

## **Глава 2. Задача оптимального размещения базовых станций БШС для контроля линейной территории**

### **2.1 Актуальность внедрения БШС для линейного участка на месторождении**

В данной главе будет представлена математическая модель размещения БС БШС вдоль линейного участка. Ключевым таким линейным объектом на нефтегазовом промысле является магистральный трубопровод.

Магистральные трубопроводы предназначены для транспортировки товарной нефти или газа из района промысла, производства до места потребления. В общем случае под местами потребления понимают нефтебазы, перевалочные базы, пункты налива в цистерны и заводы [1]. В зависимости от географических особенностей и климатических условий магистральные трубопроводы могут прокладываться в подземном, наземном или надземном типах.

Трубопроводы по-прежнему являются самым безопасным способом транспортировки нефти, но случайных утечек избежать невозможно. К особо уязвимым участкам трубопроводной инфраструктуры относятся регулирующая арматура, ловушки для скребков, приемники скребков, счетчики и манометры. Хотя утечки в трубопроводе часто начинаются с малого, позднее обнаружение и идентификация утечек может иметь пагубные последствия. Для нефтегазовой компании несвоевременное обнаружение может нанести миллионы финансовых убытков, а также нанести ущерб репутации и окружающей среде.

Основными причинами аварийных ситуаций на линейных участках являются: коррозионные разрушения, механические повреждения при строительстве и эксплуатации, а также заводские браки [2]. Отсюда возникает важная задача, с которой сталкиваются компании на промысле – отслеживание состояния трубопроводов, по которому транспортируются нефть и газ [3]. Эффективным средством прогнозирования и предотвращения отказов и аварийных ситуаций на магистральных трубопроводах, а также экологической защиты и достижения промышленной безопасности становится мониторинг нефтепровода, путем внедрения беспроводных сетей связи, включающее беспроводных технических средств для диагностики технического состояния трубопроводов,

изменений под влиянием геологических процессов на опасных участках [4, 5, 6, 7]; а также внедрения беспроводных систем видеонаблюдения, в том числе БПЛА позволяющий контролировать безопасность на всем участке трубопровода [8, 9, 7, 10, 11].

Одним из интересных направлений является организация беспроводных сетей для обнаружения утечек и отслеживания границ и направления движения токсичных газов с помощью мобильных беспроводных сенсорных устройств [4]. В работе [6] предлагается беспроводная сенсорная сеть для мониторинга утечек вдоль подземных трубопроводов. С учетом уже широкого применения беспроводных сенсорных сетей в нефтегазовой отрасли, все еще существуют некоторые проблемы при их развертывании: вероятность потерь передачи сигнала между сенсорами, отказы узлов и проблемы с энергопотреблением, особенно для линейной топологии [12]. Беспроводные сенсорные сети, уже широко применяются на месторождениях. К сожалению, большинство используемых методов маршрутизации не предназначены для линейной топологии [13]. В простейшем случае, когда отказывает один узел, вся сеть перестает функционировать. Беспроводные сенсорные сети на базе протоколов WirelessHart, IEEE 802.15.4, ISA100.11a и др. нашли свое широкое применение в нефтегазовом секторе. В силу ограничения дальности связи данных протоколов целесообразно объединять такие сенсорные сети вдоль линейного сооружения в БШС дального радиуса действия на базе семейства протоколов IEEE 802.11 (Рисунок 2.1). Для сбора данных с сенсорной сети вдоль линейного объекта используются узлы транспортировки сети - базовые станции [14]. Использование базовых станций в сенсорных сетях позволяет увеличить связность сети, путем разбиение сети на мелкие кластеры. Повышение связности сети при ее разбиении достигается вследствие того, что базовая станция является более надежным узлом, имеет большую дальность уверенной передачи радиосигнала, меньше зависит от ограничений в энергопотреблении [15].

В [16, 17] авторы предлагают иерархическую сенсорную сеть для мониторинга трубопроводов, в которой третий уровень иерархии сети представлен базовыми станциями, покрывающими весь линейный участок.

Один из современных методов обнаружение утечек и мониторинга в реальном времени является использование беспроводной сети связи на базе стационарных объектов – базовых станций и беспилотных летательных аппаратов (БПЛА, Unmanned Aerial Vehicle, UAV) [9]. В [8] рассматривается использование

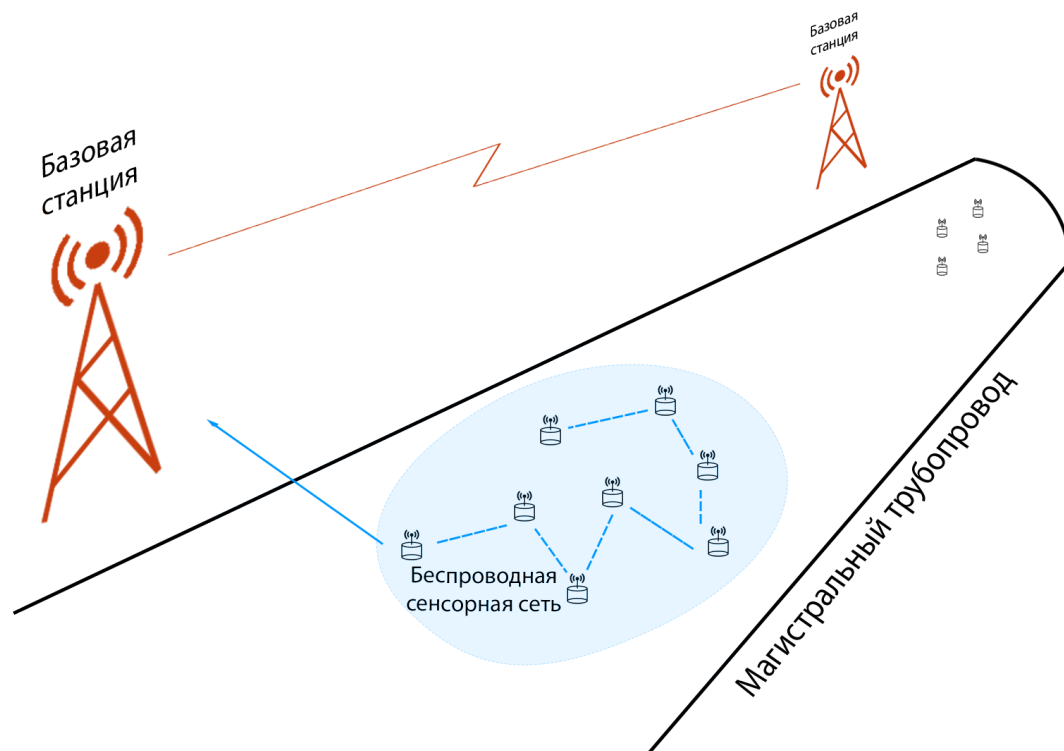


Рисунок 2.1 — Беспроводная сеть вдоль магистрального трубопровода

БПЛА для мониторинга нефтепроводов. Предлагается математическая модель для определения состава группы БПЛА и метода ее базирования.

Еще одним немаловажным линейным объектом любого промысла, требующим постоянного контроля является сеть промысловых дорог. С учетом большой удаленности друг от друга объектов нефтегазовой отрасли друг от друга целесообразно организовать телекоммуникационную сеть вдоль протяженных автодорог для контроля данного линейного участка с помощью информации с систем видеонаблюдения [18] (Рисунок 2.2). Одним из наиболее перспективных решений на транспортных участках является организация автомобильных сетей (Vehicular ad hoc network, VANET) [19, 20]. Для решения данной проблемы хорошо подходит БШС. Организации БШС вдоль автодорог посвящено ряд зарубежных и отечественных работ.

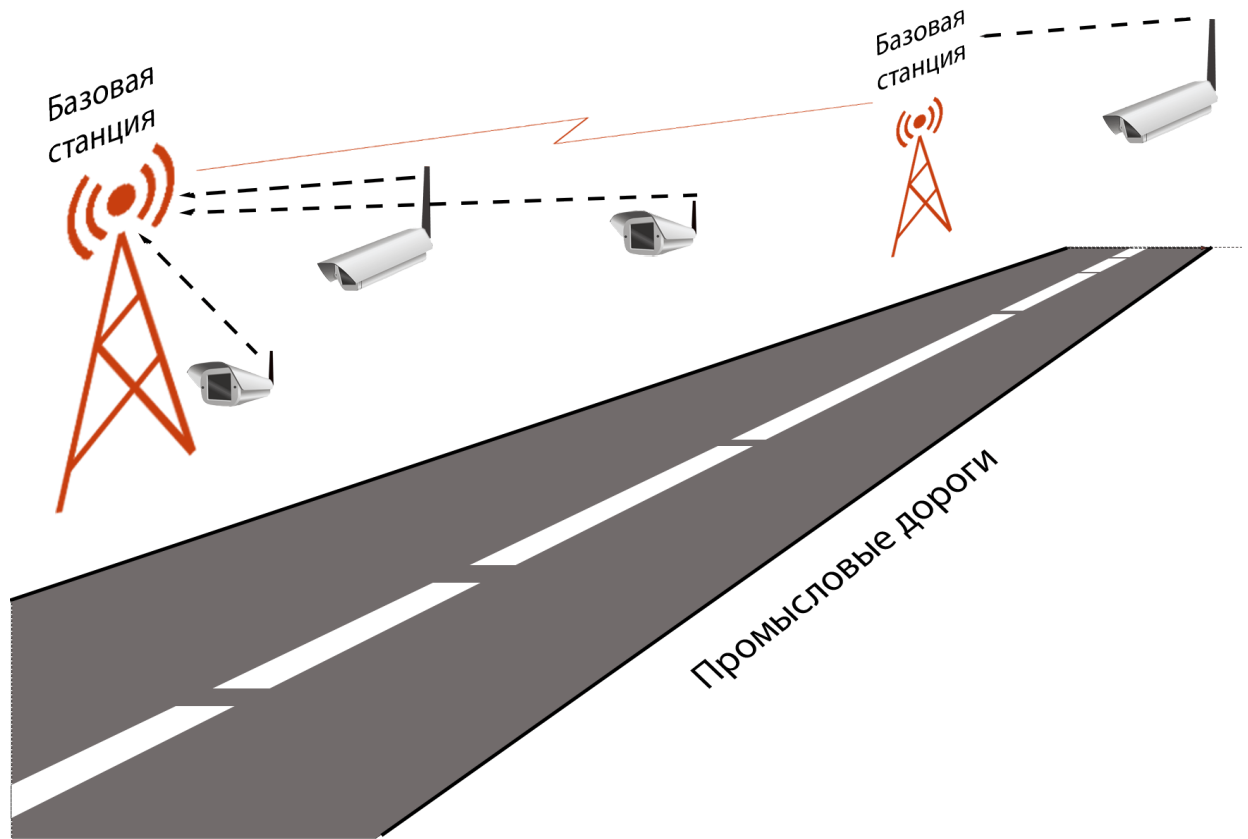


Рисунок 2.2 — Беспроводная сеть вдоль промышленных дорог

## 2.2 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде задачи целочисленного линейного программирования

Размещение БС вдоль линейного участка приобретают все большую актуальность на сегодняшний день. Большинство работ касаются проблемы размещения придорожных объектов (Roadside Unit, RSU) или другими словами БС вдоль автодорог.

Задача оптимального размещения БС нашла свое широкое отражение в исследованиях зарубежных и отечественных авторов. Большинство работ касаются проблемы размещения придорожных объектов (Roadside Unit, RSU) или другими словами БС вдоль автодорог. В [21] предложена модель, использующая генетический алгоритм для решения задачи о максимальном покрытии. Максимизация покрытия БШС с учетом ограничения стоимости БС представлена в работах [22, 23]. В работах [24, 25, 26] предложены новые модели размещения БС с учетом характеристик трафика на участках. В [27] пред-

ставлена задача размещения БС для протокола IEEE 802.11p/Wave. В [28] предложена модель размещения БС с помощью муравьиного алгоритма. В работах [21, 29] в качестве ограничений учитываются временные ограничения при размещения БС. В [30] предлагают жадный алгоритм для минимизации RSU с условием ограничения задержек между любыми двумя узлами сети. В работе [31] представлена задача размещения RSU вдоль линейного участка протяженной автомагистрали.

Представление задачи размещения БС вдоль автодорог в виде одномерной задачи нашло свое широкое применение [31, 27, 23, 24, 25, 26, 32]. В нашем случае является также эффективным для применения вдоль промышленных дорог между удаленными на большие расстояния объектами нефтегазовых отрасли.

Задача размещения также актуально для беспроводных сетей. В работе [33] предложены модели размещения узлов беспроводной сенсорной сети (WSN, Wirelss Sensor Network), максимизирующий покрытие линейного участка трубопровода. В [34] авторы представляют во внимание модель размещения узлов WSN обнаружения повреждений на трубопроводе, учитывающие зоны, которые будет контролировать только обслуживания персонал. В работах [35, 36, 37] представлены модели размещения узлов WSN минимизирующее суммарное энергопотребление. В [38, 39] предложен модели кластеризации узлов БШС, в [39] предлагают модели БШС для мониторинга утечек вдоль нефте- и газопроводов.

### 2.2.1 Постановка задачи

В отличии от большинства реализаций БШС вдоль трубопроводов, где используется одноуровневая реализация сети, в данной диссертации, согласно широко используемой классификации [40, 41, 13, 42, 43], будет предложено иерархическая БШС сеть с линейной топологии. Данные с полевых измерительных устройств собираются шлюзом. Именно с этих шлюзов вся информация будет собираться через систему размещенных БС. В случае проектирования БШС для видеонаблюдения, вся поток будет идти на БС непосредственно с антенн камер видеонаблюдения.

Проблема формулируется следующим образом. Для контроля над заданным линейным участком необходимо разместить базовые приемопередающие станции (далее называемые станциями) таким образом, чтобы максимизировать покрытие с ограничением на суммарную стоимость размещенных станций. Важно обеспечить связи любой станции со шлюзами на концах участка через систему размещенных станций.

Задано множество станций  $S = \{s_j\}$ . Каждой станции приписаны параметры  $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}, c_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $q = \overline{1, m}$ ;  $q \neq j$ . Здесь  $r_j$  – радиус покрытия станции,  $R_{jq}$  – это радиус связи между станциями  $s_j$  и  $s_q$ , и  $c_j$  – это стоимость.

Задан линейный участок длиной  $L$  с концами в точка  $a_0$  и  $a_{n+1}$ . Внутри отрезка  $[a_0, a_{n+1}]$  задано конечное множество точек  $A = \{a_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ; эти точки соответствуют набору свободных мест, где могут быть размещены станции. Каждая точка  $a_i$  определяется своей одномерной координатой  $l_i$ .

Заданы станции специального вида  $s_{m+1}$  – шлюзы. Данные шлюзы размещены на концах  $a_0$  и  $a_{n+1}$  данного линейного участка. Для данных станций параметр радиуса покрытия  $r_{m+1} = 0$ . Радиус связи и стоимость не заданы.

Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать покрытие с условием ограничения на суммарное стоимост  $C$ .

### 2.2.2 Модель ЦЛП

После оценки максимальных радиуса связи между станциями  $R_{jq}$ , максимального радиуса покрытия  $r_j$ , можно перейти, непосредственно, к задаче размещения станций в виде модели целочисленного линейного программирования.

Пусть  $y_i^+$  и  $y_i^-$ ,  $i = \overline{0, n+1}$  определяют охват покрытия (справа и слева, соответственно) станций, покрывающих точку  $a_i$  (Рисунок 2.3). Параметры  $y_i^+$  и  $y_i^-$  могут принимать только неотрицательные целые значения.

Величины покрытия для шлюзов  $y_0^+, y_0^-, y_{n+1}^+, y_{n+1}^-$  равны 0.

Целевая функция будет представлена как:

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i^- + y_i^+) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

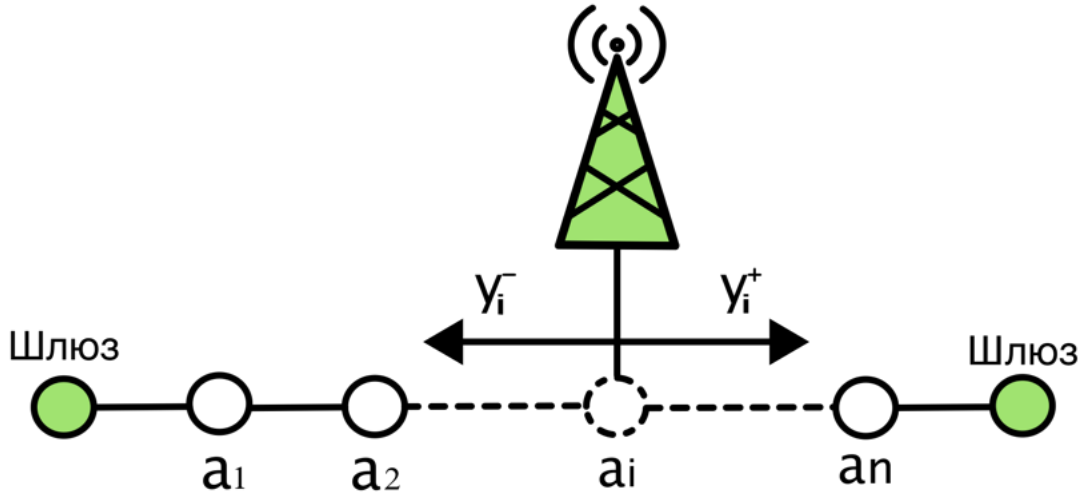


Рисунок 2.3 — Охват покрытия станции

Также введем бинарные переменные  $x_{ij}$ . Тогда  $x_{ij} = 1$ , если станция  $s_j$ , размещенная на точке  $a_i$ , и  $x_{ij} = 0$  в противном случае;  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ .

Введем двоичные переменные  $e_i$ . Тогда  $e_i = 1$ , если какая-либо станция находится в точке  $a_i$ , и  $e_i = 0$  в противном случае;  $i = \overline{1, n}$ . Для точек размещения шлюзов  $a_0$  и  $a_{n+1}$  переменные  $e_0 = 1$  и  $e_{n+1} = 1$ , соответственно.

Сформулируем следующую систему ограничений задачи.

По определению (2.2):

$$e_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Каждая станция должна быть размещена только в одной точке. (2.3):

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Значения покрытий не превышают радиус покрытия станции, размещенной в точке  $a_i$ , и равны 0, если в точке  $a_i$  нет станции (2.4) и (2.5):

$$y_i^+ \leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.4)$$

$$y_i^- \leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Общая область покрытия между любыми двумя точками  $a_i$  и  $a_k$ , где расположены станции, не может превышать расстояние между этими точками (2.6) и (2.7).

$$y_i^+ + y_k^- \leq \frac{l_k - l_i}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{i+1, n+1}; \quad (2.6)$$

$$y_i^- + y_k^+ \leq \frac{l_i - l_k}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{i-1, 0}, \quad (2.7)$$

где  $l_k$  и  $l_i$  - координаты точек  $a_i$  и  $a_k$ , соответственно. Это условие исключает влияние пересечений покрытий станций при вычислении общего значения покрытия между станциями (Рисунок 2.4).

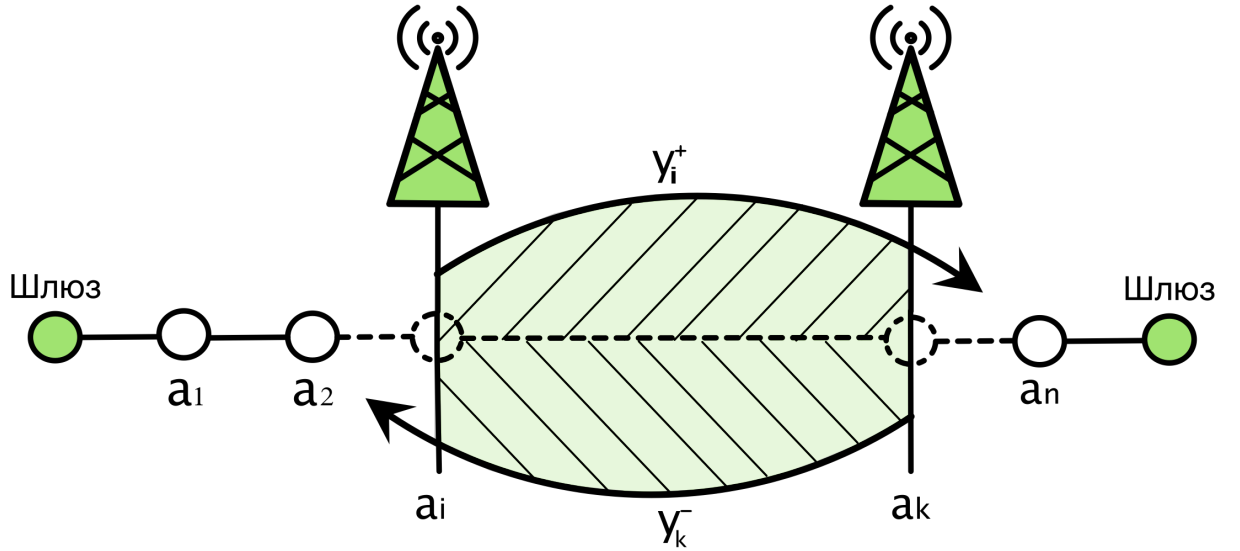


Рисунок 2.4 — Область покрытия между любыми двумя точками

Согласно условиям задачи, станция, расположенная в  $a_i$ , должна быть связана хотя бы с одной станцией слева и одной станцией справа, включая станции на конечных точках  $a_0$  и  $a_{n+1}$ .

Введем бинарные переменные  $z_{ijkq}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}, k \neq i; q = \overline{1, m}, q \neq j$ .

Переменная  $z_{ijkq} = 1$ , если в точке  $a_i$  размещена станция  $s_j$  и данная станция связана со станцией  $s_q$ , размещенная в точке  $a_k$ ; и  $z_{ijkq} = 0$  в противном случае.

Переменная  $z_{ij0(m+1)} = 1$ , если станция  $s_j$ , размещенная в точке  $a_i$ , связана со шлюзом  $s_{m+1}$  в точке  $a_0$ ;  $z_{ij0(m+1)} = 0$  в противном случае.



Переменная  $z_{ij(n+1)(m+1)} = 1$ , если здесь находится станция  $s_j$  в точке  $a_i$  и она связана со шлюзом  $s_{m+1}$  в точке  $a_{n+1}$ ;  $z_{ij0(m+1)} = 0$  в противном случае.

Станции должны быть размещены в обеих точках  $a_i$  и  $a_k$ , (2.8) и (2.9):

$$z_{ijkq} \leq e_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}, k \neq i; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j; \quad (2.8)$$

$$z_{ijkq} \leq e_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n}, i \neq k; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j. \quad (2.9)$$

### ПЕРЕДЕЛАТЬ УРАВНЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЯ УСЛОВИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ СТАНЦИЯМИ

Необходимо, чтобы станция  $s_j$  в точке  $a_i$  была связана с любой станцией, расположенной в точке  $a_k$ , справа от  $a_i$  ( $k > i$ ) или с правым шлюзом  $s_{m+1}$  (2.10) и (2.11).

$$\sum_{k=i+1}^n \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{ijkq} + z_{ij(n+1)(m+1)} = x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.10)$$

Станция  $s_j$ , размещенная в  $a_n$ , справа связана только со шлюзом  $s_{m+1}$  на месте  $a_{n+1}$  (2.11).

$$z_{nj(n+1)(m+1)} = x_{nj} \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.11)$$

Также станция должна быть связана с любой станцией, расположенной в точке  $a_k$  слева от точки  $a_i$  ( $k < i$ ) или с левым шлюзом  $s_{m+1}$  (2.12) и (2.13).

$$z_{1j0(m+1)} = x_{1j}, \quad j = \overline{1, m}; \quad (2.12)$$

Станция  $s_j$ , размещенная в точке  $a_1$  слева может быть связана только со шлюзом  $s_{m+1}$ , расположенном в точке  $a_0$  (2.12).

$$z_{ij0(m+1)} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{ijkq} = x_{ij}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.13)$$

Необходимо, чтобы станция  $s_q$  в точке  $a_k$  была связана с любой станцией справа, расположенной в точке  $a_i$  (2.14).

$$\sum_{i=k+1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^m z_{ijkq} = x_{kq}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad q = \overline{1, m}; \quad (2.14)$$

Кроме того, станция  $s_q$  в точке  $a_k$  подключена к любой станции слева, расположенной в точке  $a_i$  (2.15).

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^m z_{ijkq} = x_{kq}, \quad k = \overline{2, n}, \quad q = \overline{1, m}; \quad (2.15)$$

Неравенства (2.8) и (2.9) и равенства (2.10) — (2.15) обеспечивают условие симметрии связи между базовыми станциями, расположенными в точках  $a_i$  и  $a_k$ ,  $\forall i, k$  (Рисунок 2.5).

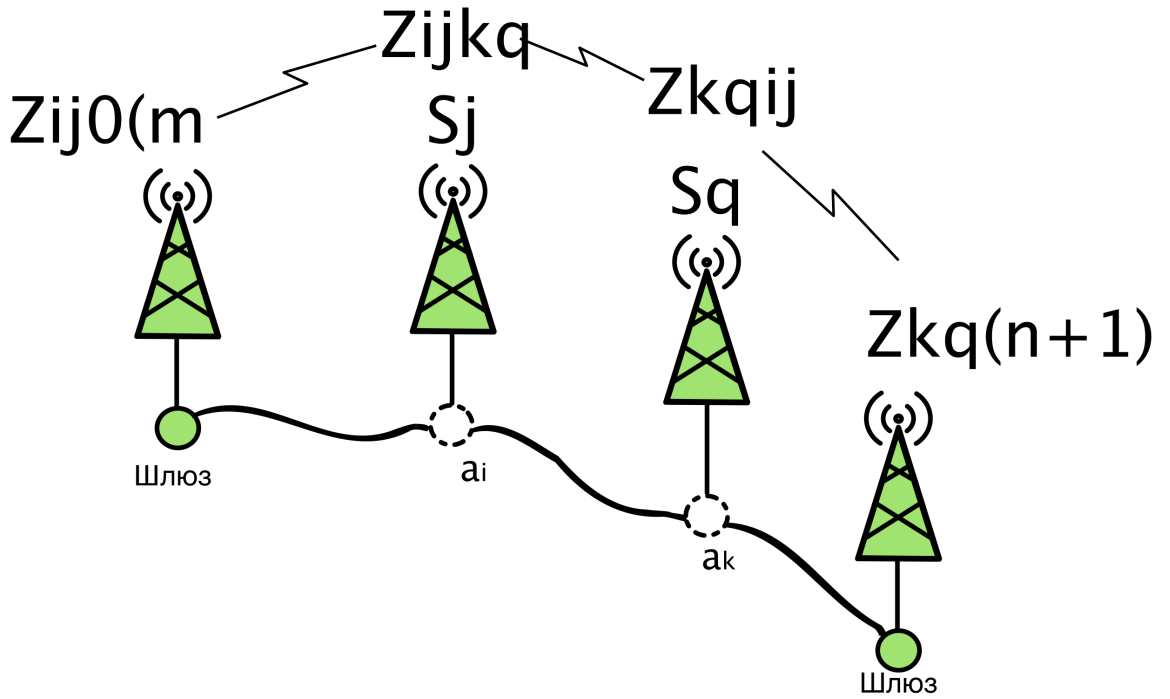


Рисунок 2.5 — Связь между базовыми станциями

Если станции  $s_j$  и  $s_q$  связаны, то максимальный радиус связи размещенных станций должен быть не меньше расстояния между точками  $a_i$  и  $a_k$ , где расположены станции  $s_i$  и  $s_q$  (Рис. 2.6). Формально это можно записать как (2.16) и (2.17).

$$\forall i = \overline{1, n}:$$

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_i - a_k)) \geq 0, \quad k = \overline{0, i-1}; \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j; \quad (2.16)$$

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_k - a_i)) \geq 0, \quad k = \overline{i+1, n+1}; \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j. \quad (2.17)$$

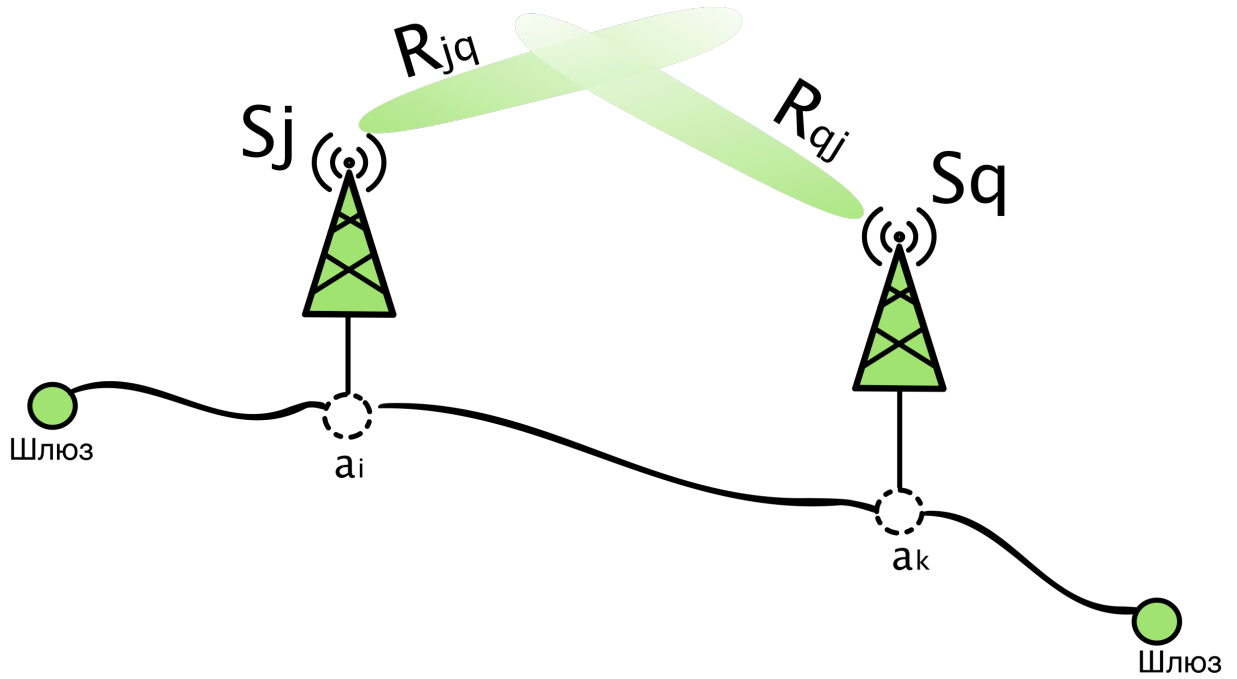


Рисунок 2.6 — Обеспечение связи с соседней станцией

И для бюджетного ограничения  $C$ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot c_j \leq C. \quad (2.18)$$

Работа [31] содержит доказательство NP-трудности для частного случая задачи ЦЛП, когда вдоль линейной территории размещают множество однотипных станций с одинаковыми параметрами. Задача называется NP-трудной, если ей соответствующая задача распознавания NP-полна [44]. Представленная в данном исследовании модель (2.1) – (2.18) рассматривает общий случай размещения, когда вдоль линейного участка размещают множество различных станций с разными техническими параметрами. Следовательно, данная задача является также NP-трудной.

Представленная математическая модель рассчитывалась в пакете Optimization Toolbox MATLAB. Числовой пример решения полученной математической модели задачи ЦЛП представлен в приложении В. В приложении также представлена методика расчета дальности связи для обеспечения коммуникации между базовыми станциями и охвата зоны покрытия.

## 2.3 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме

Эффективным способом повышения технико-экономических показателей при проектировании **БШС** является оптимизация топологии сети, а именно решение задачи выбора оптимального набора станций из заданного избыточного множества и определение мест их размещения вдоль линейной контролируемой территории. Основным результатом работы, представленной в этой главе, является разработка итерационного метода выбора оптимальной топологии сети в процессе комплексного проектирования БШС. Принципиальной особенностью предлагаемого метода, повышающей его эффективность, является то, что для рассмотрения на этапе моделирования предлагается не одно решения, а последовательности лучших решений задачи оптимизации топологии сети. Это позволяет с помощью разработанной итерационной процедуры выбирать на этапе моделирования лучшее решение среди тех решений по топологии, которые удовлетворяют требуемым характеристикам проектируемой БШС.

### 2.3.1 Постановка задачи и ее формулировка в экстремальной комбинаторной форме

Пусть задано множество станций  $S = \{s_j\}$  с параметрами  $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}, p_j, c_j\}, j = 1, \dots, m; q = 1, \dots, m; j \neq q$ . Каждая БС содержит два модуля радиосвязи - для подключения абонентов и для связи с соседними станциями. Первая характеризуется параметром  $r_j$  - максимальный радиус покрытия станции, вторая характеризуется множеством  $\{R_{jq}\}$  - матрица радиусов связи между  $j$ -ой и  $q$ -ой базовыми станциями. Также заданы параметры:  $p_j$  - пропускная способность БС и  $c_j$  - стоимость станции.

Задана максимальная допустимая стоимость размещенных станций  $C$ .

Задан отрезок  $\alpha$  длины  $L$  с концами в точках  $a_0$  и  $a_{n+1}$ . Внутри отрезка  $\alpha = [a_0, a_{n+1}]$  задано множество возможных точек размещения станций  $A = \{a_i\}, i = 1, \dots, n$  с координатами  $l_i$ . Точка  $a_0$  имеет координату  $l_0 = 0$ , точка

$a_{n+1}$  имеет координату  $l_{n+1} = L$ . На концах отрезка в вершинах  $a_0$  и  $a_{n+1}$  стоят станции специального вида – шлюзы  $s_0$  и  $s_{m+1}$ , соответственно, для которых радиусы покрытия, пропускные способности и стоимости не задаются. Радиусы связи для обеспечения соединения с размещаемыми БС задаются как  $R_{0j}$  и  $R_{(m+1)j}$ , соответственно. Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать область покрытия отрезка  $L$  при выполнении требования наличия связи каждой станции со станциями на концах отрезка (шлюзами) через систему размещенных станций, а также выполнении ограничений на величину межконцевой задержки  $T$  и суммарную стоимость размещенных БС  $C$ .

Сформулируем задачу в виде экстремальной задачи на конечном множестве.

*Допустимой расстановкой станций* назовем такой возрастающий по величине координат  $l_i$  набор пар  $P = \{a_i, s_j\}, a_i \in A, i \neq 0, i \neq n+1; s_j \in S$ , для которого выполняются требования:

1. Для каждой пары  $(a_i, s_j)$ :

- а) слева: либо найдется такая пара  $(a_k, s_q)$ , что,  $l_i - l_k \leq R_{jq}$  и  $l_i - l_k \leq R_{qj}$ , либо  $l_i - l_0 \leq R_{j0}$  и  $l_i - l_0 \leq R_{0j}$ ;
- б) справа: либо найдется такая пара  $(a_t, s_g)$ , что,  $l_t - l_i \leq R_{jg}$  и  $l_t - l_i \leq R_{gj}$ , либо  $l_{n+1} - l_i \leq R_{j(m+1)}$  и  $l_{n+1} - l_i \leq R_{(m+1)j}$ .

Данное требование гарантирует, что любая станция может быть связана со станциями на концах отрезка либо через промежуточные станции, либо непосредственно;

2. В одной точке стоит не более одной станции;

3. Сумма задержек по всем размещенным станциям меньше заданной величины  $T$  – средней межконцевой задержки по времени по всей системе станций:

$$\sum_{j \in S_\sigma} \overline{T}_j \leq T,$$

где  $S_\sigma$  – множество размещенных станций,  $\overline{T}_j$  – среднее время задержки на станции. Расчет задержек описан в параграфе 1.2.2

4. Суммарная стоимость размещенных станций меньше заданного бюджетного ограничения  $C$ .

Каждой допустимой расстановке станций  $P$  соответствует величина покрытия  $z(P)$ , определяемая как суммарная длина всех таких участков  $\tau, \tau \subset \alpha$ ,

что каждая точка этих участков попадает в зону покрытия, по крайней мере, одной станции, входящих в набор пар  $P$ .

Для удобства описания в дальнейшем алгоритмов введем понятие «недопокрытия» отрезка  $\alpha$ :

$$f(P) = L - z(P)$$

Пусть  $G$  – множество всех допустимых расстановок  $P$ . Тогда мы можем сформулировать нашу задачу в следующей комбинаторной форме экстремальной задачи на конечном множестве.

### **Задача 1.**

Требуется найти такую допустимую расстановку  $P^*$ , что

$$P^* = \operatorname{argmin}_{P \in G} f(P) \quad (2.19)$$

Обозначим через  $\Gamma$  все множество вариантов размещения станций (необязательно допустимых) из множества  $S$  на заданном множестве возможных мест их размещения.

## **2.3.2 Дерево ветвлений для перебора элементов в множестве $\Gamma$**

Опишем процедуру построения бинарного дерева поиска (дерева ветвлений) для полного перебора без повторений всех элементов множества  $\Gamma$ . Данная процедура будет использована при построении дерева поиска в алгоритме МВиГ решения **задачи 1** [45].

Будем предполагать, что в множестве  $S$  станции упорядочены по не убыванию радиусов покрытия.

Описываемая процедура использует известный прием разбиения множества  $G$  на подмножества с использованием некоторого параметра. Процесс формирования и последовательность исследования подмножеств обычно представляется с помощью дерева поиска, представляющего собой ориентированное от корня «дерева ветвлений», где каждому подмножеству соответствует вершина на дереве. Множеству  $\Gamma$  соответствует корневая вершина.

### **Параметр для разбиения множеств на подмножества**

**Процедура 1.** Выбор способа ветвления дерева связан со спецификой задачи. В случае **задачи 1** спецификой является размещение множества станций  $S$  на множестве возможных точек размещения  $A$ . На каждом узле дерева будем применять дихотомическое ветвление.

Пусть  $G_0$ , где нижний индекс – номер итерации, исходное множество  $\Gamma$ . На каждой итерации, начиная с итерации  $\nu = 0$ , разбиваем текущее подмножество  $G_\nu$  на два подмножества  $G_\nu^1$  и  $G_\nu^2$ . При этом множество  $G_\nu$  обычно называется «материнским», а множества  $G_\nu^1$  и  $G_\nu^2$  – «потомками» множества  $G_\nu$  или дочерними узлами (Рисунок 2.7.)

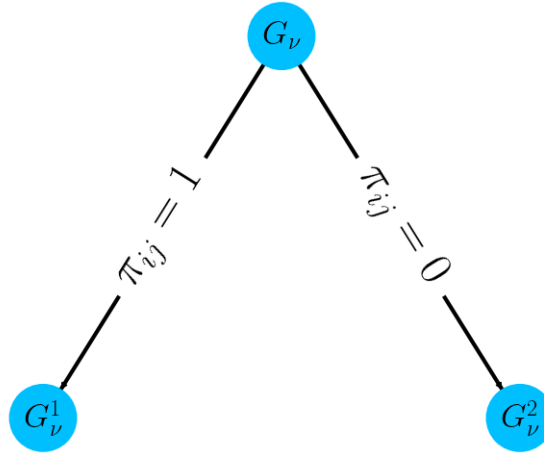


Рисунок 2.7 — Ветвление бинарного дерева

В качестве параметра разбиения воспользуемся переменной  $\pi_{ij}$ , принимающей два значения 0 и 1:

- $\pi_{ij} = 1$ , если наложено условие, что на месте  $a_i$  расположена станция  $s_j$ ;
- $\pi_{ij} = 0$ , если наложено условие, что на месте  $a_i$  станция  $s_j$  располагаться не будет.

В дальнейшем будем считать, что для множества  $G_\nu^1$  задано условие  $\pi_{ij} = 1$ , а для множества  $G_\nu^2$  задано условие  $\pi_{ij} = 0$ .

Все множества удовлетворяют следующим условиям:

$$G_\nu^1 \cup G_\nu^2 = G_\nu; \quad (2.20)$$

$$G_\nu^1 \cap G_\nu^2 = \emptyset. \quad (2.21)$$

Выбор переменной для разбиения на  $\nu$ -ой итерации

На этапе разбиения любого множества  $G_v$  все множество переменных  $\Pi = \{\pi_{ij}\}$  можно разделить на три подмножества: множество  $\Pi^+$  – «фиксированные» переменные, для которых  $\pi_{ij} = 1$ , множество  $\Pi^-$  – «запрещенные» переменные, для которых  $\pi_{ij} = 0$ , и множество  $\Pi^f$  – «свободные» переменные, для которых значения на данной итерации еще не заданы.

Правило выбора переменной для разбиения множества  $G_v$ . Для разбиения множества  $G_v$  на данной итерации выбирается из множества  $\Pi^f$  переменная с наименьшим индексом  $j$  среди всех переменных с наименьшим индексом  $i$ . Таким образом сначала определяется незанятое место размещения  $a_i$  с наименьшим номером (индексом  $i$ ) и на нем размещается еще не размещенная станция  $s_j$  с наименьшим номером (индексом  $j$ ).

**Движение по дереву ветвлений.** После разбиения очередного подмножества  $G_v$  два подмножества  $G_v^1$  и  $G_v^2$ , последним на дереве ветвлений присваиваются порядковые индексы  $G_{v+1}$  и  $G_{v+2}$ , соответственно (Рисунок 2.8). При формировании дерева ветвлений различаются два типа шагов: «прямой» шаг и «обратный» шаг. Прямой шаг – это движение «в глубину» по той же ветви дерева, реализующее очередное разбиение множества  $G_v$  на два потомка, и обратный шаг, реализующий переход от множества  $G_v$  к одному из ранее сформированных подмножеств. Обратный шаг делается в том случае, когда: либо получено множество  $G_v$ , состоящее из единственного элемента, либо множество  $G_v$  при данном наборе значений переменных  $\pi_{ij}$ , выделяющих данное подмножество  $G_v$  из множества  $G_0$ , пусто. В этих случаях соответствующая вершина дерева называется «закрытой».

Для движения по дереву будем использовать правило **LIFO**. На основании этого правила прямые шаги будут выполняться до тех пор, пока не будет получена закрытая вершина. На дереве ветвлений это соответствует продолжению движения по той же ветви дерева. При этом из двух множеств  $G_v^1$  и  $G_v^2$  первым будет исследоваться на возможность закрытия соответствующей вершины множество  $G_v^1$ . Если вершина в результате проведенного исследования не будет закрыта, то из неё будет продолжено дальнейшее движение по той же ветви (выполнение прямого шага). Если вершина будет закрыта, то будет выполнен обратный шаг: для дальнейшего рассмотрения и продолжения движения будет выбрана незакрытая вершина с наибольшим порядковым номером  $v$  среди всех



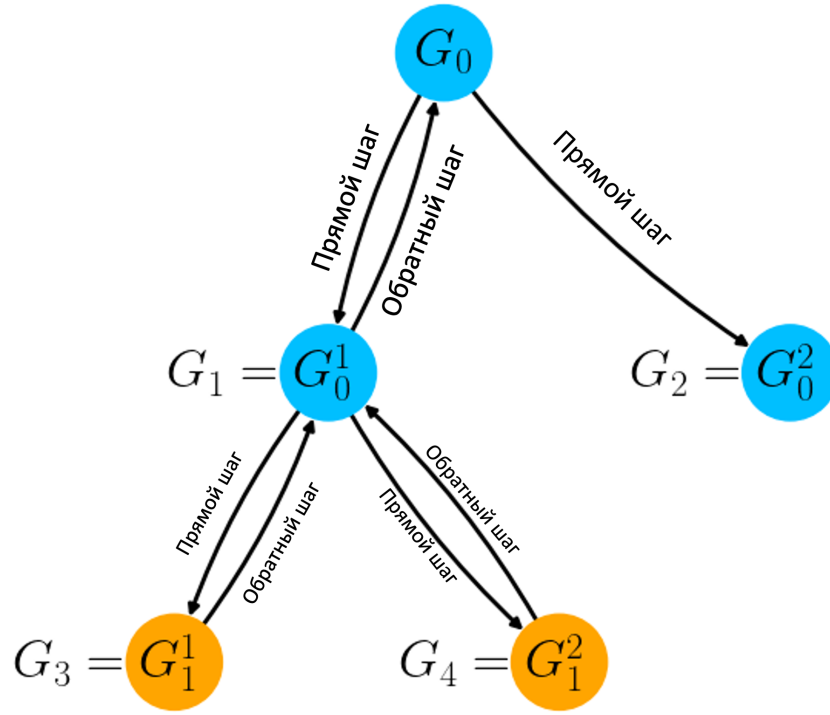


Рисунок 2.8 — Движение по дереву поиска

висячих вершин дерева (последняя сформированная вершина из нерассмотренных). Процедура будет завершена, когда все вершины дерева будут закрыты.

Заметим, что выполнение условий (2.20) и (2.21) гарантирует, что в результате завершения работы *процедуры 1* будут просмотрены все элементы множества  $\Gamma$  без повторений. Эти же условия определяют фундаментальное свойство дерева ветвлений: на каждой итерации объединение множеств  $G_v$  всех висячих вершин дерева дает исходное множество  $G_0$  корневой вершины.

### 2.3.3 Метод ветвей и границ для задачи размещения БС

Для построения алгоритма **МВиГ** для решения **задачи 1** с использованием *процедуры 1* для построения дерева ветвлений нам достаточно разработать методы исследования вершин дерева на возможность их закрытия. В соответствии с техникой **МВиГ** закрытие вершины в результате исследования, соответствующего ей множества  $G_v$  возможно в трех случаях.

**Случай 1.** Множество  $G_v$  – пусто, т.е. доказано, что в множестве  $G_v$  при данном наборе фиксированных и запрещенных переменных  $\pi_{ij}$  нет ни одной допустимой расстановки  $P$ .

**Случай 2.** Доказано, что в множестве  $G_v$  не может быть допустимой расстановки  $P$  с меньшим значением целевой функции (1), чем у лучшей расстановки  $\hat{P}$  из уже найденных. Значение функции  $f(\hat{P})$  называется «рекордом», а расстановка  $\hat{P}$  – «рекордным решением». В качестве начального рекорда принимается число заведомо большее искомого оптимального решения, например,  $L$  – длина всего отрезка.

**Случай 3.** Найдено оптимальное решение **задачи 1** на множестве  $G_v$ . Прежде чем рассмотреть эти три случая, запишем важное свойство любого множеств  $G_v$ , являющееся следствием принятого правила выбора свободной переменной для разбиения очередного множества  $G_v$  при прямом шаге.

**Свойство 1.** Пусть для исследуемого множества  $G_v$ ,  $v > 0$ , точка  $a_k$  – это одно любое из мест, на которых уже размещены станция из множества  $S$  в соответствии с набором фиксированных и запрещенных переменных  $\pi_{ij}$ , выделяющим данное множество из множества  $G_0$ . Тогда для всех мест «слева» от  $a_k$ , т.е. точек  $a_i$ ,  $i < k$ , размещение станций уже определено (при этом некоторые места могут быть пустыми). Перейдем непосредственно к исследованию случаев 1 – 3.

### Случай 1.

Проверка текущего множества  $G_v$  на пустоту состоит в установлении факта невозможности выполнения требований 1) – 4) введенных ранее при определении допустимой расстановки.

Рассмотрим проверку условия выполнения требования 1) для множества  $G_v$ ,  $v > 0$ .

Пусть множество  $G_v$  образовано разбиением материнского множества при помощи переменной  $\pi_{kt} = 1$ . Проверяем, что каждый из радиусов  $R_{th}$  и  $R_{ht}$ , где  $h$  – индекс станции, размещенной на ближайшей слева к точке  $a_k$  точке  $a_d$  больше расстояния  $l_k - l_d$ . Если ближайшая слева точка – это точка  $a_0$  (левый конец отрезка  $\alpha$ ), то делается проверка, для радиуса  $R_{t0}$  и  $R_{0t}$ .

Если данное условие не выполняется, то множество  $G_v$  недопустимо, соответствующая вершина закрывается и делается шаг обратного хода в соответствии с **процедурой 1**.

Если множество  $G_v$  образовано разбиением материнского множества при помощи переменной  $\pi_{kt} = 0$  и  $a_d$  – точка с наибольшим индексом, среди точек, на которых уже размещены станции (точки  $a_0$ , если размещенных станций

нет), то надо проверить, что среди нераспределенных станций, без учета станции  $s_t$ , есть такая станция  $s_q$  что расстояние между точками  $a_k$  и  $a_d$  не больше, чем  $R_{qh}$  и  $R_{hq}$ . Если проверка отрицательна, то множество  $G_v$  – пусто, соответствующая этому множеству на дереве поиска вершина должна быть закрыта и выполняется шаг обратного хода в соответствии с *процедурой 1*.

Требование 2) выполняется соответствующим выбором очередной станции для размещения, требования 3) и 4) выполняются непосредственным суммированием соответствующих параметров у размещенных станций.

**Случай 2.** Построим оценку величины «недопокрытия» для множества  $G_v$ , полученного из материнского множества добавлением условия  $\pi_{kt} = 1$ . Частичным «недопокрытием» назовем величину  $\Delta(k, d, p, t)$ , которая вычисляется по формуле:

$$\Delta(k, d, p, t) = \max\{(a_k - a_d) - (r_p + r_t), 0\}. \quad (2.22)$$

Частичное «недопокрытие» (2.22) определяется для любых двух точек  $a_d$  и  $a_k, k > d$ , на которых расположены станции  $s_p$  и  $s_t$  при условии, что между этими точками нет других станций. Очевидно, что для любой расстановки  $P$  «недопокрытие»  $f(P)$  вычисляется как сумма всех «недопокрытий»  $\Delta(k, d, p, t)$  между местами размещения станций, включая концы отрезка  $\alpha$ , на которых стоят станции особого типа  $s_0$  и  $s_{m+1}$ .

Построим нижнюю оценку  $W(G_v)$  для недопокрытий  $f(P)$  расстановок  $P$  множества  $G_v$ , т.е.

$$W(G_v) \leq f(P), P \in G_v.$$

Если  $W(G_v) \geq f(\hat{P})$ , то множество  $G_v$  не может содержать расстановки лучше уже найденной расстановки  $\hat{P}$  соответствующая множеству  $G_v$  вершина на дереве поиска должна быть закрыта и далее выполняется шаг обратного хода в соответствии с *процедурой 1*.

Построим оценку «недопокрытия» для множества  $G_v$ , полученного из материнского множества добавлением условия  $\pi_{kt} = 1$ . Оценку будем искать в виде суммы

$$W(G_v) = w_1(G_v) + w_2(G_v). \quad (2.23)$$

Величина  $w_1(G_v)$  вычисляется как сумма все частичных «недопокрытий» слева от вершины  $a_k$  и величины радиуса покрытия, размещаемой станций  $r_t$ . Оценку  $w_2(G_v)$  вычислим «для недопокрытия» справа на части  $\beta$  до конца отрезка  $\alpha$  (точки  $a_{n+1}$ ). Данную оценку получим релаксацией условий, определяющих допустимую расстановку станций на участке  $\beta$ . Найдем такое подмножество  $S_\beta$  множества станций  $S$ , состоящее из еще не размещенных станций и дающее минимальное «недопокрытие» на участке  $\beta$  при выполнении только условий 2) – 4). Для этого сформулируем следующую задачу булевого программирования.

**Задача 2.**

$$z = |\beta| - \sum_{x_j \in S_\beta} 2r_j x_j \rightarrow \min.$$

при условии:

$$\sum_{x_j \in S_\beta} c_j x_j \leq C, \quad (2.24)$$

$$\sum_{x_j \in S_\beta} x_j \leq m, \quad (2.25)$$

$$x_j \in \{0, 1\},$$

где  $|\beta|$  – длина отрезка  $\beta$ ,  $m$  – число свободных мест для размещения станций на отрезке  $\beta$ ,  $r_j$  – радиус покрытия станции  $s_j$ ,  $c_j$  – стоимость станции  $s_j$  и  $C$  – бюджетное ограничение.

Очевидно, что эффективность использования оценки в методе ветвей и границ определяется точностью оценки и временем ее вычисления. **Задача 2** – это задача ЦЛП, являющаяся трудно решаемой [46]. На основании **задачи 2** можно получить две оценки менее точные, но имеющие более эффективные методы решения. Заметим, что при снятии ограничения (2.24) или (2.25) **задача 2** представляет собой целочисленную задачу о ранце с эффективным псевдополиномиальным алгоритмом решения [46]. При этом с точки зрения точности оценки, более перспективным представляется снятие ограничения (2.25), так как на практике, обычно, число возможных мест размещения станций существенно меньше числа размещенных станций, полученного в результате решения задачи. Назовем задачу, полученную снятием ограничения (2.25), **задачей 3.**

Задачу 2 при снятии условия целочисленности на переменные назовем задачей 4. Задача 4 есть задача линейного программирования. Очевидно, что задачи 3 и задачи 4, являясь оценками целевой функции решения задачи 2, могут служить оценками  $w_2(G_v)$ . Результаты численного эксперимента с различными оценками вынесены в [приложение 2](#).

Если множество  $G_v$  получено из материнского добавлением условия  $\pi_{kt} = 0$ , то оценка  $W(G_v)$  равна оценке материнского множества.

В [приложении 1](#) приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающего время решения задач 2, 3, 4 и относительную точность задачи 3 и 4 по отношению к задаче 2.

Перейдем к рассмотрению случая 3. Рассматривается только для множеств  $G_v$ , состоящих из единственной расстановки  $P$ , для которой «недопокрытие»  $f(P)$  вычисляется как сумма всех «недопокрытий»  $\Delta(k, d, p, t)$  между местами, где размещены станций, включая концы отрезка  $\alpha$ , на которых стоят станции  $s_0$  и  $s_{m+1}$ .

Если для найденной расстановки  $P$  выполняются условия 1) – 4), которые для единственной расстановки легко проверяются, и

$$f(P) < f(\hat{P}), \quad (2.26)$$

то  $f(P)$  принимается за новый рекорд  $f(\hat{P})$ , расстановка  $P$  становится новым рекордным решением  $\hat{P}$  и выполняется шаг обратного хода в соответствии с **Процедурой 1**, если неравенство (2.26) не выполняется, то рекорд остается прежним и выполняется шаг обратного хода.

Работа алгоритма МВиГ заканчивается, когда все вершины дерева поиска закрыты, при этом решение задачи:

$$P^* = \hat{P}, f(P^*) = f(\hat{P}).$$

### 2.3.4 Построения последовательности топологий для итерационной процедуры моделирования БШС

При проектировании БШС надо найти ее оптимальную топологию среди всех топологий, для которых будут выполняться все требования к показателям,

исследуемым и рассчитываемым на этапе моделирования сети. Для решения этой задачи воспользуемся идеей метода построения последовательности планов [47]. Данный подход позволяет для задач на конечных множествах найти не одно любое экстремальное решение, а множество лучших решений [48, 49].

Рассмотрим **задачу 1**.

Требуется найти такую допустимую расстановку  $P^*$ , что

$$f(P^*) = \min\{f(P), P \in G\}.$$

Построим для этой задачи последовательность  $\Gamma = P^1, P^2, \dots, P^k$  допустимых расстановок (решений) множества  $G$  для заданного  $k$ , где

$$\begin{aligned} f(P^1) &= f(P^*), \\ f(P^2) &= \text{extr}\{f(P), P \in G \setminus P^1\}, \\ &\dots \\ f(P^k) &= \text{extr}\{f(P), P \in G \setminus P^1 \cup P^2 \cup \dots P^k\}, \end{aligned}$$

В последовательности  $\Gamma$  каждое решение не лучше предыдущего и не хуже последующего.

Теперь воспользуемся следующей процедурой. Будем последовательно, начиная с первой расстановки, выполнять этап моделирования **БШС**. Очевидно, как только мы получим расстановку, удовлетворяющую всем требованиям этапа моделирования, мы решим задачу нахождения оптимальной топологии среди всех топологий, для которых выполняются все требования к показателям, исследуемым и рассчитываемым на этапе моделирования сети. Действительно, для всех предыдущих расстановок эти условия не выполняются, а все последующие расстановки в последовательности  $\Gamma$  не могут быть лучше по критерию  $f(P)$ .

Обсудим вопрос как строить подобную последовательность на основании алгоритма **МВиГ**, описанного в параграфе 2.3.3. Заменяя неравенство (2.26) на нестрогое и записывая все рекорды, полученные в процессе работы алгоритма, мы, очевидно, получим последовательность расстановок, где каждая расстановка не хуже предыдущей и не лучше последующей. Для получения последовательности  $\Gamma$  достаточно «перевернуть» полученную последовательность, где первый элемент станет последним.

Недостатком такой процедуры является то, что для исследования на этапе моделирования будут отобраны только расстановки не хуже первого рекорда и

среди них может не оказаться расстановки, удовлетворяющей критериям моделирования. Для расширения множества  $\Gamma$  можно сделать следующее. Зададим условие, что в результате решения **задачи 1** мы хотим получить не только оптимальное решение, но и все решения не хуже оптимального на величину  $d$ . Для решения такого варианта задачи достаточно неравенство (2.26) в алгоритме **МВиГ** заменить следующим неравенством

$$f(P) \leq f(\hat{P}) + d, \quad (2.27)$$

где  $d = \varepsilon \cdot L > 0$ ,  $\varepsilon$  – заданное отклонение в процентах, и запоминать все рекорды, полученные в процессе решения задачи.

На основании неравенства (2.27) можно построить итерационную процедуру, увеличивая величину  $d$ , если при данном ее значении допустимого решения на этапе моделирования не найдено. В **приложении 2** представлены результаты численного примера.

## 2.4 Сравнительная оценка полученных моделей

Для решения задачи оптимального размещения базовых станций вдоль линейной территории были представлены математическая модель целлочисленного линейного программирования и комбинаторная модель в экстремальной форме, для которой представлен специальный алгоритм метода ветвей и границ, учитывающий специфику задачи – размещение вдоль линейной территории и обеспечения связи между всеми размещенными станциями.

В обеих задачах предполагается, что из заданного множества БС может быть размещено любое количество станций, удовлетворяющих условиям задачи. Через систему размещенных БС необходимо обеспечить связь между левым и правым шлюзом. Для задачи ЦЛП размещение должно удовлетворять бюджетному ограничению. И для задачи в комбинаторной форме задача должна удовлетворять бюджетному ограничению и ограничению на межконцевую задержку сети.

Для того чтобы сравнить полученные модели, решим частный случай задачи максимизации покрытия с размещением всех имеющихся БС. Опустим

бюджетное ограничение для обеих задач и для комбинаторной модели ограничение на время межконцевой задержки в сети. Вместо данных ограничений, добавим условие размещения всех имеющихся  $m$  станций. Данное ограничение позволит зафиксировать множество допустимых вариантов размещения, необязательно допустимых. Общее количество  $\gamma$  вариантов расстановки  $m$  станций по  $n$  точкам размещения равна

$$\gamma = C_n^m \cdot m! .$$

Для задачи ЦЛП условие размещения  $m$  станций будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = m. \quad (2.28)$$

Для задачи в комбинаторной форме данное условие гарантируется, когда число пар в наборе  $P = \{(a_i, s_j), a_i \in A, i \neq 0, i \neq n+1; s_j \in S\}$  равна мощности множества размещения  $|S|$ .

Так как теперь количество размещаемых мест зафиксировано, в уравнении (2.23) для оценки "недопокрытия" справа  $w_2(G_v)$  вместо труднорешаемой **задачи 2** воспользуемся уравнением:

$$w_2(G_v) = \max\{(l_{n+1} - l_k) - (r_t + \sum_{j \in S_v} 2 \cdot r_j), 0\}, \quad (2.29)$$

где  $S_\beta$  подмножества еще не размещенных станций,  $r_t$  – радиус покрытия размещаемой станции  $S_t$ ,  $l_k$  – координата точки размещения  $a_k$ .

В таблице приведены результаты решения задач алгоритмом МВиГ и методом полного перебора (МПП)

Для различных случаев числа мест размещения  $m$  и числа станций  $n$  сравним результаты решения задачи представленными моделями. Оценка сравнения с помощью времени счета необъективна, так как алгоритм МВиГ и комбинаторная модель написаны на интерпретируемом языке Python. Коммерческие продукты представляют быстрые и качественные инструменты. Написание производительного кода для предложенных в данной диссертации моделей является отдельной не простой задачей, выходящей за рамки данного исследования. Коммерческие продукты решающие задачи ЦЛП основаны на алгоритме,



предложенный Алисой Лэнд и Элисон Дойг [50], в котором процедура поиска целочисленного решения также использует МВиГ. Поэтому для сравнения моделей будет использована характеристика – число просмотренных вершин в ходе поиска оптимального решения. Для сравнения также будут представлены решения задачи в комбинаторной форме методом полного перебора (МПП).

Для каждого набора станций и мест размещения было рассчитано по 10 примеров с различными параметрами БС. В таблице 1 приводятся усредненные показатели числа просмотренных вершин дерева поиска по каждому 10 примерам. Результаты решения задачи максимизации покрытия влияют не только от количества точек размещения  $n$ , но также от их координат. Примем, что для каждой размерности для всех 10 примеров координаты фиксированные для всех моделей: МПП, МВиГ и ЦЛП.

### ПЕРЕСЧИТАТЬ КОЛИЧЕСТВО ПРОЙДЕННЫХ УЗЛОВ ДЛЯ МПП

Жирным цветом в колонках пройденных узлов в ходе движения по дереву поиска МПП, МВиГ и ЦЛП выделены минимальные значения для фиксированных значений  $n$  и  $m$  (размерностей задачи). Как видно из результатов сравнения, при увеличении размерности задачи разработанный алгоритм метода ветвей и границ для комбинаторной модели показывает лучшие результаты по сравнению с математической моделью ЦЛП.

## 2.5 Выводы по Главе 2

Представлена математическая модель задачи размещения базовых станций беспроводной сети связи вдоль линейного участка в виде задачи ЦЛП. В качестве примера представлен численный пример решения задачи.

В работе предложена методика проектирования беспроводной широкополосной сети для контроля линейной трассы с использованием итерационной процедуры построения последовательности лучших решений задачи выбора и размещения базовых станций при выполнении технологических условий на проектирование сети и ограничения на стоимость размещаемых станций.

Предложенная методика позволяет на этапе моделирования выбирать лучшее решение среди тех решений по выбору и размещению станций, которые удовлетворяют требованиям, предъявляемым к проектируемой сети.

Процедура нахождения последовательности лучших решений задачи выбора и размещения базовых станций основана на разработанном алгоритме МВиГ.

Таблица 1 — Результаты численного решения.

Число точек размещения, $n$	Число станций, $m$	Количество вариантов размещения, $\gamma$	Количество пройденных узлов дерева поиска, $\nu$		
			МПП	МВиГ	ЦЛП
7	4	840	3122	360	<b>275</b>
7	5	2 520	16 114	560	<b>45</b>
7	6	5 040	59 564	364	<b>19</b>
8	4	1 680	4954	434	<b>189</b>
8	5	6 720	6720	<b>852</b>	878
8	6	20 160	15 9170	592	<b>185</b>
9	4	3 024	9 882	<b>458</b>	5511
9	5	15 120	58 190	<b>768</b>	1236
9	6	60 480	366 512	<b>720</b>	13294
10	4	5 040	14 868	<b>800</b>	6243
10	5	30 240	113 932	<b>414</b>	8043
10	6	151 200	828 952	<b>40 872</b>	71587
11	4	7 920	23 482	<b>354</b>	15538
11	5	55 440	204 894	<b>9 138</b>	74440
11	6	332 640	1 592 500	<b>88 002</b>	413 767