ISAE - Supaero

3A SEM, 2010-2011

EXAMEN

Modèles de Systèmes Embarqués : modèles discrets, modèles hybrides

NOTE : Documents interdits. Des rappels de cours sont donnés à la fin de chaque partie.

Exercice A

Réseaux de Petri

On modélise par le réseau de Petri de la figure 1 le fonctionnement d'un atelier qui doit réaliser deux types de pièces. Pour le premier type de pièce, un opérateur doit placer la pièce dans une machine puis la retirer quand la machine a fini son travail. Le deuxième type de pièce est traité de façon manuelle par un des deux opérateurs.

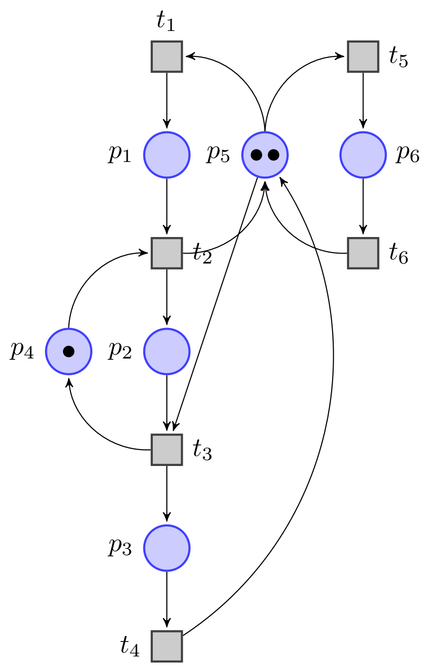

Figure 1 – Réseau de Petri de l'atelier.

A.1. Donner la définition du réseau R de la figure 1 (P, T, Pre et $Post$) et son marquage initial M_0. (1 pt)

$R =< P, T, Pre, Post >$ avec :

$$
\begin{aligned}
P &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\} \\
Pre &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Post &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
M_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

A.2. Donner la signification des six places du réseau R. (2 pts)

- p_4 et p_5 représentent les ressources disponibles :
  - p_4 représente la disponibilité de la machine ;
  - p_5 représente la disponibilité des opérateurs ;
- p_6 représente le traitement d'une pièce de type 2 ;
- p_1, p_2 et p_3 représentent le traitement d'une pièce de type 1 :
  - p_1 représente le placement de la pièce dans la machine,
  - p_2 son traitement par la machine, et
  - p_3 son retrait de la machine.

A.3. Etudier les propriétés du réseau R :

(a) R est-il borné ? Si oui, donner la valeur de la borne ; (2 pts)

(b) R est-il vivant ? (1 pt)

(c) R est-il réinitialisable ? (1 pt)

L'étude de ces propriétés peut se faire en calculant le graphe des marquages de R depuis M_0. Un modèle Tina (atelier.nd) est joint à ce corrigé afin de permettre de visualiser le graphe des marquages. Dans ce cas ci, ce calcul peut être évité, en remarquant :

(a) que toute transition produit autant de jeton que ce qu'elle en consomme ($\forall t$, $Pre(.,t) = Post(.,t)$) ; donc il n'y aura jamais plus de 3 jetons dans ce réseau. R est donc k-borné, avec $2 \leq k \leq 3$;

(b) que la séquence $M_0 \xrightarrow{t_1 t_2 t_1 t_1}$ mène à un blocage, aucune transition n'étant franchissable dans le marquage atteint ; le réseau n'est donc pas vivant ;

(c) et pour les mêmes raisons, le réseau n'est pas réinitialisable.

A.4. Trouver au moins deux invariants de place du réseau. Que représentent-t-ils ? (3 pts)

Soit $f_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
f_1.C &= f_1.(Post - Pre) \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

f_1 est donc une composante conservative, et $\forall M$, $f_1.M = f_1.M_0 = 2$. Cet invariant de place représente le fait qu'il y a toujours 2 opérateurs dans l'atelier, occupés à diverses tâches.

Soit $f_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $f_2.C = 0$, f_2 est donc une composante conservative, et $\forall M$, $f_2.M = f_2.M_0 = 1$. Cet invariant de place représente le fait que la machine est soit disponible, soit occupée par une pièce.

R est complètement couvert par les composantes f_1 et f_2, R est donc borné, et ça borne vaut 2.

Rappels de cours

Soit $R =< P, T, Pre, Post >$ un réseau de Petri, M_0 son marquage initial, et A l'ensembe des marquages accessibles de R depuis M_0.

Définition 1 (Réseau borné) *R est borné si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall M \in A$, $\forall p \in P$, $M(p) \leq k$.*

Définition 2 (Réseau vivant) *R est vivant si et seulement si $\forall t \in T$, $\forall M \in A$, il existe une séquence de tir s et un marquage $M' \in A$ tels que $M \xrightarrow{st} M'$.*

Définition 3 (Réseau réinitialisable) *R est réinitialisable si et seulement si $\forall M \in A$, il existe une séquence de tir s telle que $M \xrightarrow{s} M_0$.*

Définition 4 (Composante conservative) *Une composante conservative de R est une combinaison linéaire des marquages des places du réseau, représentée par une vecteur f, telle que $\forall M \in A$, $f.M = f.M_0$.*

Exercice B

Automates

B.1. Équivalence pour des systèmes : Rappeler, à l'aide d'un exemple, en quoi l'équivalence de traces n'est pas toujours suffisante pour comparer deux systèmes.
Réponse de 5 lignes maximum + un dessin éventuellement

B.2. Automates temporisés : Considérons l'automate temporisé de la figure 2 sur l'alphabet (ensemble de labels) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$, comportant une horloge x. Donner, sans justification, deux exemples de traces temporisées reconnues par cet automate. (Donner des séquences sur $\Sigma \times \mathbb{R}_+$, c'est à dire des séquences de paires (`label`, `durée d'attente`)).

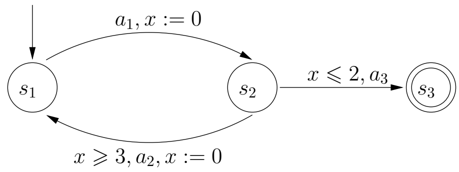

FIGURE 2 – Automate temporisé.

B.3. La sémantique d'un automate temporisé est donnée par un système de transitions temporisé, dont l'espace d'état est infini. Rappeler les grandes idées de la construction d'un système de transitions fini (qui permet donc de vérifier certaines propriétés) «équivalent» au système de transition temporisé infini. Dans quel sens est-il équivalent ?
Réponse de 10 lignes maximum

B.4. Soient $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$ et $T' = (S', S'_I, S'_F, \rhd')$ deux systèmes de transitions temporisés. Si $\mathcal{R}$ est une relation de bisimulation temps-abstraite qui respecte l'état initial et l'état final, montrer que Untime(L(T))=Untime(L(T')).

Rappels de cours

Définition 5 (Système de transitions temporisé) *Un système de transition temporisé sur un alphabet Σ est un quadruplet $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$, où*
- *S est l'ensemble des états*
- *$S_I \subseteq S$ (resp. $S_F \subseteq S$) est l'ensemble des états initiaux (resp. finaux)*
- *$\rhd \subseteq S \times (\mathbb{R}_+ \times \Sigma) \times S$ est la fonction de transition, $s_1 \overset{t,a}{\rhd} s_2$ exprime qu'on peut passer de l'état s_1 à l'état s_2, en reconnaissant le label $a \in \Sigma$, après avoir attendu $t \in \mathbb{R}^+$ unités de temps.*

Définition 6 (Bisimulation temps-abstraite) *Soient $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$ et $T' = (S', S'_I, S'_F, \rhd')$ deux systèmes de transitions temporisés sur Σ. $\mathcal{R} \subseteq S \times S'$ est une relation de bisimulation temps-abstraite ssi elle est* ***symétrique*** *et :*

si $(s_1, s'_1) \in \mathcal{R}$ *et* $s_1 \overset{t,a}{\rhd} s_2$ *alors* $\exists s'_2 \in S'\ \exists t' \in \mathbb{R}_+$ *tels que*
$(s_2, s'_2) \in \mathcal{R}$ *et* $s'_1 \overset{t',a}{\rhd} s'_2$

On dit que $\mathcal{R}$ ***respecte les états initiaux*** *(resp.* ***finaux****) si*

$\forall s \in S$	$s \in S_I (resp. S_F)$	*si et seulement si*	$\exists s' \in S'_I (resp. S'_F)$ *tel que* $s \mathcal{R} s'$
$\forall s' \in S'$	$s' \in S'_I (resp. S'_F)$	*si et seulement si*	$\exists s \in S_I (resp. S_F)$ *tel que* $s' \mathcal{R} s$

Définition 7 (Langage reconnu) *Étant donné système de transition temporisé $T = (S, S_I, S_F, \rhd)$, le langage $L(T)$ reconnu par T est l'ensemble des séquences sur $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ $< (a_0, t_0), (a_1, t_1), \ldots, (a_n, t_n) >$ telles qu'il existe une séquence d'états $< s_0, \ldots, s_{n+1} >$ qui vérifie*
- *$s_0 \in S_I$, $s_{n+1} \in S_F$*
- *$\forall i \in [0..n]\quad s_i \overset{a_i,t_i}{\rhd} s_{i+1}$*

Le langage $Untime(L(T))$ est l'ensemble des séquences sur Σ $< a_0, \ldots, a_n >$ telles qu'il existe une séquence sur $\mathbb{R}_+$ $< t_0, \ldots, t_n >$ qui vérifie $< (a_0, t_0), \ldots, (a_n, t_n) > \in L(T)$.