



دانشگاه علم و صنعت ایران

واحد مهندسی کامپیوتر

گروه شبکه‌های کامپیوتری  
سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸

تمرین سری دوم (hw02)

بحث تعادل همبسته و minimax

تاریخ ارسال تمرین: ۶ اردیبهشت ۱۳۹۹

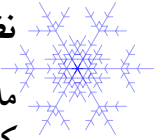
مهلت ارسال پاسخ: ۱۰ خرداد ۱۳۹۹

نظریه بازی‌ها (تحصیلات تکمیلی)

مدرس: دکتر وصال حکمی

کمک مدرس: ذاکری - سان احمدی

نیمسال تحصیلی: دوم (بهار ۱۳۹۹)



♣ توجه: تمرین شامل ۷ صفحه و ۱۰ پرسش است.

### بخش اول: مسائل محاسباتی

با توجه به مثال‌های حل شده در کلاس، هریک از مسئله‌های ۱ تا ۵ را حل کنید.

۱. (پرسش شماره ۲ تمرین سری اول<sup>۱</sup>) بازی دو نفره مجموع - صفر داده شده با ماتریس payoff زیر را در نظر بگیرید (ماتریس A، payoff بازیگر سطری (بازیگر ۱) را نشان می‌دهد). مقدار minimax بازیگر ۱ (بر حسب استراتژی‌های مختلط) را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۲. (پرسش شماره ۵ تمرین سری اول<sup>۲</sup>) نقطه یا نقاط بحرانی توابع  $f$  و  $g$  را به دست آورده و آنها را دسته‌بندی نمایید.

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 2y^2$$

$$g(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

۳. دو بازی زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌های داده شده پاسخ دهید:

		Column	
		L	R
Row	U	(۴, ۴)	(۱, ۵)
	D	(۵, ۱)	(۰, ۰)

		Column	
		L	R
Row	U	(۲, ۱)	(۰, ۰)
	D	(۰, ۰)	(۱, ۲)

(آ) تمامی تعادل‌های نش بازی را پیدا کنید؟

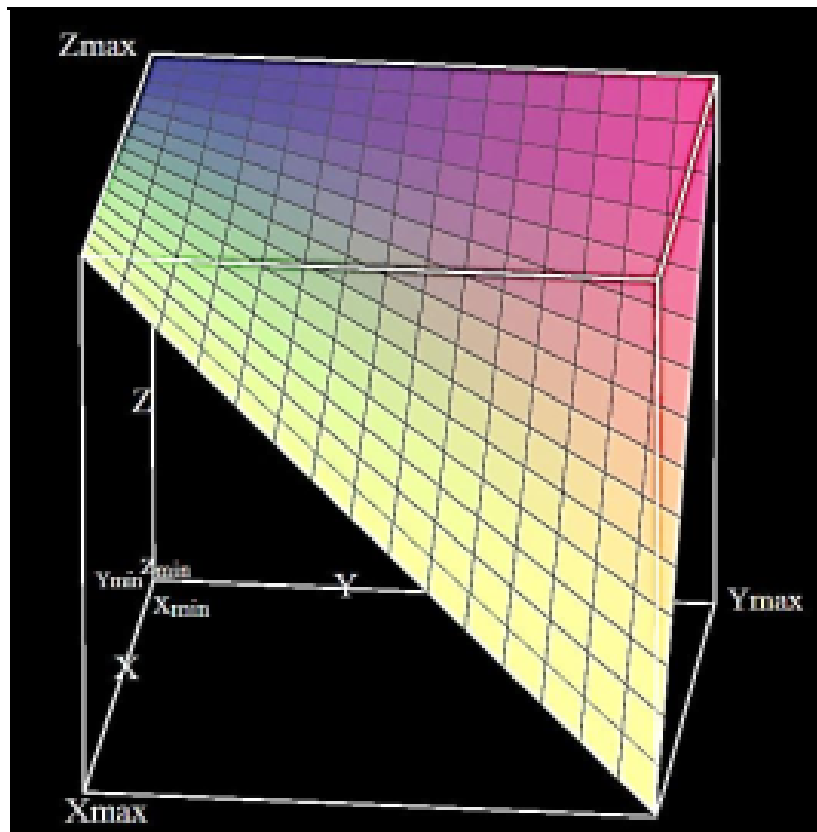
(ب) تمامی تعادل‌های همبسته بازی را پیدا کنید؟

۴. برای بازی زیر، یک برنامه خطی (linear program) بنویسید که بازیگر سطری از آن جهت حذف استراتژی‌های ضعیفاً مغلوب خود استفاده کند.

<sup>۱</sup> دانشجویانی که در سری قبل به این پرسش پاسخ داده اند نیازی به پاسخ مجدد نیست و فقط کافی است ذکر شود که در تمرین قبلی پاسخ داده شد.  
<sup>۲</sup> دانشجویانی که در سری قبل به این پرسش پاسخ داده اند نیازی به پاسخ مجدد نیست و فقط کافی است ذکر شود که در تمرین قبلی پاسخ داده شد.

$$U = \begin{bmatrix} (7, 3) & (6, 3) & (5, 5) & (4, 7) \\ (4, 2) & (5, 7) & (8, 6) & (5, 8) \\ (6, 1) & (3, 8) & (2, 4) & (5, 9) \end{bmatrix}$$

۵. رویه‌ی (surface) نمایش داده شده در شکل زیر، تابع payoff بازیگر سطری در یک بازی دو-نفره‌ی مجموع صفر را نشان می‌دهد. فرض شده است که هر بازیگر دارای دو عمل محض pure است. پارامتر  $X$  نمایانگر مقدار احتمالی است که بازیگر سطری روی عمل محض اولش می‌گذارد و پارامتر  $Y$  هم مقدار احتمالی است که بازیگر ستونی روی عمل محض اول خودش قرار می‌دهد. فرض کنید که  $Z_{min} = -1$  و  $Z_{max} = 0$ . تمامی تعادل‌های زین‌اسبی (saddle point equilibria) بازی را مشخص کنید.



## بخش دوم: مسائل تحلیلی

با توجه به تعاریف تعادل‌های نش و همبسته، هر یک از مسائل ۶ تا ۸ را تحلیل کرده و پاسخ مناسبی برای آن بیابید.

۶. با در نظر داشتن رابطه payoff ها در تعادل نش و تعادل همبسته (correlated)، آیا ممکن است تعادل همبسته‌ای وجود داشته باشد که در آن payoff هر دو بازیگر کمتر از payoff آن‌ها در بدترین تعادل نش متقارن (تعادل نشی که در آن payoff بازیکنان کمتر از بقیه تعادل نش‌های موجود در بازی است) باشد؟ توضیح دهید.

۷. تعریف ۱ را بخوانید و سپس به پرسش‌های داده شده پاسخ دهید:

## تعریف ۱: تعادل همبسته نامرغوب

یک توزیع احتمال مثل  $p(\cdot)$  روی فضای عمل جمعی بازیگران یک «تعادل همبسته نامرغوب (CCE)»<sup>a</sup> نامیده می‌شود هرگاه برای کلیه بازیگران مثل  $i$  و برای هر استراتژی محض مثل  $s'_i \in S_i$  از وی داشته باشیم:  $U'_i(p) \geq U'_i(p; s'_i)$  که در آن:

$$U'_i(p; s'_i) := \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in S} p(s_1, \dots, s_n) u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad (1)$$

به تعبیر شهودی مطابق رابطه ۱، تحقق CCE مستلزم این است که «تبعیت از سیگنال پیشنهادی داور» (مثلاً  $s_i$ ) (که حاصل نمونه برداری از توزیع  $p(\cdot)$  است)، پیش از مشاهده  $s_i$  یک best response باشد. به عبارت دیگر، در این مفهوم تعادلی، هر بازیگر ناگزیر است که از قبل، در خصوص تبعیت/عدم تبعیت از سیگنال‌های داور تعهد بدهد و پس از مشاهده سیگنال، مجاز به تخطی از تعهد خود نیست. با این ضوابط،  $p(\cdot)$  نمایانگر یک CCE خواهد بود اگر که هیچ بازیگری (به‌طور یک‌جانبه) انگیزه‌ای برای عدم تعهد به سیگنال‌های داور نداشته باشد.

<sup>a</sup>Coarse correlated equilibrium

حال، بازی ماتریسی زیر را در نظر بگیرید و نامعادلات مبنای CE و CCE را از منظر بازیگر سطری (بازیگر ۱) بنویسید:

		Column	
		a	b
Row	A	(۰, ۱)	(۶, ۰)
	B	(۲, ۰)	(۵, ۲)
	C	(۳, ۴)	(۳, ۳)

۸. برای یک بازی ماتریسی دو-نفره، توصیفی از یک برنامه ریاضی ارائه دهید که به کمک آن بتوان تعیین نمود آیا یک پروفایل نش داده شده از نوع بهینه Pareto هست یا خیر.

## بخش سوم: مسائل کامپیوتری

با استفاده از ابزارهای کامپیوتری مشخص شده و برنامه‌نویسی، مسائل داده شده در این بخش را حل کنید.

◀ بسته‌های نرم‌افزاری مختلفی (تجاری و رایگان)، برای حل مسائل بهینه‌سازی و ارضای محدودیت تحت عنوان کلی Solver وجود دارد. این ابزارها ورودی را در قالب یا زبان‌های مشخصی از کاربر دریافت کرده، بر اساس آن یک برنامه ریاضی (مدل) تشکیل داده و آن را حل می‌کنند. Solverهای امروزی با انتشار واسطه‌های برنامه‌نویسی کاربردی (API) برای زبان‌های برنامه‌سازی مختلف، امکانات خود را برای استفاده در ابزارها و برنامه‌های دیگر فراهم کرده‌اند. برخی از Solverهای پرکاربرد و API آنها عبارتند از:

1. **AMPL** system, C++, C#, Java, MATLAB, Python, and R callable library (API)

<https://ampl.com/>

2. **GUROBI**, C and C++ callable library (API)

[https://www.gurobi.com/documentation/9.0/refman/lp\\_format.html](https://www.gurobi.com/documentation/9.0/refman/lp_format.html)

3. **MATLAB**, the `intlinprog` function

<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/intlinprog.html>

4. **GAMS** language, C++, .NET, Java, and Python callable library (API)

<https://www.gams.com/>

5. **Z3**, C++ and Python callable library (API)

<https://github.com/Z3Prover/z3>

<https://theory.stanford.edu/~nikolaj/programmingz3.html>

6. **Pulp**, Python callable library (API)

<https://coin-or.github.io/pulp/>

<http://benalexkeen.com/linear-programming-with-python-and-pulp-part-2/>

7. **GLPK**, C and C++ callable library (API)

<https://www.gnu.org/software/glpk/>

8. **lp\_solve**, C and C++ callable library (API)

<http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>

9. **CPLEX**, C, C++ and Java callable library (API)

<https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>

10. **CBC**, C and C++ callable library (API)

<https://projects.coin-or.org/Cbc>

11. **MOSEK**, C++, Java, Python and R callable library (API)

<https://www.mosek.com/>

 12. **SCIP**, C and C++ callable library (API)

<https://scip.zib.de/>

 13. **MiniZinc** constraint modeling language

<https://www.minizinc.org/index.html>

 14. **LINGO** optimization modeling software

<https://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling>

 15. **OpenSolver**, Microsoft Excel plugin

<https://opensolver.org/>

◀ در هریک از مسائل زیر، از ابزارهای معرفی شده برای حل برنامه‌های خطی و بهینه‌سازی‌های حاصله استفاده نمایید. توصیه می‌شود که از ابزارهای رایگان استفاده کنید، زیرا دسترسی به آنها آسان‌تر است. برای نمونه سه ابزار اول، تجاری هستند. همچنین مشابه نبودن ابزار انتخابی شما با دیگران امتیاز مثبت دارد (انتخاب‌های تکراری این امتیاز را از دست می‌دهند). هماهنگی در زمینه انتخاب ابزار بر عهده دانشجویان است. استفاده از ابزاری خارج از این فهرست نیز با ذکر مرجع و توضیحات کافی، بلامانع است. نکات ضروری و مهم در چگونگی استفاده از ابزار، بایستی در پاسخ شما مستند شود.

۹. یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه تعادل همبسته خصوصی (private correlated equilibrium) در بازی‌های دو نفره متناهی بنویسید. ورودی این برنامه یک فایل حاوی ماتریس payoff بازیکنان در بازی است. خروجی یک ماتریس هم مرتبه با ماتریس ورودی، محتوی احتمال‌های نسبت داده شد به هر زوج استراتژی در تعادل، به همراه مقادیر پاداش بازیکنان در تعادل خواهد بود. یک نمونه ورودی و خروجی برای بازی Shapley (درس ۵، اسلاید ۵) در زیر داده شده است. بدیهی است که برنامه شما با موارد بیشتری تست می‌شود.

**ورودی:** در سطر اول ابعاد ماتریس  $(m \times n)$  و در  $m$  سطر بعدی، در هر سطر مقادیر payoff بازیکنان آمده است.

1 3 3

2 (0,0), (0,1), (1,0)

3 (1,0), (0,0), (0,1)

4 (0,1), (1,0), (0,0)

**خروجی:**

1 P =

2 0.0000 0.1667 0.1667

3 0.1667 0.0000 0.1667

4 0.1667 0.1667 0.0000

5 Utility P1 =

6 0.5

7 Utility P2 =

0.5

۱۰. یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه استراتژی Minimax بازیکن سطری در بازی‌های دو نفره مجموع صفر بنویسید. ورودی برنامه ماتریس payoff بازیکن سطری و خروجی آن بردار احتمال استراتژی Minimax بازیکن سطری در مقابل ستونی، به همراه مقدار Minmax value بازیکن سطری است. یک نمونه ورودی و خروجی در زیر داده شده است.

**ورودی:** در سطر اول ابعاد ماتریس  $(m \times n)$  و در  $m$  سطر بعدی، در هر سطر مقادیر payoff بازیکن سطری آمده است.

```
1 3 3
2 3 -2 2
3 -1 0 4
4 -4 -3 1
```

خروجی:

```
1 P =
2 0.1667 0.8333 0.0000
3 Minimax value P1 =
4 -0.3333
```

## تذکرات مهم:

۱. تمرین‌ها با شماره‌های متوالی (hw01 ، hw02 و غیره) در Edmodo قرار می‌گیرند.
  ۲. پاسخ تمرین‌ها نیز بایستی در موعد مقرر در Edmodo بارگذاری شوند.
  - برای تمرین سری دوم (hw02) در موعد ۱۰ خرداد ۱۳۹۹
  ۳. تمرین‌ها بایستی به صورت انفرادی حل شوند. در صورت مشاهده تقلب، نمره منفی به افراد متخلف تعلق می‌گیرد.
  ۴. در صورت نیاز، می‌توانید پرسش‌های خود را در Edmodo مطرح کنید.
- موفق باشید:

