

Домашнее задание 9 и 10:

попарно-независимые случайные величины,  
неравенство Чебышёва, оценки Чернова,  
целочисленное линейное программирование

1. Покажите, что если  $NP \subset BPP$ , то  $NP = RP$ .
2. Пусть  $n$  — простое,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — выбраны равномерно и независимо из  $\mathbb{Z}_n$ . Пусть  $Y_i \equiv a_1 + a_2 i + a_3 i^2 + \dots + a_k i^{k-1} \pmod n$ . Покажите, что при  $i \not\equiv j \pmod n$  случайные величины  $Y_i$  и  $Y_j$  являются  $k$ -независимыми.
3. Пусть  $L$  это язык из класса  $BPP$ . Пусть  $A$  — соответствующий вероятностный алгоритм, который ошибается с вероятностью меньшей  $\frac{1}{3}$ . Используя оценки Чернова оцените, сколько раз достаточно запустить алгоритм  $A$ , чтобы вероятность ошибки стала экспоненциально маленькой.
4. Дана матрица  $A$  размера  $n \times n$  при этом  $A_{ij} \in \{0, 1\}$ . Предъявите алгоритм, который находит с вероятностью  $1 - \frac{2}{n}$  вектор  $u$  состоящий из 1 и  $-1$ , такой что  $\|Au\|_\infty \leq O(\sqrt{n \ln n})$ .
5. В задаче SET COVER дано семейство  $\mathcal{S}$  подмножеств множества  $U$  и требуется выбрать минимальное количество подмножеств из  $\mathcal{S}$ , которые покрывают все  $U$ . Задача  $f$ -SET COVER — это частный случай задачи SET COVER, только заранее известно, что любой элемент встречается не более чем в  $f$  подмножествах из  $\mathcal{S}$ . У вас есть волшебная машина которая умеет быстро составлять и решать задачи линейного программирования. Используя эту волшебную машину постройте  $f$ -приближение для задачи  $f$ -SET COVER. Просто жадный алгоритм в качестве решения **не** принимается.