Практика 4: оракулы, сложность по памяти

1. Покажите, что существует язык $B \in \mathrm{EXP}$, такой что $\mathrm{NP}^B \neq \mathrm{P}^B$.

2. Покажите, что язык L, состоящий из слов, в которых чётное число единиц, лежит в классе SPACE(1).

3. Пусть функции $f, g : \{0,1\}^\star \to \{0,1\}^\star$ можно посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти (напомним, что память считается только на рабочих лентах, входная лента доступна только для чтения, а по выходной ленте головка машины Тьюринга движется только слева направо). Докажите, что функцию $f(g(x))$ можно также посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти.

4. Покажите, что существует язык, который разрешим алгоритмом, использующим $O(n^{10})$ памяти, но при этом не существует алгоритма, который бы разрешал данный язык и использовал при этом $O(n)$ памяти.

5. Покажите, что $\mathrm{SPACE}(S(n)) = \mathrm{SPACE}(0)$, при $S(n) = \log(log(n))$.

6. Покажите, что $\mathrm{SPACE}(n) \neq \mathrm{NP}$.

7. Покажите, что существует такой язык A и $L \in \mathrm{NP}^A$, такие что язык L не сводится за полиномиальное время к 3-SAT, даже если МТ, вычисляющей сведение, дать оракульный доступ к языку A.

8. Покажите, что любой PSPACE-трудный язык также является и NP-трудным языком.

9. Покажите, что PSPACE замкнут относительно операций объединения, дополнения и $*$.

10. Покажите, что язык

    $$\{< M, w, 1^n > \mid \text{МТ } M \text{ принимает } w \text{ используя не более } n \text{ памяти}\},$$

    является PSPACE-трудным.

11. Докажите, что если есть унарный NP-полный язык, то $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.