# ISAE - Supaero

## 3A SEM, 2010-2011

## EXAMEN

## Modèles de Systèmes Embarqués : modèles discrets, modèles hybrides

**NOTE :** Documents interdits. Des rappels de cours sont donnés à la fin de chaque partie.

## Exercice A

## Réseaux de Petri

On modélise par le réseau de Petri de la figure 1 le fonctionnement d'un atelier qui doit réaliser deux types de pièces. Pour le premier type de pièce, un opérateur doit placer la pièce dans une machine puis la retirer quand la machine a fini son travail. Le deuxième type de pièce est traité de façon manuelle par un des deux opérateurs.

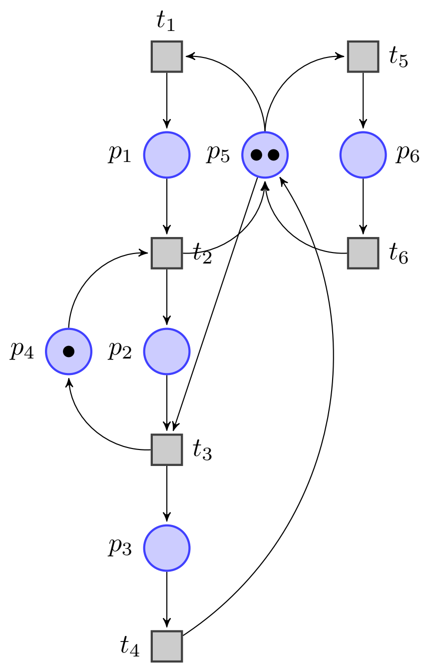


Figure 1 – Réseau de Petri de l'atelier.

**A.1.** Donner la définition du réseau $R$ de la figure 1 ($P$, $T$, $Pre$ et $Post$) et son marquage initial $M_0$.

**A.2.** Donner la signification des six places du réseau $R$.

**A.3.** Etudier les propriétés du réseau $R$ :

(a) $R$ est-il borné ? Si oui, donner la valeur de la borne ;

(b) $R$ est-il vivant ?

(c) $R$ est-il ré-initialisable ?

**A.4.** Trouver au moins deux invariants de place du réseau. Que représentent-t-ils ?

## Rappels de cours

Soit $R =< P, T, Pre, Post >$ un réseau de Petri, $M_0$ son marquage initial, et $A$ l'ensembe des marquages accessibles de $R$ depuis $M_0$.

**Définition 1 (Réseau borné)** *$R$ est borné si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall M \in A$, $\forall p \in P$, $M(p) \leq k$.*

**Définition 2 (Réseau vivant)** *$R$ est vivant si et seulement si $\forall t \in T$, $\forall M \in A$, il existe une séquence de tir $s$ et un marquage $M' \in A$ tels que $M \xrightarrow{st} M'$.*

**Définition 3 (Réseau réinitialisable)** *$R$ est réinitialisable si et seulement si $\forall M \in A$, il existe une séquence de tir $s$ telle que $M \xrightarrow{s} M_0$.*

**Définition 4 (Composante conservative)** *Une composante conservative de $R$ est une combinaison linéaire des marquages des places du réseau, représentée par une vecteur $f$, telle que $\forall M \in A$, $f.M = f.M_0$.*

---

## Exercice B

## Automates

**B.1. Équivalence pour des systèmes :** Rappeler, à l'aide d'un exemple, en quoi l'équivalence de traces n'est pas toujours suffisante pour comparer deux systèmes.
*Réponse de 5 lignes maximum + un dessin éventuellement*

**B.2. Automates temporisés :** Considérons l'automate temporisé de la figure 2 sur l'alphabet (ensemble de labels) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$, comportant une horloge $x$. Donner, sans justification, deux exemples de traces temporisées reconnues par cet automate. (Donner des séquences sur $\Sigma \times \mathbb{R}_+$, c'est à dire des séquences de paires (`label`, `durée d'attente`)).

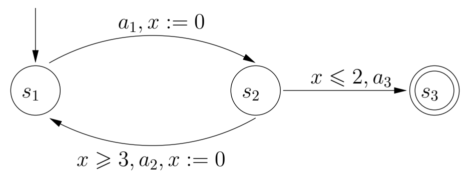


Figure 2 – Automate temporisé.

**B.3.** La sémantique d'un automate temporisé est donnée par un système de transitions temporisé, dont l'espace d'état est infini. Rappeler les grandes idées de la construction d'un système de transitions fini (qui permet donc de vérifier certaines propriétés) «équivalent» au système de transition temporisé infini. Dans quel sens est-il équivalent ?
*Réponse de 10 lignes maximum*

**B.4.** Soient $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$ et $T' = (S', S'_I, S'_F, \rhd')$ deux systèmes de transitions temporisés. Si $\mathcal{R}$ est une relation de bisimulation temps-abstraite qui respecte l'état initial et l'état final montrer que Untime(L(T))=Untime(L(T')).

## Rappels de cours

**Définition 5 (Système de transitions temporisé)** *Un système de transition temporisé sur un alphabet* $\Sigma$ *est un quadruplet* $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$*, où*
- $S$ *est l'ensemble des états*
- $S_I \subseteq S$ *(resp.* $S_F \subseteq S$*) est l'ensemble des états initiaux (resp. finaux)*
- $\rhd \subseteq S \times (\mathbb{R}_+ \times \Sigma) \times S$ *est la fonction de transition,* $s_1 \overset{t,a}{\rhd} s_2$ *exprime qu'on peut passer de l'état* $s_1$ *à l'état* $s_2$*, en reconnaissant le label* $a \in \Sigma$*, après avoir attendu* $t \in \mathbb{R}^+$ *unités de temps.*

**Définition 6 (Bisimulation temps-abstraite)** *Soient* $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$ *et* $T' = (S', S'_I, S'_F, \rhd')$ *deux systèmes de transitions temporisés sur* $\Sigma$*.* $\mathcal{R} \subseteq S \times S'$ *est une relation de bisimulation temps-abstraite ssi elle est* ***symétrique*** *et :*

*si* $(s_1, s'_1) \in \mathcal{R}$ *et* $s_1 \overset{t,a}{\rhd} s_2$ *alors* $\exists s'_2 \in S'$ $\exists t' \in \mathbb{R}_+$ *tels que*
$(s_2, s'_2) \in \mathcal{R}$ *et* $s'_1 \overset{t',a}{\rhd} s'_2$

*On dit que* $\mathcal{R}$ ***respecte les états initiaux*** *(resp.* ***finaux****) si*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\forall s \in S$ | $s \in S_I (resp. S_F)$ | *si et seulement si* | $\exists s' \in S'_I (resp. S'_F)$ *tel que* $s \mathcal{R} s'$ |
| $\forall s' \in S'$ | $s' \in S'_I (resp. S'_F)$ | *si et seulement si* | $\exists s \in S_I (resp. S_F)$ *tel que* $s' \mathcal{R} s$ |

**Définition 7 (Langage reconnu)** *Étant donné système de transition temporisé* $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$*, le langage* $L(T)$ *reconnu par* $T$ *est l'ensemble des séquences sur* $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ $< (a_0, t_0), (a_1, t_1), \ldots, (a_n, t_n) >$ *telles qu'il existe une séquence d'états* $< s_0, \ldots, s_{n+1} >$ *qui vérifie*
- $s_0 \in S_I$, $s_{n+1} \in S_F$
- $\forall i \in [0..n]$ $\quad s_i \overset{a_i,t_i}{\rhd} s_{i+1}$

*Le langage* $Untime(L(T))$ *est l'ensemble des séquences sur* $\Sigma$ $< a_0, \ldots, a_n >$ *telles qu'il existe une séquence sur* $\mathbb{R}_+$ $< t_0, \ldots, t_n >$ *qui vérifie* $< (a_0, t_0), \ldots, (a_n, t_n) > \in L(T)$*.*