§2−3 空間中的平面方程式

(甲)空間中平面方程式

(1)**[回顧坐標平面上的直線]**：

(a)平面坐標系中，只要知道斜率m與點(x_0,y_0)就可以確定直線的位置，因此可以求出直線的方程式$y-y_0=m(x-x_0)$ (點斜式)。

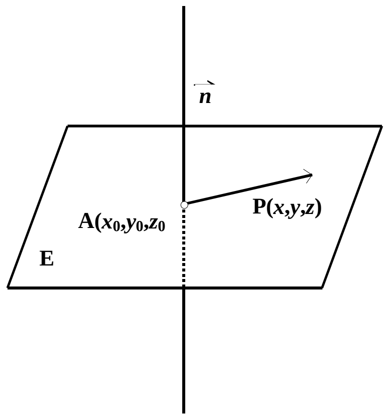
(b)考慮平面上的直線L：$2x+3y+6=0$，P(3,−4)為L上的任意點，我們曾定義直線L的法向量$\vec{n}=(2,3)$，設R(x,y)為L上的一點，根據法向量的定義，可知$\overrightarrow{PR}\perp\vec{n}$，即$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(x-3,y+4)\cdot(2,3)=0\Rightarrow2x+3y+6=0$。

(2)平面的法線與法向量：

平面的法線：若一直線L垂直於平面E，則稱此直線為平面E的法線。

平面的法向量：
若直線L為平面E的法線，
則直線L的一個方向向量就稱為平面E的一個法向量。

法向量的特性：
(a)**一個平面的法向量會是唯一嗎？NO！**
(b)若任取平面E上的兩個相異點A、B，則$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$。



(3)如何求平面的方程式：

(a)點法式：

若平面E法向量$\vec{n}=(a,b,c)$且過點A(x_0,y_0,z_0)，
則平面E的方程式為$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。
[證明]：

在平面E上任取一點P其坐標為(x,y,z)，則$\overrightarrow{\mathbf{AP}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$
所以$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$
$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
反過來說滿足方程式$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$的解Q$(x,y,z)$
$\Rightarrow\overrightarrow{\mathbf{AQ}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}\Rightarrow$Q落在平面E上。

(b)一般式：
將方程式$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 化簡可得$ax+by+cz+d=0$的方程式。
我們將$ax+by+cz+d=0$稱為一般式。

一般式$ax+by+cz+d=0$的法向量為$\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$

[證明]：
設A(m,n,l)、B(p,q,r)在平面$ax+by+cz+d=0$上，

驗證$\overrightarrow{AB}\cdot(a,b,c)=(p-m,q-n,r-l)\cdot(a,b,c)$

$=a(p-m)+b(q-n)+c(r-l)$

$=ap+bq+cr-(am+bn+cl)$

$=d-d=0$

故$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\perp\vec{\boldsymbol{n}}$　因此$ax+by+cz+d=0$的法向量為$\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$。

結論：**掌握法向量**$\vec{n}$，**平面上的一點P，即可用點法式去表示平面方程式**：

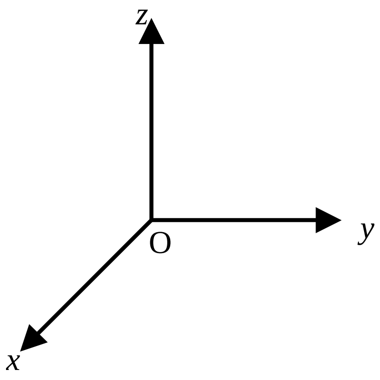
(a)已知平面E的$\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$，過P$(x_0,y_0,z_0)$ ⇒點法式：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

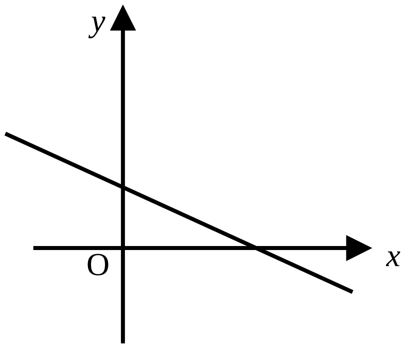
(b)一般式：$ax+by+cz+d=0$， ⇒法向量$\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$。

(4)問題與討論：

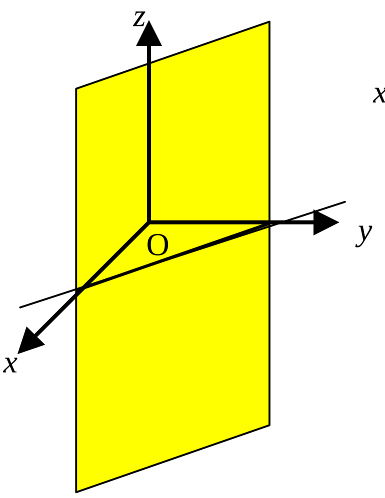
(a)特殊平面：xy平面⇒$z=0$　，yz平面⇒$x=0$，zx平面⇒$y=0$

(b)如何去決定方程式$2x+3y-6=0$的圖形。





平面坐標：



空間坐標：

[例題1] 已知一平面E和直線AB垂直，A爲其垂足，若A(4,3,−2)，B(5,−2,1)，求平面E的方程式。Ans：$x-5y+3z+17=0$

(練習1) 求過點P(2,−3,1)且法向量$\vec{n}$=(2,−3,4)的平面方程式。
Ans：$2x-3y+4z=17$

(練習2) 在空間中，連接點P(2,1,3)與點Q(4,5,5)的線段PQ之垂直平分面。
Ans：$x+2y+z-13=0$

(練習3) 設P、Q爲平面E：$ax+by+cz=5$上相異兩點，且$\overrightarrow{PQ}=(x_0, y_0, z_0)$，則$\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)$爲何？(A)不定值，隨$(x_0，y_0，z_0)$而改變。(B)25 (C)5 (D)0 (E)−1。Ans：(D)

(3)給不共線三點求平面方程式：
(a)從一個例子說起：

設A(3，−1,1)、B(4,2,−1)、C(7,0,3)，求過A、B、C三點的平面方程式。

[解法]：設平面的法向量爲$\vec{n}=(a,b,c)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$、$\overrightarrow{AC}=(4,1,2)\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$且$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

即$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+3b-2c=0\\4a+b+2c=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-8}{11}c，b=\frac{10}{11}c$$

即$a：b：c=8：(-10)：(-11)$

所以$\vec{n}=k(8,-10,-11)$ $k\neq0$，取$\vec{n}=(8,-10,-11)$

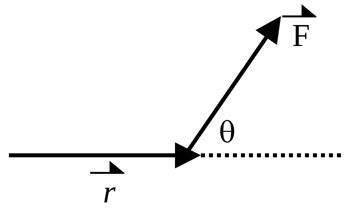
所求平面方程式爲$8(x-3)-10(y+1)-11(z-1)=0$。

(b)找公垂向量：

由前面的例子中，我們知道已知空間中兩個向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，

可以找到$\vec{c}$，使得$\vec{a}\perp\vec{c}$且$\vec{b}\perp\vec{c}$。

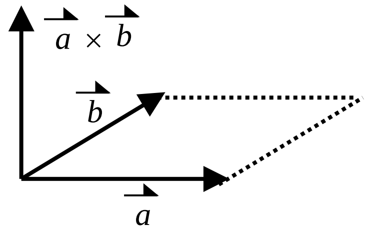
空間中的向量運算除了有加減法、係數積、內積之外，還有一種運算—**外積**。
在物理學中，設力 $\overrightarrow{F}$ 作用在位移 r 的終點上，它的力矩定義爲一個向量M，
其大小爲$|\overrightarrow{F}||\overrightarrow{r}|\sin\theta$ ，方向垂直 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{r}$ ，且M與 $\overrightarrow{r}$ 、 $\overrightarrow{F}$ 構成右手系，
符號寫成：$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}$ 這樣的概念抽象化之後，形成以下的定義：



設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，
定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的外積爲$(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$，
符號：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$。

快速算法：

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$



性質：
(a) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$ ，θ爲 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角。
(b) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$
(c) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 爲一個向量，其大小爲$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$，
方向：由 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 構成右手則。
(d)ΔABC面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$。

回到原先的問題，已知空間中兩個向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ ，可以找到 $\overrightarrow{c}\neq\overrightarrow{0}$ ，使得
$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$ ，因此可取 $\overrightarrow{c}$ 爲與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 平行的一個向量。

例如：設A(1,2,0)，B(0,3,0)，C(−2,−3,1)，求AB與AC的一個公垂向量。
Ans：(1,1,8)

[例題2] 求過三點A(–3,1,2)、B(5,3,–7)、C(1,7,0)的平面方程式。
Ans：$5x-2y+4z+9=0$

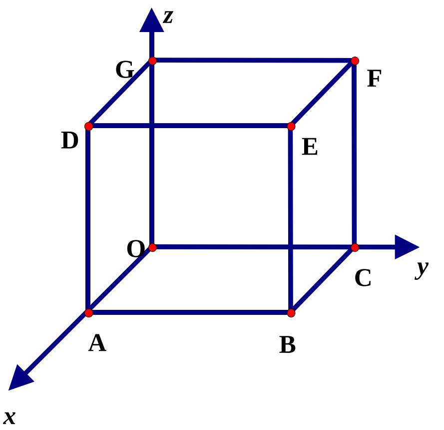
[例題3] 設一平面E包含點A(2,3,1)及點B(3,–1,0)，且平面E和z軸平行，求平面E的方程式，此平面方程式有何特徵？
Ans：$4x+y-11=0$，缺z項，和z軸平行。

[例題4] 求過點P(1,1,1)且垂直平面$3x+y-z+1=0$與$4x-2y-z-5=0$之平面方程式。
Ans：$3(x-1)+(y-1)+10(z-1)=0$

[例題5] 一平面與平面$3x+2y+z+11=0$平行，且與三軸之截距和為22，試求其方程式。
Ans：$3x+2y+z-12=0$

注意：截距不是距離，是圖形與坐標軸交點之坐標值。

[例題6] 設三平面E_1：$3x+2y-2z+1=0$，E_2：$x+y-5z-6=0$，E_3：$4x+2y+3z+1=0$，有一平面E包含E_1與E_2之交線且與E_3垂直，求E之方程式。
Ans：$37x+28y-68z-51=0$



(練習4) 如圖，長方體OABC−DEFG中，
已知B(1,3,0)、D(1,0,2)，求平面BDF的方程式。
Ans：$6x+2y+3z=12$

(練習5) 空間中四點$A(1，1，2)$，$B(-1，0，3)$，$C(2，0，-1)$，$D(3，k，1)$，
(1)過A，B，C三點的平面方程式爲__________。
(2)若A，B，C，D四點共平面，則$k=$__________。
Ans：(1) $4x-5y+3z-5=0$(2) 2

(練習6) 試求過點A(2,1,−1)、B(1,1,2)二點且與平面$7x+4y-4z=0$垂直之平面的方程式。Ans：$12x-17y+4z-3=0$

(練習7) 設A(−1,2,1)，B(2,1,0)，C(0,3,1)，D(1,4,−1)設一平面E和直線$\overleftrightarrow{AB}$及$\overleftrightarrow{CD}$均平行,且平面E含點(1,2,3),求平面E的方程式。Ans：$3x+5y+4z-25=0$

(練習8) 求下列各平面方程式：
(1)平行xy平面，且在其上5單位長之平面。Ans：$z=5$
(2)平行於z軸，且x軸截距爲3，y軸截距爲4之平面。Ans：$4x+3y-12=0$

(練習9) 過點A(1,2,3)與yz平面平行之平面方程式。Ans：$x=1$

(練習10) 平面E在x,y,z軸的截距爲2，−1，3，試求平面E的方程式。
Ans：$3x-6y+2z=6$

(練習11) 平面過G(−1,2−3)且此點恰爲平面在x,y,z軸上截點所成三角形之重心，

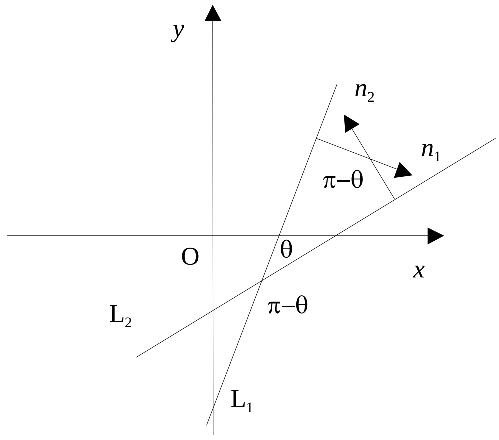
求此平面方程式。　Ans：$6x-3y+2z+18=0$

(練習12) 平面E之法向量為(3,−2,1)，且三截距和為13，求E的方程式。
Ans：$15x-10y+5z-78=0$

(練習13) 平面E包含$2x+y-4=0$與$y+2z=0$之交線且
(1)通過點(2,−1,1)時，平面E的方程式。
(2)垂直於平面$3x+2y-3z-6=0$時，平面E的方程式。
Ans：(1)$x+y+z-2=0$　(2)$2x+3y+4z=4$

(乙)空間中兩平面的夾角

(1)平面上兩直線的交角
設L_1，L_2為平面上之兩相交的直線，
L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$，
若設兩直線的法向量夾角為α，
則兩直線的交角為α，π−α。

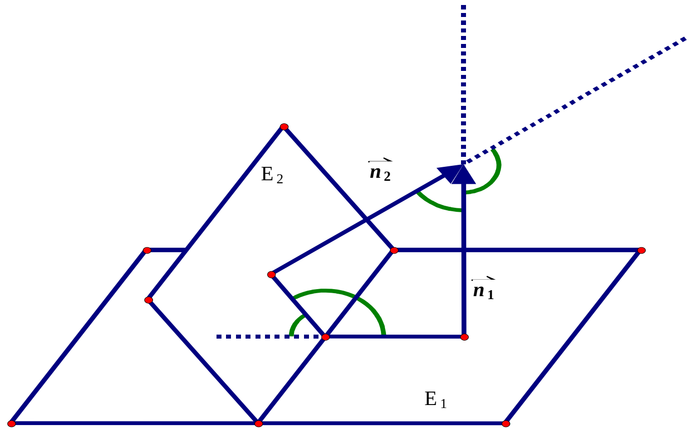


[證明]：設L_1，L_2的法向量分別為n_1，n_2
則可取$n_1=(a_1,b_1)$，$n_2=(a_2,b_2)$，由右圖

$$\cos\alpha=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

兩直線的交角為α，π−α。

(2)空間中兩平面的夾角：
設兩平面E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，
若設兩平面的法向量$\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$的夾角為α，
則平面E_1與E_2的交角為α，π−α。
[證明]：
設平面E_1、E_2交於一直線L，另作一平面E垂直L且分別與E_1、E_2交線L_1、L_2，
法向量$\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$的夾角α必等於直線L_1、L_2的一個夾角也就是平面E_1、E_2所夾的一個二面角。



[例題7] 設平面$\sqrt{3}\,x+2y+z=2$與$ax-y+z=5$有一個夾角爲60°，求a的值。

Ans：$a=\sqrt{3}\pm\sqrt{6}$

[例題8] 求過點A(1,0,0)、B$(0,0,\frac{1}{3})$二點，且與平面$x+z=3$之交角爲45°的平面方程式。

Ans：$x\pm\sqrt{6}\,y+3z-1=0$

(練習14) 設α爲平面$2x+y-z=4$與xy平面之夾角，則sinα=？ Ans：$\frac{\sqrt{30}}{6}$

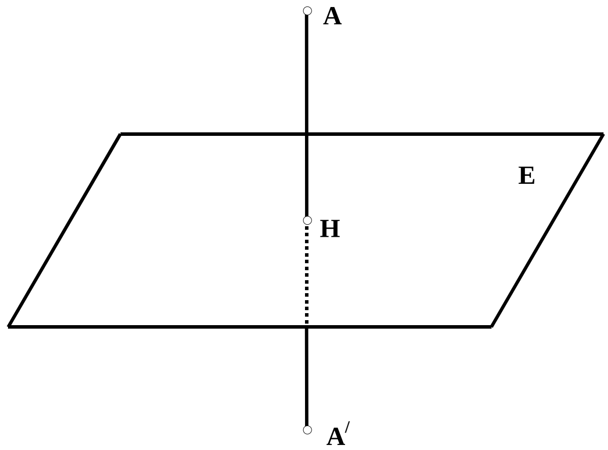
(練習15) 求E_1：$x-2y+2z=5$與E_2：$3x+4y-5z=-3$二平面的交角。

Ans：$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

(練習16) 平面E過點A(1,−1,1)、B(−1,3,1)且與平面$x+y+1=0$之一交角爲$\frac{\pi}{4}$，求E的方程式。 Ans：$2x+y+2z-3=0$，$2x+y-2z+1=0$

(丙)空間中點到平面的距離

(1)點A(x_0,y_0,z_0)到平面E：$ax+by+cz+d=0$的距離為d(A,E)=$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

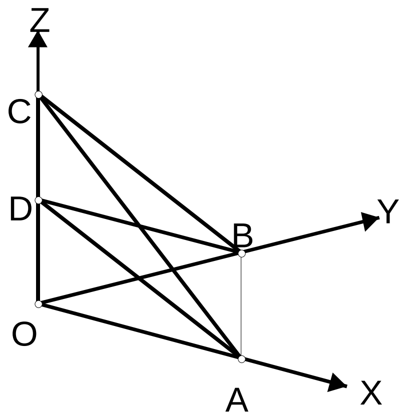


(2)兩平行平面E_1：$ax+by+cz+d_1=0$，E_2：$ax+by+cz+d_2=0$

兩平面E_1、E_2的距離$d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

[例題9] 設A(3,2,1)在平面E：$3x+2y+z-28=0$上的投影點坐標，並求A點對此平面的對稱點。 Ans：(6,4,2)、(9,6,3)

[例題10] 在右圖的空間坐標中，O爲原點，點A、B、C分別位於x軸、y軸、z軸上，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，且D爲$\overline{OC}$的中點，求O到平面ABC與O到平面ABD的距離之比。Ans：$\sqrt{2}$：1



[例題11] 平面E_1：$7x-y+2z+10=0$，E_2：$4x+4y-8z+3=0$，求E_1及E_2所夾二面角之平分面方程式。Ans：$16x-16y+32z+31=0$或$40x+8y-16z+49=0$

(練習17) 求點A(5,0,8)到平面E：$2x-y+2z+1=0$的距離。 Ans：9

(練習18) 空間中，設A(−1,3,3)、B(1,3,4)、C(3,−5,−5)、D(2,2,7)，則四面體ABCD中，以ABC爲底面時，高爲何？ Ans：$\sqrt{5}$

(練習19) 求與平面$2x-y-2z+3=0$平行且與其距離爲1的平面方程式。
Ans：$2x-y-2z=0$或$2x-y-2z+6=0$

(練習20) 設$P(x,y,z)$為平面E：$x-2y-2z+3=0$的點，則$(x-6)^2+y^2+z^2$的最小值為？
Ans：9

綜合練習

(1) 試求下列諸平面的方程式：
(a)過點$(-1,3,2)$，法線方向為$(-4,1,3)$。
(b)過點$(5,6,6)$，法線的方向角為45°、45°、90°。
(c)過點$(3,3,3)$，法線方向餘弦為$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{-6}{7}$。
(d)過三點$(2,7,3)$、$(4,6,2)$、$(5,6,1)$。
(e)在x,y,z軸截距為$3,-2,4$。
(f)設$P(2,1,-1)$、$Q(3,-2,1)$、$R(1,1,2)$，其中直線PQ垂直此平面且R點到平面的距離為$2\sqrt{14}$。
(g)與$4x-2y-z-5=0$、$3x+y-z+1=0$二平面均垂直且通過點$P(1,1,1)$。
(h)點$(1,2,3)$在此平面上的投影點為$(2,3,4)$。
(i)過$x+y-z+2=0$、$x+z-3=0$二平面的交線且過點$(0,0,2)$。
(j)過$A(-1,3,1)$、$B(1,-1,1)$二點且與平面$x+y-6=0$之一交角為$\frac{3\pi}{4}$。

(2) 平面E_1：$x-2y+2z-5=0$，E_2：$2x+y-2z+3=0$，求E_1、E_2所夾二面角之平分面方程式。

(3) 設$A(1,0,1)$、$B(3,-1,2)$、$C(0,1,-1)$，試求
(a)$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影為何？(b)ΔABC的面積為何？
(c)平面ABC的方程式。(d)$\overline{AB}$的垂直平分面方程式。

(4) 設$A(2,0,0)$、$B(0,8,0)$、$C(0,0,1)$、$D(1,4,9)$為空間中四點，求四面體$ABCD$的體積。

(5) 一平面E與平面$x-3y+12z-5=0$平行，且與三坐標平面所圍成的四面體的體積為1，求E的方程式。

(6) ·給予一平面E：$x-3y-z-12=0$及一點$P(2,5,-3)$，求P在E上的正射影，P對於E的對稱點。

(7) 點$A(1,2,3)$、$B(2,3,4)$，點P在xz平面上，若$\overline{AP}+\overline{BP}$為最小，則$P$的坐標為______。

進階問題

(8) 平面E過點$P(2,3,4)$，且分別交x,y,z三軸正向於A、B、C三點，O為原點，
(a)求四面體$OABC$的最小體積。(b)此時平面ABC之方程式為何？

(9) 設二平面E_1：$x+ky+z-2=0$與E_2：$x+\sqrt{2}\,y-z+1=0$的夾角為$\frac{\pi}{3}$，求k之值。

(10) 設A(0，1，2)，B(－1，0，3)，C(1，2，3)，
(a)求通過A，B，C三點的平面方程式。(b)求ΔABC的垂心坐標。

綜合練習解答

(1) (a)$4x-y-3z+13=0$ (b)$x+y-11=0$ (c)$2x+3y-6z+3=0$ (d)$x+y+z-12=0$
(e)$4x-6y+3z-12=0$ (f)$x-3y+2z=32$或$x-3y+2z=-24$ (g)$3x+y+10z-14=0$
(h)$x+y+z-9=0$ (i)$x+y-z+2=0$ (j)$2x+y-2z+1=0$或$2x+y+2z-3=0$

(2) $x+3y-4z+8=0$或$3x-y-2=0$

(3) (a)$\frac{-5}{6}(-1,1,-2)$ (b)$\frac{\sqrt{11}}{2}$ (c)$x+3y+z-2=0$ (d)$2x-y+z-6=0$

(4) 24 [提示：找出平面ABC的方程式，再求D點到平面ABC的距離，再利用四面體ABCD的體積$=\frac{1}{3}\times(\Delta$ABC的面積$)\times$高]

(5) $x-3y+12z=\pm6$

[提示：可令所求方程式為$x-3y+12z=k \Rightarrow x,y,z$軸的截距為$k,\frac{k}{-3},\frac{k}{12} \Rightarrow \frac{1}{6}|k\cdot\frac{k}{3}\cdot\frac{k}{12}|=1$]

(6) $(4,-1,-5)$ $(6,-7,-7)$

(7) $(\frac{7}{5},0,\frac{17}{5})$[提示：A、B兩點在$xz$平面的同側，作A對$y=0$的對稱點$A'(1,-2,3)$，令$P(x,y,z)$因為$A'$、P、B共線$\Rightarrow \overrightarrow{A'P}=t\overrightarrow{A'B} \Rightarrow x=1+t, y=-2+5t$，$z=3+t$，代入$y=0$ $\Rightarrow t=\frac{2}{5}$。]

(8) (a)108 (b)$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{12}=1$[提示：設平面方程式為$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，因為平面過P點$\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$(其中$a,b,c$均為正數)，四面體OABC的體積$V=\frac{1}{6}abc$，$1=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}$ $\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{4}{V}} \Rightarrow V\geq108$，等號成立時$\Leftrightarrow \frac{2}{a}=\frac{3}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a=6$，$b=9,c=12$]

(9) $\pm\sqrt{2}$ [提示：$\overrightarrow{n_1}=(1,k,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{2},-1) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$]

(10) (a) $x-y+1=0$(b) $H(0，1，1)$

[提示：令H(x,y,z)，利用$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，H在平面ABC上，找出$x,y,z$的方程式，再解$x,y,z$。]