

Домашнее задание 9 и 10:
попарно-независимые случайные величины,
неравенство Чебышёва, оценки Чернова,
целочисленное линейное программирование

1. (1) Покажите, что если $NP \subset BPP$, то $NP = RP$.
2. (1) Пусть n — простое, a_1, a_2, \dots, a_k — выбраны равномерно и независимо из \mathbb{Z}_n . Пусть $Y_i \equiv a_1 + a_2i + a_3i^2 + \dots + a_ki^{k-1} \pmod n$. Покажите, что при $i \not\equiv j \pmod n$ случайные величины Y_i и Y_j являются k -независимыми.
3. (1) Пусть L это язык из класса BPP . Пусть A — соответствующий вероятностный алгоритм, который ошибается с вероятностью меньшей $\frac{1}{3}$. Используя оценки Чернова оцените, сколько раз достаточно запустить алгоритм A , чтобы вероятность ошибки стала экспоненциально маленькой.
4. (1) Дана матрица A размера $n \times n$ при этом $A_{ij} \in \{0, 1\}$. Предъявите алгоритм, который находит с вероятностью $1 - \frac{2}{n}$ вектор u состоящий из 1 и -1 , такой что $\|Au\|_\infty \leq O(\sqrt{n \ln n})$.
5. (1) В задаче SET COVER дано семейство \mathcal{S} подмножеств множества U и требуется выбрать минимальное количество подмножеств из \mathcal{S} , которые покрывают все U . Задача f -SET COVER — это частный случай задачи SET COVER, только заранее известно, что любой элемент встречается не более чем в f подмножествах из \mathcal{S} . У вас есть волшебная машина которая умеет быстро составлять и решать задачи линейного программирования. Используя эту волшебную машину постройте f -приближение для задачи f -SET COVER. Просто жадный алгоритм в качестве решения **не принимается**.