Systèmes Hybrides
IN310 - Modèles de systèmes embarqués

Charles Lesire-Cabaniols (ONERA / DCSD)
charles.lesire@onera.fr

3A-SEM - 2010-2011

Types de variables

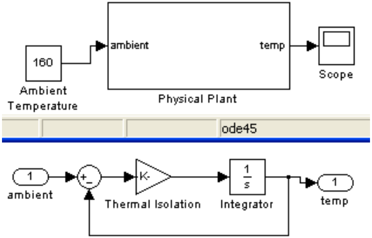
Le modèle mathématique d'un système est caractérisé par :

- la nature de ses variables d'état :
  - variables continues : prennent leurs valeurs sur le domaine des réels $\mathcal{R}$.
  - variables discrètes : prennent leurs valeurs sur un domaine représenté par un ensemble dont le nombre d'éléments est fini (ex : les entiers naturels $\mathcal{N}$, variables booléennes)/
- la nature de la variable indépendante qui représente le temps

Types de systèmes

Systèmes continus

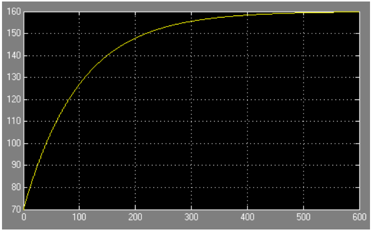
- temps : variable continue (temps dense)
- variables d'état continues, évolution dictée par le temps
- équations algébro-différentielles $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, transformée de Laplace
- Ex : température d'une pièce



Types de systèmes

Systèmes échantillonnés

- temps : variable discrète
  $\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_{n-1}\ \theta_n, \theta_{n+1} \ldots$
- variables d'état continues (*observées* à θ_i)
- équations aux différences
  $X_{k+1} = A_k.X_k + B_k U_k$,
  transformée en Z



Types de systèmes

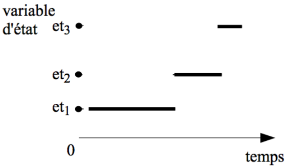
Systèmes à événements discrets

- représentés par une suite d'*événements discrets* (ex : un plan)
- temps : relation de précédence
- variables d'état discrètes : valeur x(k+1) calculé directement à partir de x(k), sans considérer le temps (fonction des événements)
- automates, réseaux de Petri
- ex : nombre de pièces dans un système de manufacture

Types de systèmes

Systèmes discrets

- temps : variable continue (temps dense)
- variables d'état discrètes (ex : machine libre ou occupée, ventilateur ON/OFF)
- automates (temporisés), réseaux de Petri (temporels)



Types de systèmes

Systèmes hybrides

- évolution à la fois en fonction
  - du temps continu et
  - des événements discrets
- variables d'état continues et variables d'état discrètes
- automates hybrides, réseaux de Petri hybrides ; Simulink et StateFlow

Systèmes Hybrides

- Evolution technologique :
  - systèmes distribués, réseaux : sous-systèmes interconnectés ;
  - 98% des microprocesseurs sont intégrés sur des systèmes physiques : BMW (72 μP en réseau), Boeing 777 (1280 μP en réseau) ;
  - avancées sur les technologies de capteurs et d'actionneurs
- 2 visions :
  - Théorie du Contrôle : systèmes continus, controllabilité, stabilité, atteignabilité, robustesse, ...Résultats en modélisation : switched control system, supervisory control system, piecewise affine systems (PWA)
  - Informatique : systèmes de état-transition, composition et abstraction, concurrence, ...Résultats en modélisation : automates hybrides, réseaux de Petri hybrides

Systèmes Hybrides

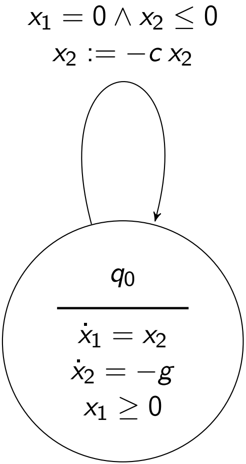
- juin 1991 : First workshop on Hybrid Systems, R.L. Grossman and A. Nerode, Cornell University, USA
- oct. 1992 : 2nd workshop, Technical University of Lyngby, Danemark
- 1993 : Hybrid Systems (Grossman et al.), Lecture Notes in Computer Science
- avril 1998 : First Hybrid Systems : Computationand Control (HSCC) (Henzinger and Sastry), Berkeley
- 2003 : IFAC conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS), France
- de nombreux problèmes ouverts : modélisation, analysé, vérification, synthèse de controleur, simulation, génération de code, complexité, . . .

Automates hybrides

- Les automates temporisés décrivent un type de systèmes hybrides
- Automates hybrides pour représenter des horloges asynchrones !
- À l'origine : Alur, Henzinger, Sifakis, Yovine, ...
- École française performante : Sifakis, Yovine, Maler (VeriMAG), Asarin (LIAFA / Paris 7)
- Inspiration d'un cours de Claire Tomlin (`http://www.stanford.edu/class/aa278a/`)
- Références, approfondissemnets → "Google is your friend !"

Exemples

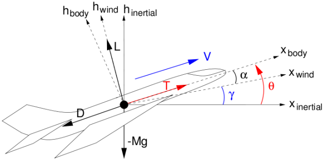
Bouncing ball

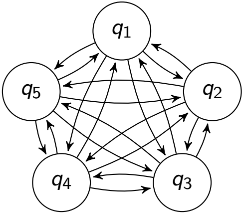


- x_1 : position verticale de la balle ;
- x_2 : vitesse vertical de la balle ;
- g : accélération ;
- $c \in [0, 1]$: coefficient de restitution ;
- transitions discrètes lors des rebonds ;
- Propriétés :
  - non-bloquant ;
  - si $c < 1$, l'automate est Zénon.

Exemples

Pilote automatique





- Équations de la dynamique du vol,
- Modes de vol, i.e. stratégies de contrôle.

Automates Hybrides

Un Automate hybride (autonome) est défini par :

- un ensemble d'états discrets Q,
- un espace d'état continu $X \subset \mathbb{R}^n$,
- un ensemble d'état initiaux $Init \subset Q \times X$,
- des invariants $Inv \subset Q \times X$,
- une dynamique continue $f : Q \times X \to X$,
- une dynamique discrète $R : Q \times X \to 2^{Q \times X}$.

Comportement dynamique d'un AH

Une succession de phases séparées par des événements

- au cours d'une phase : les variables discrètes n'évoluent pas ; les variables continues évoluent continûment dans le temps
- lors d'un événement : les variables discrètes évoluent ; les variables continues peuvent changer de valeur ($\rightsquigarrow$ discontinuité, variable non dérivable en ce point) ; la structure du modèle continu peut être modifiée ! !

Ensemble temporel hybride

Un ensemble temporel hybride (Hybrid Time Set) est une séquence d'intervalles $\tau = \{I_i\}_{i \geq 0}$ telle que $\forall\, i$:

- $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$
- $\tau_i \leq \tau'_i = \tau_{i+1}$

- $< \tau >= \sup i$ (N ou $+\infty$) ; $||\tau|| = \sum_{i=0}^{<\tau>} (\tau'_i - \tau_i)$
- si $< \tau >= \infty$ et $||\tau|| < \infty$, τ est Zénon.

Trajectoire hybride

L'exécution d'un automate hybride est une trajectoire hybride (τ, q, x) telle que :

- $(q_0, x_0) \in Init$,
- $(q_{i+1}(\tau_{i+1}), x_{i+1}(\tau_{i+1})) \in R((q_i(\tau_i'), x_i(\tau_i')))$,
- $\forall\, i$:
  - $q_i : I_i \to Q$ est constante (i.e., $q_i(t) = q_i(\tau_i) \forall t \in I_i$),
  - $x_i : I_i \to X$ est une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}_i = f(q_i(t), x_i(t))$$

  - $\forall\, t \in [\tau_i, \tau_i'[$, $x_i(t) \in Inv(q_i(t))$.

Propriétés

Trajectoires

Non-bloquant

Un automate hybride est non-bloquant si $\forall (q_0, x_0) \in Init$, il existe une trajectoire infinie partant de (q_0, x_0).

Déterminisme

Un automate hybride est déterministe si $\forall (q_0, x_0) \in Init$, il existe au plus une trajectoire maximale partant de (q_0, x_0).

Propriétés

Trajectoires

Dans le cas continu :

- non-bloquant $\Leftarrow f$ continue
- déterministe $\Leftarrow f$ lipschitzienne

Dans le cas hybride :

- Plus de "souplesse" : une transition discrète peut débloquer l'automate !
- non-bloquant
  $\Leftarrow \forall (q,x) \in Trans \cap Reach, \exists\, q' \in Q \,/\, R(q,x) = (q',x')$
  - *Trans* ensemble des états de transition : l'équation différentielle n'admet pas de solution dans l'invariant ;

    $Q \times Inv$ ouvert et f localement lipshitzienne $\Rightarrow Trans = (Q \times Inv)^c$

Propriétés
Zénon

Un automate est Zénon si pour $(q_0, x_0) \in Init$, toutes les trajectoires infinies τ depuis (q_0, x_0) sont Zénon :

- $< \tau >= \infty$
- $||\tau|| < \infty$

Du à la modélisation du système, qui est une abstraction du système réel.
Pose des problèmes pour la simulation (et donc pour la vérification).

Propriétés

Zénon

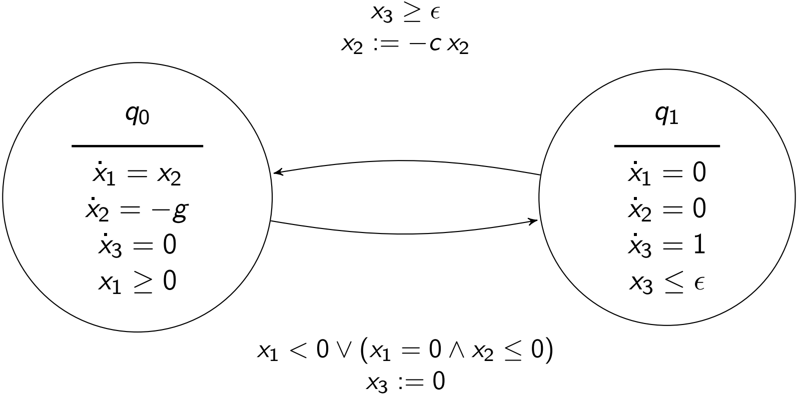
Régularisation

On peut régulariser un automate hybride Zénon H en construisant une famille d'automates H_ϵ.

- $\phi : Q_\epsilon \times X_\epsilon \to Q \times X$ fait correspondre un état de H_ϵ à un état de H ;
- H_ϵ "tend vers H" quand $\epsilon \to 0$.

Propriétés

Zénon



$$\phi(q_0, (x_1, x_2, x_3)) = \phi(q_1, (x_1, x_2, x_3)) = (q, (x_1, x_2))$$

Propriétés

États

Accessibilité

Un état $(q, x) \in Q \times X$ est accessible s'il existe une trajectoire finie σ qui finie en (q, x) (i.e. $< \tau >= N < \infty$ et $(q_N(\tau'_N), x_N(\tau'_N)) = (q, x)$).

Invariants

L'ensemble $M \subset Q \times X$ est appelé invariant si $\forall (q_0, x_0) \in M$ et pour toute trajectoire σ partant de (q_0, x_0) :

$$\forall\, i,\ \forall\, t \in I_i,\ (q_i(t), x_i(t)) \in M$$

Automates hybrides rectangulaires

Rectangle

Un ensemble $R \subset \mathbb{R}^n$ est un rectangle si $R = \Pi_{i=1}^n R_i$ où R_i est un intervalle dont les bornes sont rationnelles.

Automate rectangulaire

Un automate rectangulaire est un automate hybride tel que :

- $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$;
- $Init = \bigcup_{i=1}^m \{q_i\} \times Init(q_i)$ où $Init(q_i)$ est un rectangle ;
- $f(q, x) = F(q)$ où $F(q)$ est un rectangle ;
- $Inv(q)$ est un rectangle.

$\longrightarrow$ Automates rectangulaires initialisés : plus grande classe d'AH pour laquelle l'accessibilité est décidable (mais PSPACE) !

Stabilité

Equilibre

L'état continu x_e est un point d'équilibre de H si :

- $f(q, x_e) = 0$ pour tout $q \in Q$;
- $R(q, x_e) \subset Q \times \{x_e\}$.

Equilibre stable

L'état continu x_e est un point d'équilibre stable si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute trajectoire $(\tau, (q, x))$ partant de (q_0, x_0),

$$||x_0 - x_e|| < \delta \Rightarrow \forall t \in \tau, \; ||x(t) - x_e|| < \epsilon$$

x_e stable pour $f(q)$, pour tout $q \not\Rightarrow x_e$ stable pour H !!
même si les variables ne sont pas réinitialisés $(R(q, x) \subseteq Q \times \{x\})$

Stabilité

Théorème de Lyapunov pour les SH

Soit H un automate tel que x_e est un point d'équilibre et $R(q,x) \in Q \times \{x\}, \forall q$. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_e \in D$. x_e est stable s'il existe $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que :

- $V(x_e) = 0$
- $V(x) > 0 \forall x \in D \backslash \{(x_e)\}$
- $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(q,x) \leq 0, \forall x \in D, \forall q \in Q$

Système linéaire par morceaux

Pour un système linéaire par morceaux, i.e. $f(q_i,x) = A_i x$. x_e est stable s'il existe une solution P symétrique définie positive au système de LMI

$$\forall i,\ A_i^T P + PA_i < 0$$

Contrôle

Automate hybride

Un automate hybride H est défini par :

- Q, X,
- $Init \subset Q \times X$ un ensemble d'états initiaux,
- In un ensemble fini de variables d'entrées, $In = \Sigma \cup W$,
  - $\Sigma = \Sigma_U \times \Sigma_D$, avec Σ_U les entrées discrètes et Σ_D les perturbations discrètes,
  - $W = U \times D$, avec U les entrées continues (contrôlables) et D les perturbations continues (bruits),
- $f : Q \times X \times W \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel,
- $Inv : Q \to 2^{X \times W}$ les invariants de H,
- $R : Q \times X \times In \to 2^{Q \times X}$ la fonction de transition,
- $Out = P \cup Y$ l'ensemble des variables de sortie, discrètes (P) et continues (Y).

Contrôle

Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

- f est lipshitzienne sur X et continue sur W ;
- $\forall q,\ Inv(q)$ est un ouvert ;
- $\forall (q,x), \forall(\sigma_u, u) \in \Sigma_U \times U,\ \exists(\sigma_d, d) \in \Sigma_D \times D$ tel que

$$(x, (\sigma_u, \sigma_d), (u, d)) \in Inv(q) \ \vee\ R(q, x, (\sigma_u, \sigma_d), (u, d)) \neq \emptyset$$

Contrôle

Principe

On veut satisfaire une propriété de sûreté, i.e. calculer l'invariant contrôlé maximal $F_C \subset F \subset Q \times X$.

On appréhende le problème comme un jeu, dans lequel :

- les perturbations essaient de fuir F en
  1. faisant des sauts (discrets) hors de F,
  2. tirant (continument) le système hors de F ;
- le contrôleur essaie de rester dans F en
  1. tirant le système dans F (en évitant les sauts),
  2. faisant des sauts dans F (évitant les sorties continues).

Contrôle

Principe

- $Pre_u : 2^{Q\times X} \to 2^{Q\times X}$ prédécesseurs contrôlables : une action contrôlable peut forcer à rester dans K

$$Pre_u(K)=\{(q,x)\in K / \exists u \in In_U, \forall d \in In_D,\ (x,u,d)\notin Inv(q) \wedge R(q,x,u,d)\subset K\}$$

- $Pre_d : 2^{Q\times X} \to 2^{Q\times X}$ prédécesseurs incontrôlables : des actions incontrôlables peuvent forcer à sortir de K

$$Pre_d(K)=\{(q,x)\in K / \forall u \in In_U, \exists d \in In_D,\ R(q,x,u,d)\cap K^c \neq \emptyset\}\cup K^c$$

- $Reach : 2^{Q\times X} \times 2^{Q\times X} \to 2^{Q\times X}$: états depuis lesquels G est accessible sans atteindre E

$$Reach(G,E)=\{(q(0),x(0)) / \forall u \in \mathcal{U}, \exists d \in \mathcal{D},\ (q(t),x(t))\in G \text{ and } (q(s),x(s))\in Inv\setminus E\ \forall s\in[0,t]\}$$

où $(q(s),x(s))$ est la trajectoire d'équation $\dot{x} = f(q(s),x(s),u(s),d(s))$.

Contrôle

Principe

Algorithme

Point fixe de l'équation :

$$\begin{array}{rcl} W^0 & = & F \\ W^{i-1} & = & W^i \backslash Reach(Pre_d(W^i), Pre_u(W^i)) \end{array}$$

Calcul de *Pre* : inversion de la fonction R.
Calcul de *Reach* : résolution d'un équation d'Hamilton-Jacobi sous contrainte.
$\rightarrow$ algorithme semi-décidable pour des automates hybrides linéaires
f linéaire en x, gardes et resets (R) polyédriques

Filtrage

À partir des observations y de l'état continu, estimer l'état hybride $(\hat{q}, \hat{x})$.

Approches :

- Filtres de Kalman étendus sur des automates hybrides probabilistes concurrents (Hofbaur & Williams, 2004)
- Filtrage particulaire sur automates hybrides (Koutsoukos *et al.*, 2006 ; Funiak & Williams, 2003 ; Pfeffer & Dearden, 2007 ; ...)
- Filtre ensembliste sur automates hybrides (Benazera, 2004).

Outils

- HyTech (U. Berkeley) : vérification de propriété temporelle (LTL) sur des automates hybrides linéaires (composés) ;
- *d*/*dt* (VeriMAG) : accessibilité dans les AH linéaires ; synthèse de contrôleur discret ;
- CHARON (U. Pennsylvanie) : hiérarchisation, simulation.