Réseaux de Petri
IN310 - Modèles des SE

Charles Lesire-Cabaniols (ONERA / DCSD)
charles.lesire@onera.fr

3A-SEM - 2010-2011

Introduction

Modèle formel

Analyse de propriétés

Introduction

- 1962, Carl Adam Petri : Communication et composition entre automates
- Outil de modélisation de systèmes dynamiques : permet de raisonner sur les objets, les ressources et leur changement d'état
- Outil mathématique (formel) et outil graphique
  - permet de représenter le vrai parallélisme, la concurrence, contraintes de précédence,
  - analyse de bonnes propriétés (vivacité, borné, etc.) et propriétés structurelles : aide efficiente durant les phases de conception
  - peut être simulé et implémenté directement par un joueur de RdP

Introduction

- Applications :
  - évaluation de performances,
  - analyse et vérification formelles,
  - protocoles de communication,
  - contrôle de systèmes de production,
  - systèmes d'information (organisation d'entreprises),
  - gestion de bases de données,
  - IHM, etc.

Introduction

- Etat : les différentes *phases* par lesquelles passe le système ;
- Variables d'état : ensemble de variables qui permettent de connaître l'état du système.
  - Système continu : les variables d'état évoluent continuellement dans le temps ;
  - Système à événements discrets : les variables d'état changent *brusquement* à certains instants
- Evénement : son occurrence fait changer l'état du système
- Activité : *boîte noire* représente lŽévolution du système entre 2 événements
- Processus : séquence dŽévénements et d'activités
  $\rightsquigarrow$ coopération, compétition, parallèle

Présentation informelle

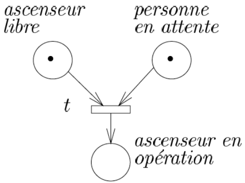
Éléments de base

- Place : interprétée comme condition, état partiel, ensemble de ressources
- Transition : associée à un événement qui a lieu dans le système
- Jeton : indique que la condition associée à la place est vérifiée (ou le nombre d'éléments qui la vérifient)

Présentation informelle

Comportement dynamique

- état : répartition des jetons dans les places,
- occurrence d'un événement : tir de la transition,
  - enlever les jetons des places d'entrée,
  - mettre les jetons dans les places de sortie.



Définitions

- Modèle formel, peut être caractérisé par :
  - graphe avec comportement dynamique ; représentation naturelle pour le concepteur,
  - ensemble de matrices d'entiers : comportement dynamique décrit par un système linéaire : représentation naturel pour l'ordinateur ;
  - système de règles : peut être utilisé avec les techniques d'I.A ;
- Validation par analyse et simulation ;
- Représente : parallélisme, synchronisme, séquence, conflit, concurrence.

Définitions

Réseaux de Petri $R = < P, T, Pre, Post >$

- P est un ensemble fini de places de dimension n ;
- T est un ensemble fini de transitions de dimension m ;
- $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'*entrée* (places précédentes),
- $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application de *sortie* (places suivantes),

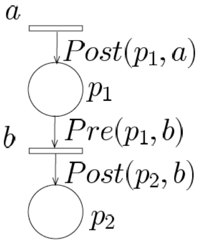
Réseau de Petri marqué $N = < R, M >$

- R est un réseau de Petri,
- $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ est le marquage initial (distribution de jetons dans les places)

Définitions

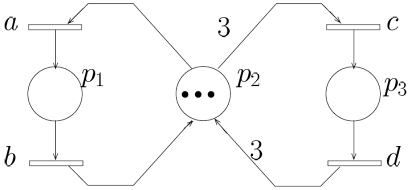
Exemple

- $R = < P, T, Pre, Post >$
- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{a, b, c, d\}$
- $Post(p_1, a) = 1,\ Pre(p_1, b) = 1,$
  $Post(p_2, b) = 1$



Graphe et notation matricielle

Réseau de Petri marqué $N = < R, M >$



$$P = \{p_1, p_2, p_3\}, \qquad T = \{a, b, c, d\}$$

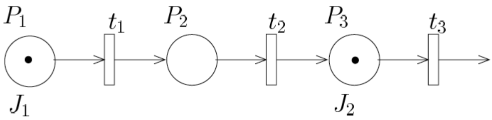
$$Pre = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^tM = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Différentes interactions entre les processus

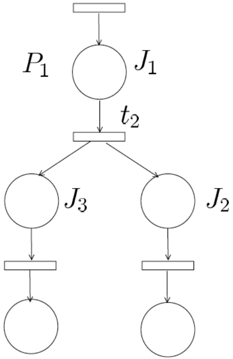
Séquence



- séquence d'un processus de fabrication :
  - P_i : phase i de l'opération sur la pièce,
  - t_i : passage d'une phase à une autre ;
- portion de l'itinéraire d'un système de transport :
  - P_i : chariot traverse la section i,
  - t_i : passage d'un chariot d'une section à une autre ;

Différentes interactions entre les processus

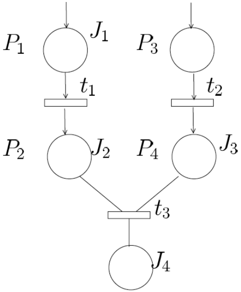
Fork



- à partir de l'activité J_1, deux activités sont crées (J_2 et J_3),
- J_2 et J_3 évoluent de façon indépendante.

Différentes interactions entre les processus

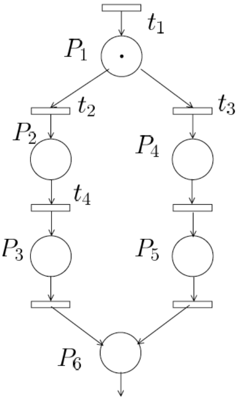
Join



- évolution indépendante de t_1 et t_2 (évolution assynchrone),
- synchronisme en t_3.

Différentes interactions entre les processus

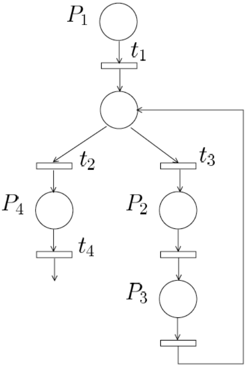
Choix



- choix entre t_2 (seq. P_2P_3) et t_3 (seq. P_4P_5) : seulement une peut être tirée ;
- les 2 séquences exécuteront P_6.

Différentes interactions entre les processus

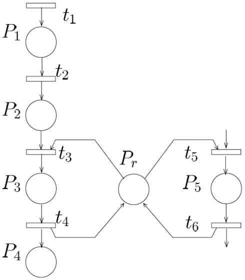
Répétition



- choix entre t_2 e t_3,
- répéter la séq. P_2P_3 un certain nombre de fois avant de exécuter P_4.

Différentes interactions entre les processus

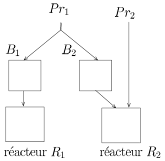
Allocation de ressources

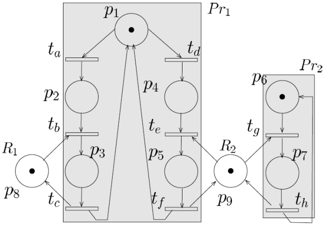


- un même chariot doit servir différentes machines,
- un opérateur doit exécuter différentes activités (une à la fois).

Exemple : Système par lot

- peut produire deux produits (Pr_1 et Pr_2), utilisant 2 réacteurs (R_1 e R_2) de façon concurrente,
- produit Pr_1 : est produit par R_1 ou R_2 ; doit être, au préalable, stocké dans le *buffer* B_1 ou B_2 (respectivement).
- produit Pr_2 : est produit par le réacteur R_2.





Règle de fonctionnement

Transition sensibilisée à partir de M

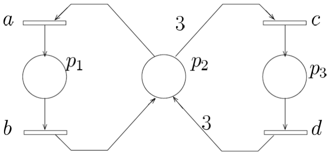
- il y a un numéro suffisant de jetons dans les places d'entrée,
- $\forall p \in P, \quad M(p) \geq Pre(p, t)$
- $M \geq Pre(\,.\,, t)$

Tir d'une transition à partir de M

- $\forall p \in P, \quad M'(p) = M(p) - Pre(p, t) + Post(p, t)$
- $M' = M - Pre(\,.\,, t) + Post(\,.\,, t) = M + C(\,.\,, t)$

Règle de fonctionnement

- Enlève $Pre(p,t)$ jetons de chaque place précédente p (poids de l'arc d'entrée), et met $Post(p,t)$ jetons à chaque place de sortie p,
- Représente le changement d'état dû à l'ocurrence de l'événement associé à t.



Conflit et parallélisme

- Conflit structurel : ssi t_1 et t_2 ont au moins une place d'entrée en commun

$$\exists p \in P, \quad Pre(p, t_1)\, Pre(p, t_2) \neq 0$$

- Conflit effectif : ssi t_1 et t_2 sont en conflit structurel et sont sensibilisées par le marquage M

$$M \geq Pre(., t_1) \text{ et } M \geq Pre(., t_2)$$

- Parallélisme structurel : si t_1 et t_2 ne possèdent pas de place d'entrée en commun

$$\forall p \in P \quad Pre(p, t_1)\, Pre(p, t_2) = 0 \text{ ou } Pre(., t_1)^T \times Pre(., t_2) = 0$$

- Parallélisme effectif : t_1 et t_2 sont parallèles structurellement et

$$M \geq Pre(., t_1) \text{ e } M \geq Pre(., t_2)$$

Séquence de tir

$$\underset{M_0}{\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}} \xrightarrow{a} \underset{M_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} \xrightarrow{a} \underset{M_2}{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}} \xrightarrow{b} \underset{M_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}$$

- M' accessible à partir de M : $M \xrightarrow{t} M'$
- $M_0 \xrightarrow{a} M_1$, $M_1 \xrightarrow{a} M_2$, $M_2 \xrightarrow{b} M_1$,
- si $M \xrightarrow{t_1} M'$, et $M' \xrightarrow{t_2} M''$, on a $s = t_1t_2$ et $M \xrightarrow{t_1t_2} M''$
- dans l'exemple, $M_0 \xrightarrow{s} M_1$, avec $s = aab$, s est dite séquence de tir

$$\begin{aligned} s : \quad T &\to \mathbb{N} \\ t &\mapsto \text{nombre d'occurrences de } t \text{ dans } s \end{aligned}$$

Séquence de tir

- Équation fondamentale : $\boxed{M' = M + C\mathbf{s}}$
- Etant donné M et une sequence s, existe-t-il M' t.q. $M \xrightarrow{s} M'$?
- Etant donné M et M', existe-t-il s t.q. $M \xrightarrow{s} M'$?

Système de règles

- une base de faits, représentant la connaissance disponible sur le système,
- une base de règles, qui permet de déduire de nouveaux faits,
- un *moteur d'inférence*, qui permet de réaliser de nouvelles déductions, appliquant les règles aux faits.

Grammaire

- un alphabet Π dont les symboles sont les places $p \in P$
- un ensemble Q de règles de réécriture :

$$t : \mu(Pre(.,t)) \rightarrow \mu(Post(.,t))$$

- $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \Pi^*$, $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les marquages et Π^* l'ensemble des séquences finies (dont la séquence vide λ)
- transition sensibilisée :

$$\mu(Pre(.,t)) \subseteq \mu(M)$$

- tir de transition :

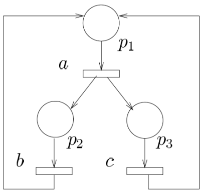
$$\mu(M') = \mu(M) \cup \mu(Post(.,t)) \setminus \mu(Pre(.,t))$$

Réseau borné

- Place k-bornée : le nombre maximal de jetons de la place, pour tout marquage accessible, est plus petit que k

$$\forall M' \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M_0), \quad M'(p) \leq k$$

- Si $k = 1$, la place est dite binaire,
- Un réseau marqué est k-borné ssi toutes ses places le sont
- Un réseau marqué est binaire ssi toutes ses places le sont



Réseau vivant

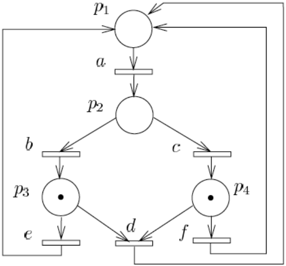
- Transition quasi-vivante :

$$\exists s \;/\; M_0 \xrightarrow{s} M \quad \text{et} \quad M \xrightarrow{t}$$

- Transition vivante :

$$\forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M_0),\; \exists s \;/\; M \xrightarrow{st}$$

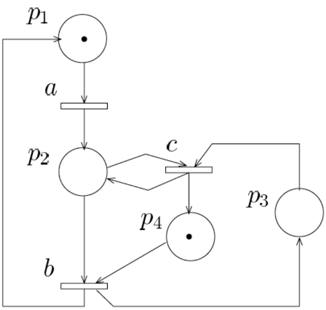
- Réseau vivant ssi toutes ses transitions sont vivantes

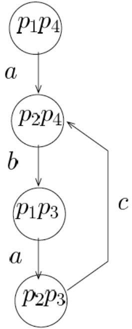


Réseau réinitialisable

- Réseau marqué réinitialisable s'il est possible de revenir au marquage initial à partir de n'importe quel marquage :

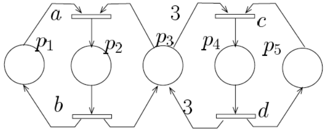
$$\forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M_0), \quad \exists s \;/\; M \xrightarrow{s} M_0$$





Composantes conservatives

- circuit formé par p_1, p_2, a, b : $M(p_1) + M(p_2)$ est constant
  - $M_0 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $M_0 \xrightarrow{a} M' = {}^t\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $M' \xrightarrow{b} M'' = M_0$



- Marquage obtenu après une séquence de tir : $M' = M + Cs$
- Composante conservative : $f \;/\; {}^tf\, C = 0$
- dans l'exemple :

$${}^tf^1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, {}^tf^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}, {}^tf^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Invariants de place

- Invariant de place = composante conservative + marquage
- ${}^t f\ C = 0 \Rightarrow {}^t f\ M = {}^t f\ M_0 \quad \forall M \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M_0)$
- $M(p_1) + M(p_2) = M_0(p_1) + M_0(p_2) = 1$
- $M(p_2) + M(p_3) + 3.M(p_4) = 3$
- $M(p_4) + M(p_5) = 1$

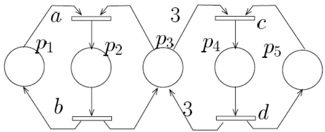
Remarque

- composante conservative : dépend seulement de la structure !
- invariant de place : dépend de la structure et du marquage

Composantes répétitives stationnaires

- Sous-réseau formé par c et d, et places p_3, p_4 et p_5 : le tir de $s = cd$ à partir de M_0 ramène au même marquage
- Transitions c et d forment une composante répétitive stationnaire
- $M' = M \Rightarrow C\,s = 0 \quad s$ composante répétitive
- Dans l'exemple :

$$s^1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\; s^2 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$



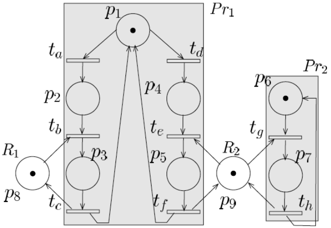
Invariants de transition

- Séquences s_i obtenues à partir du vecteur s
- Pour s_1 on peut avoir les invariants $s_{11} = ab$ et $s_{12} = ba$
- Il faut calculer $M \xrightarrow{ab}$ et $M \xrightarrow{ba}$ pour vérifier !

Remarque

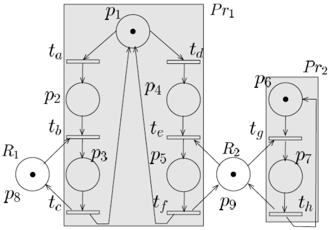
- Composante répétitive : dépend seulement de la structure !
- Invariant de transition : dépend de la structure et du marquage

Exemple : Système par lot



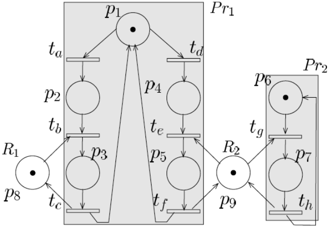
- $f^1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$: fabrication de Pr_1
- $f^2 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$: fabrication de Pr_1
- $f^3 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$: état du réacteur R_1
- $f^4 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$: état du réacteur R_2

Exemple : Système par lot



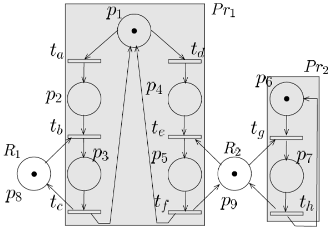
- $M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) + M(p_4) + M(p_5) = 1$: un seul état pour Pr_1 (attente, B_1, B_2, R_1, R_2)
- $M(p_6) + M(p_7) = 1$: un seul état pour Pr_2 (attente ou R_2)
- $M(p_3) + M(p_8) = 1$: R_1 libre ou prod. Pr_1
- $M(p_5) + M(p_7) + M(p_9) = 1$: R_2 libre ou prod. Pr_1 ou Pr_2

Exemple : Système par lot



- $s^1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$: Pr_1 passe par le *buffer* et est prod. par R_1 ; un nouveau cycle peut recommencer ;
- $s^2 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$: même comportement pour Pr_2 et R_2 ;
- $s^3 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$: début de prod. de Pr_2 et fin

Exemple : Système par lot



Seules séquences effectivement réalisables :

- $s_1 = t_a t_b t_c$
- $s_2 = t_d t_e t_f$
- $s_3 = t_g t_h$

Analyse des propriétés

Analyse par énumération des marquages le graphe des marquages accessibles est calculé, vérifiant si le réseau est borné, vivant et réinitialisable.

Analyse structurelle calcul des composantes conservatives et répétitives stationnaires et des invariants correspondants ; ne permet pas toujours d'avoir une réponse, mais dans certains cas, permet d'obtenir une réponse simples et rapide des propriétés du réseau.

Analyse par réduction si le réseau est trop grand ou non borné, on peut réduire la taille du réseau, en utilisant certaines règles de réduction.

Analyse par énumération des marquages

Arbre de couverture

- On part du marquage initial M_0,
- On crée une branche pour chaque transition sensibilisée par M_0,
- La construction d'une branche est interrompue quand on rencontre un marquage
  - déjà calculé,
  - strictement supérieur à un marquage *de la branche qui est en train d'être explorée*.

Si le réseau est non borné, on introduit le symbole ω pour rendre l'arbre fini.

Analyse par énumération des marquages

Recherche des propriétés sur $\mathcal{A}(\mathcal{R}, M)$

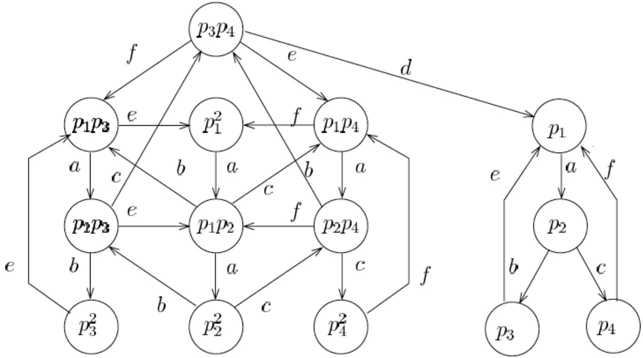
- Réseau *k-borné* $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{R}, M)$ borné
- Réseau réinitialisable $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{R}, M)$ fortement connexe

$$\forall M_i, M_j \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M),\ \exists s \ / \ M_i \ \overset{s}{M_j}$$

- Réseau vivant $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{R}, M)$ fortement connexe et chaque transition étiquette au moins un arc

$$\forall t \in T, \exists M_i, M_j \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, M),\ / \ M_i \xrightarrow{t} M_j$$

Analyse par énumération des marquages



Analyse structurelle

Composantes conservatives

- Toute place qui appartient à une composante conservative est bornée
- Une place p qui n'appartient à aucune composante conservative ($f(p) = 0$) peut être bornée
- Une place non bornée n'appartient à aucune composante conservative

Un réseau de Petri pour lequel il existe une couverture de composantes conservatives ($f > 0$) est k-borné, *peu importe son marquage initial.*

Analyse structurelle

Invariants de place

${}^t f\ M = {}^t f\ M_0$ permet de calculer une limite pour chaque place p

$$f(p)M(p) \leq {}^t f\ M_0, \qquad M(p) \leq \frac{{}^t f\ M_0}{f(p)}$$

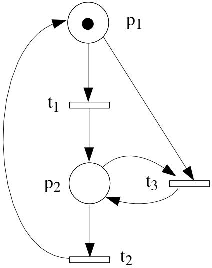
Analyse structurelle

Composantes répétitives

Réseau de Petri répétitif : il existe une couverture de composantes répétitives ($s > 0$)

- un réseau de Petri borné et vivant est répétitif
- un réseau non répétitif ($\exists t, s(t) = 0$) est non vivant ou non borné

Exemples



Caractéristiques de la représentation par RdP

- Modularité : est-il possible de décomposer un système complexe ?
- Composition : si les modules ont les bonnes propriétés, la composition de ces modules garde-t-elle les bonnes propriétés ? Ou est-il nécessaire d'analyser le système globale (composé) ?
- Calculabilité : existe-t-il des algorithmes pour l'analyse ?

Bloc bien-formé (*module*)
un réseau de Petri avec :

- une transition d'entrée t_e et une transition de sortie t_s,
- réseau borné, vivant et réinitialisable si l'on rajoute une place p tel que $Pre(p, t_e) = Post(p, t_s) = 1$.
  Ex : séquence, if-then-else, do-while, fork-join.