Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский государственный университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина»

На правах рукописи

Мухтаров Амир Амангельдыевич

# Разработка моделей и методов оптимального размещения технологических объектов при проектировании беспроводных широкополосных сетей связи

Специальность 05.13.06 —
«Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, проффессор
Першин Олег Юрьевич

Москва — 2021

# Оглавление

## Введение

Обзор, введение в тему, обозначение места данной работы в мировых исследованиях и т. п., можно использовать ссылки на другие работы [**Gosele1999161**; **Lermontov**] (если их нет, то в автореферате автоматически пропадёт раздел «Список литературы»). Внимание! Ссылки на другие работы в разделе общей характеристики работы можно использовать только при использовании `biblatex` (из-за технических ограничений `bibtex8`. Это связано с тем, что одна и та же характеристика используются и в тексте диссертации, и в автореферате. В последнем, согласно ГОСТ, должен присутствовать список работ автора по теме диссертации, а `bibtex8` не умеет выводить в одном файле два списка литературы). При использовании `biblatex` возможно использование исключительно в автореферате подстрочных ссылок для других работ командой `\autocite`, а также цитирование собственных работ командой `\cite`. Для этого в файле `common/setup.tex` необходимо присвоить положительное значение счётчику `\setcounter{usefootcite}{1}`.

Для генерации содержимого титульного листа автореферата, диссертации и презентации используются данные из файла `common/data.tex`. Если, например, вы меняете название диссертации, то оно автоматически появится в итоговых файлах после очередного запуска LaTeX. Согласно ГОСТ 7.0.11-2011 «5.1.1 Титульный лист является первой страницей диссертации, служит источником информации, необходимой для обработки и поиска документа». Наличие логотипа организации на титульном листе упрощает обработку и поиск, для этого разметите логотип вашей организации в папке images в формате PDF (лучше найти его в векторном варианте, чтобы он хорошо смотрелся при печати) под именем `logo.pdf`. Настроить размер изображения с логотипом можно в соответствующих местах файлов `title.tex` отдельно для диссертации и автореферата. Если вам логотип не нужен, то просто удалите файл с логотипом.

Этот абзац появляется только в диссертации. Через проверку условия `\ifsynopsis`, задаваемого в основном файле документа (`dissertation.tex` для диссертации), можно сделать новую команду, обеспечивающую появление цитаты в диссертации, но не в автореферате.

**Цель диссертационного исследования** данной работы является …

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
2. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
3. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
4. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.

**Научная новизна**

1. Впервые ...
2. Впервые ...
3. Было выполнено оригинальное исследование ...

**Практическая значимость** ...

**Методы исследования.** ...

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Первое положение
2. Второе положение
3. Третье положение
4. Четвертое положение

В папке Documents можно ознакомиться с решением совета из Томского ГУ (в файле `Def_positions.pdf`), где обоснованно даются рекомендации по формулировкам защищаемых положений.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается ... Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: перечисление основных конференций, симпозиумов и т. п.

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие ...

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 0 печатных изданиях, 0 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

При использовании пакета `biblatex` будут подсчитаны все работы, добавленные в файл `biblio/author.bib`. Для правильного подсчёта работ в различных системах цитирования требуется использовать поля:

– `authorvak` если публикация индексирована ВАК,
– `authorscopus` если публикация индексирована Scopus,
– `authorwos` если публикация индексирована Web of Science,
– `authorconf` для докладов конференций,

– `authorpatent` для патентов,
– `authorprogram` для зарегистрированных программ для ЭВМ,
– `authorother` для других публикаций.

Для подсчёта используются счётчики:

– `citeauthorvak` для работ, индексируемых ВАК,
– `citeauthorscopus` для работ, индексируемых Scopus,
– `citeauthorwos` для работ, индексируемых Web of Science,
– `citeauthorvakscopuswos` для работ, индексируемых одной из трёх баз,
– `citeauthorscopuswos` для работ, индексируемых Scopus или Web of Science,
– `citeauthorconf` для докладов на конференциях,
– `citeauthorother` для остальных работ,
– `citeauthorpatent` для патентов,
– `citeauthorprogram` для зарегистрированных программ для ЭВМ,
– `citeauthor` для суммарного количества работ.

Для добавления в список публикаций автора работ, которые не были процитированы в автореферате, требуется их перечислить с использованием команды `\nocite` в `Synopsis/content.tex`.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, ?? глав, заключения и ?? приложен. Полный объём диссертации составляет ?? страниц, включая ?? рисунков и ?? таблиц. Список литературы содержит ?? наименований.

# Глава 1. Определение технологических параметров беспроводных широкополосных сетей, необходимых для решения задач размещения базовых станций

## 1.1 Расчет дальности действия связи

Перед тем как приступить к задаче ЦЛП необходимо рассчитать характеристики станции: радиус связи $R_{jq}$ и радиус покрытия $r_j$.

При развертывания сети необходимо обеспечить максимальное покрытие данного участка связь между шлюзами через систему размещенных базовых станций беспроводной широкополосной сети.

Для оценки производительности канала связи воспользуемся уравнением энергетического потенциала. Полное уравнение можно записать следующим образом:

$$P_{tr} - L_{tr} + G_{tr} - L_{fs} + G_{recv} - L_{recv} = SOM + P_{recv}, \tag{1.1}$$

где:

- $P_{tr}$ – мощность передатчика, дБм;
- $L_{tr}$ – потери сигнала на антенном кабеле и разъемах передающего тракта, дБ;
- $G_{tr}$ – усиление антенны передатчика, дБ;
- $L_{fs}$ – потери в свободном пространстве, дБ;
- $G_{recv}$ – усиление антенны приемника, дБ;
- $L_{recv}$ – потери сигнала на антенном кабеле и разъемах приемного тракта, дБ;
- $SOM$ – запас на замирание сигнала, дБ;
- $P_{recv}$ – чувствительность приемника, дБм.

Мощность принимаемой антенны рассчитывается из уравнения передачи Фрииса:

$$\frac{P_{recv}}{P_{tr}} = G_{tr}G_{recv}\left(\frac{c}{4\pi Rf}\right)^2,$$

где $c$ – скорость света, $f$ – частота, $R$ рассточние между приемной и передающей антенной.

The Free Space Path Loss ($FSPL$) equation defines the propagation signal loss between two antennas through free space (air):

Уравнение потерь в свободном пространстве (Free Space Path Loss, $FSPL$) определяет потерю сигнала при распространении между двумя антеннами в свободном пространстве (в воздухе):

$$FSPL = \left(\frac{4\pi R f}{c}\right)^2. \tag{1.2}$$

Формула (**??**), выраженная в децибеллах будет выражаться как

$$L_{fs} = 20 \lg F + 20 \lg R + K, \tag{1.3}$$

где $F$ – центральная частота, на котором работает канал связи, $R$ – рассточние между приемной и передающей антенной и $K$ – константа.

Константа $K$ зависит от размерностей частоты и расстояния:

– для чистоты, выраженной в ГГц, и рассчтояния, выраженная в км, константа $K$ равна 92.45;
– для чистоты, выраженной в МГц, и рассчтояния, выраженная в км, константа $K$ равна 32.4;
– для чистоты, выраженной в МГц, и рассчтояния, выраженная в м, константа $K$ равна -27.55.

Потерия $L_{fs}$ выразим из формулы (**??**) как:

$$L_{fs} = P_{tr} - L_{tr} + G_{tr} + G_{recv} - L_{recv} - SOM - P_{recv}. \tag{1.4}$$

Радиус связи получаем из уравнений (**??**) и (**??**):

$$R = 10^{\left(\frac{L_{fs} - 20 \lg F - K}{20}\right)}. \tag{1.5}$$

Используя формулу **??** и **??**, мы можем расчитать теоритическое максимальную дальность связи $R_{jq}$ между базовыми станциями и радиусом покрытия $r_j$ с предположением об отсутствии препятствий, отражений, влияния контуров местности и т. д. Это допущение приемлемо для нашего случая с открытой местностью.

Для расчета дальности связи $R_{jq}$ (Рис. **??**), базовые станции $s_j$ и $s_q$ будут рассматриваться как станции *передатчик* и *приемник*, соответственно. Будем

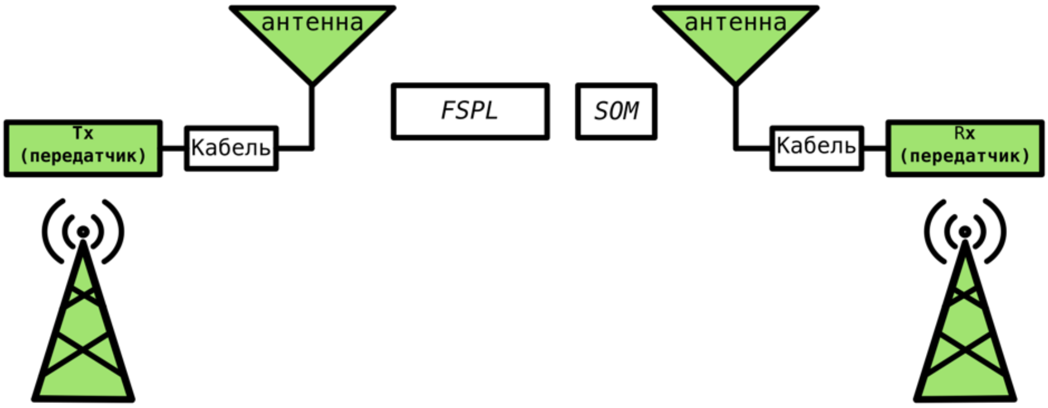


Рисунок 1.1 — Соеденинение между станциями.

считать, что станции обрудованы направленными антеннами с усилениями $G_{tr}^{R}$ и $G_{recv}^{R}$.

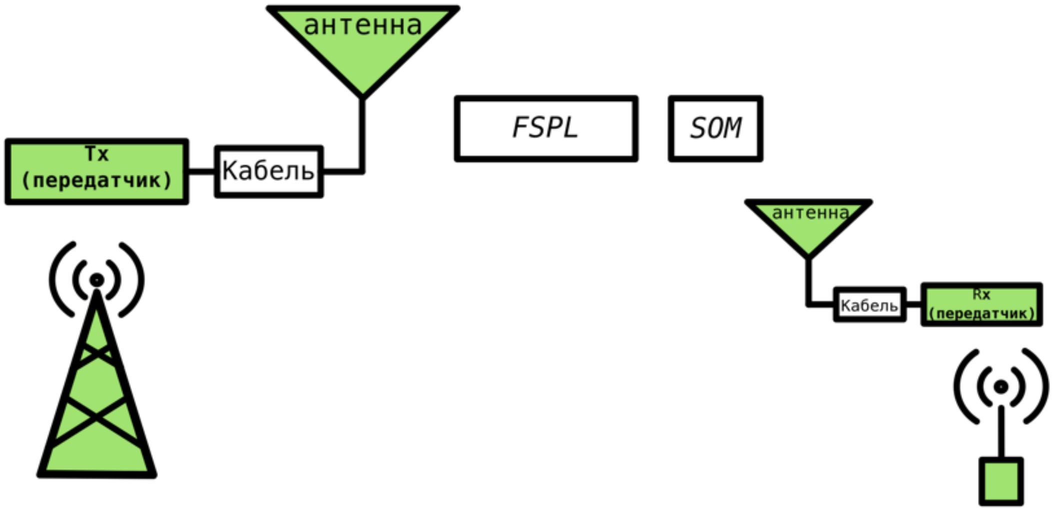


Рисунок 1.2 — Покрытие станции

Каждая базовая станция оснащена всенаправленной антенной с заданным усилением антенны $G_{tr}^{r}$. Данная антенн необходимо для покрытия заданной области.

Each base station is equipped with an omnidirectional antenna with given gain antenna $G_{tr}^{r}$. A station uses this antenna to cover a given area.

При вычислении радиуса покрытия $r_j$ (Рис. **??**) базовая станция будем считать *передатчиком* а пользовательское устройство *приемником*.

## 1.2 Расчет межконцевой задержки

Одной из основных характеристик проектируемой сети является ее межконцевая задержка. Рассмотрим беспроводную сеть как сеть массового обслуживания (СеМО) с кросс-трафиком и с узлами $M/M/1$. По теореме Бурке [**Burke1956**] на выходе узла $M/M/1$, а значит на входе каждой последующей фазы тоже пуассоновский поток. Интенсивность на выходе каждой фазы равна суммарной интенсивности всех входящих потоков с интенсивностями $\lambda$.

По формуле Литтла [**Little1961**] можно рассчитать время задержки на фазе. Интенсивность времени обслуживания рассчитывается по формуле:

$$\mu_j = p_j/w,$$

где: $p_j$ - пропускная спобоность $j$-ой станции, Мбит/с; $w$ - средний размер пакета, Мбит.

Для каждой станции коэффициент загрузки равен:

$$\rho_j = \frac{\sum \lambda}{\mu_j} = \frac{q \cdot \lambda}{\mu_j} < 1,$$

где $q$ – число входящих потоков. Условие $\rho_j < 1$ является необходимым и достаточным условием существования стационарного режима функционирования СеМО.

Тогда среднее время задержки по времени на каждой станции:

$$\overline{T_j} = \frac{\rho_j}{1-\rho_j} \cdot \frac{1}{q \cdot \lambda}.$$

Тогда межконцевая задержки в сети равна

$$T^{e2e} = \sum \overline{T_j}. \tag{1.6}$$

## 1.3 Выводы по главе ??

# Глава 2. Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка

## 2.1 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде задачи целлочисленного линейного программирования

### 2.1.1 Постановка задачи

Проблема формулируется следующим образом. Для контроля над заданным линейным участком необходимо разместить базовые приемопередающие станции (далее называемые станциями) таким образом, чтобы максимизировать покрытие с ограничениями на суммарнуб стоимость размещенных станций. Важно обеспечить связи любой станции со шлюзами на концах участка через систему размещенных станций.

Задано множество станций $S = \{s_j\}$. Каждой станции приписаны параметры $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}, c_j\}$, $j = \overline{1,m}; q = \overline{1,m}; q \neq j$. Здесь $r_j$ – радиус покрытия станции, $R_{jq}$ – это радиус связи между станцями $s_j$ и $s_q$, и $c_j$ – это стоимость.

Задан линейный участок длиной $L$ с концами в точка $a_0$ и $a_{n+1}$. Внутри отрезка $[a_0, a_{n+1}]$ задано конечное множество точек $A = \{a_i\}, i = \overline{1,n}$; эти точки соответствуют набору свободных мест, где могут быть размещены станции. Каждая точка $a_i$ определяется своей одномерной координатой $l_i$.

Заданы станции специального вида $s_{m+1}$ – шлюзы. Данные шлюзы размещены на концах $a_0$ и $a_{n+1}$ данного линейного участка . Для данных станций параметр радиуса покрытия $r_{m+1} = 0$. Радиус связи и стоимость не заданы.

Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать покрытие с условием ограничения на суммарное стоиомсть $C$.

### 2.1.2 Модель ЦЛП

После оценки максимальных радиуса связи между станциями $R_{jq}$, максимального радиуса покрытия $r_j$, можно перейти, непосредственно, к задаче размещения станций в виде модели целочисленного линейного программирования.

Пусть $y_i^+$ и $y_i^-$ , $i = \overline{0,n+1}$ определяют охват покрытия (справа и слева, соответственно) станций, покрывающих точку $a_i$ (Рис. **??**). Параметры $y_i^+$ и $y_i^-$ могут принимать только неотрицательные целые значения.

Величины покрытия для шлюзов $y_0^+, y_0^-, y_{n+1}^+, y_{n+1}^-$ равны 0.

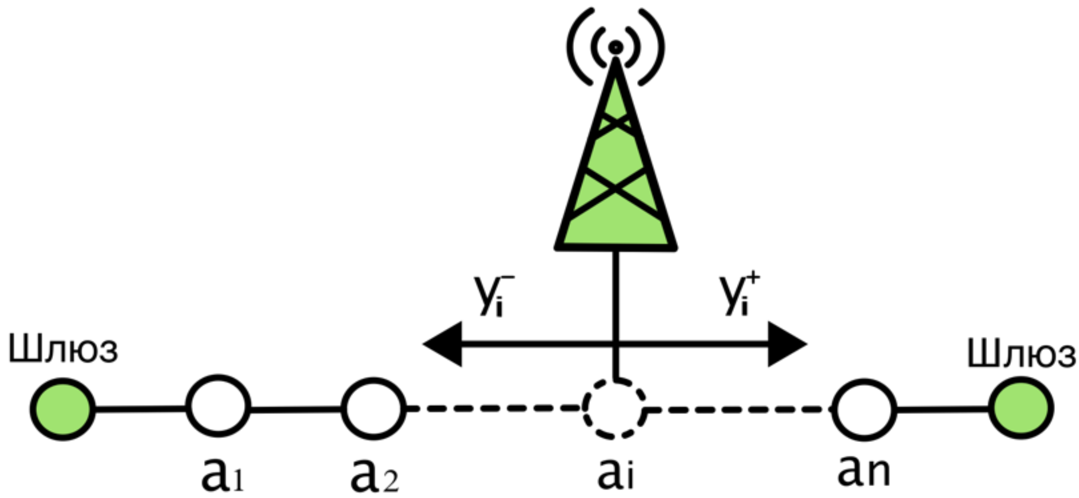


Рисунок 2.1 — Охват покрытия станции

Целевая функция будет представлена как:

$$f = \sum_{i=1}^{n} (y_i^- + y_i^+) \rightarrow max \tag{2.1}$$

Также введем бинарные переменные $x_{ij}$. Тогда $x_{ij} = 1$, если станция $s_j$, размещенная на точке $a_i$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$.

Введем двоичные переменные $e_i$. Тогда $e_i = 1$, если какая-либо станция находится в точке $a_i$, и $e_i = 0$ в противном случае; $i = \overline{1,n}$. Для точек размещения шлюзов $a_0$ и $a_{n+1}$ переменные $e_0 = 1$ и $e_{n+1} = 1$, соответственно.

Сформулируем следующую систему ограничений задачи.

По определению **??**:

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Каждая станция должна быть размещена только в одной точке. **??**:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.3}$$

Значения покрытий не превышают радиус покрытия станции, размещенной в точке $a_i$, и равны 0, если в точке $a_i$ нет станции **????**:

$$y_i^+ \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1,n}; \tag{2.4}$$

$$y_i^- \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Общая область покрытия между любыми двумя точками $a_i$ и $a_k$, где расположены станции, не может превышать расстояние между этими точками **????**.

$$y_i^+ + y_k^- \leqslant \frac{l_k - l_i}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{i+1,n+1}; \tag{2.6}$$

$$y_i^- + y_k^+ \leqslant \frac{l_i - l_k}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{i-1,0}, \tag{2.7}$$

где $l_k$ и $l_i$ - координаты точек $a_i$ и $a_k$, соответственно. Это условие исключает влияние пересечений покрытий станций при вычислении общего значения покрытия между станциями (Рис. **??**).

Согласно условиям задачи, станция, расположенная в $a_i$, должна быть связана хотя бы с одной станцией слева и одной станцией справа, включая станции на конечных точках $a_0$ и $a_{n+1}$.

Введем бинарные переменные $z_{ijkq}, i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}; k = \overline{1,n}, k \neq i; q = \overline{1,m}, q \neq j$.

Переменная $z_{ijkq} = 1$, если в точке $a_i$ размещена станция $s_j$ и данная станция связана со станцией $s_q$, размещенная в точке $a_k$; и $z_{ijkq} = 0$ в противном случае.

Переменная $z_{ij0(m+1)} = 1$, если станция $s_j$, размещенная в точке $a_i$, связана со шлюзом $s_{m+1}$ в точке $a_0$; $z_{ij0(m+1)} = 0$ в противном случае.

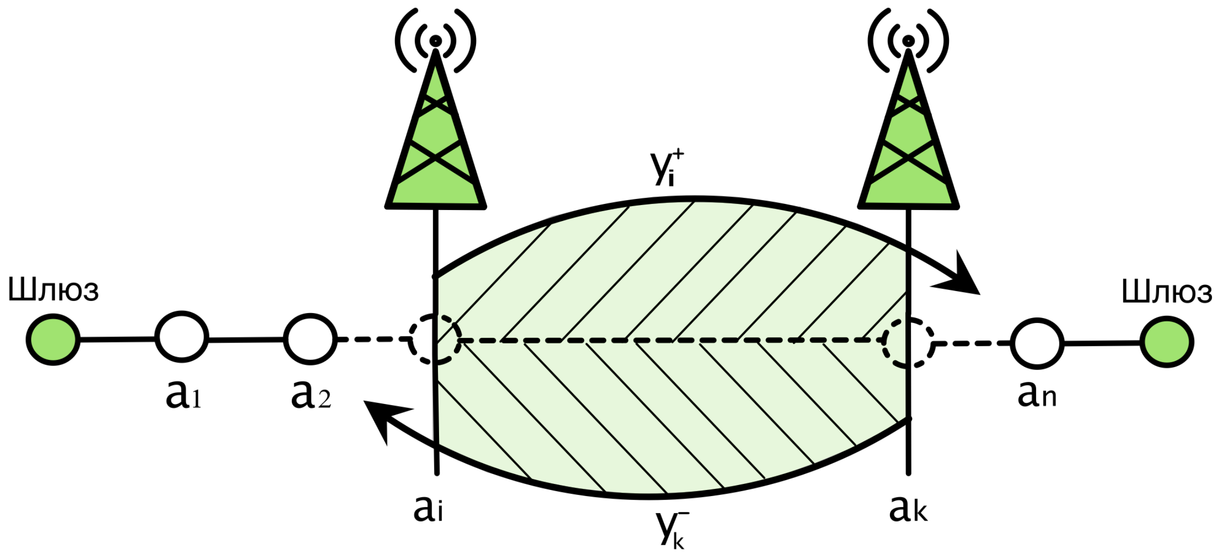


Рисунок 2.2 — Область покрытия между любыми двумя точками

Переменная $z_{ij(n+1)(m+1)} = 1$, если здесь находится станция $s_j$ в точке $a_i$ и она связана со шлюзом $s_{m+1}$ в точке $a_{n+1}$; $z_{ij0(m+1)} = 0$ в противном случае.

Станции должны быть размещены в обеих точках $a_i$ и $a_k$, **????**:

$$z_{ijkq} \leqslant e_i, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,n}, k \neq i; \quad q = \overline{1,m}, q \neq j; \tag{2.8}$$

$$z_{ijkq} \leqslant e_k, \quad k = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n}, i \neq k; \quad q = \overline{1,m}, q \neq j. \tag{2.9}$$

Необходимо, чтобы станция $s_j$ в точке $a_i$ была связана с любой станцией, расположенной в точке $a_k$, справа от $a_i$ $(k > i)$ или с правым шлюзом $s_{m+1}$ **????**.

$$\sum_{k=i+1}^{n} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{m} z_{ijkq} + z_{ij(n+1)(m+1)} = x_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.10}$$

Станция $s_j$, размещенная в $a_n$, справа связана толко со шлюзом $s_{m+1}$ на месте $a_{n+1}$ **??**.

$$z_{nj(n+1)(m+1)} = x_{nj} \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.11}$$

Также станция должна быть связана с любой станцией, расположенной в точке $a_k$ слева от точки $a_i$ $(k < i)$ или с левым шлюзом $s_{m+1}$ **????**.

$$z_{1j0(m+1)} = x_{ij}, \quad j = \overline{1,m}; \tag{2.12}$$

Станция $s_j$, размещенная в точке $a_1$ слева может быть связана только со шлюзом $s_{m+1}$, расположенном в точке $a_0$ **??**.

$$z_{ij0(m+1)} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\substack{q=1\\q\neq j}} z_{ijkq} = x_{ij}, \quad i = \overline{2,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.13}$$

Необходимо, чтобы станция $s_q$ в точке $a_k$ была связана с любой станцией справа, расположенной в точке $a_i$ **??**.

$$\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\j\neq q}}^{m} z_{ijkq} = x_{kq}, \quad k = \overline{1,n-1}, \quad q = \overline{1,m}; \tag{2.14}$$

Кроме того, станция $s_q$ в точке $a_k$ подключена к любой станции слева, расположенной в точке $a_i$ **??**.

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1\\j\neq q}}^{m} z_{ijkq} = x_{kq}, \quad k = \overline{2,n}, \quad q = \overline{1,m}; \tag{2.15}$$

Неравенства **????** и равенства **????????????** обеспечивают условие симметрии связи между базовыми станциями, расположенными в точках $a_i$ и $a_k$, $\forall i, k$ (Рис.**??**).

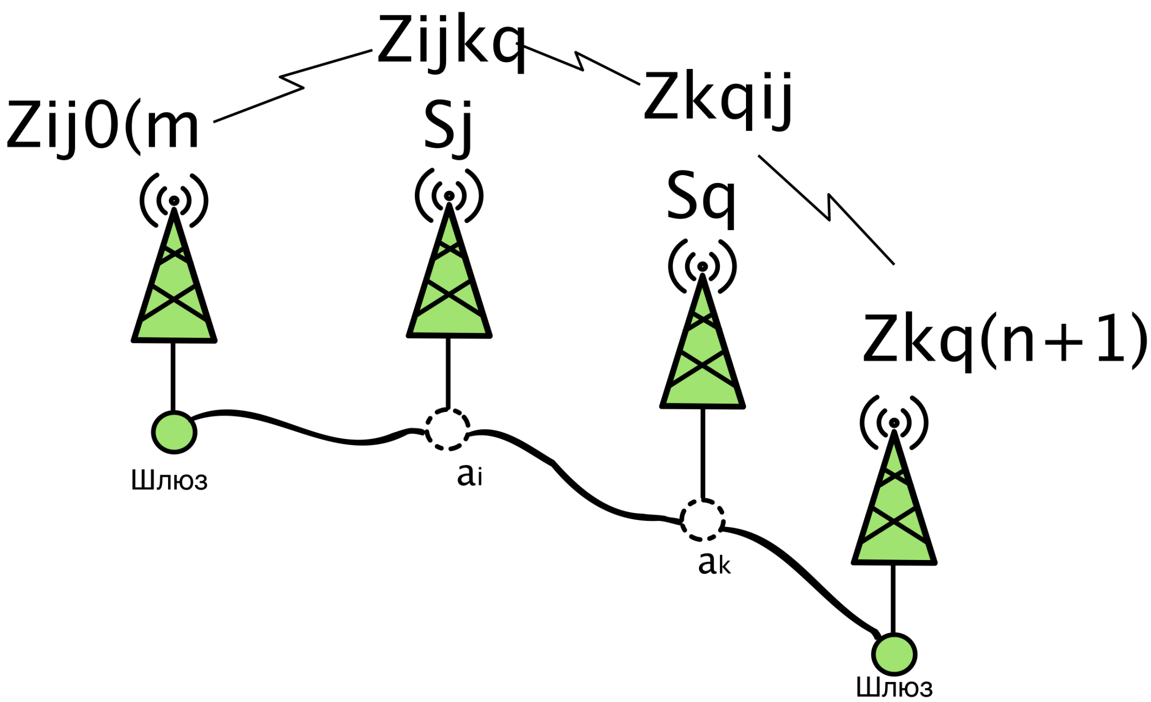


Рисунок 2.3 — Связь между базовыми станциями

Если станции $s_j$ и $s_q$ связаны, то максимальноый радиус связи размещенных станций должен быть не меньше расстояния между точками $a_i$ и $a_k$, где расположены станции $s_i$ и $s_q$ (Рис. **??**). Формально это можно записать как **????**.

$\forall i = \overline{1,n}$:

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_i - a_k)) \geqslant 0, \quad k = \overline{0,i-1}; \quad j = \overline{1,m}; \quad q = \overline{1,m}, q \neq j; \qquad (2.16)$$

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_k - a_i)) \geqslant 0, \quad k = \overline{i+1,n+1}; \quad j = \overline{1,m}; \quad q = \overline{1,m}, q \neq j. \quad (2.17)$$

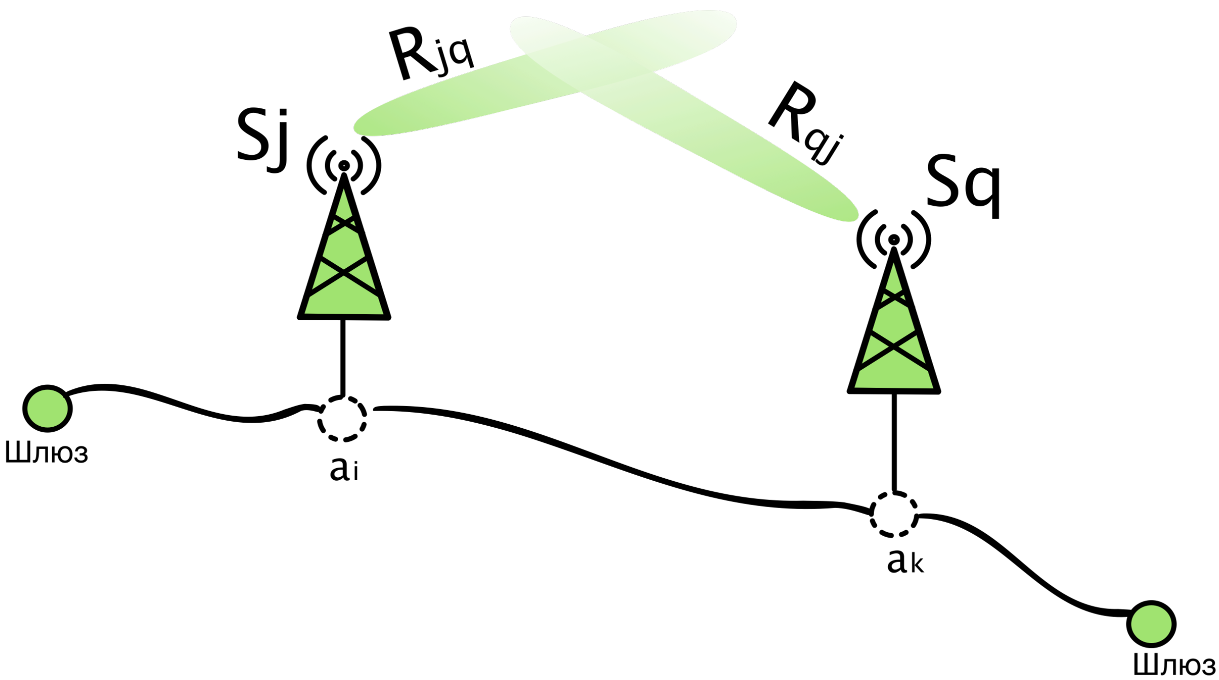


Рисунок 2.4 — Обеспечение связи с соседней станцией

И для бюджетного ограничения стоимости $C$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot c_j \leqslant C. \qquad (2.18)$$

Числовой пример решения полученной матемаческой модели задачи ЦЛП представлен в приложении **??**. В приложении также представлена методика расчета дальности связи для обеспечения коммуникации между базовыми станциями и охвата зоны покрытия.

## 2.2 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме

Эффективным способом повышения технико-экономических показателей при проектировании БШС является оптимизация топологии сети, а именно решение задачи выбора оптимального набора станций из заданного избыточного множества и определение мест их размещения вдоль линейной контролируемой территории. Основным результатом работы, представленной в этой главе, является разработка итерационного метода выбора оптимальной топологии сети в процессе комплексного проектирования БШС. Принципиальной особенностью предлагаемого метода, повышающей его эффективность, является то, что для рассмотрения на этапе моделирования предлагается не одно решения, а последовательности лучших решений задачи оптимизации топологии сети. Это позволяет с помощью разработанной итерационной процедуры выбирать на этапе моделирования лучшее решение среди тех решений по топологии, которые удовлетворяют требуемым характеристикам проектируемой БШС.

### 2.2.1 Постановка задачи и ее формулировка в экстремальной комбинаторной форме

Пусть задано множество станций $S = \{s_j\}$ с параметрами $s_j = \{r_j,\{R_{jq}\},\mu_j, c_j\},j = 1,...,m; q = 1,...,m; j \neq q$. Здесь $r_j$ – максимальный радиус покрытия станции, $\{R_{jq}\}$ – множество максимальных радиусов связи между $j$-ой и $q$-ой базовой станции, $\mu_j$ - интенсивность времени обслуживания и $c_j$ – стоимость станции.

Задана максимальная допустимая стоимость размещенных станций $C$.

Задан отрезок $\alpha$ длиной $L$ с концами в точках $a_0$ и $a_{n+1}$. Внутри отрезка $\alpha = [a_0, a_{n+1}]$ задано множество возможных точек размещения станций множества $A = \{a_i\},i = 1,...,n$ с координатами $l_i$.Точка $a_0$ имеет координату $l_0 = 0$, точка $a_{n+1}$ имеет координату $l_{n+1} = L$. На концах отрезка, в вершинах $a_0$ и $a_{n+1}$, стоят станции специального вида $s_0$ и $s_{m+1}$, соответственно, для которых радиусы покрытия, пропускные способности и стоимости не задаются. Радиусы связи задаются как $R_{0j}$ и $R_{(m+1)j}$, соответственно. Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать размер контролируемой ими территории (покрытие) отрезка $L$ при выполнении требования наличия связи каждой станции со станциями на концах отрезка (шлюзами) через систему размещенных станций при выполнении ограничений на время межконцевой задержки $T$ и суммарную стоимость размещенных станций $C$. Сформулируем задачу в виде экстремальной задачи на конечном множестве.

*Допустимой расстановкой станций* назовем такой возрастающий по величине координат $l_i$ набор пар $P = \{a_i, s_j\}$,$a_i \in A$,$i \neq 0$,$i \neq n+1$; $s_j \in S$, для которого выполняются требования:

1. для каждой пары $(a_i,s_j)$:
   а) слева: либо найдется такая пара $(a_k,s_q)$, что, $l_i - l_k \leqslant R_{jq}$ и $l_i - l_k \leqslant R_{qj}$, либо $l_i - l_0 \leqslant R_{j0}$ и $l_i - l_0 \leqslant R_{0j}$;
   б) справа: либо найдется такая пара $(a_t,s_g)$, что, $l_t - l_i \leqslant R_{jq}$ и $l_t - l_i \leqslant R_{qj}$, либо $l_{n+1} - l_i \leqslant R_{j(m+1)}$ и $l_{n+1} - l_i \leqslant R_{(m+1)j}$.

   Данное требование гарантирует, что любая станция может быть связана со станциями на концах отрезка либо через промежуточные станции, либо непосредственно;
2. в одной точке стоит не более одной станции;
3. сумма задержек по всем размещенным станциям меньше заданной величины $T$ – средней межконцевой задержки по времени по всей системе станций:
   $$\sum_{j \in S_\sigma} \overline{T_j} \leqslant T,$$
   где $S_\sigma$ – множество размещенных станций, $\overline{T_j}$ – среднее время задержки на станции. Расчет задержек описан в параграфе **??**
4. суммарная стоимость размещенных станций меньше заданного бюджетного ограничения $C$.

Каждой допустимой расстановке станций $P$ соответствует величина покрытия $z(P)$, определяемая как суммарная длина всех таких участков $\tau$,$\tau \subset \alpha$, что каждая точка этих участков попадает в зону покрытия, по крайней мере, одной станции, входящей в набор пар $P$.

Для удобства описании в дальнейшем алгоритмов введем понятие «недопокрытия» отрезка $\alpha$:

$$f(P) = L - z(P)$$

Пусть $G$ – множество всех допустимых расстановок $P$. Тогда мы можем сформулировать нашу задачу в следующей комбинаторной форме экстремальной задачи на конечном множестве.

**Задача 1.**

Требуется найти такую допустимую расстановку $P^*$, что

$$P^* = \operatorname*{argmin}_{P \in G} f(P) \tag{2.19}$$

Обозначим через $\Gamma$ все множество вариантов размещения станций (не обязательно допустимых) из множества $S$ на заданном множестве возможных мест их размещения.

### 2.2.2 Дерево ветвлений для перебора элементов в множестве $\Gamma$

Опишем процедуру построения бинарного дерева поиска (дерева ветвлений) для полного перебора без повторений всех элементов множества $\Gamma$. Данная процедура будет использована в дальнейшем при построении дерева поиска в алгоритме МВиГ решения **задачи 1**.

В дальнейшем будем предполагать, что в множестве $S$ станции упорядочены по не убыванию радиусов покрытия. Описываемая процедура использует известный прием разбиения множества $G$ на подмножества с использованием некоторого параметра. Процесс формирования и последовательность исследования подмножеств обычно представляется с помощью дерева поиска, представляющего собой ориентированное от корня «дерева ветвлений», где каждому подмножеству соответствует вершина на дереве. Множеству $\Gamma$ соответствует корневая вершина.

**Параметр для разбиения множеств на подмножества** ***Процедура 1.***

Пусть $G_0$, где нижний индекс – номер итерации, исходное множество $\Gamma$. На каждой итерации, начиная с итерации $\nu = 0$, разбиваем текущее подмножество $G_\nu$ на два подмножества $G_\nu^1$ и $G_\nu^2$. При этом множество $G_\nu$ обычно называется «материнским», а множества $G_\nu^1$ и $G_\nu^2$ - «потомками» множества $G_\nu$ или дочерними узлами.

В качестве параметра разбиения воспользуемся переменной $\pi_{ij}$, принимающей два значения 0 и 1:

– $\pi_{ij} = 1$, если наложено условие, что на месте $a_i$ расположена станция $s_j$;

– $\pi_{ij} = 0$, если наложено условие, что на месте $a_i$ станция $s_j$ располагаться не будет.

В дальнейшем будем считать, что для множества $G_\nu^1$ задано условие $\pi_{ij} = 1$, а для множества $G_\nu^2$ задано условие $\pi_{ij} = 0$.

Очевидно, что

$$G_\nu^1 \cup G_\nu^2 = G_\nu; \tag{2.20}$$

$$G_\nu^1 \cap G_\nu^2 = \varnothing. \tag{2.21}$$

Выбор переменной для разбиения на $\nu$-ой итерации

На этапе разбиения любого множества $G_\nu$ все множество переменных $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ можно разделить на три подмножества: множество $\Pi^+$ – «фиксированные» переменные, для которых $\pi_{ij} = 1$, множество $\Pi^-$ – «запрещенные» переменные, для которых $\pi_{ij} = 0$, и множество $\Pi^f$ – «свободные» переменные, для которых значения на данной итерации еще не заданы.

Правило выбора переменной для разбиения множества $G_\nu$. Для разбиения множества $G_\nu$ на данной итерации выбирается из множества $\Pi^f$ переменная с наименьшим индексом $j$ среди всех переменных с наименьшим индексом $i$. Таким образом сначала определяется незанятое место размещения $a_i$ с наименьшим номером (индексом $i$) и на нем размещается еще не размещенная станция $s_j$ с наименьшим номером (индексом $j$).

**Движение по дереву ветвлений** После разбиения очередного подмножества $G_\nu$ два подмножества $G_\nu^1$ и $G_\nu^2$, последним на дереве ветвлений присваиваются порядковые индексы $G_{\nu+1}$ и $G_{\nu+2}$, соответственно. При формировании дерева ветвлений различаются два типа шагов: «прямой» шаг и «обратный» шаг. Прямой шаг – это движение «в глубину» по той же ветви дерева, реализующее очередное разбиение множества $G_\nu$ на два потомка, и обратный шаг, реализующий переход от множества $G_\nu$ к одному из ранее сформированных подмножеств. Обратный шаг делается в том случае, когда либо получено множество $G_\nu$, состоящее из единственного элемента, либо множество $G_\nu$ при данном наборе значений переменных $\pi_{ij}$, выделяющих данное подмножество $G_\nu$ из множества $G_0$, пусто. В этих случаях соответствующая вершина дерева называется «закрытой».

Для движения по дереву будем использовать правило LIFO. На основании этого правила прямые шаги будут выполняться до тех пор, пока не будет получена закрытая вершина. На дереве ветвлений это соответствует продолжению движения по той же ветви дерева. При этом из двух множеств $G_\nu^1$ и $G_\nu^2$ первым будет исследоваться на возможность закрытия соответствующей вершины множество $G_\nu^1$. Если вершина в результате проведенного исследования не будет закрыта, то из неё будет продолжено дальнейшее движение по той же ветви (выполнение прямого шага). Если вершина будет закрыта, то будет выполнен обратный шаг: для дальнейшего рассмотрения и продолжения движения будет выбрана незакрытая вершина с наибольшим порядковым номером $\nu$ среди всех висячих вершин дерева (последняя сформированная вершина из нерассмотренных). Процедура будет завершена, когда все вершины дерева будут закрыты.

Заметим, что выполнение условий **????** гарантирует, что в результате завершения работы ***процедуры 1*** будут просмотрены все элементы множества $\Gamma$ без повторений. Эти же условия определяют фундаментальное свойство дерева ветвлений: на каждой итерации объединение множеств $G_\nu$ всех висячих вершин дерева дает исходное множество $G_0$ корневой вершины.

**Алгоритм метода ветвей и границ** Для построения алгоритма МВиГ для решения **задачи 1** с использованием ***процедуры 1*** для построения дерева ветвлений нам достаточно разработать методы исследования вершин дерева на возможность их закрытия. В соответствии с техникой МВиГ закрытие вершины в результате исследования, соответствующего ей множества $G_\nu$ возможно в трех случаях.

***Случай 1.*** Множество $G_\nu$ – пусто, т.е. доказано, что в множестве $G_\nu$ при данном наборе фиксированных и запрещенных переменных $\pi_{ij}$ нет ни одной допустимой расстановки $P$.

***Случай 2.*** Доказано, что в множестве $G_\nu$ не может быть допустимой расстановки P с меньшим значением целевой функции (1), чем у лучшей расстановки $\widehat{P}$ из уже найденных. Значение функции $f(\widehat{P})$ называется «рекордом», а расстановка $\widehat{P}$ – «рекордным решением». В качестве начального рекорда принимается число заведомо большое искомого оптимального решения, например, $L$ – длина всего отрезка.

***Случай 3.*** Найдено оптимальное решение **задачи 1** на множестве $G_\nu$. Прежде чем рассмотреть эти три случая, запишем важное свойство любого множеств $G_\nu$, являющееся следствием принятого правила выбора свободной переменной для разбиения очередного множества $G_\nu$ при прямом шаге.

***Свойство 1.*** Пусть для исследуемого множества $G_\nu, \nu > 0$, точка $a_k$ – это одно любое из мест, на которых уже размещены станция из множества $S$ в соответствии с набором фиксированных и запрещенных переменных $\pi_{ij}$, выделяющим данное множество из множества $G_0$. Тогда для всех мест «слева» от $a_k$, т.е. точек $a_i$, $i < k$, размещение станций уже определенно (при этом некоторые места могут быть пустыми). Перейдем непосредственно к исследованию ***случаев 1 – 3***.

***Случай 1.***

Проверка текущего множества $G_\nu$ на пустоту состоит в установлении факта невозможности выполнения требований 1) – 4) введенных ранее при определении допустимой расстановки.

Рассмотрим проверку условия выполнения требования 1) для множества $G_\nu, \nu > 0$.

Пусть множество $G_\nu$ образовано разбиением материнского множества при помощи переменной $\pi_{kt} = 1$. Проверяем, что каждый из радиусов $R_{th}$ и $R_{ht}$, где $h$ – индекс станции, размещенной на ближайшей слева к точке $a_k$ точке $a_d$ больше расстояния $l_k - l_d$. Если ближайшая слева точка – это точка $a_0$ (левый конец отрезка $\alpha$), то делается проверка, для радиуса $R_{t0}$ и $R_{0t}$.

Если данное условие не выполняется, то множество $G_\nu$ недопустимо, соответствующая вершина закрывается и делается шаг обратного хода в соответствии с ***процедурой 1***.

Если множество $G_\nu$ образовано разбиением материнского множества при помощи переменной $\pi_{kt} = 0$ и $a_d$ – точка с наибольшим индексом, среди точек, на которых уже размещены станции (точки $a_0$, если размещенных станций нет), то надо проверить, что среди нераспределенных станций, без учета станции $s_t$, есть такая станция $s_q$ что расстояние между точками $a_k$ и $a_d$ не больше, чем $R_{qh}$ и $R_{hq}$. Если проверка отрицательна, то множество $G_\nu$ – пусто, соответствующая этому множеству на дереве поиска вершина должна быть закрыта и выполняется шаг обратного хода в соответствии с ***процедурой 1***.

Требование 2) выполняется соответствующим выбором очередной станции для размещения, требования 3) и 4) выполняются непосредственным суммированием соответствующих параметров у размещенных станций.

***Случай 2.*** Построим оценку величины «недопокрытия» для множества $G_\nu$, полученного из материнского множества добавлением условия $\pi_{kt} = 1$. Частичным «недопокрытием» назовем величину $\Delta(k,d,p,t)$, которая вычисляется по формуле:

$$\Delta(k,d,p,t) = max\{(a_k - a_d) - (r_p + r_t)\,, 0\}. \tag{2.22}$$

Частичное «недопокрытие» **??** определяется для любых двух точек $a_d$ и $a_k, k > d$, на которых расположены станции $s_p$ и $s_t$ при условии, что между этими точками нет других станций. Очевидно, что для любой расстановки $P$ «недопокрытие» $f(P)$ вычисляется как сумма всех «недопокрытий» $\Delta(k,d,p,t)$ между местами размещения станций, включая концы отрезка $\alpha$, на которых стоят станции особого типа $s_0$ и $s_{m+1}$.

$$W(G_\nu) \leqslant f(P), P \in G_\nu.$$

Если $W(G_\nu) \geqslant f(\widehat{P})$, то множество $G_\nu$ не может содержать расстановки лучше уже найденной расстановки $\widehat{P}$ соответствующая множеству $G_\nu$ вершина на дереве поиска должна быть закрыта и далее выполняется шаг обратного хода в соответствии с ***процедурой 1***.

Построим оценку «недопокрытия» для множества $G_\nu$, полученного из материнского множества добавлением условия $\pi_{kt} = 1$. Оценку будем искать в в иде суммы

$$W\left(G_\nu\right) = w_1 + w_2.$$

Величина $w_1\left(G_\nu\right)$ вычисляется как сумма все частичных «недопокрытий» слева от вершины $a_k$ и величины радиуса покрытия, размещаемой станций $r_t$. Оценку $w_2\left(G_\nu\right)$ вычислим «для недопокрытия» справа на части $\beta$ до конца отрезка $\alpha$ (точки $a_{n+1}$). Данную оценку получим релаксацией условий, определяющих допустимую расстановку станций на участке $\beta$. Найдем такое подмножество $S_\beta$ множества станций $S$, состоящее из еще не размещенных станций и дающее минимальное «недопокрытие» на участке $\beta$ при выполнении только условий 2) – 4). Для этого сформулируем следующую задачу булевого программирования.

***Задача 2.***

$$z = |\beta| - \sum_{x_j \in S_\beta} r_j x_j \to min.$$

при условии:

$$\sum_{x_j \in S_\beta} c_j x_j \leqslant C, \tag{2.23}$$

$$\sum_{x_j \in S_\beta} x_j \leqslant m, \tag{2.24}$$

$$x_j \in \{0, 1\},$$

где $|\beta|$ – длина отрезка отрезка $\beta$, $m$ – число свободных мест для размещения станций на отрезке $\beta$.

Очевидно, что эффективность использования оценки в методе ветвей и границ определяется точностью оценки и временем ее вычисления. ***Задача 2*** – это задача ЦЛП, являющаяся труднорешаемой [**Gari**]. На основании ***задачи 2*** можно получить две оценки менее точные, но имеющие более эффективные методы решения. Заметим, что при снятии ограничения **??** или **??** ***задача 2*** представляет собой целочисленную задачу о ранце с эффективным псевдополиномиальным алгоритмом решения [**Gari**]. При этом с точки зрения точности оценки, более перспективным представляется снятие ограничения **??**, так как на практике, обычно, число возможных мест размещения станций существенно меньше числа размещенных станций, полученного в результате решения задачи. Назовем задачу, полученную снятием ограничения **??**, ***задачей 3***.

***Задачу 2*** при снятии условия целочисленности на переменные назовем ***задачей 4***. ***Задача 4*** есть задача линейного программирования. Очевидно, что ***задачи 3*** и ***задачи 4***, являясь оценками целевой функции решения ***задачи 2***, могут служить оценками $w_2(G_\nu)$. Результаты численного эксперимента с различными оценками вынесены в приложение 2.

Если множество $G_\nu$ получено из материнского добавлением условия $\pi_{kt} = 0$, то оценка $W(G_\nu)$ равна оценке материнского множества.

В приложении 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающего время решения ***задач 2, 3, 4*** и относительную точность ***задачи 3 и 4*** по отношению к ***задаче 2***.

Перейдем к рассмотрению ***случая 3***. Рассматривается только для множеств $G_\nu$, состоящих из единственной расстановки $P$, для которой «недопокрытие» $f(P)$ вычисляется как сумма всех недопокрытий $\Delta(k,d,p,t)$ между местами, где размещены станций, включая концы отрезка $\alpha$, на которых стоят станции $s_0$ и $s_{m+1}$.

Если для найденной расстановки $P$ выполняются условия 1) – 4), которые для единственной расстановки легко проверяются, и

$$f(P) < f(\widehat{P}), \tag{2.25}$$

то $f(P)$ принимается за новый рекорд $f(\widehat{P})$, расстановка $P$ становиться новым рекордным решением $\widehat{P}$ и выполняется шаг обратного хода в соответствии с ***Процедурой 1***, если неравенство **??** не выполняется, то рекорд остается прежним и выполняется шаг обратного хода.

Работа алгоритма МВиГ заканчивается, когда все вершины дерева поиска закрыты, при этом решение задачи:

$$P^* = \widehat{P}, f(P^*) = f(\widehat{P}).$$

### 2.2.3 Построения последовательности топологий для итерационной процедуры моделирования БШС

В результате проектирования БШС надо найти ее оптимальную топологию среди всех топологий, для которых будут выполняться все требования к показателям, исследуемым и рассчитываемым на этапе моделировании сети. Для решения этой задачи воспользуемся идеей метода построения последовательности планов [**Emelichev**].

Рассмотрим **задачу 1.**

Требуется найти такую допустимую расстановку $P^*$, что

$$f(P^*) = min\{f(P), P \in G\}.$$

Построим для этой задачи последовательность $\Gamma = P^1, P^2, ..., P^k$ допустимых расстановок (решений) множества $G$ для заданного $k$, где

$$\begin{aligned}
&f(P^1) = f(P^*),\\
&f(P^2) = extr\{f(P), P \in G\ P^1\},\\
&\quad\ ...\\
&f(P^k) = extr\{f(P), P \in G\ P^1 \cup P^2 \cup ...P^k\},
\end{aligned}$$

В последовательности $\Gamma$ каждое решение не лучше предыдущего и не хуже последующего.

Теперь воспользуемся следующей процедурой. Будем последовательно, начиная с первой расстановки, выполнять этап моделирования БШС. Очевидно, что как только мы получим расстановку, удовлетворяющую всем требованиям этапа моделирования, мы решим задачу нахождения оптимальной топологии среди всех топологий, для которых выполняются все требования к показателям, исследуемым и рассчитываемым на этапе моделировании сети. Действительно, для всех предыдущих расстановок эти условия не выполняются, а все последующие расстановки в последовательности $\Gamma$ не могут быть лучше по критерию $f(P)$.

Обсудим вопрос как строить подобную последовательность на основании алгоритма МВиГ, описанного в параграфе **??**. Заменив неравенство **??** на нестрогое и записывая все рекорды, полученные в процессе работы алгоритма, мы, очевидно, получим последовательность расстановок, где каждая расстановка не хуже предыдущей и не лучше последующей. Для получения последовательности $\Gamma$ достаточно «перевернуть» полученную последовательность, где первый элемент станет последним.

Недостатком такой процедуры является то, что для исследования на этапе моделирования будут отобраны только расстановки не хуже первого рекорда и среди них может не оказаться расстановки, удовлетворяющей критериям моделирования. Для расширения множества $\Gamma$ можно сделать следующее. Зададим условие. что в результате решения **задачи 1** мы хотим получить не только оптимальное решение, но и все решения не хуже оптимального на величину $d$. Для решения такого варианта задачи достаточно неравенство **??** в алгоритме МВиГ заменить следующим неравенством

$$f(P) \leqslant f(\widehat{P}) + d, \tag{2.26}$$

где $d = \varepsilon \cdot L > 0, \varepsilon$ – заданное отклонение в процентах, и запоминать все рекорды, полученные в процессе решения задачи.

На основании неравенства **??** можно построить итерационную процедуру, увеличивая величину $d$, если при данном ее значении допустимого решения на этапе моделирования не найдено. В приложение 2 представлены результаты численного примера.

## 2.3 Выводы по Главе ??

Представлена математическая модель задачи размещения базовых станций беспроводной сети связи вдоль линейного участка в виде задачи ЦЛП. В качестве примера представлен численный пример решения задачи.

В работе предложена методика проектирования беспроводной широкополосной сети для контроля линейной трассы с использованием итерационной процедуры построения последовательности лучших решений задачи выбора и размещения базовых станций при выполнении технологических условий на проектирование сети и ограничения на стоимость размещаемых станций.

Предложенная методика позволяет на этапе моделирования выбирать лучшее решение среди тех решений по выбору и размещению станций, которые удовлетворяют требованиям, предъявляемым к проектируемой сети.

Процедура нахождения последовательности лучших решений задачи выбора и размещения базовых станций основана на разработанном алгоритме МВиГ.

# Глава 3. Оптимальное размещение базовых станций широкополосной беспроводной сети связи для обслуживания заданного множества рассредоточенных объектов

Построение современной инфраструктуры передачи информации для обслуживания множества объектов промышленного или гражданского назначения, рассредоточенных на некоторой территории, является актуальной задачей при создании единой систем контроля и управления указанными объектами. Создание такой инфраструктуры позволяет обеспечить оперативный контроль и управление объектами путем передачи необходимой информации с сенсоров и датчиков объектов в соответствующий внешнее приемное устройство. Для создания подобной инфраструктуры эффективно используются сети широкополосной беспроводной связи, необходимым этапом проектирования которых является решение задачи определения мест размещения базовых станций [**VishnevskyBook**]. В настоящей работе строятся и исследуются две математические модели задач размещения базовых станций, которые применимы на этапе синтеза топологии сети в процессе комплексного проектирования мультимедийных сетей. Предлагается модель для проверки существования допустимого решения при условия выполнении технологических ограничений для предложенной на предыдущих этапах схемы расстановки станций и модель для оптимизационной задачи. Оптимизационная задача состоит в выборе множества станций из заданного набора типов станций с различными характеристиками и их расстановки на избыточном множестве возможных мест размещения. В поставленной задаче рассматривается задача обслуживания объектов, расположение которых задано их координатами на плоскости. Особенностью такой задачи в широком классе задач оптимального размещения мощностей является наличие условия на наличие информационной связи между станциями и внешним приемным устройством (шлюзом), выполнение которого гарантирует поступление всей информации с контролируемых объектов в центр управления.

## 3.1 Задача при заданных местах размещения станций.

Задано множество вершин $A = \{a_i\}, i = \overline{0,n}$ на плоскости. Каждая вершина $a_i$ имеет координаты $\{x_i, y_i\}$.

Множество $A$ состоит из двух подмножеств:

– $A_1$ — множество вершин, которое соответствует объектам, с которых необходимо собирать информацию. Каждой вершине $a_i$ приписана величина $v_i$ -– максимальный объем информации, снимаемой с объекта, расположенного на этой вершине. В частности, объектами могут быть любые стационарные абонентские устройства сети 802.11n. В дальнейшем будем считать, что каждая вершина из $A_1$ является объектом контроля.

– $A_2$ =– множество мест, где размещены базовые станции. В дальнейшем вершину из $A_2$ будем идентифицировать не только как место размещения, но и как соответствующую станцию.

По определению:

$$A_1 \cup A_2 = \varnothing;$$

$$A_1 \cap A_2 = A.$$

Все вершины пронумерованы так,что:

$$A_1 = \{a_i\}, i = \overline{1,n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1,n}.$$

Каждой вершине из $A_2$ приписаны три параметра $s_i = \{r_i, R_{ij}, \vartheta_i\}$, где:

– $r_i$ – максимальный радиус покрытия станции. Параметр, который характеризует зону охвата территории каждой станцией;

– $R_{ij}$ – максимальный радиус связи между $i$-ой и $j$-ой станциями. Параметр характеризует расстояние, на котором обеспечивается связь между станциями;

– $\vartheta_i$ – максимальный объем информации в единицу времени, который может быть получен от объектов, обслуживаемых станцией.

Также задана вершина специального вида (шлюз) $s_0 = \{r_0, R_0, \vartheta_0\}$ с координатами $\{x_0, y_0\}$. По условию задачи величина $\vartheta_0$ больше суммы величин $\vartheta_i$ у всех вершин множества $A_1$.

Задано условие, что со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества $A_2$.

Требуется проверить, что при заданных наборе и размещении станций вся имеющаяся информация с объектов (множество $A_1$) может быть собрана и передана системой станций (множество $A_2$) до шлюза $s_0$.

Сформулируем задачу в виде модели ЛП.

Составим граф $H = \{A,E\}$ для возможного потока информации между вершинами множества $A = A_1 \cup A_2$. По определению, каждой вершине из $A_2$ соответствует свой набор параметров $\{r_i R_i, \vartheta_i\}$. Матрица смежности $E = \{e_{ij}\}$ графа $H$ строится по следующим правилам:

- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ым объектом ($a_i \in A_1$) и $j$-ым местом размещения станции ($a_j \in A_2$) не более радиуса покрытия для станции соответствующего этой вершине типа;
- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ым местом размещения ($a_i \in A_2$) и $j$-ым местом размещения ($a_j \in A_2$), не более радиуса связи той станции, у которой радиус связи не больше радиуса связи другой станции;
- $e_{i0} = 1$, если расстояние от вершины $a_i \in A_2$ до шлюза не более $R_i$;
- $e_{ij} = 0$, во всех остальных случаях.

Введем переменные $x_{ij} \geqslant 0$. Это искомое количество информации, передаваемой в единицу времени по дуге $e_{ij}$ графа $H$. Распишем условия для нашей задачи. Величина суммарного потока, который выходит с объекта равен весу $\vartheta_i$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma^+(a_i)} x_{ij} = \vartheta_i, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}, \tag{3.1}$$

где $\Gamma^+(a_i)$ – множество вершин на графе $H$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Сумма входящих и выходящих потоков для любой $i$-ой вершины множества $A_2$ равна нулю:

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} x_{ij} + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0, \forall a_i \in A_2. \tag{3.2}$$

Здесь множество $\Gamma_1^-(a_i)$ – вершины множества $A_1$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^-(a_i)$ – вершины множества $A_2$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^+(a_i)$ – вершины множества $A_2$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз $s_0$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i; \tag{3.3}$$

Объем информации, поступающей с других вершин на станцию, если она размещена на $j$-ой вершине, ограничен мощностью станции $\vartheta_j$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma^-(a_i)} x_{ji} \leqslant \vartheta_j, \forall a_j \in A_2 D. \tag{3.4}$$

Для нахождение допустимого решения задачЬ **????????** (или доказательства, что допустимого решения не существует) может быть применена стандартная процедура нахождения допустимого решения задачи линейного программирования с вводом искусственных переменных в уравнения **????????** и минимизации состоящей из этих переменных линейной формы. Если значение целевой функции в результате решения задачи окажется больше нуля, то допустимого решения для данного размещения станций не существует, в противном случае полученное решение дает допустимое распределение потоков по каналам связи.

## 3.2 Оптимизационная задача выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения

Постановка задачи Задано множество вершин $A = a_i$, $i = \overline{0,n}$ на плоскости. Каждая вершина $a_i$ имеет координаты $\{x_i, y_i\}$. Множество $A$ состоит из двух подмножеств:

– $A_1$ – множество вершин, с которых необходимо собирать информацию. Каждой вершине $a_i$ приписана величина $v_i$ – максимальный объем информации, снимаемой с объекта, расположенного на этой вершине;

– $A_2$ – множество возможных мест размещения базовых станций.

По определению

$$A_1 \cup A_2 = \varnothing;$$

$$A_1 \cap A_2 = A.$$

Все вершины пронумерованы так, что:

$$A_1 = \{a_i\}, i = \overline{1,n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1,n}.$$

Задано множество типов базовых станций $S = s_j$, $j = \overline{1,s}$, которые необходимо разместить на множестве $A_2$.

Каждой станции приписаны четыре параметра $s_j = \{r_j, R_j, \vartheta_j, c_j\}$, где:

– $r_j$ – максимальный радиус покрытия;
– $R_{ij}$ – максимальный радиус связи между $i$-ой и $j$-ой станциями. Параметр характеризует расстояние, на котором обеспечивается связь между станциями;
– $\vartheta_j$ – максимальный объем информации в единицу времени, который может быть получен от объектов, обслуживаемых данной станцией;
– $c_j$ – стоиомость станции.

Также задана станция специального вида (шлюз) $s_0 = \{r_0, R_0, \vartheta_0, c_0\}$ с координатами $\{x_0, y_0\}$, где $r_0 = R_0 = \vartheta_0 = c_0 = 0$

Требуется разместить станции таким образом, чтобы вся информация с объектов (вершинах множества $A_1$) могла быть собрана и передана системой станций, размещенных на выбранных в результате решения задачи вершинах множества $A_2$, до шлюза $s_0$ и общая стоимость размещенных станций была бы минимальной. Как и в предыдущих задачах вершины и станции будем, соответственно, идентифицировать как объекты или станции на них размещенные. Задано условие, что информация с вершин множества $A_1$ может передаваться непосредственно только на вершины множества $A_2$, а со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества $A_2$.

Заметим, что в отличие от предыдущих двух задач в данной задаче задано не множество станций, которые все должны быть использованы в проектируемой сети, а только типы станций. Таким образом в результате решения задачи определяется как набор станций, так и места их размещения. Формулировка задачи в виде модели частично целочисленного ЛП. Вместо каждой вершины $ai$, $i = \overline{n_1 + 1{,}n}$ введем $m$ вершин с координатами вершины $a_i$, и различными параметрами, соответствующими различным типам станций. Обозначим такую группу вершин, записанных с одинаковыми координатами вместо вершины $a_i$,как $D_i$. Каждой вершине из $D_i$ поставим в соответствие набор параметров только одного типа станции из $S$, т.е. на данной вершине может стоять либо станция приписанного типа либо никакая. Обозначим расширенное множество вершин $A_2$ через $A_2D$.

Составим граф $H = \{AD{,}E\}$, описывающий сеть для передачи потока информации между вершинами расширенного множества $AD = A_1 \cup A_2D$ и шлюзом. Матрица смежности $E = e_{ij}$ графа $H$ строится по следующим правилам.

- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ой вершиной $(a_i \in A_1)$ и $j$-ой вершиной $(a_j \in A_2D)$ не более радиуса покрытия, приписанного этой вершине;
- $e_{ij} = 1$, если вершины $a_i$ и $a_j$ принадлежат разным множествам $D_i$ и $D_j$ и расстояние между ними не более радиуса связи той вершины, у которой радиус связи не больше радиуса связи другой вершины;
- $e_{i0} = 1$ $(a_i \in A_2D\ )$ если расстояние от вершины до шлюза не более $R_i$;
- $e_{ij} = 0$, во всех остальных случаях.

Введем потоковые переменные $x_{ij} \geqslant 0$.

Распишем условия для нашей задачи. Величина суммарного потока, который выходит с вершины $a_i$ равен весу $\vartheta_i$

$$\sum_{a_j \in \Gamma^+(a_i)} x_{ij} = \vartheta_i, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}; \tag{3.5}$$

где $\Gamma^+(a_i)$ – множество вершин на графе $H$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Сумма входящих и выходящих потоков для любой $i$-ой вершины множества $A_2D$ равна нулю

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} x_{ij} + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0{,}\forall a_i \in A_2. \tag{3.6}$$

Здесь множество $\Gamma_1^-(a_i)$ – вершины множества $A_1$, из которые выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^-(a_i)$ – вершины множества $A_2D$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^+(a_i)$ – вершины множества $A_2D$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз $s_0$

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i. \tag{3.7}$$

Здесь $\Gamma_2^-(a_0)$ — подмножество вершин множества $A_2D$, дуги которых входят в шлюз $a_0$.

Введем булевы переменные $y_i$ для вершин $a_i$, $ai \in A_2D$

– $y_i = 1$, если станция стоит на месте $a_i$;

– $y_i = 0$, в противном случае.

Объем информации, поступающей от вершин множества $A_1$ на вершину $a_i \in A_2D$, ограничен мощностью станции $\vartheta_i$.

$$\sum_{a_j \in \Gamma^-(a_i)} x_{ji} \leqslant y_i \cdot \vartheta_i, \forall a_i \in A_2D. \tag{3.8}$$

На множестве $D_i$ может быть размещено не более одной станции

$$\sum_{a_j \in D_i} y_j \leqslant 1, \forall D_i. \tag{3.9}$$

Целевая функция

$$\sum_{a_i \in A_2D} c_i \cdot y_i \to min. \tag{3.10}$$

Задача **???????????** представляет собой частично целочисленную задачу линейного программирования с $s \cdot |A_2|$ булевыми переменными.

Численный пример решения задачи оптимизации представлен в Приложении **??**.

## 3.3 Выводы к главе 2

В работе рассмотрены задачи размещения базовых станций при проектировании беспроводных широкополосных сетей связи. Предложены формулировки задач в виде моделей линейного и частично целочисленного линейного программирования как для случая проверки наличия допустимых решений для вариантов, предложенных проектировщиками, так и для экстремальной задачи отбора множества станций из имеющегося набора типов станций и оптимального размещения станций выбранного множества на избыточном множестве возможных мест размещения. Предложены алгоритмы построения графов информационных потоков, позволившие формализовать задачи в виде соответствующих моделей математического программирования. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

# Глава 4. Оценка характеристик производительности сети с помощью имитационного моделирования

Здесь будет имитационная модель сети массового обслуживания и методы машинного обучения

## 4.1 Аппроксимация функций распределений случайных величин

## 4.2 Имитационная модель с зависимым обслуживанием

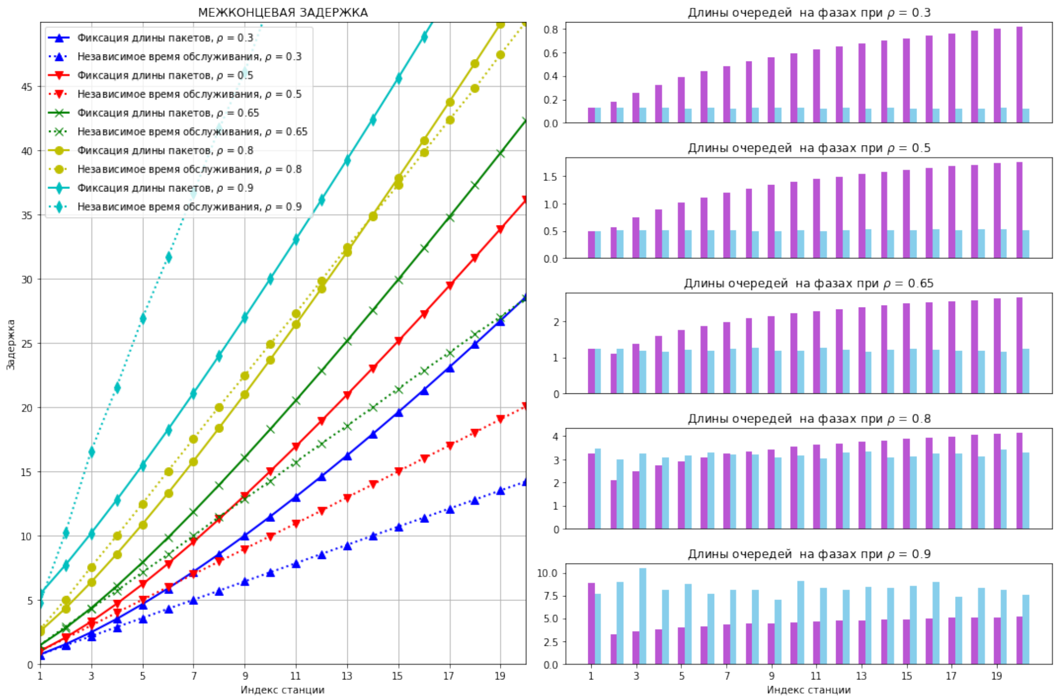


Рисунок 4.1 — Задержки для случаев с независимой и зависимой функции распределения времени обслуживания

## 4.3 Модели прогноза времени межконцевой задеркжи с помощью методов машинного обучения

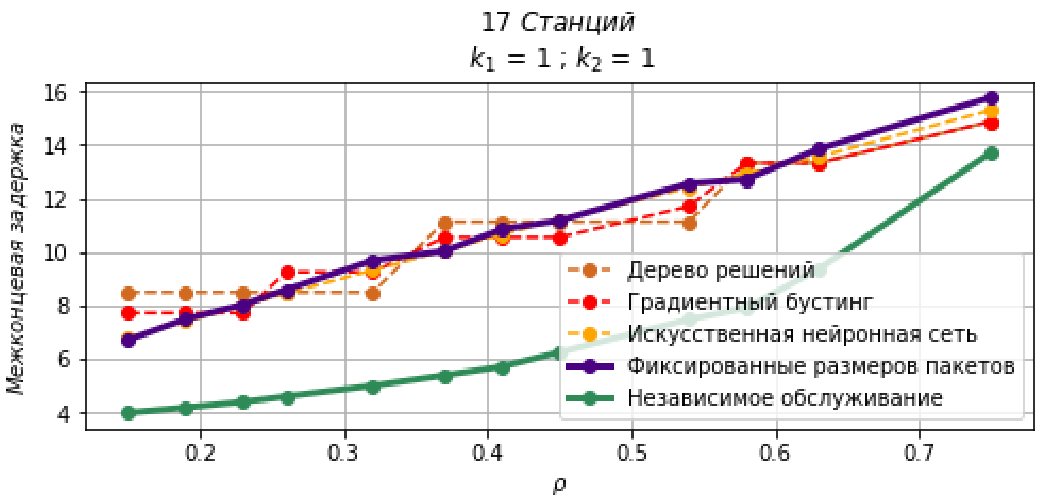


Рисунок 4.2 — Оценки времени межконцевых задержек для тандема размером 17

## 4.4 Выводы по главе ??

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа …
2. Численные исследования показали, что …
3. Математическое моделирование показало …
4. Для выполнения поставленных задач был создан …

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помощь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудятину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

## Список сокращений и условных обозначений

| | |
|---|---|
| БШС | беспроводная широкополосная сеть |

## Словарь терминов

**TeX** : Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнутом

**панграмма** : Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

## Список рисунков

## Список таблиц

# Приложение А

## Численный пример оптимального размещения базовых станций для обслуживания заданного множества рассредоточенных объектов

Рассмотрим пример для оптимизационной задачи выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения. Задано множество рассредоточенных объектов $A_1$, $|A_1| = 4$ и шлюз (таблица **??**).

Задано множество $A_2$ возможных мест расположения станций, $|A_2| = 4$. Все вершины представлены на рисунке **??**.

Задано ограничение по мощности для кадого объекта (таблица **??**).

Задано множество типов станций (таблица **??**).

Необходимо разместить станции таким образом, чтобы минимизировать их суммарную общую стоимость. Построим граф сети $H$ для данного набора типов станции. Матрица смежности представлена на рисункке **??**

Таблица 1 — Координаты размещения

| | | |
|---|---|---|
| 0 | (7,4) | **Координаты шлюза** |
| 1 | (1, 5) | **Координаты объектов** |
| 2 | (4.5, 4) | |
| 3 | (6, 3) | |
| 4 | (3.5, 5) | |
| 5 | (2, 4) | **Координаты размещения станций** |
| 6 | (5, 5) | |
| 7 | (2, 6) | |
| 8 | (6, 5.5) | |

Таблица 2 — Координаты размещения

| Объекты | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Мощность | 10 | 15 | 17 | 18 |

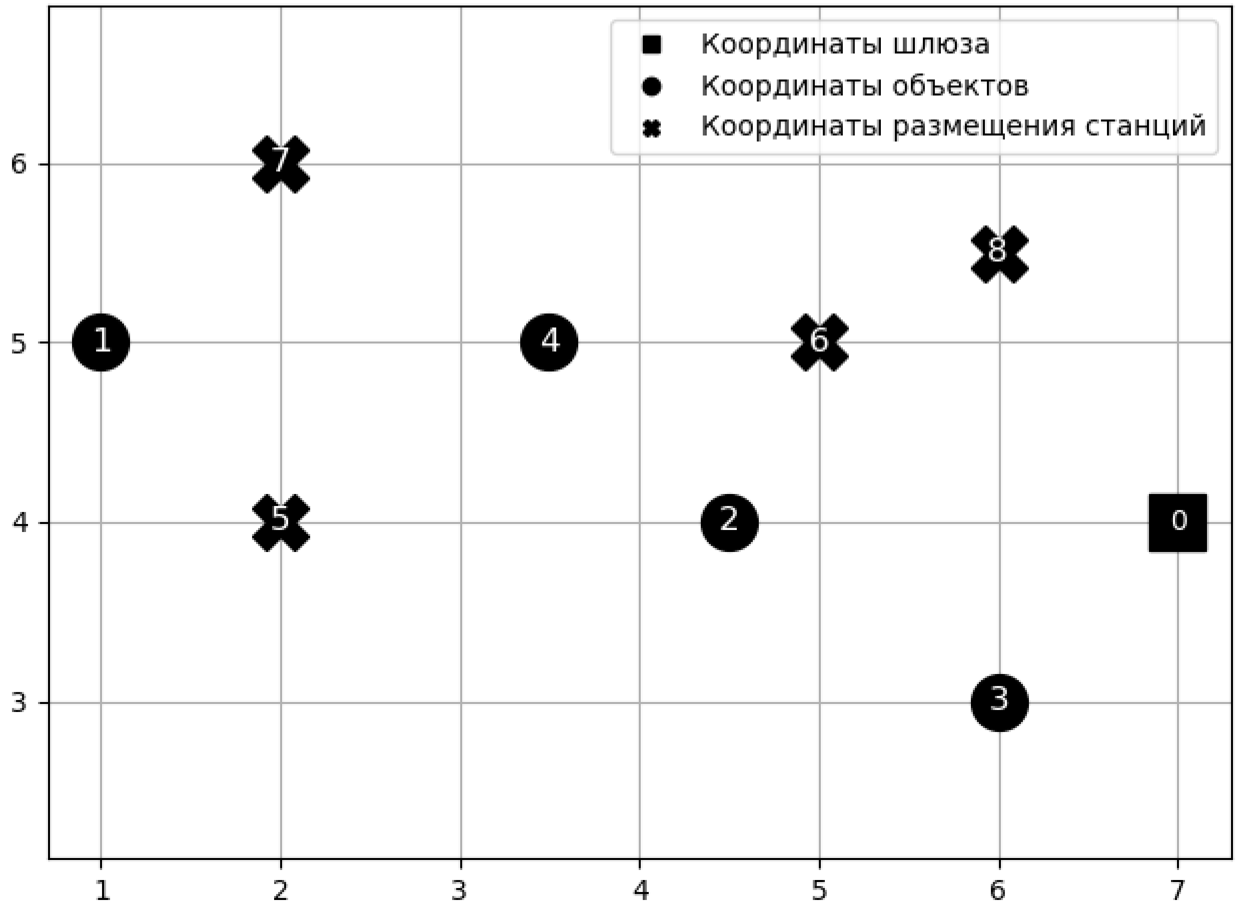


Рисунок А.1 — Координаты размещения

Таблица 3 — Множество типов станций

| Тип | Мощность, $\vartheta_j$ | Радиус покрытия, $r_j$ | Радиус связи, $R_j$ | Стоимость, $c_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | 1 | 6 | 70 |
| 2 | 100 | 2 | 5 | 75 |
| 3 | 100 | 2 | 5 | 75 |

На основе матрицы смежности полученного графа запишем систему равенств и неравенств**???????????** и решим задачу частично целочисленного ЛП. В ходе решения мы получили следующее размещение станции (рис. **??**)

Из графика видно, что были размещены на точках 7 и 8 две станции типа 2 и 3, соответственно. Решением задачи является суммарная стоимость равная: $f = 160$.

Алгоритмы построения графов $H$ были запрограммированы на языке Python. Задачи, сформулированные на основании графов $H$ в виде соответствующих задач математического программирования, были решены пакетом

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5s_1$ | $a_6s_1$ | $a_7s_1$ | $a_8s_1$ | $a_5s_2$ | $a_6s_2$ | $a_7s_2$ | $a_8s_2$ | $a_5s_3$ | $a_6s_3$ | $a_7s_3$ | $a_8s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $a_4$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_5s_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_6s_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_7s_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_8s_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_5s_2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_6s_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_7s_2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_8s_2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $a_5s_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $a_6s_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $a_7s_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $a_8s_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Рисунок А.2 — Координаты размещения

Таблица 4 — Множество типов станций

| Количество объектов, $n_1$ | Количество мест размещения станций, $n - n_1$ | Среднее время счета, сек. |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 12,34 |
| 4 | 4 | 12,42 |
| 4 | 5 | 12,31 |
| 6 | 6 | 11,20 |
| 8 | 7 | 11,27 |
| 10 | 7 | 12,32 |
| 12 | 10 | 12,51 |
| 14 | 7 | 12,42 |
| 17 | 8 | 12,18 |
| 21 | 8 | 12,53 |
| 25 | 8 | 14,22 |

Optimization Toolbox MATLAB. В таблице 4 представлены результаты времени счета задач частично целочисленного ЛП для различных случаев числа мест размещения станций и числа объектов. Для каждого случая было проведено по 10 примеров.

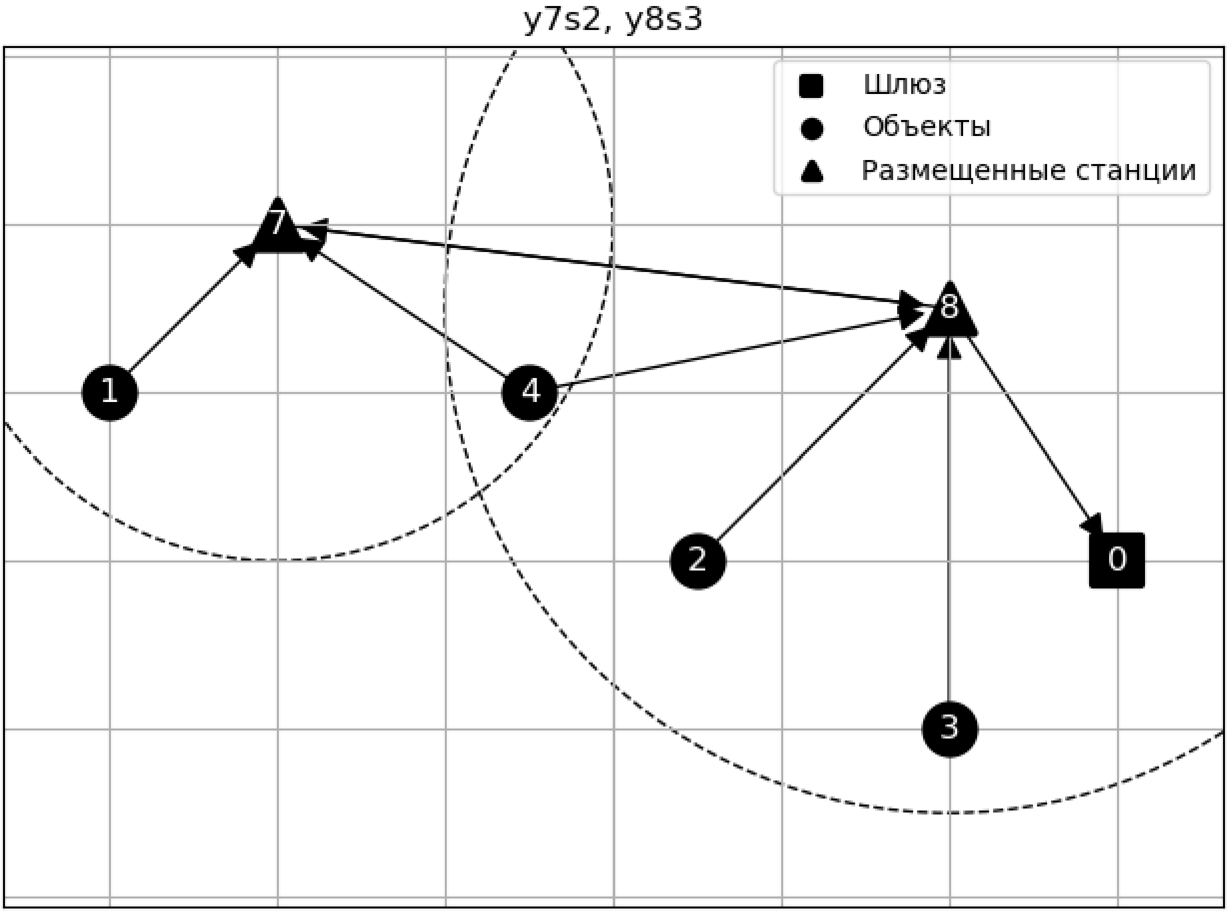


Рисунок А.3 — Координаты размещения

# Приложение Б

## Численный пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде задачи ЦЛП

В этой секции представлен численный пример решения данной задачи.

Задан линейный участок $L$ с длиной 300 с количеством $n = 7$ точек размещения. Координаты точек размещения представлены в таблице **??**. Задан бюджет размещения $C = 130$. Центарльная частота $f = 2437$ МГц.

| $a_i$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Координата | 29 | 40 | 95 | 139 | 181 | 230 | 273 |

Таблица 5 — Точки размещения участка с длиной $L = 300$.

Задано множества базовых станций $m = 8$ с параметрами представленными в таблице **??**. Также в таблице представлены параметры шлюзов и контролируемых объектов. Параметры объектов необходимы для расчета радиусов покрытия станций.

| BS | $P_{tr}^{R}$ | $G_{tr}^{R}$ | $P_{recv}^{R}$ | $P_{recv}^{r}$ | $G_{recv}^{r}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | дБм | дБ | Дбм | дБм | дБ | у.е. |
| 1 | 20 | 5 | -69 | -67 | 5 | 40 |
| 2 | 19 | 5 | -67 | -67 | 5 | 28 |
| 3 | 18 | 5 | -69 | -67 | 5 | 45 |
| 4 | 19 | 5 | -69 | -67 | 6 | 22 |
| 5 | 19 | 5 | -67 | -67 | 5 | 21 |
| 6 | 20 | 5 | -69 | -67 | 5 | 40 |
| 7 | 19 | 5 | -67 | -67 | 5 | 28 |
| 8 | 18 | 5 | -69 | -67 | 5 | 45 |
| Шлюз | $G_{recv}^{R}$ | $P_{recv}^{R}$ | | Объект | $P_{tr}^{r}$ | $G_{tr}^{r}$ |
| | дБ | дБм | | | дБм | дБ |
| | 5 | -69 | | | 15 | 2 |

Таблица 6 — Параметры базовых станций, шлюзов и объектов.

**Расчет радиса связи между станциями** Базовые станции оснащены направленной антенной с высоким коэффициентом усиления для связи с соседними станциями. Для расчета потерь между станциями $j$ и $q$ воспользуемся формулой (**??**):

$$L_{fs}^{jq} = P_{tr}^{R}(j) - L_{tr} + G_{tr}^{R}(j) + G_{tr}^{R}(q) - L_{recv} - SOM - P_{recv}^{R}(q).$$

Потери на кабелях приемникп $L_{recv}$ и передатчике $L_{tr}$ примем равным 1 дБ и запас на замирания сигнала $SOM = 10$ дБ.

Let us carry out an example of the calculation communication link between stations $s_1$ and $s_2$: Для примера расчетаем радиус связи между станциями $s_1$ и $s_2$:

$$\begin{aligned} L_{fs}^{12} = P_{tr}^{R}(1) - L_{tr} + G_{tr}^{R}(1) + G_{tr}^{R}(2) - L_{recv} - SOM - P_{recv}^{R}(2) = \\ = 20 - 1 + 5 + 5 - 1 - 10 - (-69) = 87(dB). \end{aligned} \tag{Б.1}$$

Для расчета канала связи необходимо использовать формулу **??**. Несущая частота $f = 2437$ МГц и коэффициент для расчета потерь $K = -27{,}55$:

$$R_{jq} = 10^{\left(\frac{L_{fs}^{jq} - 20\lg F - K}{20}\right)} = 10^{\left(\frac{87 - 20\lg 2437 - (-27.55)}{20}\right)} = 174(m). \tag{Б.2}$$

В таблице **??** приведены расчеты максимальных радиусов связи между всеми станциями $s_j$, $j = 1, ..., m$ и шлюзом $s_{m+1}$.

| $R_{jq}, (m)$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ | $s_{m+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | – | 174 | 219 | 219 | 174 | 219 | 174 | 219 | 219 |
| $s_2$ | 195 | – | 195 | 195 | 155 | 195 | 155 | 195 | 195 |
| $s_3$ | 174 | 138 | – | 174 | 138 | 174 | 138 | 174 | 174 |
| $s_4$ | 195 | 155 | 195 | – | 155 | 195 | 155 | 195 | 195 |
| $s_5$ | 195 | 155 | 195 | 195 | – | 195 | 155 | 195 | 195 |
| $s_6$ | 219 | 174 | 219 | 219 | 174 | – | 174 | 219 | 219 |
| $s_7$ | 195 | 155 | 195 | 195 | 155 | 195 | – | 195 | 195 |
| $s_8$ | 174 | 138 | 174 | 174 | 138 | 174 | 138 | – | 174 |

Таблица 7 — Рассчитанные радиусы связи между станциями

**Расчет радиуса покрытия**

Расчет проводится аналогично расчета радиусу связи между станциями. Потери в свободном простанстве для канала между $j$-ой станции и контролируемым объектом

$$L_{fs}^{j} = P_{tr}^{r}(j) - L_{tr} - SOM - P_{RX}.$$

Пример расчечта радиуса покрытия для 1-ой станции:

$$\begin{aligned} L_{fs}^{1} = P_{tr}^{r} + G_{tr}^{r} + G_{recv}^{r}(1) - L_{recv}(1) - SOM - P_{recv}^{r}(1) = \\ = 15 + 2 + 5 - 1 - (-67) - 10 = 78 \text{ (дБ)}. \end{aligned} \tag{Б.3}$$

$$r_1 = 10^{\left(\frac{78 - 20\lg 2437 - (-27.55)}{20}\right)} = 77 \text{ (м)}.$$

Рассчитанные радиусы покрытия для всех станций $s_j$, $j = \overline{1,m}$ представлены в таблице ??).

| STA | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_j$ | 77 | 77 | 77 | 87 | 77 | 77 | 77 | 77 |

Таблица 8 — Рассчитанные радиусы покрытия станций

Задача ЦЛП решена с помощью Optimization Toolbox MatLab. Таблица ?? содержит все полученные целочисленные решения.

| $a_i$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | Покрытие | Цена |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Координаты | 29 | 40 | 95 | 139 | 181 | 230 | 273 | м | у.е. |
| Целлочисленное решение 1 | $s_1$ | $s_2$ | $s_6$ | – | – | – | $s_4$ | 286 | 130 |
| Целлочисленное решение 2 | $s_4$ | – | $s_5$ | $s_7$ | – | – | $s_2$ | 289 | 99 |
| Оптимальное решение | $s_4$ | $s_2$ | – | – | $s_1$ | – | $s_5$ | 300 | 111 |

Таблица 9 — Решение задачи ЦЛП.

# Приложение В

## Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи 2, 3 и 4

В таблице **??** приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающего время решения ***задач 2, 3, 4*** и относительную точность ***задачи 3, 4*** по отношению к ***задаче 2***. Для непокрытого участка заданной длины $|\beta| = 50$, варьируя количеством неразмещенных станций, а также количеством свободных мест размещения рассчитаем оценку недопокрытия при бюджетном ограничении $C = 600$. Как видно из результатов расчетов, представляется целесообразным для решения задач большой размерности использовать в качестве оценки $w_2(G_\nu)$ ***задачу 3***, так как время ее расчета в виде задачи линейного программирования существенно ниже с учетом высокой точности.

Таблица 10 — Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи ЦЛП и ЛП

| Количество точек размещения, $m$ | Количество свободных станций, $\|S_\beta\|$ | ЦЛП | | Задача о ранце | | | ЛП | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Время расчета, сек | Недопокрытие, $z$ | Время расчета, сек | Недопокрытие, $z$ | Точность, % | Время расчета, сек | Недопокрытие, $z$ | Точность, % |
| 5 | 6 | 0,3250 | 436,00 | 0,3214 | 426,00 | 97,71 | 0,0047 | 436,00 | 100,00 |
| 5 | 8 | 0,3218 | 431,00 | 0,3582 | 398,00 | 92,34 | 0,0045 | 431,00 | 100,00 |
| 8 | 10 | 0,3765 | 395,00 | 0.3621 | 375,00 | 94,94 | 0,0094 | 395,00 | 100,00 |
| 8 | 12 | 0,3746 | 390,00 | 0.2977 | 347,00 | 88,97 | 0,0094 | 390,00 | 100,00 |
| 12 | 15 | 0,3363 | 339,00 | 0.2960 | 309,00 | 91,15 | 0,0114 | 339,00 | 100,00 |
| 12 | 17 | 0,4072 | 336,00 | 0.3456 | 283,00 | 84,23 | 0,0136 | 336,00 | 100,00 |
| 18 | 20 | 0,3558 | 265,00 | 0.3407 | 265,00 | 100,00 | 0,0121 | 265,00 | 100,00 |
| 18 | 25 | 0,3794 | 260,00 | 0.3096 | 259,00 | 99,62 | 0,0169 | 257,60 | 99,08 |
| 25 | 30 | 0,3177 | 246,00 | 0.3576 | 246,00 | 100,00 | 0,0222 | 244,33 | 99,32 |
| 25 | 45 | 0,3539 | 229,00 | 0.3556 | 229,00 | 100,00 | 0,0494 | 226,40 | 98,86 |
| 30 | 50 | 0,2994 | 225,00 | 0.3146 | 225,00 | 100,00 | 0,0570 | 224,13 | 99,61 |
| 30 | 100 | 0,5179 | 223,00 | 0,5177 | 223,00 | 100,00 | 0,1513 | 218,75 | 98,09 |

# Приложение Г

## Числовой пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде экстреальной задачи в комбинаторной форме

Рассмотрим пример задачи размещения базовых станций.

Задан линейный участок $L = 200$.

Множество точек размещегия $|A| = 7$.

Множество станций $|S| = 5$.

Ограничение на стоимость $C = 65$.

Ограничение на стоимость $T = 0.5$ (сек).

Средний размер пакетов $w = 3.2$ Мбит

Отклонение $\varepsilon = 1$

В таблице **??** представлены параметры базовых станций.

| S | $P_{tr}^R$ | $G_{tr}^R$ | $P_{recv}^R$ | $L$ | $P_{tr}^r$ | $G_{tr}^r$ | $p$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | дБм | дБ | дБм | дБ | дБм | дБ | Мбит/сек | у.е. |
| 1 | 16 | 5 | -69 | 1 | 20 | 5 | 433 | 20 |
| 2 | 19 | 5 | -67 | 1 | 20 | 5 | 433 | 28 |
| 3 | 15 | 5 | -69 | 1 | 18 | 5 | 433 | 25 |
| 4 | 16 | 5 | -69 | 1 | 19 | 6 | 433 | 24 |
| 5 | 16 | 5 | -67 | 1 | 19 | 5 | 433 | 21 |

Таблица 11 — Параметры базовых станций. $P_{tr}^R$ – мощность направленной антенны, $G_{tr}^R$ – усиление направленной антенны, $P_{recv}^R$ – чувствительность направленной антенны, $L$ – потери в антенном кабеле и разъемах, передающего тракта, $P_{tr}^r$ – мощность всенаправленной антенны, $G_{tr}^r$ – усиление всенаправленной антенны, $p$ – пропускная способность, $c$ – стоимость

На концах участка размещены шлюзы $s_0$ и $s_{m+1}$ с параметрами (таблица **??**):

По формуле (5) рассчитаем радиус покрытия для каждой станции (таблица **??**) и радиусы связи между станциями и со шлюзами (таблица **??** и таблица **??**).

| Шлюз | $P_{tr}^R$ | $G_{tr}^R$ | $P_{recv}^R$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|
| № | дБм | дБ | дБм | дБ |
| $s_0$ | 20 | 3 | -69 | 1 |
| $s_{m+1}$ | 20 | 3 | -69 | 1 |

Таблица 12 — Параметры шлюзов

| Станция | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_{m+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_j$, м | 48 | 43 | 38 | 43 | 43 | 0 |

Таблица 13 — Рассчитанные радиусы покрытия

| $R_{jq}$, м | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_0$ | $S_{m+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | – | 76 | 96 | 96 | 76 | 76 | 76 |
| $S_2$ | 85 | – | 85 | 85 | 68 | 68 | 68 |
| $S_3$ | 76 | 60 | – | 76 | 60 | 60 | 60 |
| $S_4$ | 85 | 68 | 85 | – | 68 | 68 | 68 |
| $S_5$ | 85 | 68 | 85 | 85 | – | 68 | 68 |

Таблица 14 — Рассчитанные радиусы связи базовых станций

| $R_{jq}$, м | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_0$ | 96 | 85 | 76 | 85 | 85 |
| $S_{m+1}$ | 96 | 85 | 76 | 85 | 85 |

Таблица 15 — Рассчитанные радиусы связи шлюзов

В таблице **??** представлены результаты решения размещения станций. Для заданной $\varepsilon = 1\%$, т.е. $d = 2$ был получены последовательности расстановок для ***задач 2, 3 и 4*** расчета оценок с помощью задачи ЦЛП, задачи «О ранце» и ЛП. В таблице представлены рекорды «недопокрытия», стоимости и задержки сети, а также размещения станций, число пройденных узлов дерева а и время счета. Задача ЦЛП и задача о ранце решались с помощью Optimization Toolbox Matlab, а задача ЛП решалась с помощью библиотеки с исходным кодом Scipy Python. Как видно из результатов оценка, полученная с помощью задачи ЛП менее точная, приходится обходить большее количество узлов для нахождения рекордов по сравнению с методом оценки «недопокрытия» с помощью ***задач 2 и 3***. В итоге возрастает итоговое количество пройденых узлов. В свою очередь метод ЛП имеет свое преимущество, так как время счета меньше.

Таблица 16 — Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи ЦЛП и ЛП

| № | Рекорд, м | Стоимость, у.е. | Задержка, сек | Размещение | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
| 1 | 1 | 65 | 0,03244 | $S_1$ | - | $S_4$ | - | - | $S_5$ | - |
| 2 | 1 | 65 | 0,03244 | $S_1$ | - | $S_5$ | - | - | $S_4$ | - |
| 3 | 1 | 65 | 0,03244 | $S_4$ | - | $S_1$ | - | - | $S_5$ | - |
| 4 | 0 | 65 | 0,03244 | $S_4$ | - | $S_5$ | - | - | $S_1$ | - |
| 5 | 1 | 65 | 0,03244 | $S_5$ | - | $S_1$ | - | - | $S_4$ | - |
| 6 | 0 | 65 | 0,03244 | $S_5$ | - | $S_4$ | - | - | $S_1$ | - |
| 7 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_1$ | $S_4$ | - | - | $S_5$ | - |
| 8 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_1$ | $S_5$ | - | - | $S_4$ | - |
| 9 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_1$ | - | $S_4$ | - | $S_5$ | - |
| 10 | 0 | 65 | 0,03244 | - | $S_1$ | - | $S_4$ | - | - | $S_5$ |
| 11 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_4$ | $S_1$ | - | - | $S_5$ | - |
| 12 | 0 | 65 | 0,03244 | - | $S_4$ | $S_5$ | - | - | $S_1$ | - |
| 13 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_4$ | - | $S_1$ | - | $S_5$ | - |
| 14 | 0 | 65 | 0,03244 | - | $S_4$ | - | $S_1$ | - | - | $S_5$ |
| 15 | 1 | 65 | 0,03244 | - | $S_5$ | $S_1$ | - | - | $S_4$ | - |
| 16 | 0 | 65 | 0,03244 | - | $S_5$ | $S_4$ | - | - | $S_1$ | - |

| Метод оценки «недопокрытия» справа | ЦЛП | Задача «О ранце» | ЛП |
|---|---|---|---|
| Число пройденных узлов | 934 | 934 | 1590 |
| Время счета, сек | 5,412 | 5,136 | 3,613 |