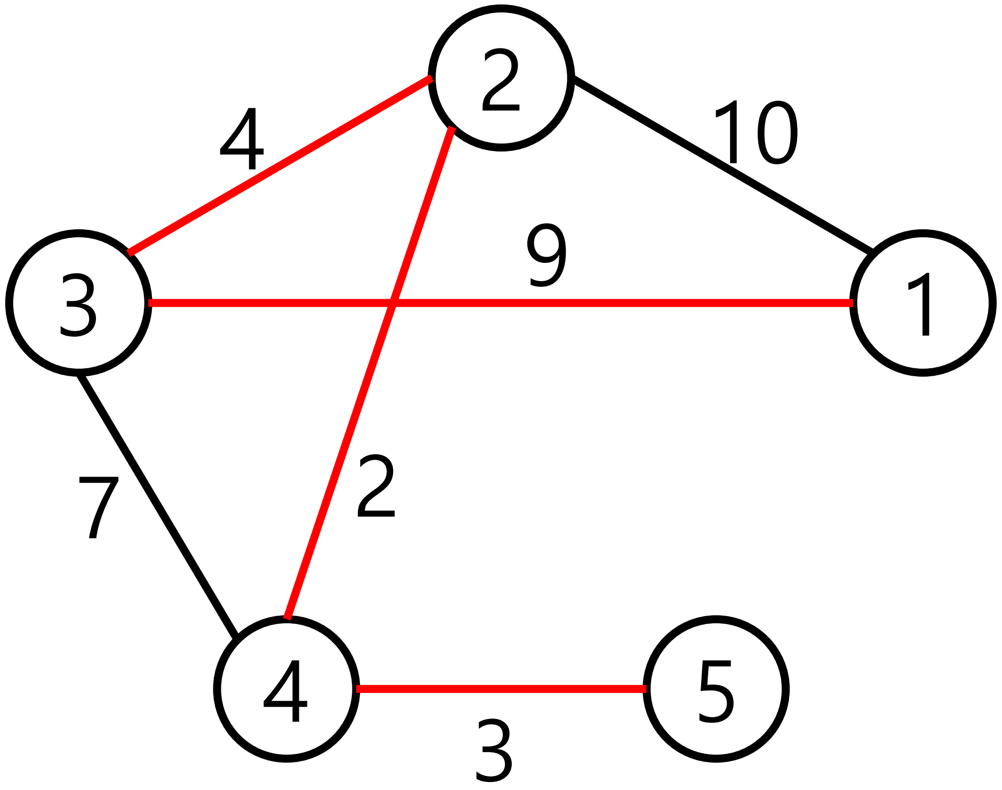
Kruskal's Algorithm



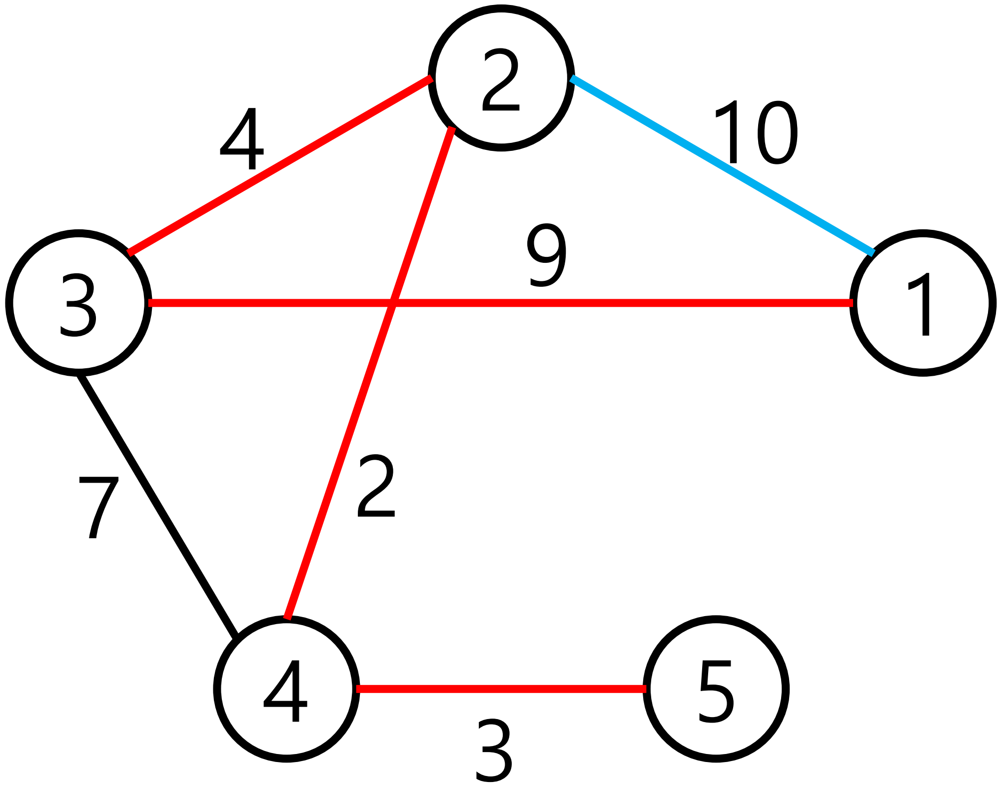
Kruskal's Algorithm



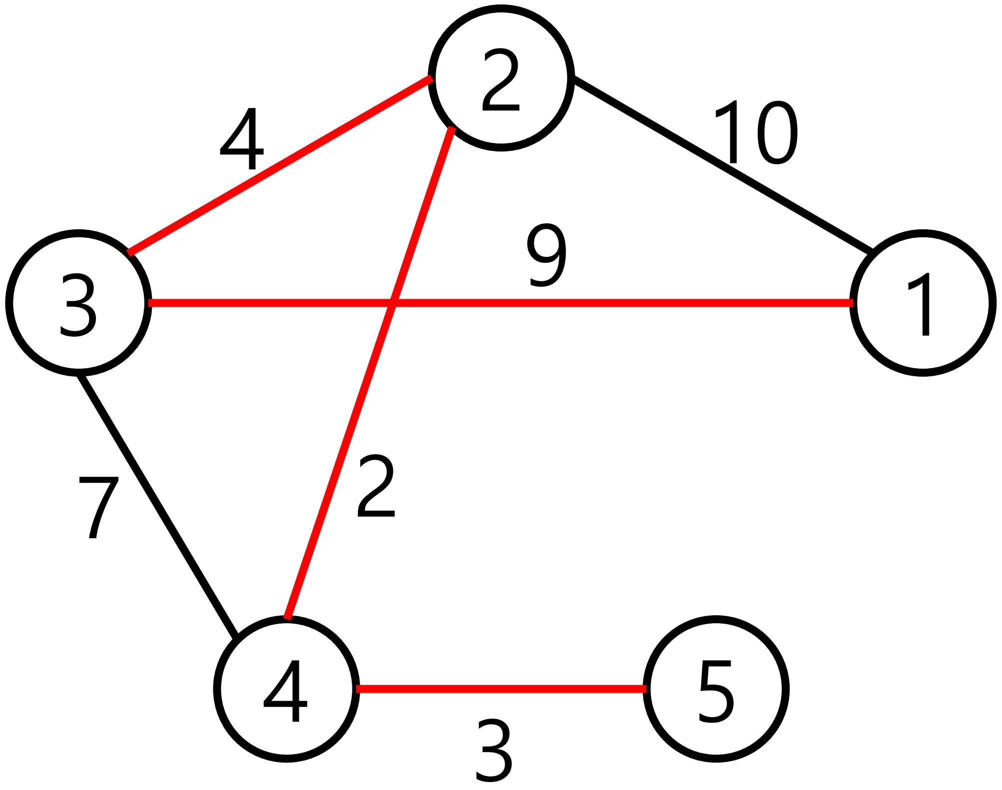
Kruskal's Algorithm



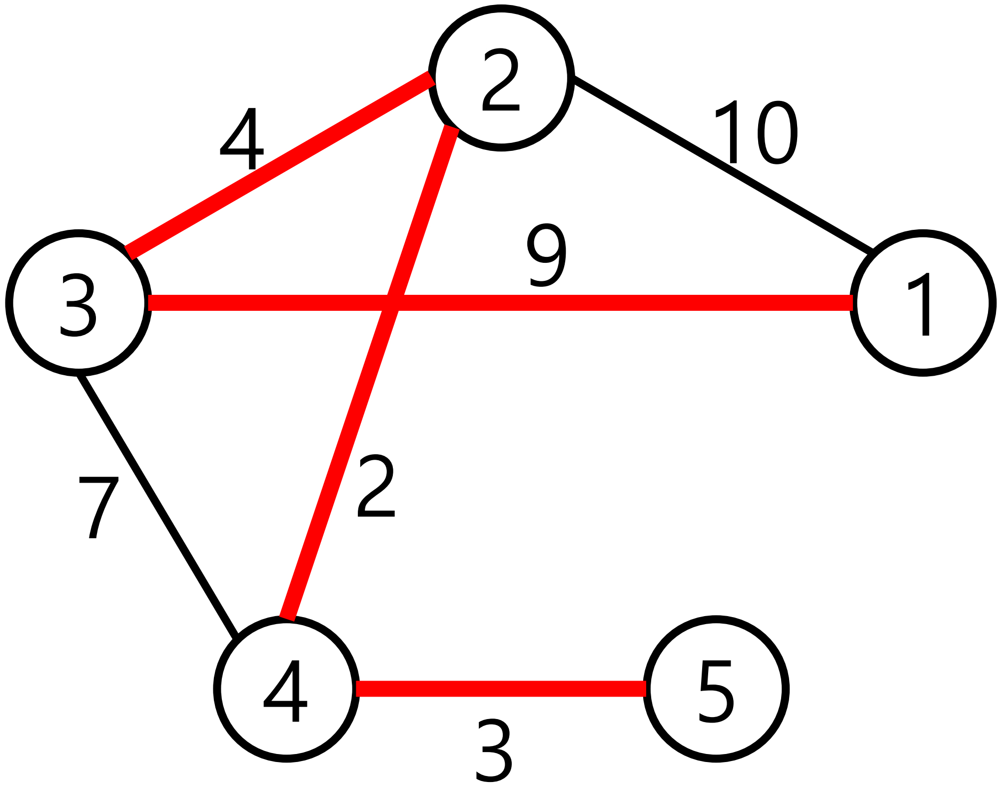
Kruskal’s Algorithm



Kruskal's Algorithm



Kruskal's Algorithm



Kruskal's Algorithm

- Input connected graph $G = (V, E, w)$
- $T = \{\}$
- sort $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}\}$ so that $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_{|E|})$
- for $i := 1, 2, \ldots, |E|$:
  - if ($T + e_i$ contains no cycle) $T := T + e_i$
- output T

- 구현시 참고 사항:

Kruskal's Algorithm

- Input connected graph $G = (V, E, w)$
- $T = \{\}$
- sort $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}\}$ so that $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_{|E|})$
- for $i := 1, 2, \ldots, |E|$:
  - if ($T + e_i$ contains no cycle) $T := T + e_i$
- output T

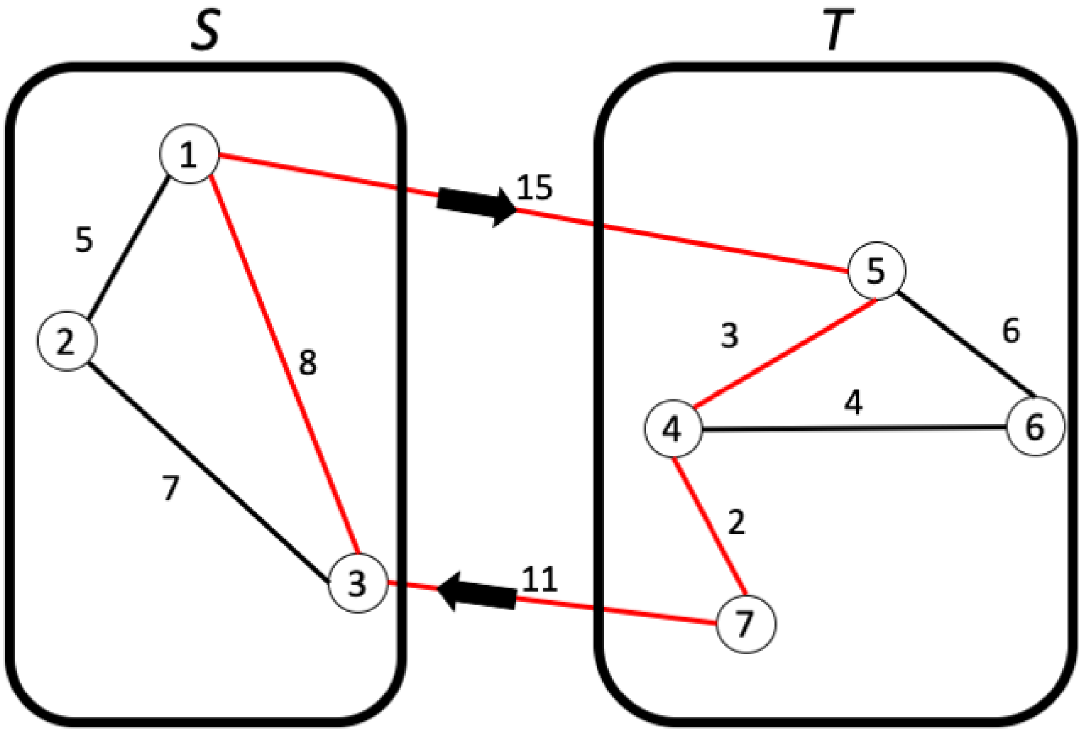
- 구현시 참고 사항: Union-Find(Disjoint Set) 자료구조를 사용하면 된다.

MST’s Properties

- **Definition 1.** (Cut)
  정점 집합의 분할 (S, T) 가운데 S, T 모두 비어있지 않으면 cut이라 부른다. 정점의 한쪽 끝이 S, 다른 쪽 끝이 T에 놓이는 간선들의 집합 D를 cutset 이라 부른다.

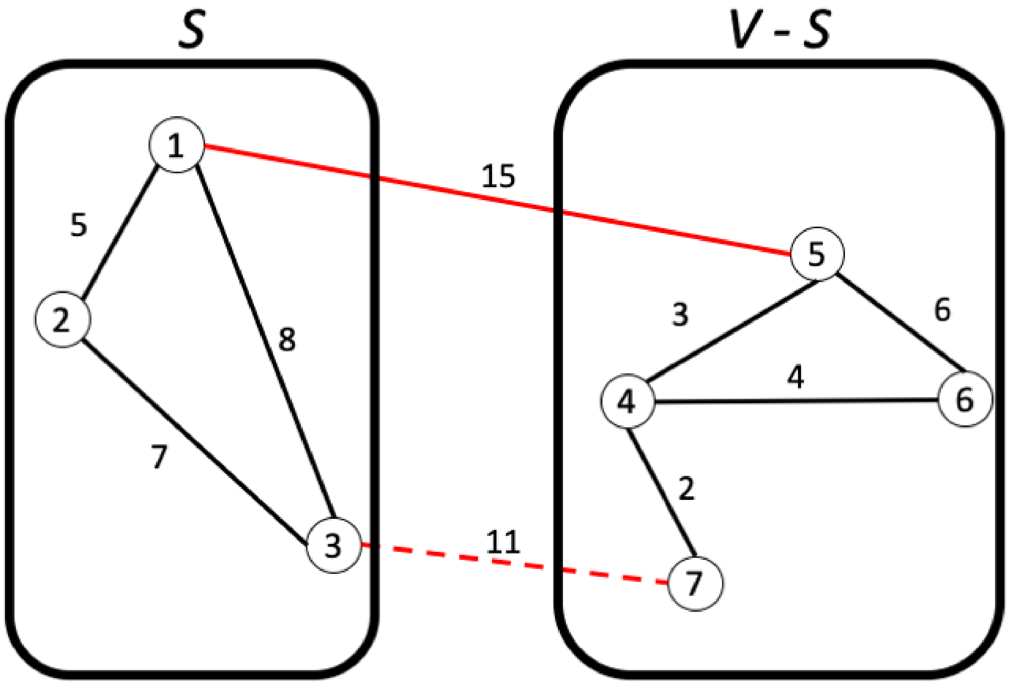
MST's Properties

- **Property 1.** Cycle C와 cutset D에 대해 |C∩D|는 짝수이다.



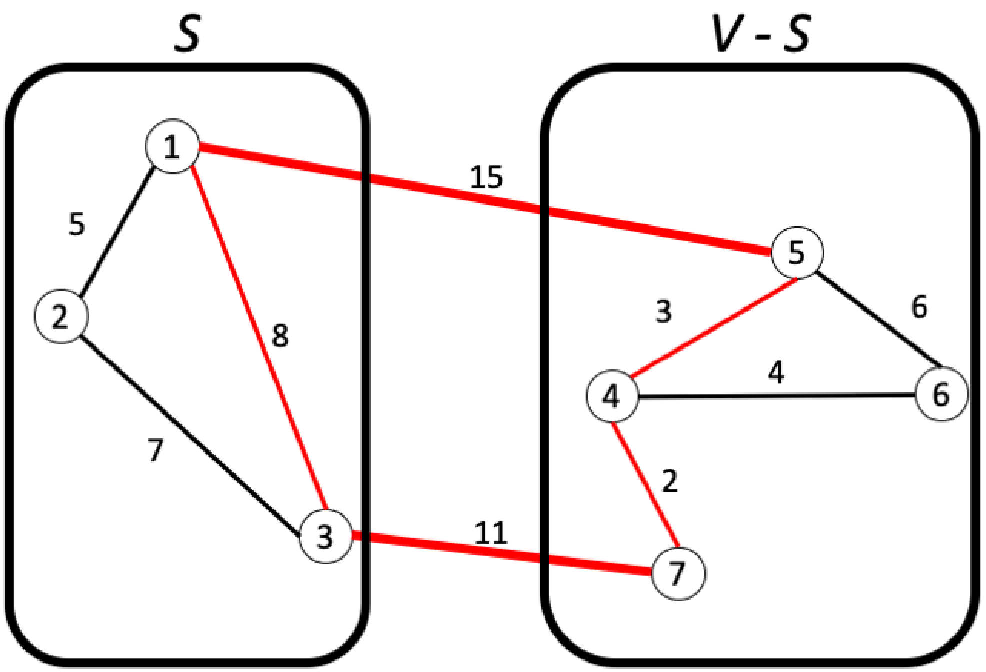
MST’s Properties

- **Property 2.** (Cut Property)
  임의의 cut set D에 대해 D에서 가중치가 가장 작은 간선은 모든 MST에 포함된다.



MST's Properties

- **Property 3.** (Cycle Property)
  Cycle C에서 가중치가 가장 큰 간선은 아무 MST에도 포함되지 않는다.



Correctness Proof

- **Theorem.** Kruskal's Algorithm은 올바르다.
- Proof: 크루스칼 알고리즘을 실행하며 간선 e를 살펴보고 있다 하자.
  - T+e가 cycle C를 포함하는 경우: e는 C에서 가장 가중치가 높은 간선이므로, Cycle property 에 의해 MST에 포함되지 않는다.
  - 그렇지 않은 경우: T에 e를 더해서 합쳐지는 두 컴포넌트 중 하나를 S라고 하자. 컷 (S, V-S)에 대응되는 cutset D를 잡으면, e는 D에서 가장 가중치가 낮은 간선이다. 고로, cut property에 의해 e는 MST에 포함된다.