

# ISAE - Supaero

---

3A SEM, 2010-2011

---

## EXAMEN

### Modèles de Systèmes Embarqués : modèles discrets, modèles hybrides

**NOTE :** Documents interdits. Des rappels de cours sont donnés à la fin de chaque partie.

---

## EXERCICE A

### RÉSEAUX DE PETRI

On modélise par le réseau de Petri de la figure 1 le fonctionnement d'un atelier qui doit réaliser deux types de pièces. Pour le premier type de pièce, un opérateur doit placer la pièce dans une machine puis la retirer quand la machine a fini son travail. Le deuxième type de pièce est traité de façon manuelle par un des deux opérateurs.

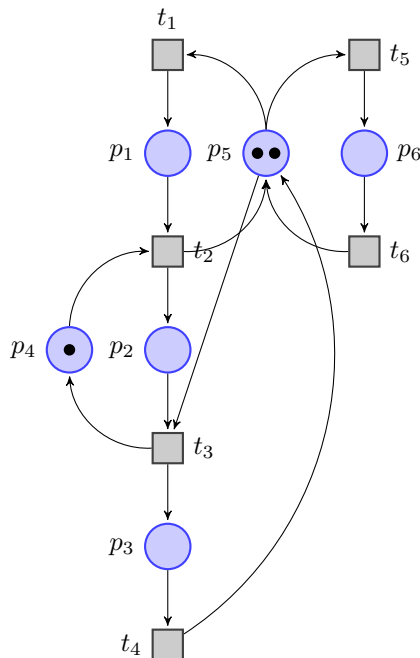


FIGURE 1 – Réseau de Petri de l'atelier.

**A.1.** Donner la définition du réseau  $R$  de la figure 1 ( $P$ ,  $T$ ,  $Pre$  et  $Post$ ) et son marquage initial  $M_0$ . (1 pt)

$$R = \langle P, T, Pre, Post \rangle \text{ avec :}$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

$$Pre = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**A.2.** Donner la signification des six places du réseau  $R$ . (2 pts)

- $p_4$  et  $p_5$  représentent les ressources disponibles :
  - $p_4$  représente la disponibilité de la machine ;
  - $p_5$  représente la disponibilité des opérateurs ;
- $p_6$  représente le traitement d'une pièce de type 2 ;
- $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  représentent le traitement d'une pièce de type 1 :
  - $p_1$  représente le placement de la pièce dans la machine,
  - $p_2$  son traitement par la machine, et
  - $p_3$  son retrait de la machine.

**A.3.** Etudier les propriétés du réseau  $R$  :

- (a)  $R$  est-il borné ? Si oui, donner la valeur de la borne ; (2 pts)
- (b)  $R$  est-il vivant ? (1 pt)
- (c)  $R$  est-il réinitialisable ? (1 pt)

L'étude de ces propriétés peut se faire en calculant le graphe des marquages de  $R$  depuis  $M_0$ . Un modèle Tina (atelier.nd) est joint à ce corrigé afin de permettre de visualiser le graphe des marquages. Dans ce cas ci, ce calcul peut être évité, en remarquant :

- (a) que toute transition produit autant de jeton que ce qu'elle en consomme ( $\forall t, Pre(., t) = Post(., t)$ ) ; donc il n'y aura jamais plus de 3 jetons dans ce réseau.  $R$  est donc  $k$ -borné, avec  $2 \leq k \leq 3$  ;
- (b) que la séquence  $M_0 \xrightarrow{t_1 t_2 t_1 t_1}$  mène à un blocage, aucune transition n'étant franchissable dans le marquage atteint ; le réseau n'est donc pas vivant ;
- (c) et pour les mêmes raisons, le réseau n'est pas réinitialisable.

**A.4.** Trouver au moins deux invariants de place du réseau. Que représentent-ils ?

(3 pts)

Soit  $f_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$ ,

$$\begin{aligned} f_1.C &= f_1.(Post - Pre) \\ &= (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

$f_1$  est donc une composante conservative, et  $\forall M, f_1.M = f_1.M_0 = 2$ . Cet invariant de place représente le fait qu'il y a toujours 2 opérateurs dans l'atelier, occupés à diverses tâches.

Soit  $f_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ ,  $f_2.C = 0$ ,  $f_2$  est donc une composante conservative, et  $\forall M, f_2.M = f_2.M_0 = 1$ . Cet invariant de place représente le fait que la machine est soit disponible, soit occupée par une pièce.

$R$  est complètement couvert par les composantes  $f_1$  et  $f_2$ ,  $R$  est donc borné, et ça borne vaut 2.

## EXERCICE B

### AUTOMATES

**B.1. Équivalence pour des systèmes :** Rappeler, à l'aide d'un exemple, en quoi l'équivalence de traces n'est pas toujours suffisante pour comparer deux systèmes.

Réponse de 5 lignes maximum + un dessin éventuellement

**B.2. Automates temporisés :** Considérons l'automate temporisé de la figure 2 sur l'alphabet (ensemble de labels)  $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$ , comportant une horloge  $x$ . Donner, sans justification, deux exemples de traces temporisées reconnues par cet automate. (Donner des séquences sur  $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ , c'est à dire des séquences de paires (label, durée d'attente)).

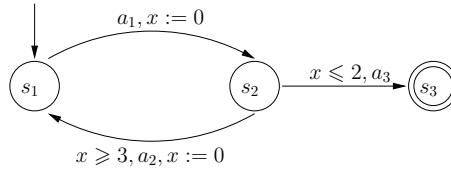


FIGURE 2 – Automate temporisé.

**B.3.** La sémantique d'un automate temporisé est donnée par un système de transitions temporisé, dont l'espace d'état est infini. Rappeler les grandes idées de la construction d'un système de transitions fini (qui permet donc de vérifier certaines propriétés) «équivalent» au système de transition temporisé infini. Dans quel sens est-il équivalent ?

*Réponse de 10 lignes maximum*

**B.4.** Soient  $T = (S, S_I, S_F, \triangleright)$  et  $T' = (S', S'_I, S'_F, \triangleright')$  deux systèmes de transitions temporisés. Si  $\mathcal{R}$  est une relation de bisimulation temps-abstraite qui respecte l'état initial et l'état final, montrer que  $\text{Untime}(L(T)) = \text{Untime}(L(T'))$ .

## Rappels de cours

**Définition 1 (Système de transitions temporisé)** Un système de transition temporisé sur un alphabet  $\Sigma$  est un quadruplet  $T = (S, S_I, S_F, \triangleright)$ , où

- $S$  est l'ensemble des états
- $S_I \subseteq S$  (resp.  $S_F \subseteq S$ ) est l'ensemble des états initiaux (resp. finaux)
- $\triangleright \subseteq S \times (\mathbb{R}_+ \times \Sigma) \times S$  est la fonction de transition,  $s_1 \triangleright^{t,a} s_2$  exprime qu'on peut passer de l'état  $s_1$  à l'état  $s_2$ , en reconnaissant le label  $a \in \Sigma$ , après avoir attendu  $t \in \mathbb{R}^+$  unités de temps.

**Définition 2 (Bisimulation temps-abstraite)** Soient  $T = (S, S_I, S_F, \triangleright)$  et  $T' = (S', S'_I, S'_F, \triangleright')$  deux systèmes de transitions temporisés sur  $\Sigma$ .  $\mathcal{R} \subseteq S \times S'$  est une relation de bisimulation temps-abstraite ssi elle est **symétrique** et :

$$\begin{aligned} \text{si } (s_1, s'_1) \in \mathcal{R} \text{ et } s_1 \triangleright^{t,a} s_2 \text{ alors } \exists s'_2 \in S' \exists t' \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \\ (s_2, s'_2) \in \mathcal{R} \text{ et } s'_1 \triangleright^{t',a} s'_2 \end{aligned}$$

On dit que  $\mathcal{R}$  **respecte les états initiaux** (resp. **finaux**) si

$$\begin{aligned} \forall s \in S \quad s \in S_I (\text{resp. } S_F) \quad \text{si et seulement si} \quad \exists s' \in S'_I (\text{resp. } S'_F) \text{ tel que } s \mathcal{R} s' \\ \forall s' \in S' \quad s' \in S'_I (\text{resp. } S'_F) \quad \text{si et seulement si} \quad \exists s \in S_I (\text{resp. } S_F) \text{ tel que } s' \mathcal{R} s \end{aligned}$$

**Définition 3 (Langage reconnu)** Étant donné système de transition temporisé  $T = (S, S_I, S_F, \triangleright)$ , le langage  $L(T)$  reconnu par  $T$  est l'ensemble des séquences sur  $\Sigma \times \mathbb{R}_+ < (a_0, t_0), (a_1, t_1), \dots, (a_n, t_n) >$  telles qu'il existe une séquence d'états  $< s_0, \dots, s_{n+1} >$  qui vérifie

- $s_0 \in S_I, s_{n+1} \in S_F$
- $\forall i \in [0..n] \quad s_i \triangleright^{a_i, t_i} s_{i+1}$

Le langage  $\text{Untime}(L(T))$  est l'ensemble des séquences sur  $\Sigma < a_0, \dots, a_n >$  telles qu'il existe une séquence sur  $\mathbb{R}_+ < t_0, \dots, t_n >$  qui vérifie  $< (a_0, t_0), \dots, (a_n, t_n) > \in L(T)$ .