

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Внедрение БШС на нефтегазовых месторождениях . .	10
1.1 Этапы проектирования БШС	12
1.2 Анализ современных беспроводных широкополосных технологий передачи данных	14
1.2.1 Wi-Fi	14
1.2.2 LTE	18
1.2.3 5G NR	20
1.3 Выбор протокола беспроводной широкополосной сети для решения задачи синтеза топологий	23
1.4 Определение параметров БШС, необходимых для решения задач размещения базовых станций	24
1.4.1 Энергетический потенциал канала связи	25
1.4.2 Модель потерь в свободном пространстве	27
1.4.3 Модель распространения SUI	29
1.4.4 Модель двух лучевого распространения	30
1.4.5 Модель Окамура-Хата	31
1.4.6 Расчет параметров БС, необходимых для задачи оптимизации	32
1.5 Оценка характеристик производительности сети с помощью стохастических моделей массового обслуживания	34
1.5.1 Время передачи пакета в канале	34
1.5.2 Расчет межконцевой задержки	41
1.6 Выводы	45
Глава 2. Размещение базовых станций БШС для покрытия линейной территории	46
2.1 Актуальность внедрения БШС для телекоммуникационного покрытия линейного участка	46

2.2	Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде задачи целочисленного линейного программирования	51
2.2.1	Постановка задачи	52
2.2.2	Модель целочисленного линейного программирования . . .	53
2.3	Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме	59
2.3.1	Постановка задачи	60
2.3.2	Дерево ветвлений для перебора элементов в множестве Γ .	62
2.3.3	Метод ветвей и границ для задачи размещения БС	65
2.3.4	Построения последовательности топологий для итерационной процедуры моделирования БШС	70
2.4	Выводы	71
 Глава 3. Размещение базовых станций БШС для		
	обслуживания множества рассредоточенных объектов .	74
3.1	Актуальность внедрения БШС для обслуживания рассредоточенных объектов	74
3.2	Математическая модель задачи проверки допустимого решения при заданных местах размещения станций.	75
3.2.1	Постановка задачи	76
3.2.2	Модель линейного программирования	77
3.3	Математическая модель оптимальной задачи выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения	83
3.3.1	Постановка задачи.	83
3.3.2	Модель частично целочисленного линейного программирования	85
3.4	Выводы	91
 Глава 4. Программный комплекс и численные примеры		
	решения задач представленных математических	
	моделей	93
4.1	Программный комплекс расчета задачи размещения БС	93

4.2	Численный пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде задачи целочисленного линейного программирования	97
4.3	Численный пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме	100
4.4	Метод ветвей и границ на примере задачи размещени двух базовых станций	104
4.5	Сравнительная оценка полученных моделей	111
4.6	Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи 2, 3 и 4	113
4.7	Сравнение модели ЦЛП и комбинаторной модели	113
Заключение		116
Список сокращений и условных обозначений		118
Словарь терминов		119
Список литературы		120
Список рисунков		137
Список таблиц		139

Глава 2. Размещение базовых станций БШС для покрытия линейной территории

В данной главе представлены математические модели синтеза топологии БШС. Рассматриваются задачи оптимального размещения базовых станций, максимизирующее телекоммуникационного покрытия вдоль линейного участка. Под линейным участком подразумевается территория вдоль протяженного объекта, которую необходимо покрыть БШС. Примерами таких объектов могут являться: автомобильные и железные дороги, тоннели метрополитена, магистральные нефте- и газопроводы.

2.1 Актуальность внедрения БШС для телекоммуникационного покрытия линейного участка

Эффективным способом повышения технико-экономических показателей при проектировании БШС является оптимизация ее топологии, а именно решение задачи выбора оптимального набора базовых станций. В этой главе представлена задача, в которой необходимо обеспечить максимальное телекоммуникационное покрытие для охвата протяженного линейного участка.

Цифровая трансформация не обошла стороной транспортную отрасль. Весь мир активно участвует в развитии интеллектуальных транспортных систем (ИТС). Создание современной инфраструктуры передачи мультимедийной информации: голос, данные, видео вдоль протяженных магистралей является одной из важнейших проблем при создании новых и функционировании существующих транспортных магистралей [1]. Одним из перспективных направлений является организация на транспортных участках автомобильных сетей (Vehicular ad hoc network, VANET) [2, 3] (Рисунок 2.1). VANET позволяет объединить транспортные средства для обмена друг с другом (vehicle-to-vehicle, V2V) и с инфраструктурой (vehicle-to-infrastructure, V2X).

Развертывание и развитие сетей беспроводной связи вдоль протяженных магистралей требует решения ряда сложных организационно-технических задач в условиях жестких ограничений на использование частотных, экономиче-

ских и аппаратных ресурсов. В связи с этим возрастает актуальность решения проблемы оптимального размещения базовых станций вдоль транспортных магистралей, являющаяся одной из важнейших при проектировании БШС этого класса [1].

Организации БШС вдоль автодорог посвящено ряд зарубежных и отечественных работ. Большинство работ касаются проблемы размещения придорожных объектов (Roadside Unit, RSU) или БС вдоль автодорог. В [4, 5] предложены модели, использующие генетический алгоритм для решения задачи о максимальном покрытии. Максимизация покрытия БШС с учетом ограничения стоимости БС представлена в работах [6, 7]. В работах [8, 9, 10] предложены новые модели размещения БС с учетом характеристик трафика на дорожных участках. В [11] Рейз А. и др. представили задачу размещения БС для протокола IEEE 802.11p/Wave, позволяющая организовать связь для объектов движущихся на скоростях до 200 км/ч. В [12] для задачи развертывания узлов RSU вдоль автодорог представили модель на основе муравьиного алгоритма, максимизирующую телекоммуникационное покрытие. В работах [4, 13] в качестве ограничений учитываются временные ограничения при размещении БС. В [14] предлагают жадный алгоритм для минимизации RSU с условием ограничения задержек между любыми двумя узлами сети. В [15] предложен алгоритм развертывания RSU вдоль дорог сети миллиметрового диапазона, максимизирующий покрытие и учитывающий ограничение по показателю уровня принимаемого сигнала. В работе [16] представлена модель эгоистичного выбора базовых станций в беспроводной сети в игровой постановке, где каждый игрок стремится увеличить свою величину отношения «сигнал к интерференции плюс шум». В работе [17] представлены задача размещения RSU вдоль линейного участка протяженной автомагистрали в виде модели ЦЛП.

=====

В нефтегазовом секторе страны сегодня можно отметить резкий тренд цифровизации. Внедрение современных информационных технологий в производственные процессы в рамках перехода к «Индустрии 4.0» является главным перспективным направлением зарубежных и отечественных компаний. Данное требование подразумевает рост большого объема данных, требующих современных и надежных телекоммуникационных средств связи. Большинство объектов нефтегазовой отрасли в России охватывают огромные площади и находятся на

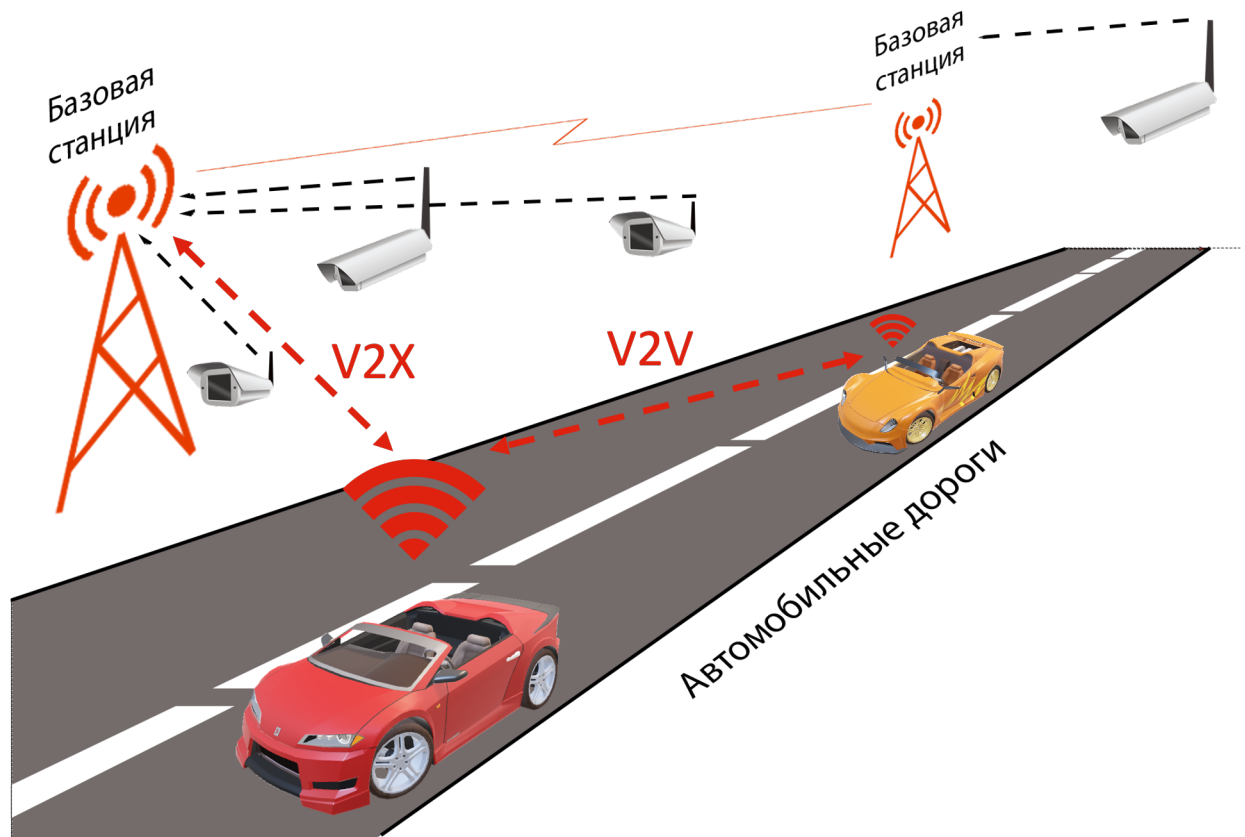


Рисунок 2.1 — Беспроводная сеть вдоль автомобильных дорог

удалении в труднодоступных регионах, поэтому наилучшим способом организации связи является внедрение БШС.

Ключевым объектом на нефтегазовом промысле, для которого можно развернуть БШС с линейной топологии, являются магистральные и промысловые трубопроводы, предназначенные для транспортировки товарной нефти или газа из района промысла, производства до места потребления. В общем случае под местами потребления понимают нефтебазы, перевалочные базы, пункты налива в цистерны и заводы [18] (Рисунок 2.2). В зависимости от географических особенностей и климатических условий магистральные трубопроводы могут прокладываться в подземном, наземном или надземном типах. Перед производством стоит задача не только сбора данных технологического процесса системами автоматизации, но и обеспечение норма безопасности и экологического контроля прилегающей территории.

Трубопроводы являются самым безопасным способом транспортировки нефти. К сожалению, одной из главных проблем при таком выборе транспортировке являются случайные утечки. Так к особо уязвимым участкам трубопроводной инфраструктуры относятся регулирующая арматура, ловуш-

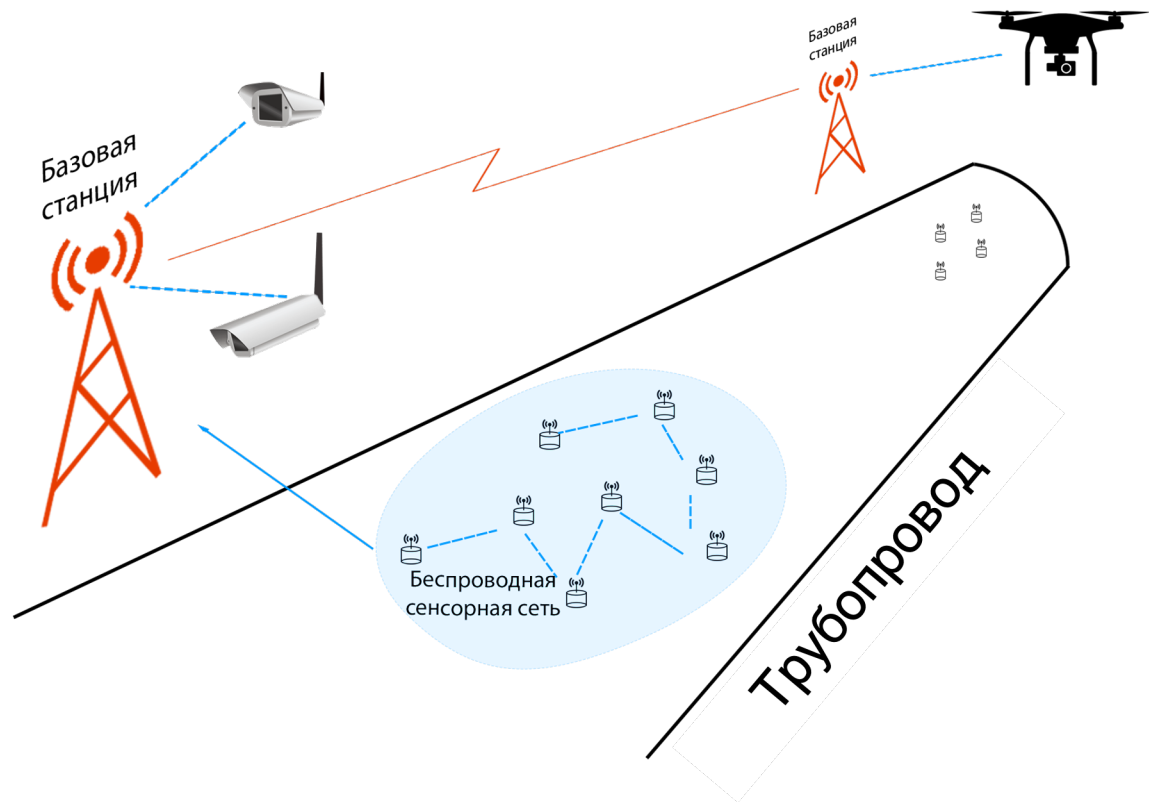


Рисунок 2.2 — Беспроводная сеть вдоль нефте- и газопроводов

ки для скребков, приемники скребков, счетчики и манометры. Позднее или несвоевременное обнаружение утечек для нефтегазовой компании может нанести миллионы финансовых убытков, а также нанести ущерб окружающей среде. В работе [19] представлена интеллектуальная система мониторинга за магистральными трубопроводами в реальном времени с помощью БШС, способной обнаруживать акты вандализма в трубопроводной системе

Сегодня обеспечение безопасности персонала это задача, которая включает безопасность не только в течение рабочего процесса на технологических объектах, непосредственного, но и в течение всего времени нахождения на промысле.

Также одним из направлений цифровизации месторождений является внедрение высокоскоростных локальных сетей для организаций связи для мобильных обходчиков. **Доделать**

Эффективным средством прогнозирования и предотвращения аварийных ситуаций на магистральных трубопроводах, экологической защиты, а также достижения промышленной безопасности является мониторинг нефтепровода, с помощью современных беспроводных сетей связи, включающие беспроводное

технические средства для диагностики состояния трубопроводов, изменений, происходящих под влиянием геологических процессов на опасных участках [20, 21, 22, 23, 22].

=====

Еще одним примером развертывания БШС для охвата линейного объекта является организация телекоммуникационного покрытия на линиях метрополитена [24, 25, 26, 27, 28]. Компания Radwin развернула свои базовые станции в тоннелях московского метро, использующий проприетарный протокол передачи данных Wi-Fi 5ГГц [25, 26]. Оценка нагрузки сети Wi-Fi в московском метро [24]. В работах [28, 27] авторы представили свою эмпирическую модель распространения сигнала, учитывающая отражения в тоннелях, и представили свой алгоритм расстановки базовых станций внутри тоннеля. Основными критериями размещения являются минимизация средней плотности БС и обеспечение уровня принимаемого сигнала не ниже заданного порога при любом расположении состава в тоннеле. Модель распространения основывается на методе геометрической оптики и учитывает как геометрические, так и физические характеристики стен тоннелей.

=====

Безопасность на месторождении является самой важной задачей любого предприятия. Большинство нефтяных месторождений в России охватывают огромные площади и находятся на удалении в труднодоступных регионах. Сегодня обеспечение безопасности персонала это задача, которая включает безопасность не только в течение рабочего процесса на технологических объектах, непосредственного, но и в течение всего времени нахождения на промысле. Важными объектами, требующие постоянного контроля являются промышленные автодороги. С учетом большой удаленности технологических объектов на промысле друг от друга для контроля над промышленными автодорогами целесообразно организовать системы беспроводного видеонаблюдения на дорогах [1] (Рисунок 2.1). Одним из наиболее перспективных решений на транспортных участках является организация автомобильных сетей (Vehicular ad hoc network, VANET) [2, 3]. Для развертывания таких сетей хорошо подходит БШС. Организации БШС вдоль автодорог посвящено ряд зарубежных и отечественных работ. Большинство работ касаются проблемы размещения придорожных объектов (Roadside Unit, RSU) или другими словами БС вдоль автодорог. В [4, 5] предложены модели, использующие генетический алгоритм для решения

задачи о максимальном покрытии. Максимизация покрытия БШС с учетом ограничения стоимости БС представлена в работах [6, 7]. В работах [8, 9, 10] предложены новые модели размещения БС с учетом характеристик трафика на участках. В [11] представлена задача размещения БС для протокола IEEE 802.11p/Wave, позволяющая организовать связь для объектов движущихся на скоростях до 200 км/ч. В [12] предложена модель размещения БС с помощью муравьиного алгоритма. В работах [4, 13] в качестве ограничений учитываются временные ограничения при размещении БС. В [14] предлагают жадный алгоритм для минимизации RSU с условием ограничения задержек между любыми двумя узлами сети. В работе [17] представлена задача размещения RSU вдоль линейного участка протяженной автомагистрали.

2.2 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде задачи целочисленного линейного программирования

В середине прошлого века с появлением первых компьютеров свою широкую популярность приобрела область математики, задачей которой является поиск экстремальных решений на допустимых множествах. Это положило начало математическому программированию. Сегодня одним из наиболее интересных классов задач математического программирования являются задачи ЦЛП. Эти задачи формулируются как задачи линейного программирования (ЛП) с дополнительным ограничением целочисленности переменных. Для задач ЛП существуют эффективный алгоритм решения - симплекс-метод, предложенный Д. Данцигом [29]. Добавление ограничения целочисленности портит свойство выпуклости и полиномиальности задачи ЛП. [\[Ссылка\]](#). Основная проблема, возникающая при решении практических задач на конечных множествах – «проклятие размерности» [30]. С увеличением размерности пространства количества данных возрастает экспоненциально. Для решения задач целочисленного программирования распространены методы отсечения и комбинаторные методы [31, 32].

Идея методов отсечения заключается в решении задачи ЛП без учета целочисленности. Если полученное решение оптимальное решение не является

целочисленным, то вводятся дополнительные ограничения, отсекающие нецелочисленные вершины многогранника и вновь повторяется процедура поиска. Существующие алгоритмы отсекаются отличаются друг от друга способами формирования дополнительных ограничений для отсека нецелочисленности. Методы отсека имеют общий существенный недостаток. Практический опыт показал плохую сходимость. Для повышения эффективности вычислительных алгоритмов были предложены комбинаторные методы, основанные на упорядоченном переборе наиболее перспективных вариантов.

Одним из наиболее популярных комбинаторных методов для решения не только целочисленных, но и частично целочисленных задач ЛП является метод ветвей и границ (МВиГ). Впервые данный метод был предложен Лэнд и Дойгом в работе [33]. Существуют различные методы типы ветвей и границ. Все они основаны на последовательном разбиении допустимого множества на подмножества и вычислении оценок, позволяющие отбрасывать подмножества, не содержащие решение задачи.

Для практических задач существуют готовые коммерческие продукты, эффективно решающие задачу оптимизацию общего вида. Можно выделить наиболее популярные из них: MatLab Optimization ToolBox, Gurobi Optimizer, GLPK, CPLEX. Подробный обзор коммерческих, бесплатных и продуктов с открытым исходным кодом для задач линейного программирования представлен в работах [34, 35, 36].

В данной секции будет представлена математическая модель в виде задачи целочисленного линейного программирования для решения задачи максимизации телекоммуникационного покрытия участка при развертывании базовых станций БШС.

2.2.1 Постановка задачи

Проблема формулируется следующим образом. Для контроля над заданным линейным участком необходимо разместить базовые приемопередающие станции таким образом, чтобы максимизировать покрытие с ограничением на суммарную стоимость размещенных станций. Необходимо, чтобы любая БС в

сети могла быть связана со шлюзами на концах участка через систему размещенных станций.

Задано множество станций $S = \{s_j\}$. Каждой станции приписаны параметры $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}, c_j\}$, $j = \overline{1, m}$; $q = \overline{1, m}$; $q \neq j$. Каждая БС содержит два модуля радиосвязи - для подключения абонентов и для связи с соседними станциями. Первая характеризуется параметром r_j - максимальный радиус покрытия станции, вторая характеризуется множеством $\{R_{jq}\}$ - матрица радиусов связи между j -ой и q -ой базовыми станциями. Параметр c_j - это стоимость.

Задан линейный участок длиной L с концами в точках a_0 и a_{n+1} . Внутри отрезка $[a_0, a_{n+1}]$ задано конечное множество точек $A = \{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$; эти точки соответствуют набору свободных мест, где могут быть размещены станции. Каждая точка a_i определяется своей одномерной координатой l_i .

Заданы станции специального вида s_{m+1} - шлюзы. Данные шлюзы размещены на концах a_0 и a_{n+1} данного линейного участка. Для данных станций параметр радиуса покрытия $r_{m+1} = 0$. Радиус связи и стоимость не заданы.

Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать покрытие с условием ограничения на суммарную стоимость C .

2.2.2 Модель целочисленного линейного программирования

Перед тем как перейти к постановке задачи оптимизации в виде модели целочисленного линейного программирования, необходимо подготовки параметры БС: радиус связи между станциями R_{jq} и радиус телекоммуникационного покрытия r_j с помощью уравнений расчета дальности связи, представленных в главе 1.

Пусть y_i^+ и y_i^- , $i = \overline{0, n+1}$ определяют охват покрытия (справа и слева, соответственно) станций, покрывающих точку a_i (Рисунок 2.3). Параметры y_i^+ и y_i^- могут принимать только неотрицательные целые значения.

Величины покрытия для шлюзов $y_0^+, y_0^-, y_{n+1}^+, y_{n+1}^-$ равны 0.

Целевая функция будет представлена как:

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i^- + y_i^+) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

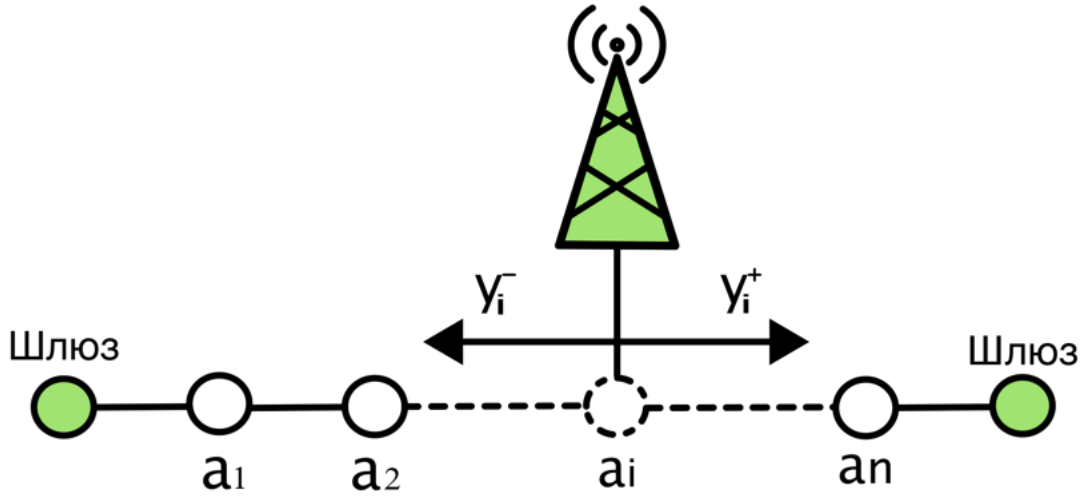


Рисунок 2.3 — Охват покрытия станции

Также введем бинарные переменные x_{ij} . Тогда $x_{ij} = 1$, если станция s_j , размещенная на точке a_i , и $x_{ij} = 0$ в противном случае; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$.

Введем двоичные переменные e_i . Тогда $e_i = 1$, если какая-либо станция находится в точке a_i , и $e_i = 0$ в противном случае; $i = \overline{1, n}$. Для точек размещения шлюзов a_0 и a_{n+1} переменные $e_0 = 1$ и $e_{n+1} = 1$, соответственно.

Сформулируем следующую систему ограничений задачи.

По определению (2.2):

$$e_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Каждая станция должна быть размещена только в одной точке. (2.3):

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Значения покрытий не превышают радиус покрытия станции, размещенной в точке a_i , и равны 0, если в точке a_i нет станции (2.4) и (2.5):

$$y_i^+ \leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.4)$$

$$y_i^- \leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot r_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Общая область покрытия между любыми двумя точками a_i и a_k , где расположены станции, не может превышать расстояние между этими точками (2.6) и (2.7).

$$y_i^+ + y_k^- \leq \frac{l_k - l_i}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{i+1, n+1}; \quad (2.6)$$

$$y_i^- + y_k^+ \leq \frac{l_i - l_k}{2} \cdot (e_i + e_k) + (2 - e_i - e_k) \cdot L, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{i-1, 0}, \quad (2.7)$$

где l_k и l_i - координаты точек a_i и a_k , соответственно. Это условие исключает влияние пересечений покрытий станций при вычислении общего значения покрытия между станциями (Рисунок 2.4).

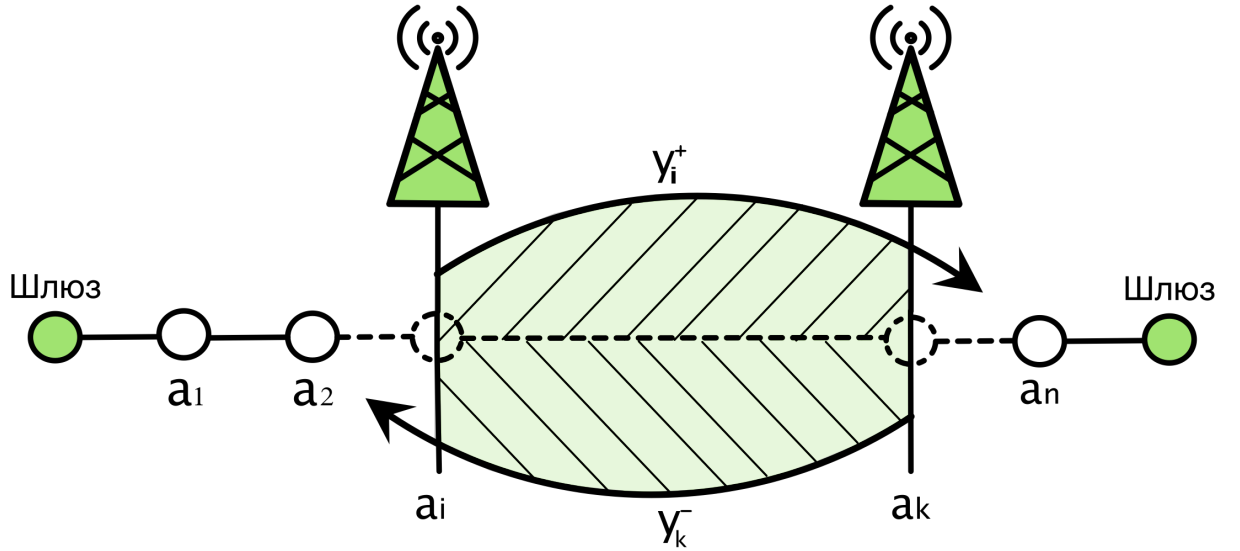


Рисунок 2.4 — Область покрытия между любыми двумя точками

Согласно условиям задачи, станция, расположенная в a_i , должна быть связана хотя бы с одной станцией слева и одной станцией справа, включая станции на конечных точках a_0 и a_{n+1} .

Введем бинарные переменные $z_{ijkq}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}, k \neq i; q = \overline{1, m}, q \neq j$.

Переменная $z_{ijkq} = 1$, если в точке a_i размещена станция s_j и данная станция связана со станцией s_q , размещенная в точке a_k ; и $z_{ijkq} = 0$ в противном случае.

Переменная $z_{ij0(m+1)} = 1$, если станция s_j , размещенная в точке a_i , связана со шлюзом s_{m+1} в точке a_0 ; $z_{ij0(m+1)} = 0$ в противном случае.

Переменная $z_{ij(n+1)(m+1)} = 1$, если здесь находится станция s_j в точке a_i и она связана со шлюзом s_{m+1} в точке a_{n+1} ; $z_{ij0(m+1)} = 0$ в противном случае.

Станции должны быть размещены в обеих точках a_i и a_k , (2.8) и (2.9):

$$z_{ijkq} \leq e_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}, k \neq i; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j; \quad (2.8)$$

$$z_{ijkq} \leq e_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n}, i \neq k; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j. \quad (2.9)$$

Стоит отметить, БШС работает в полудуплексном режиме. Переменная z_{ijkq} говорит только о наличии связи для передачи от БС s_j до БС s_q . Чтобы обеспечить связь в обоих направлениях, необходимо проверять условия для z_{ijkq} (от s_j до s_q) и для z_{kqij} (от s_q до s_j).

Необходимо обеспечить коммуникационную связь справа от БС (2.10) и (2.11). Станция s_j в точке a_i должна быть связана с любой станцией, расположенной в точке a_k , справа от a_i ($k > i$) или с правым шлюзом s_{m+1} (2.10)

$$\sum_{k=i+1}^n \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{ijkq} + z_{ij(n+1)(m+1)} = x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.10)$$

Требуется чтобы станция, размещенная справа от s_j или правый шлюз s_{m+1} были связаны с размещаемой станцией s_j (2.11)

$$\sum_{k=i+1}^n \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{kqij} + z_{(n+1)(m+1)ij} = x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.11)$$

Необходимо обеспечить коммуникационную связь слева от БС (2.12) и (2.13). Станция s_j в точке a_i должна быть связана с любой станцией, расположенной в точке a_k , слева от точки a_i ($k < i$) или с левым шлюзом s_0 (2.12)

$$z_{ij0(m+1)} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{ijkq} = x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.12)$$

Требуется чтобы станция, размещенная слева от s_j или левый шлюз s_0 были связаны с размещаемой станцией s_j (2.13)

$$z_{0(m+1)ij} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^m z_{kqij} = x_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.13)$$

Неравенства (2.8) и (2.9) и равенства (2.10) — (2.13) обеспечивают условие симметрии связи между базовыми станциями, расположенными в точках a_i и a_k , $\forall i, k$ (Рисунок 2.5).

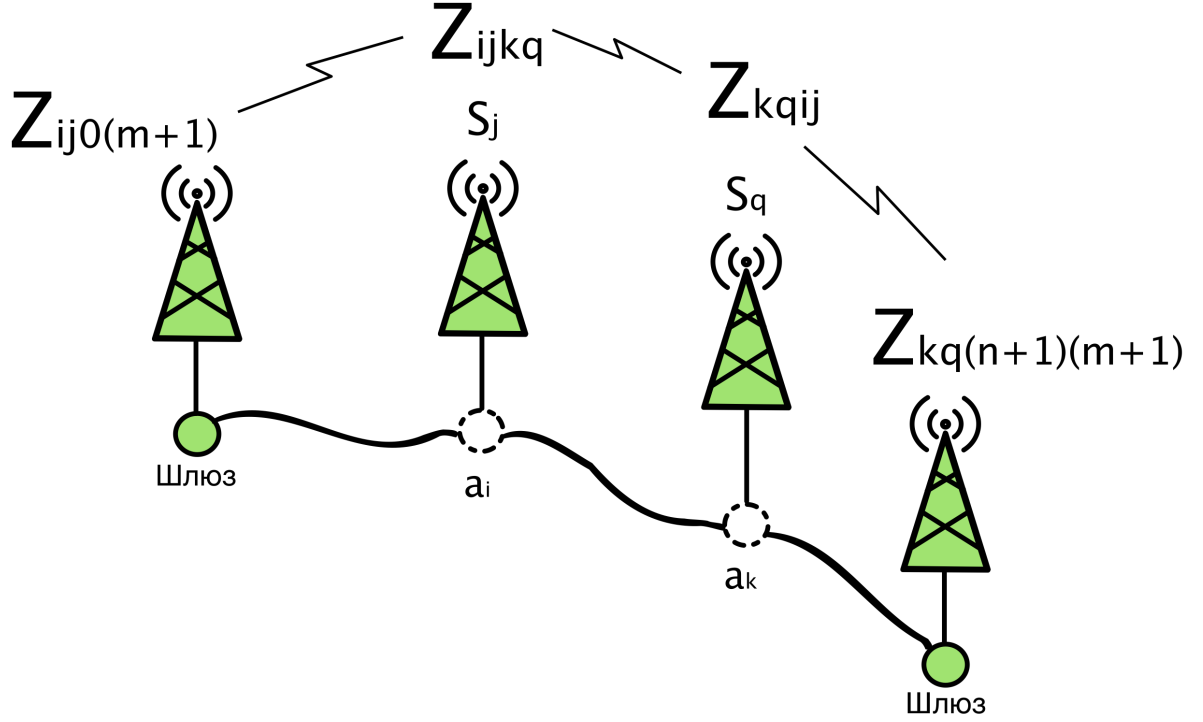


Рисунок 2.5 — Связь между базовыми станциями

Если станции s_j и s_q связаны, то максимальный радиус связи размещенных станций должен быть не меньше расстояния между точками a_i и a_k , где расположены станции s_i и s_q (Рис. 2.6). Формально это можно записать как (2.14) и (2.15).

$$\forall i = \overline{1, n}:$$

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_i - a_k)) \geq 0, \quad k = \overline{0, i-1}; \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j; \quad (2.14)$$

$$z_{ijkq}(R_{jq} - (a_k - a_i)) \geq 0, \quad k = \overline{i+1, n+1}; \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, m}, q \neq j. \quad (2.15)$$

Стоимость размещения должна удовлетворять бюджетному ограничению C :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \cdot c_j \leq C. \quad (2.16)$$

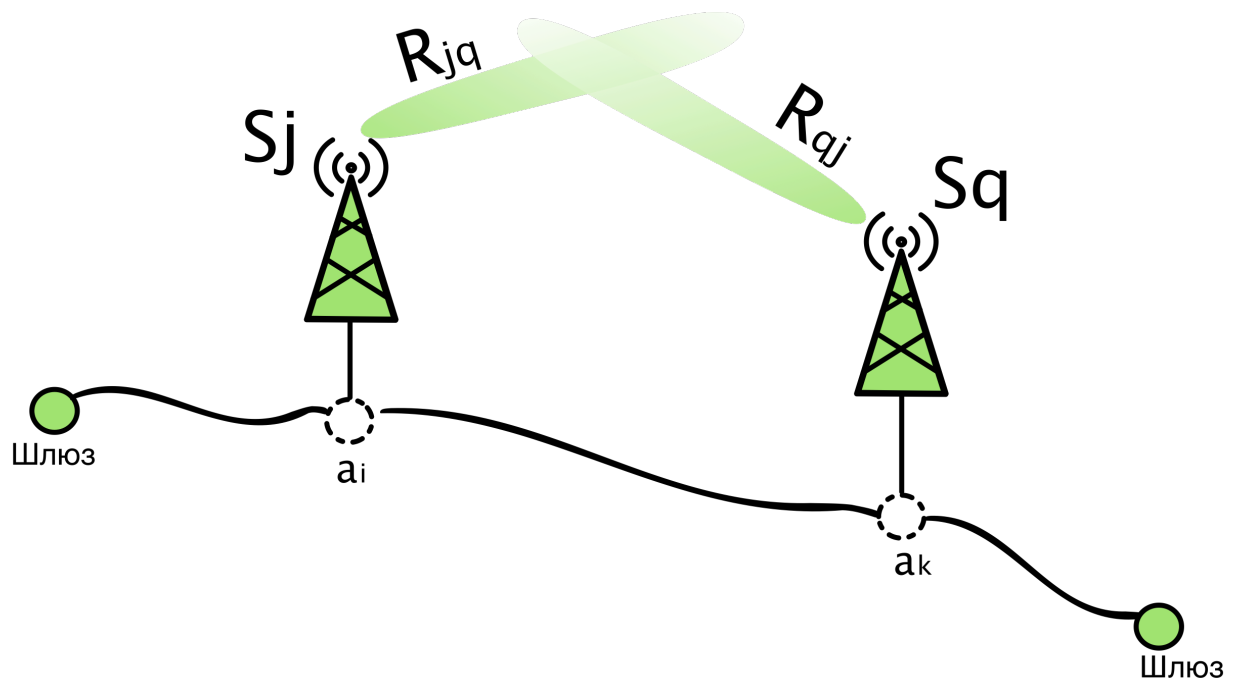


Рисунок 2.6 — Обеспечение связи с соседней станцией

Работа [17] содержит доказательство NP-трудности для частного случая задачи ЦЛП, когда вдоль линейной территории размещают множество однотипных станций с одинаковыми параметрами. Задача называется NP-трудной, если ей соответствующая задача распознавания NP-полна [30]. Представленная в данном исследовании модель (2.1) – (2.16) рассматривает общий случай размещения, когда вдоль линейного участка размещают множество различных станций с разными техническими параметрами. Следовательно, данная задача является также NP-трудной.

Математическая модель рассчитывалась в пакете Optimization Toolbox MATLAB. Числовой пример решения полученной математической модели задачи ЦЛП представлен в приложении ???. В приложении также представлена методика расчета дальности связи для обеспечения коммуникации между базовыми станциями и охвата зоны покрытия.

2.3 Математические модели синтеза топологии сети для охвата линейного участка в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме

В данной главе была уже представлена математическая модель задачи размещения базовых станций в виде задачи ЦЛП. К сожалению, модели в общем виде не учитывают специфику конкретной задачи. В большинстве практических случаях, поиск решения получается не самым быстрым. Еще одной сложностью при решении задачи в виде ЦЛП является случаи, когда невозможно представить ограничения задачи в линейном виде.

При проектировании телекоммуникационных сетей важным этапом является оценка характеристик производительности сетей. Такие оценки необходимо учитывать при решении задачи синтеза топологии. Одной из таких характеристик является межконцевая задержка сети. Данную характеристику при наличии кросс-трафика в сети, т.е. с поступлением пакетов на все узлы сети, невозможно представить в линейном виде для модели ЦЛП. Для того чтобы учесть специфику размещения базовых станций БШС и использовать характеристику производительности сети в качестве ограничения задачи, в работе будет представлена задача размещения базовых станций в виде комбинаторной модели в экстремальной форме. Будет предложен алгоритм типа ветвей и границ для решения комбинаторной задачи телекоммуникационного покрытия заданного участка.

Алгоритм на основе метода ветвей и границ основан на следующих построениях, позволяющих уменьшить время перебора:

1. Ветвление. Разбиение исходного множества на попарно не пересекающие дочерние подмножества в ходе поиска оптимального решения.
2. Получение нижних границ. Исследования текущей вершины на возможность закрытия.

Особенность задачи дискретного программирования состоит в том, что они имеют переборный характер. Основная идея комбинаторных алгоритмов – выделить из множества допустимых решений подмножества, не содержащие оптимальных решений [37], для сокращения времени перебора всех возможных вариантов.

2.3.1 Постановка задачи

Пусть задано множество станций $S = \{s_j\}$ с параметрами $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}, p_j, c_j\}, j = 1, \dots, m; q = 1, \dots, m; j \neq q$. Каждой БС приписаны параметры r_j – максимальный радиус покрытия станции, $\{R_{jq}\}$ – матрица радиусов связи между j -ой и q -ой базовыми станциями. Также заданы параметры: p_j – пропускная способность БС и c_j – стоимость.

Задан отрезок α длины L с концами в точках a_0 и a_{n+1} . Внутри отрезка $\alpha = [a_0, a_{n+1}]$ задано множество возможных точек размещения станций $A = \{a_i\}, i = 1, \dots, n$ с координатами l_i . Точка a_0 имеет координату $l_0 = 0$, точка a_{n+1} имеет координату $l_{n+1} = L$. На концах отрезка в вершинах a_0 и a_{n+1} стоят станции специального вида – шлюзы s_0 и s_{m+1} , соответственно, для которых радиусы покрытия, пропускные способности и стоимости не задаются. Радиусы связи для обеспечения соединения с размещаемыми БС задаются как R_{0j} и $R_{(m+1)j}$, соответственно. Требуется разместить станции таким образом, чтобы максимизировать область покрытия отрезка L при выполнении требования на наличия связи каждой станции со станциями на концах отрезка (шлюзами) через систему размещенных станций, а также выполнении ограничений на величину времени межконцевой задержки T и суммарную стоимость размещения C .

Формулировка в виде экстремальной задачи на конечном множестве

Допустимой расстановкой станций назовем такой возрастающий по величине координат l_i набор пар $P = \{a_i, s_j\}, a_i \in A, i \neq 0, i \neq n+1; s_j \in S$, для которого выполняются **требования**:

1. Для каждой пары (a_i, s_j) :

- а) слева: либо найдется такая пара (a_k, s_q) , что, $l_i - l_k \leq R_{jq}$ и $l_i - l_k \leq R_{qj}$, либо $l_i - l_0 \leq R_{j0}$ и $l_i - l_0 \leq R_{0j}$;
- б) справа: либо найдется такая пара (a_t, s_g) , что, $l_t - l_i \leq R_{jg}$ и $l_t - l_i \leq R_{gj}$, либо $l_{n+1} - l_i \leq R_{j(m+1)}$ и $l_{n+1} - l_i \leq R_{(m+1)j}$.

Данное требование гарантирует, что любая станция может быть связана со станциями на концах отрезка либо через промежуточные станции, либо непосредственно.

2. Сумма задержек по всем размещенным станциям меньше заданной величины T – средней межконцевой задержки по времени по всей системе станций:

$$\sum_{j \in S_\sigma} \overline{T}_j \leq T,$$

где S_σ – множество размещенных станций, \overline{T}_j – среднее время задержки на станции. Расчет времени задержки с помощью модели массового обслуживания описан в параграфе 1.5.2.

3. Суммарная стоимость размещенных станций меньше заданного бюджетного ограничения C .

Каждой допустимой расстановке станций P соответствует величина покрытия $z(P)$, определяемая как суммарная длина всех таких участков $\tau, \tau \subset \alpha$, что каждая точка этих участков попадает в зону покрытия, по крайней мере, одной станции, входящих в набор пар P .

В дальнейшем для удобства описания алгоритмов введем понятие «недопокрытия» отрезка α :

$$f(P) = L - z(P)$$

«Недопокрытие» – это суммарная область заданного участка L , которая не охвачена телекоммуникационным покрытием БШС. Численно равна разности между суммарным покрытием размещенных базовых станций и длиной всего участка L .

Пусть G – множество всех допустимых расстановок P . Тогда можно сформулировать задачу в виде экстремальной задачи на конечном множестве.

Задача 1.

Требуется найти такую допустимую расстановку P^* , что

$$P^* = \operatorname{argmin}_{P \in G} f(P) \quad (2.17)$$

Обозначим через Γ все множество вариантов размещения станций, обязательно допустимых, из множества S на заданном множестве A возможных точек их размещения.

2.3.2 Дерево ветвлений для перебора элементов в множестве Γ

Опишем процедуру построения бинарного дерева поиска (дерева ветвлений) для полного перебора без повторений всех элементов множества Γ . Данная процедура будет использована при построении дерева поиска в алгоритме МВиГ решения **задачи 1**.

Предполагается, что в множестве S станции упорядочены по не убыванию радиусов покрытия. Описываемая процедура использует известный прием разбиения множества G на подмножества с использованием некоторого параметра. Процесс формирования и последовательность исследования подмножеств обычно представляется с помощью дерева поиска, представляющего собой ориентированное от корня «дерева ветвлений», где каждому подмножеству соответствует вершина на дереве. Множеству Γ соответствует корневая вершина.

Процесс разбиения исходного множества на дочерние подмножества

Выбор способа ветвления дерева связан со спецификой задачи. В случае **задачи 1** спецификой является размещение множества станций S на множестве возможных точек размещения A . На каждом узле дерева будем применять дихотомическое ветвление.

Процедура 1. Пусть G_0 , где нижний индекс – номер итерации, исходное множество Γ . На каждой итерации, начиная с итерации $v = 0$, текущее подмножество G_v разбивается на два подмножества G_v^1 и G_v^2 . Множество G_v обычно называется «материнским», а множества G_v^1 и G_v^2 – «потомками» множества G_v или «дочерними» множествами (Рисунок 2.7.)

В качестве параметра разбиения используется переменная π_{ij} , принимающей два значения 0 и 1:

- $\pi_{ij} = 1$, если наложено условие, что на месте a_i может быть расположено БС s_j ;
- $\pi_{ij} = 0$, если наложено условие, что на месте a_i БС s_j располагаться не будет.

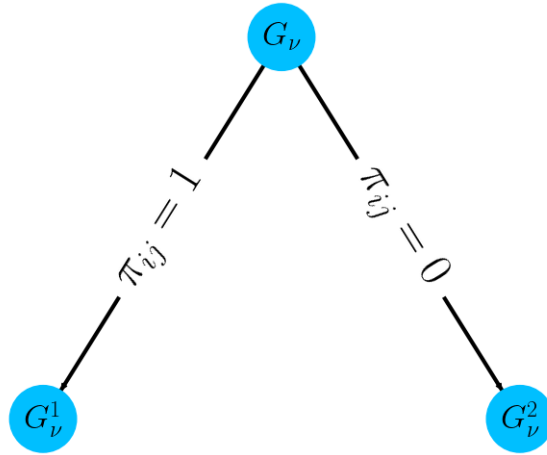


Рисунок 2.7 — Ветвление бинарного дерева

На каждой ν -ой итерации в процессе ветвления для множества G_ν^1 задано условие $\pi_{ij} = 1$, а для множества G_ν^2 задано условие $\pi_{ij} = 0$.

Все дочерние множества удовлетворяют следующим условиям:

$$G_\nu^1 \cup G_\nu^2 = G_\nu; \quad (2.18)$$

$$G_\nu^1 \cap G_\nu^2 = \emptyset. \quad (2.19)$$

Выбор переменной для разбиения на ν -ой итерации. На этапе разбиения любого множества G_ν все множество переменных $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ можно разделить на три подмножества:

- Π^+ – «фиксированные» переменные, для которых $\pi_{ij} = 1$;
- Π^- – «запрещенные» переменные, для которых $\pi_{ij} = 0$;
- Π^f – «свободные» переменные, для которых значения на данной итерации еще не заданы.

Правило выбора переменной для разбиения множества G_ν . Для разбиения множества G_ν на каждой итерации выбирается переменная из множества Π^f с наименьшим индексом j среди всех переменных с наименьшим индексом i . Таким образом, сначала определяется незанятое место размещения a_i с наименьшим номером (индексом i) и на нем размещается еще не размещенная станция s_j с наименьшим номером (индексом j).

Движение по дереву ветвлений.

После разбиения очередного подмножества G_v на два подмножества G_v^1 и G_v^2 , последним на дереве ветвлений присваиваются порядковые индексы G_{v+1} и G_{v+2} , соответственно (Рисунок 2.8). При формировании дерева ветвлений различаются два типа шагов: «прямой» и «обратный». Прямой шаг – это движение «в глубину» по той же ветви дерева, реализующее очередное разбиение множества G_v на два потомка, и обратный шаг, реализующий переход от множества G_v к одному из ранее сформированных подмножеств. Обратный шаг делается в том случае, когда: либо получено множество G_v , состоящее из единственного элемента, либо множество G_v при данном наборе значений переменных π_{ij} , выделяющих данное подмножество G_v из множества G_0 , пусто. В этих случаях соответствующая вершина дерева называется «закрытой».

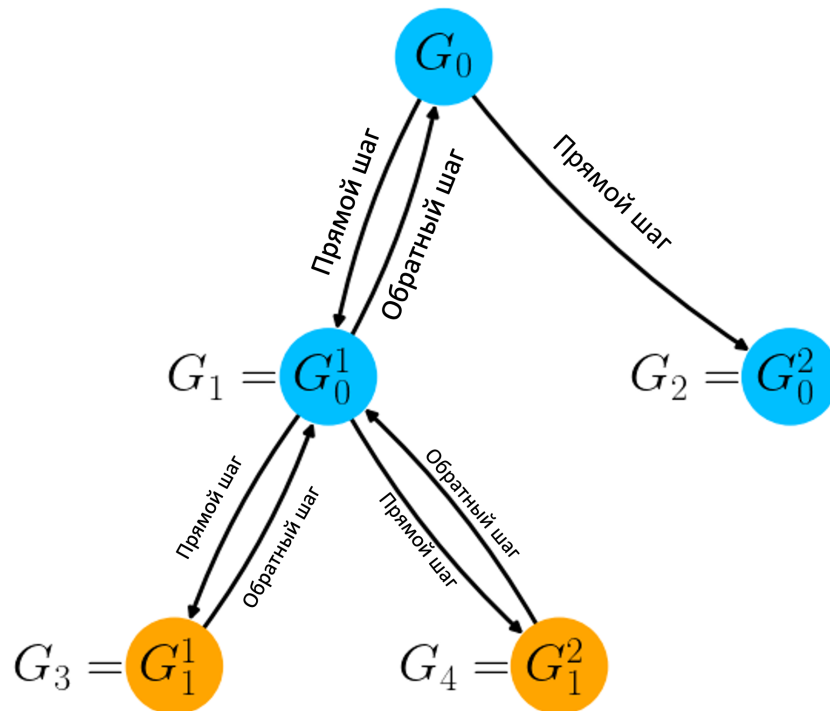


Рисунок 2.8 — Движение по дереву поиска

Для движения по дереву будем использовать правило **LIFO**. На основании этого правила прямые шаги будут выполняться до тех пор, пока не будет получена закрытая вершина. На дереве ветвлений это соответствует продолжению движения по той же ветви дерева. При этом из двух множеств G_v^1 и G_v^2 первым будет исследоваться на возможность закрытия соответствующей вершины множество G_v^1 (левый дочерний узел дерева). Если вершина не будет закрыта, то

из неё будет продолжено дальнейшее движение по той же ветви – выполнение прямого шага. Если вершина будет закрыта, то выполняется обратный шаг: для продолжения движения будет выбрана незакрытая вершина с наибольшим порядковым номером ν среди всех висячих вершин дерева (последняя сформированная вершина из нерассмотренных). Процедура будет завершена, когда все вершины дерева будут закрыты.

Выполнение условия (2.18) и (2.19) гарантирует, что в результате завершения работы *процедуры 1* будут просмотрены все элементы множества Γ без повторений. Эти же условия определяют фундаментальное свойство дерева ветвлений: на каждой итерации объединение множеств G_ν всех висячих вершин дерева дает исходное множество G_0 корневой вершины.

2.3.3 Метод ветвей и границ для задачи размещения БС

Для построения алгоритма типа ветвей и границ для решения **задачи 1** с использованием *процедуры 1* достаточно разработать методы исследования вершин дерева на возможность их закрытия.

В соответствии с техникой МВиГ закрытие вершины в результате исследования, соответствующего ей множества G_ν возможно в трех случаях.

Случай 1. Множество G_ν – пусто, т.е. доказано, что в множестве G_ν при данном наборе фиксированных и запрещенных переменных π_{ij} нет ни одной допустимой расстановки P .

Случай 2. Доказано, что в множестве G_ν не может быть допустимой расстановки P с меньшим значением целевой функции (2.17), чем у лучшей расстановки \hat{P} из уже найденных. Значение функции $f(\hat{P})$ называется «рекордом», а расстановка \hat{P} – «рекордным решением». В качестве начального рекорда принимается число заведомо большее искомого оптимального решения, например, длина всего отрезка L .

Случай 3. Найдено оптимальное решение **задачи 1** на множестве G_ν . Прежде, чем рассмотреть эти три случая, запишем важное свойство любого множества G_ν , являющееся следствием принятого правила выбора свободной переменной для разбиения очередного множества G_ν при прямом шаге.

Исследование случаев 1 – 3

Свойство 1. Пусть для исследуемого множества G_v , $v > 0$, точка a_k – любое из мест, на которых уже размещена станция из множества S в соответствии с набором фиксированных и запрещенных переменных π_{ij} , выделяющим данное множество из множества G_0 . Тогда для всех мест «слева» от a_k , т.е. точек a_i , $i < k$, размещение станций уже определено. В ходе движения по дереву ветвлений на точках либо были размещены станции при условии $\pi_{ij} = 1, \forall i, j$, либо эти точки a_i остались пустыми при условии $\pi_{ij} = 0, \forall i, j$.

Случай 1.

Проверка текущего множества G_v на пустоту состоит в установлении факта невозможности выполнения **требования 1 – 3**, введенных ранее при определении допустимой расстановки.

Проверка выполнения условия связи между размещенными БС Построим алгоритм проверки выполнения **требования 1**.

Рассмотрим проверку для множества G_v , $v > 0$. Пусть множество G_v образовано разбиением материнского множества при помощи переменной $\pi_{kt} = 1$, и множество содержит более одного распределения P . Алгоритм проверки состоит из **3 шагов**.

Шаг 1. Проверяем, что каждый из радиусов R_{th} и R_{ht} , где h – индекс станции, размещенной на ближайшей к точке a_k слева точке a_d , больше расстояния $l_k - l_d$.

Шаг 2. Проверяем, что как радиус R_{tj} , так и максимальный радиус R_{jt} среди еще нераспределенных станций не меньше расстояния между точкой a_k и ближайшей к ней точкой справа a_i . Если все станции распределены, то множество G_v состоит из единственного варианта распределения и этот случай будет рассмотрен далее.

Шаг 3. Проверяем, что, если количество нераспределенных станций больше 1, то расстояние между двумя любыми смежными точками $a_i, i = k+1, \dots, n$, не больше, чем второй по величине после максимального радиус связи у еще не распределенного множества станций, а расстояние между точками a_{n+1} и a_n не больше, чем максимальный радиус связи среди нераспределенных станций. Если осталась только одна нераспределенная станция, то проверяем, что среди

еще незанятых точек справа от точки a_k есть, по крайней мере, одна такая точка, что расстояния от этой точки до точки a_k и одновременно от этой точки до точки a_{n+1} не больше, чем радиус связи у нераспределенной станции.

Если в результате проверки оказывается, что, хотя бы на одном из шагов получен отрицательный результат, то множество G_v – пусто, соответствующая этому множеству на дереве поиска вершина должна быть закрыта и далее выполняется шаг обратного хода в соответствии с **Процедурой 1**.

Если множество G_v образованно разбиением материнского множества при помощи переменной $\pi_{kt} = 0$ и a_v – точка с наибольшим индексом, среди точек, на которых уже размещены станции (с учетом точки a_0), то надо проверить, что расстояние между точками a_v и a_k не больше, чем максимальный радиус среди радиусов связи у еще нераспределенных станций. Если проверка отрицательна, то множество G_v – пусто, соответствующая этому множеству на дереве поиска вершина должна быть закрыта и выполняется шаг обратного хода в соответствии с **Процедурой 1**.

Проверка **требований 2 и 3** сводится к установлению факта не превышения суммарных величин стоимости и межконцевой задержки заданным ограничениям.

Случай 2. Построим оценку величины «недопокрытия» для множества G_v , полученного из материнского множества добавлением условия $\pi_{kt} = 1$. Частичным «недопокрытием» назовем величину $\Delta(k, d, p, t)$, которая вычисляется по формуле:

$$\Delta(k, d, p, t) = \max\{(a_k - a_d) - (r_p + r_t), 0\}. \quad (2.20)$$

Частичное «недопокрытие» (2.20) определяется для любых двух точек a_d и a_k ($k > d$), на которых расположены станции s_p и s_t при условии, что между этими точками нет других станций. Для любой расстановки P «недопокрытие» $f(P)$ вычисляется как сумма всех «недопокрытий» $\Delta(k, d, p, t)$ между местами размещения станций, включая концы отрезка α , на которых стоят станции особого типа s_0 и s_{m+1} .

Построим нижнюю оценку $W(G_v)$ для недопокрытий $f(P)$ расстановок P множества G_v , т.е.

$$W(G_v) \leq f(P), P \in G_v.$$

Если $W(G_v) \geq f(\hat{P})$, то множество G_v не может содержать расстановки, лучше уже найденной расстановки \hat{P} , тогда соответствующая множеству G_v вершина на дереве поиска должна быть закрыта и далее выполняется шаг обратного хода в соответствии с *процедурой 1*.

Построим оценку «недопокрытия» для множества G_v , полученного из материнского множества добавлением условия $\pi_{kt} = 1$. Оценку будем искать в виде суммы

$$W(G_v) = w_1(G_v) + w_2(G_v). \quad (2.21)$$

Величина $w_1(G_v)$ вычисляется как сумма все частичных «недопокрытий» слева от вершины a_k и величины радиуса покрытия размещаемой станции r_t . Оценку $w_2(G_v)$ вычислим «для недопокрытия» справа на части β до конца отрезка α (точки a_{n+1}). Данную оценку получим релаксацией условий, определяющих допустимую расстановку станций на участке β . Найдем такое подмножество S_β множества станций S , состоящее из еще не размещенных станций и дающее минимальное «недопокрытие» на участке β при выполнении только условий 2) – 4). Для этого сформулируем следующую задачу булевого программирования. Введем булеву переменную x_j . Тогда $x_j = 1$, если станция s_j будет размещена, $x_j = 0$ – в противном случае.

Задача 2.

$$z = |\beta| - \sum_{x_j \in S_\beta} 2r_j x_j \rightarrow \min.$$

при условии:

$$\sum_{x_j \in S_\beta} c_j x_j \leq C, \quad (2.22)$$

$$\sum_{x_j \in S_\beta} x_j \leq m, \quad (2.23)$$

$$x_j \in \{0, 1\},$$

где $|\beta|$ – длина отрезка β , m – число свободных мест для размещения станций на отрезке β , r_j – радиус покрытия станции s_j , c_j – стоимость станции s_j и C – бюджетное ограничение.

Эффективность использования оценки в методе ветвей и границ определяется точностью оценки и временем ее вычисления. Задача 2 – это задача ЦЛП,

являющаяся трудно решаемой [38]. На основании задачи 2 можно получить две оценки менее точные, но имеющие более эффективные методы решения. Заметим, что при снятии ограничения (2.22) или (2.23) задача 2 представляет собой целочисленную задачу о ранце с эффективным псевдополиномиальным алгоритмом решения [38]. При этом с точки зрения точности оценки, более перспективным представляется снятие ограничения (2.23), так как на практике, обычно, число возможных мест размещения станций существенно меньше числа размещенных станций, полученного в результате решения задачи. Назовем задачу, полученную снятием ограничения (2.23), задачей 3.

Задачу 2 при снятии условия целочисленности на переменные назовем задачей 4. Задача 4 есть задача линейного программирования.

Задача 3 и задача 4, являясь оценками целевой функции решения задачи 2, могут служить оценками $w_2(G_v)$. Если множество G_v получено из материнского добавлением условия $\pi_{kt} = 0$, то оценка $W(G_v)$ равна оценке материнского множества.

В приложении ?? приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающего время решения задач 2, 3, 4 и относительную точность задачи 3 и 4 по отношению к задаче 2.

Перейдем к рассмотрению случая 3. Рассматривается только для множеств G_v , состоящих из единственной расстановки P , для которой «недопокрытие» $f(P)$ вычисляется как сумма всех «недопокрытий» $\Delta(k, d, p, t)$ между местами, где размещены станций, включая концы отрезка α , на которых стоят станции s_0 и s_{m+1} .

Если для найденной расстановки P выполняются **требования 1–3**, которые для единственной расстановки легко проверяются, и

$$f(P) < f(\hat{P}), \quad (2.24)$$

то $f(P)$ принимается за новый рекорд $f(\hat{P})$, расстановка P становится новым рекордным решением \hat{P} и выполняется шаг обратного хода в соответствии с **Процедурой 1**, если неравенство (2.24) не выполняется, то рекорд остается прежним и выполняется шаг обратного хода.

Работа алгоритма МВиГ заканчивается, когда все вершины дерева поиска закрыты, при этом решение задачи:

$$P^* = \hat{P}, f(P^*) = f(\hat{P}).$$

2.3.4 Построения последовательности топологий для итерационной процедуры моделирования БШС

При проектировании БШС надо найти ее оптимальную топологию среди всех топологий, для которых будут выполняться все требования к показателям, исследуемым и рассчитываемым на этапе моделирования сети. Для решения этой задачи воспользуемся идеей метода построения последовательности планов [39]. Данный подход позволяет для задач на конечных множествах найти не одно любое экстремальное решение, а множество лучших решений [40, 41].

Рассмотрим задачу 1. Требуется найти такую допустимую расстановку P^* , что

$$f(P^*) = \min\{f(P), P \in G\}.$$

Построим для этой задачи последовательность $\Gamma = P^1, P^2, \dots, P^k$ допустимых расстановок (решений) множества G для заданного k , в которой каждое решение не лучше предыдущего и не хуже последующего.

$$\begin{aligned} f(P^1) &= f(P^*), \\ f(P^2) &= \text{extr}\{f(P), P \in G \setminus P^1\}, \\ &\dots \\ f(P^k) &= \text{extr}\{f(P), P \in G \setminus P^1 \cup P^2 \cup \dots P^k\}, \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся следующей процедурой. Будем последовательно, начиная с первой расстановки, выполнять этап моделирования БШС. Как только будет получена расстановка, удовлетворяющая всем требованиям этапа моделирования, задача нахождения оптимальной топологии среди всех топологий будет решена. Для такой топологии выполняются все требования к показателям, исследуемые на этапе моделирования сети. Действительно, для всех предыдущих расстановок эти условия не выполняются, а все последующие расстановки в последовательности Γ не могут быть лучше по критерию $f(P)$.

Построение последовательности размещений на основании МВиГ

С помощью МВиГ, описанного в параграфе 2.3.3 можно записать последовательность расстановок станций. Заменяя неравенство (2.24) на нестрогое и записывая все рекорды, полученные в процессе работы алгоритма, можно получить последовательность расстановок, где каждая расстановка не хуже предыдущей и не лучше последующей. Для получения последовательности Γ достаточно «перевернуть» полученную последовательность, где первый элемент станет последним.

Недостатком такой процедуры является то, что для исследования на этапе моделирования будут отобраны только расстановки не хуже первого рекорда и среди них может не оказаться расстановки, удовлетворяющей критериям моделирования.

Для расширения множества Γ необходимо чтобы в результате решения **задачи 1** получалось не только оптимальное решение, но и все решения не хуже оптимального на величину d . Для решения такого варианта задачи достаточно неравенство (2.24) в алгоритме МВиГ заменить следующим неравенством

$$f(P) \leq f(\hat{P}) + d, \quad (2.25)$$

где $d = \varepsilon \cdot L > 0$, ε – заданное отклонение в процентах, и запоминать все рекорды, полученные в процессе решения задачи.

На основании неравенства (2.25) можно построить итерационную процедуру, увеличивая величину d , если при данном ее значении допустимого решения на этапе моделирования не найдено. В приложении ?? представлены результаты численного примера.

2.4 Выводы

Данная глава посвящена задачам оптимального размещения базовых станций в рамках комплексного проектирования беспроводных сетей связи. Спецификой моделей оптимизации является размещение станций для максимального телекоммуникационного покрытия вдоль протяженного объекта.

В главе были представлены следующие результаты:

1. Представлена актуальность БШС с линейной топологией. Примерами таких сетей на месторождениях могут являться сети вдоль протяженных магистральных трубопроводов для организации связи как для сбора данных в составе АСУ ТП, а также организации высокоскоростной телекоммуникационной сети для сбора мультимедийного трафика с беспроводных камер видеонаблюдения. В рамках цифровизации месторождений набирает свой интерес задача внедрения современных высокоскоростных локальных сетей для мобильных обходчиков. Еще одним примером использования сетей с линейной топологии является организация телекоммуникационного покрытия вдоль промысловых автодорог для обеспечения безопасности обслуживающего персонала.
2. Представлена математическая модель задачи размещения станций в виде ЦЛП. Целевая функция модели представляет собой суммарное телекоммуникационное покрытие участка, которое необходимо максимизировать. Также представлены ограничения равенства и неравенства модели, удовлетворяющие требованиям размещения – обеспечение любой БС телекоммуникационной связью со шлюзами на концах участка через системы размещения станций и бюджетному ограничению стоимости размещения.
3. Представлена математическая модель задачи размещения станций в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме. Такой подход позволяет учитывать специфику конкретной задачи, что позволяет быстрее найти оптимальное решение. В такой постановке, в ходе поиска оптимального решения возможно проверять условие ограничения на время межконцевой задержки в сети, которое нелинейную зависимость от количества каналов в сети.
4. Для решения комбинаторной модели задачи размещения предложен алгоритм типа ветвей и границ. Описана процедура построения бинарного дерева поиска, учитывающая специфику размещения множества станций S на множества A возможных точек размещения. Представлены различные модели оценки недопокрытия, необходимые для получения рекордов и возможности закрытия вершин дерева, для которых множество допустимых размещений пусто. Сравнительная оценка для частного случая размещения, когда необходимо разместить все

имеющиеся станции показало, что с увеличением размерности задачи количество пройденных узлов комбинаторной модели существенно меньше чем в модели ЦЛП.

5. После нахождения оптимального решения на этапе синтеза топологии при проектировании БШС, полученное размещение попадает на этап математического моделирования, включающие в себя оценку различных характеристик сети, работу протокола, расчет надежности и т.д. В том случае, если проверка требований, предъявляемые к сети на этапе моделирования, проходит неуспешно, данное размещение становится невозможным. Для того чтобы было возможно проверять не только оптимальное решение, но и размещения не хуже оптимального на заданное отклонение, было предложена процедура нахождения последовательности топологий сети для итерационной процедуры комплексного проектирования БШС. Процедура нахождения последовательности лучших решений задачи выбора и размещения базовых станций основана на разработанном алгоритме МВиГ.

Результаты исследования, представленные в этой главе, были опубликованы в работах [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. **Добавить астраханскую.**

Глава 4. Программный комплекс и численные примеры решения задач представленных математических моделей

В данной главе представлены описание и структура программно-вычислительного комплекса, предназначенного для расчета задачи оптимального размещения базовых станций.

4.1 Программный комплекс расчета задачи размещения БС

Программный комплекс представляет собой реализацию на языке Python алгоритма типа ветвей и границ комбинаторной задачи оптимизации поиска максимального телекоммуникационного покрытия при размещении базовых станций. Код программы представлен в https://github.com/m0000Amir/BST_BS_types_set.

Структура программно-вычислительного комплекса представлена на рисунке 4.3. На вход подается JSON-file, содержащий параметры конфигурации и входные данные задачи.

Параметры конфигурации расположены под ключом **configuration** (Рисунок 4.1):

- **method** – метод решения задачи размещения. Значение *bab* – метод ветвей и границ или *bf* – метод полного перебора;
- **estimation_method** – метод расчета оценки недопокрытия справа. Значение *LP* – решение с помощью симплекс-метода, значение *ILP* – решение с помощью задачи целочисленного линейного программирования или значение *knapsack* – решение с помощью задачи «О ранце»;
- **placed_all_station** – частный случай задачи размещения, когда отсутствуют ограничения на стоимость и времени задержки, в такой постановке размещается все множество станций. Принимает значения *True* или *False*;
- **drawing** – отрисовка полученного дерева решения. Принимает значения *True* или *False*;

- **last_optimal_noncoverage** – полученное оптимальное недопокрытие на последнем решении для задачи поиска последовательности лучших решений. Принимает любые положительные действительные значения;
- **relation_deviation** – заданное отклонение в процентах от полученного оптимального решения для задачи поиска последовательности лучших решений.

```
"configuration": {
  "method": "bab",
  "estimation_method": "knapsack",
  "place_all_station": false,
  "drawing": false,
  "last_optimal_noncoverage": 0,
  "relative_deviation": null
},
```

Рисунок 4.1 — Параметры конфигурации

Файл JSON содержит входные данные задачи оптимизации:

- координаты размещения **placement** и координаты размещения шлюзов **gateway_placement**;
- параметры антенн шлюзов **gateway** и абонентских устройств **user_device**;
- ограничения задачи на стоимость **cost_limit** и время задержки **delay_limit**;
- параметры для расчета дальности телекоммуникационного покрытия: несущая частота **frequency**, запас на замирания сигнала **link_som** и **coverage_som**;
- параметры для расчета задержек: средний размер пакетов **average_packet_size** и интенсивность входящего потока **arrival_rate**;
- **sta** – множество заданных базовых станций.

Каждый элемент массива **sta** (Рисунок 4.2) представляет собой JSON-объект и содержит следующие параметры:

- **P_{tr}_link** – мощность антенны, обеспечивающей телекоммуникационную связь между станциями;
- **G_{tr}_link** – усиления антенны, обеспечивающей телекоммуникационную связь между станциями;

```

"sta": [
  {
    "Ptr_link": 19,
    "Gtr_link": 2,
    "Precv_link": -77,
    "L_link": 1,
    "L_coverage": 1,
    "Precv_coverage": -67,
    "Grecv_coverage": 5,
    "cost": 4600,
    "throughput": 72.2
  }
]

```

Рисунок 4.2 — Параметры БС

- **Precv_link** – чувствительность антенны, обеспечивающей телекоммуникационную связь между станциями;
- **L_link** – потери сигнала в кабеле и разъемах передающего тракта антенны, обеспечивающей телекоммуникационную связь между станциями;
- **L_coverage** – потери сигнала в кабеле и разъемах передающего тракта антенны, обеспечивающей телекоммуникационное покрытие БС;
- **Precv_coverage** – чувствительность антенны, обеспечивающей телекоммуникационное покрытие БС;
- **Grecv_coverage** – усиления антенны, обеспечивающей телекоммуникационное покрытие БС;
- **cost** – стоимость БС;
- **throughput** – пропускная способность БС.

Перед тем как приступить к задаче размещения, необходимо подготовить параметры для каждой станции: радиус связи между станциями и радиус покрытия БС. Параметры рассчитываются в блоке расчета дальности телекоммуникационной связи с помощью уравнения энергетического потенциала линии связи и модели распространения сигнала. Модели распространения представлены в главе 1.

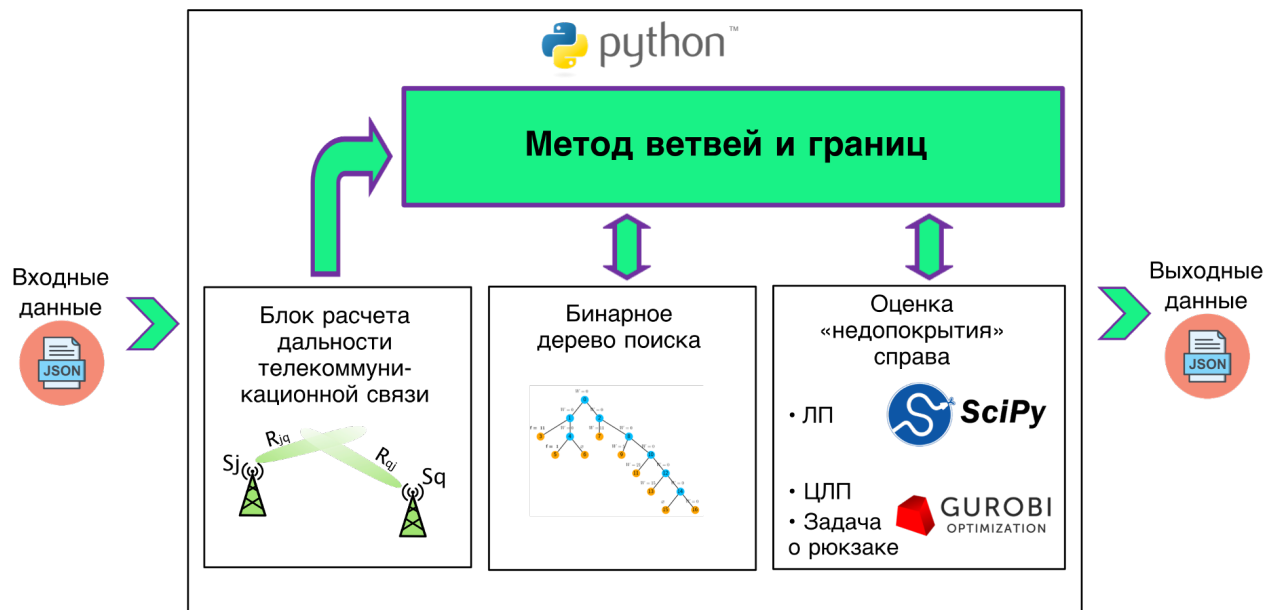


Рисунок 4.3 — Структура программно-вычислительного комплекса

Задача размещения базовых станций представлена в виде комбинаторной модели в экстремальной форме. Алгоритм поиска оптимального размещения относится к типу ветвей и границ.

Для поиска оптимального размещения используется процедура построения бинарного дерева поиска. На каждом шаге проверяется условия на возможность закрытие узла дерева. Построение бинарного дерева поиска реализовано рекуррентным способом.

Блок расчета оценки недопокрытия справа представляет собой решение задачи оптимизации. Блок содержит три варианта расчета оценки. Задача 2 представляет собой задачу ЦЛП, задача 3 является задачей «О ранце». Задача 4 представляет собой задачу ЛП. Задача ЦЛП и задача «О ранце» рассчитывается в коммерческом продукте расчета задач дискретной оптимизации Gurobi Optimizer [50]. Задача ЛП решается с использованием библиотеки для языка программирования Python с открытым исходным кодом SciPy [51].

В ходе движения по дереву поиска записываются все полученные рекорды **Optimal** (Рисунок 4.4). Также записываются стоимость размещения **Cost**, время межконцевой задержки **Delay** и номер узла дерева **Node**, на котором был получен рекорд. Для каждого рекорда записывается множество размещенных станций. Последний полученный рекорд является оптимальным решением задачи. Решение задачи записывается в выходной JSON-файл.

```

Optimal = 84.0, Cost = 11900, Delay = 0.00107, Node = 7
['S1', 'S2', 'S4', '-', '-', '-']
Optimal = 73.0, Cost = 11900, Delay = 0.00107, Node = 25
['S1', 'S2', '-', 'S4', '-', '-']
Optimal = 65.0, Cost = 12000, Delay = 0.00107, Node = 61
['S1', 'S3', '-', 'S5', '-', '-']
Optimal = 60.0, Cost = 11900, Delay = 0.00107, Node = 91
['S1', 'S4', '-', 'S2', '-', '-']
Optimal = 56.0, Cost = 12000, Delay = 0.00107, Node = 127
['S1', 'S5', '-', 'S3', '-', '-']
Optimal = 17.0, Cost = 11900, Delay = 0.00107, Node = 161
['S1', '-', 'S2', '-', 'S4', '-']
Optimal = 9.0, Cost = 11900, Delay = 0.00107, Node = 171
['S1', '-', 'S2', '-', '-', 'S4']
Optimal = 4.0, Cost = 12000, Delay = 0.00107, Node = 193
['S1', '-', 'S3', '-', '-', 'S5']
Optimal = 0.0, Cost = 12000, Delay = 0.00107, Node = 213
['S1', '-', 'S5', '-', '-', 'S3']
Total number of nodes is 298

```

Рисунок 4.4 — Пример полученного решения задачи

4.2 Численный пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде задачи целочисленного линейного программирования

Переделать численный пример В этой секции представлен численный пример решения данной задачи.

Задан линейный участок L с длиной 300 с количеством $n = 7$ точек размещения. Координаты точек размещения представлены в таблице 13. Задан бюджет размещения $C = 130$. Центральная частота $f = 2437$ МГц.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Координата	29	40	95	139	181	230	273

Таблица 13 — Точки размещения участка с длиной $L = 300$.

Задано множества базовых станций $m = 8$ с параметрами представленными в таблице 14. Также в таблице представлены параметры шлюзов и контролируемых объектов. Параметры объектов необходимы для расчета радиусов покрытия станций.

Расчет радиса связи между станциями Базовые станции оснащены направленной антенной с высоким коэффициентом усиления для связи с сосед-

ними станциями. Для расчета потерь между станциями j и q воспользуемся формулой (1.4):

$$L_{fs}^{jq} = P_{tr}^R(j) - L_{tr} + G_{tr}^R(j) + G_{tr}^R(q) - L_{recv} - SOM - P_{recv}^R(q).$$

Потери на кабелях приемника L_{recv} и передатчика L_{tr} примем равным 1 дБ и запас на замирания сигнала $SOM = 10$ дБ.

Для примера рассчитаем радиус связи между станциями s_1 и s_2 :

$$\begin{aligned} L_{fs}^{12} &= P_{tr}^R(1) - L_{tr} + G_{tr}^R(1) + G_{tr}^R(2) - L_{recv} - SOM - P_{recv}^R(2) = \\ &= 20 - 1 + 5 + 5 - 1 - 10 - (-69) = 87(dB). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для расчета канала связи необходимо использовать формулу (1.5). Несущая частота $f = 2437$ МГц и коэффициент для расчета потерь $K = -27,55$:

Формула не верна расчета R_{jq}

$$R_{jq} = 10^{\left(\frac{L_{fs}^{jq} - 20 \lg F - K}{20}\right)} = 10^{\left(\frac{87 - 20 \lg 2437 - (-27.55)}{20}\right)} = 174(m). \quad (4.2)$$

В таблице 15 приведены расчеты максимальных радиусов связи между всеми станциями s_j , $j = 1, \dots, m$ и шлюзом s_{m+1} .

BS	P_{tr}^R	G_{tr}^R	P_{recv}^R	P_{recv}^r	G_{recv}^r	c
	дБм	дБ	дБм	дБм	дБ	у.е.
1	20	5	-69	-67	5	40
2	19	5	-67	-67	5	28
3	18	5	-69	-67	5	45
4	19	5	-69	-67	6	22
5	19	5	-67	-67	5	21
6	20	5	-69	-67	5	40
7	19	5	-67	-67	5	28
8	18	5	-69	-67	5	45
Шлюз	G_{recv}^R	P_{recv}^R		Объект	P_{tr}^r	G_{tr}^r
	дБ	дБм			дБм	дБ
	5	-69			15	2

Таблица 14 — Параметры базовых станций, шлюзов и объектов.

R_{jq}	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_{m+1}
s_1	—	174	219	219	174	219	174	219	219
s_2	195	—	195	195	155	195	155	195	195
s_3	174	138	—	174	138	174	138	174	174
s_4	195	155	195	—	155	195	155	195	195
s_5	195	155	195	195	—	195	155	195	195
s_6	219	174	219	219	174	—	174	219	219
s_7	195	155	195	195	155	195	—	195	195
s_8	174	138	174	174	138	174	138	—	174

Таблица 15 — Рассчитанные радиусы связи между станциями

Расчет радиуса покрытия

Расчет проводится аналогично расчету радиусу связи между станциями. Потери в свободном пространстве для канала между j -ой станции и контролируемым объектом

$$L_{fs}^j = P_{tr}^r(j) - L_{tr} - SOM - P_{RX}.$$

Пример расчета радиуса покрытия для 1-ой станции:

$$\begin{aligned} L_{fs}^1 &= P_{tr}^r + G_{tr}^r + G_{recv}^r(1) - L_{recv}(1) - SOM - P_{recv}^r(1) = \\ &= 15 + 2 + 5 - 1 - (-67) - 10 = 78 \text{ (дБ)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$r_1 = 10^{\left(\frac{78 - 20 \lg 2437 - (-27.55)}{20}\right)} = 77 \text{ (м)}.$$

Рассчитанные радиусы покрытия для всех станций s_j , $j = \overline{1, m}$ представлены в таблице 16).

STA	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
r_j	77	77	77	87	77	77	77	77

Таблица 16 — Рассчитанные радиусы покрытия станций

Задача ЦЛП решена с помощью Optimization Toolbox MatLab. Таблица 17 содержит все полученные целочисленные решения.

=====

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	Покрытие	Цена
Координаты	29	40	95	139	181	230	273	м	у.е.
Целлочисленное решение 1	s_1	s_2	s_6	—	—	—	s_4	286	130
Целлочисленное решение 2	s_4	—	s_5	s_7	—	—	s_2	289	99
Оптимальное решение	s_4	s_2	—	—	s_1	—	s_5	300	111

Таблица 17 — Решение задачи ЦЛП.

4.3 Численный пример оптимального размещения базовых станций сети с линейной топологией в виде экстремальной задачи в комбинаторной форме

Дано:

- линейный участок $L = 300$ метров;
- множество точек размещения $|A| = 8$;
- множество БС $|S| = 8$;
- протокол IEEE 802.11n;
- ограничение на суммарную стоимость $T = 0.001$ с;
- интенсивность входящих пакетов $\lambda = 1000$ 1/с;
- средний размер входящих пакетов $w = 1500$ байт;
- отклонение от оптимального решения, $\varepsilon = 0.5$

Рассмотрим пример задачи оптимального размещения базовых станций вдоль линейного участка для организации БШС. В данном приложении будет представлен пример решения на базе семейства протоколов IEEE 802.11. Задан линейный участок $L = 230$ метров. На данном участке задано множество точек размещения $|A| = 6$ с координатами, представленными в таблице 18. Задано множество станций $|S| = 5$, таблице 19.

Задан линейный участок $L = 300$ метров. На данном участке в ходе обследования местности были выбраны восемь возможных точек размещения базовых станций, $|A| = 8$. Координаты l_i точек размещения представлены в таблице 18.

Точки размещения, a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
Координаты, l_i	43	72	98	150	178	201	269	280

Таблица 18 — Координаты точек размещения

На рынке представлен широкий спектр технических устройств от компаний Cisco, Mikrotik и т.д. позволяющий организовывать сеть в открытой

местности и учитывающий климатические сложности на нефтегазовых месторождениях, такие как предельные температуры, сила ветра и т.д. Под БС в нашей задаче будем понимать точку доступа с антеннами для покрытия заданной области и антеннами для обеспечения связи с соседними станциями БШС.

В ходе этапа выбора комплекса технических средств были выбраны восемь БС. Множество станций $|S| = 8$. Каждой БС prepисаны паспортные характеристики антенн, пропускная способность точки доступа и итоговая стоимость станции. Стоимость взята условная, чтобы не указывать реальные цены производителя на время написания диссертации и курс валют. Будем рассматривать БШС для задачи мониторинга, то есть с каналом передачи на верхний уровень, UpLink. Рабочая частота 2,4 ГГц. Для каждой БС будем использовать пропускную способность для модуляции и схемы кодирования MCS7. В таблице 19 представлены параметры БС. Здесь P_{tr}^R – мощность направленной антенны, G_{tr}^R – усиление направленной антенны, P_{recv}^R – чувствительность направленной антенны, L – потери в антенном кабеле и разъемах, передающего тракта, P_{recv}^r – чувствительность всенаправленной антенны, G_{recv}^r – усиление всенаправленной антенны, p – пропускная способность, c – стоимость

S	P_{tr}^R	G_{tr}^R	P_{recv}^R	L	P_{recv}^r	G_{recv}^r	p	c
№	дБм	дБ	дБм	дБ	дБм	дБ	Мбит/с	у.е.
1	20	4	-77	1	-77	3	72,2	24
2	19	4	-77	1	-73	4	72,2	20
3	19	4	-77	1	-77	5	72,2	24
4	18	4	-77	1	-77	3	72,2	24
5	19	4	-77	1	-77	4	72,2	28
6	19	4	-77	1	-74	4	72,2	24
7	20	4	-77	1	-73	4	72,2	20
8	19	4	-77	1	-77	4	72,2	20

Таблица 19 — Параметры базовых станций

На концах участка размещены шлюзы s_0 и s_{m+1} с параметрами (таблица 20):

Для расчета области покрытия необходимо задаться характеристиками устройств, с которых будет собираться информация (таблица 21).

Итоговое размещение БС должно удовлетворять заданным ограничениям:

– на стоимость $C = 76$;

Шлюз	P_{tr}^R	G_{tr}^R	P_{recv}^R	L
№	дБ	дБ	дБ	дБ
s_0	20	5	-77	1
s_{m+1}	20	5	-77	1

Таблица 20 — Параметры шлюзов

Устройство	$P_{tr}^u d$	$G_{tr}^u d$	L
	дБ	дБ	дБ
	9	1	0

Таблица 21 — Параметры устройств

– на межконцевую задержку сети $T = 0.001$ с.

Для расчета времени межконецевой задержки, будем считать, что на каждую БС поступает трафик с интенсивностью $\lambda = 1000$ 1/с. Средний размер поступающих пакетов $w = 1500$ байт.

Для поиска последовательности топологий задано отклонение $\varepsilon = 0.5\%$ от найденного оптимального значения.

Расчет радиуса связи и радиуса покрытия станций

По формуле (5) рассчитаем радиус покрытия для каждой станции (таблица 22) и радиусы связи между станциями и со шлюзами (таблица 23 и таблица 24).

Станция	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_{m+1}
r_j , м	48	43	38	43	43	0

Таблица 22 — Рассчитанные радиусы покрытия

В таблице 25 представлены результаты решения размещения станций. Для заданной $\varepsilon = 1\%$, т.е. $d = 2$ был получены последовательности расстановок для задач 2, 3 и 4 расчета оценок с помощью задачи ЦЛП, задачи «О ранце» и ЛП. В таблице представлены рекорды «недопокрытия», стоимости и задержки сети, а также размещения станций, число пройденных узлов дерева а и время счета. Задача ЦЛП и задача о ранце решались с помощью Optimization

$R_{jq}, \text{ м}$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_0	S_{m+1}
S_1	—	76	96	96	76	76	76
S_2	85	—	85	85	68	68	68
S_3	76	60	—	76	60	60	60
S_4	85	68	85	—	68	68	68
S_5	85	68	85	85	—	68	68

Таблица 23 — Рассчитанные радиусы связи базовых станций

$R_{jq}, \text{ м}$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_0	96	85	76	85	85
S_{m+1}	96	85	76	85	85

Таблица 24 — Рассчитанные радиусы связи шлюзов

Toolbox Matlab, а задача ЛП решалась с помощью библиотеки с исходным кодом Scipy Python. Как видно из результатов оценка, полученная с помощью задачи ЛП менее точная, приходится обходить большее количество узлов для нахождения рекордов по сравнению с методом оценки «недопокрытия» с помощью задач 2 и 3. В итоге возрастает итоговое количество пройденных узлов. В свою очередь метод ЛП имеет свое преимущество, так как время счета меньше.

Таблица 25 — Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи ЦЛП и ЛП

№	Рекорд, м	Стоимость, у.е.	Задержка, сек	Размещение						
				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	65	0,03244	S_1	—	S_4	—	—	S_5	—
2	1	65	0,03244	S_1	—	S_5	—	—	S_4	—
3	1	65	0,03244	S_4	—	S_1	—	—	S_5	—
4	0	65	0,03244	S_4	—	S_5	—	—	S_1	—
5	1	65	0,03244	S_5	—	S_1	—	—	S_4	—
6	0	65	0,03244	S_5	—	S_4	—	—	S_1	—
7	1	65	0,03244	—	S_1	S_4	—	—	S_5	—
8	1	65	0,03244	—	S_1	S_5	—	—	S_4	—
9	1	65	0,03244	—	S_1	—	S_4	—	S_5	—
10	0	65	0,03244	—	S_1	—	S_4	—	—	S_5
11	1	65	0,03244	—	S_4	S_1	—	—	S_5	—
12	0	65	0,03244	—	S_4	S_5	—	—	S_1	—
13	1	65	0,03244	—	S_4	—	S_1	—	S_5	—
14	0	65	0,03244	—	S_4	—	S_1	—	—	S_5
15	1	65	0,03244	—	S_5	S_1	—	—	S_4	—
16	0	65	0,03244	—	S_5	S_4	—	—	S_1	—
Метод оценки «недопокрытия» справа		ЦЛП				Задача «О ранце»			ЛП	

Число пройденных узлов	934	934	1590
Время счета, сек	5,412	5,136	3,613

4.4 Метод ветвей и границ на примере задачи размещения двух базовых станций

Для наглядного понимания предложенного алгоритма типа ветвей и границ рассмотрим частный случай задачи в комбинаторной форме на примере размещения $m = 2$ БС при заданных $n = 3$ точках размещения. Общее количество γ вариантов расстановки m станций по n точкам размещения равна

$$\gamma = C_n^m \cdot m!. \quad (4.4)$$

Пусть задан отрезок α длиной $L = 50$ с концами в точках a_0 и a_4 с координатами $l_0 = 0$ $l_4 = 50$. Внутри данного отрезка имеется множество точек размещения $A = \{a_i\}, i = 1, 2, 3$ с координатами $l_1 = 20, l_2 = 30, l_3 = 40$.

Задано множество БС $S = \{s_j\}, j = 1, 2$. Каждой станции приписаны параметры $s_j = \{r_j, \{R_{jq}\}\}$. Для s_1 задано $r_1 = 25, R_{10} = 62, R_{12} = 35, R_{14} = 31$. Для s_2 задано $r_2 = 9, R_{20} = 31, R_{12} = 28, R_{24} = 39$. На концах отрезка размещены шлюзы s_0 и s_4 . Радиус связи шлюзов для соединения с БС $R_{01} = R_{41} = 62$ и $R_{02} = R_{42} = 39$.

Необходимо разместить БС s_1 и s_2 , т.е. найти такую расстановку P^* , которая минимизирует функционал недопокрытия $f(P)$ (2.1).

Общее количество размещения двух станций по трем точкам равна $\gamma = C_3^2 \cdot 2! = 6$ (формула (4.6)).

Решение с помощью МВиГ.

Решим данной пример задачи в соответствии с разработанным МВиГ. Так как условием размещение является ли расстановка всех имеющихся БС, теперь

не нужно учитывать ограничения на стоимость и величину задержки, допустимая расстановка должна удовлетворять только требованию 1, а также условию размещения всех имеющихся БС.

Для задачи в комбинаторной форме условие размещения всех m станций гарантируется, когда число пар в наборе $P = \{(a_i, s_j), a_i \in A, i \neq 0, i \neq n + 1; s_j \in S\}$ равна мощности множества размещения $|S|$.

Так как теперь количество размещаемых мест зафиксировано, в уравнении (2.21) для оценки "недопокрытия" справа $w_2(G_v)$ вместо труднорешаемой **задачи 2** воспользуемся уравнением:

$$w_2(G_v) = \max\{(l_{n+1} - l_k) - (r_t + \sum_{j \in S_v} 2 \cdot r_j), 0\}, \quad (4.5)$$

где S_β подмножества еще не размещенных станций, r_t – радиус покрытия размещаемой станции S_t , l_k – координата точки размещения a_k .

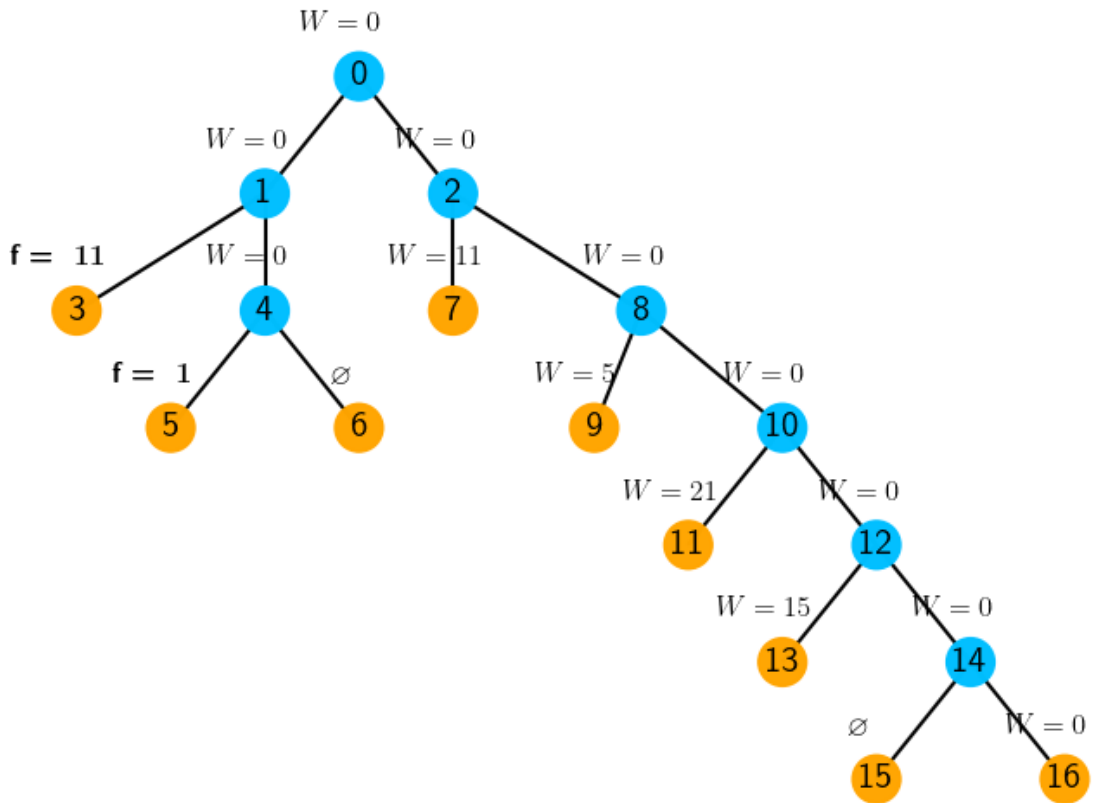


Рисунок 4.5 — Решение задачи методом ветвей и границ

На рисунке 4.5 представлено дерево решения задачи методом ветвей и границ. Каждый узел пронумерован согласно правилам **процедуры 1**. Оранжевым цветом указаны листья, в которых либо получили расстановку станций, либо на данном множестве G_v набор фиксированных и запрещенных переменных π_{ij} делает недопустимым любое размещение (обозначено символом \emptyset).

Закрытие вершины осуществляется в случаях если:

- получен новый рекорд размещения;
- оценка «недопокрытия» больше рекорда, полученного на предыдущих итерациях;
- нет допустимого размещения БС.

Перейдем к исследованию множеств на возможность закрытия.

Исследование множества G_0 .

За начальный рекорд примем длину всего отрезка $\hat{P} = L = 50$.

Построение оценки $W(G_0)$:

$$W(G_0) = \max\{L - 2(r_1 + r_2), 0\} = \max\{50 - 2(25 + 9), 0\}.$$

Разбиваем множества G_0 на два подмножества $G_1 = G_0^1$ ($\pi_{11} = 1$) и $G_2 = G_0^2$ ($\pi_{11} = 0$). Исследуем левое дочернее подмножество G_1 . Правое подмножество G_2 оставим для обратного шага.

Исследование множества G_1 .

Случай 1.

Проверка требования 1.

Шаг 1.

Проверяем, что каждый из радиусов R_{10} и R_{01} не меньше расстояния до левого шлюза s_0 .

$$l_1 - l_0 \leq R_{10} \rightarrow 20 - 0 \leq 62;$$

$$l_1 - l_0 \leq R_{01} \rightarrow 20 - 0 \leq 62;$$

Шаг 2. Осталось неразмещенная БС s_2 . Проверяем, что радиусы связи R_{12} и R_{21} не меньше расстояния до правой точки от a_1 точка a_2 .

$$l_2 - l_1 \leq R_{12} \rightarrow 30 - 20 \leq 35;$$

$$l_2 - l_1 \leq R_{21} \rightarrow 30 - 20 \leq 28.$$

Шаг 3.

Так как осталась только одна нераспределенная станция s_2 , проверяем, что расстояние среди еще незанятых точек справа от точки a_1 есть такая точка,

что расстояния от этой точки до точки a_1 и одновременно от этой точки до точки a_{n+1} не больше, чем радиус связи у нераспределенной станции.

Проверка точки a_2 .

$$l_2 - l_1 \leq R_{21} \rightarrow 30 - 20 \leq 28;$$

$$l_4 - l_2 \leq R_{21} \rightarrow 50 - 20 \leq 31;$$

Проверка точки a_2 .

$$l_3 - l_1 \leq R_{21} \rightarrow 40 - 20 \leq 28;$$

$$l_4 - l_3 \leq R_{21} \rightarrow 50 - 40 \leq 31;$$

Проверка обеспечения связи между размещаемыми БС произведена, можно приступать к оценке недопокрытия.

Случай 2.

Построение оценки $W(G_1)$:

$$W(G_1) = w_1(G_1) + w_2(G_1).$$

Недопокрытие слева от размещаемой БС s_1 :

$$w_1(G_1) = \max\{(l_1 - l_0) - r_1, 0\} \rightarrow \max\{(20 - 0) - 25, 0\} = 0.$$

И оценка недопокрытия справа от размещаемой БС s_1 :

$$w_2(G_1) = \max\{(l_4 - l_1) - (r_1 + 2r_2), 0\} \rightarrow \max\{(50 - 20) - (25 + 2 \cdot 9), 0\} = 0.$$

Итоговая оценка

$$W(G_1) = 0 + 0 = 0.$$

Разбиваем множества G_1 на два подмножества $G_3 = G_1^1$ ($\pi_{22} = 1$) и $G_4 = G_1^2$ ($\pi_{22} = 0$). Исследуем левое дочернее подмножество G_3 . Правое подмножество G_4 оставим для обратного шага.

Исследование множества G_3 .

Случай 1.

Проверка требования 1 проводится аналогичным образом. Перейдем к расчету оценки.

Случай 2.

Построение оценки $W(G_3)$:

$$W(G_3) = w_1(G_3) + w_2(G_3).$$

Недопокрытие слева от размещаемой БС s_2 :

$$w_1(G_3) = w_1(G_1) + (l_2 - l_1) - (r_1 + r_2) \rightarrow 0 + \max\{(30 - 20) - (25 + 9), 0\} = 0 + 0 = 0$$

Оценка недопокрытия справа от размещаемой БС s_2 :

$$w_2(G_3) = \max\{(l_4 - l_2) - r_2, 0\} \rightarrow \max\{(50 - 30) - 9, 0\} = 11.$$

$$W(G_3) = 0 + 11 = 11.$$

Все m станции размещены, $f(P_1) = W(G_3)$. Так как $f(P_1) \leq f(\hat{P}) \rightarrow f(P_1) \leq 50$, полученное недопокрытие $f(P_1)$ принимается за новый рекорд.

Следующим этапом будет обратный шаг по дереву поиска, так как все станции размещены, то есть нет свободных переменных π_{ij} в множестве Π^f . Незакрытая вершина с наибольшим порядковым номером – вершина G_4 с условием $\pi_{22} = 0$.

Исследование множества G_4 .

Случай 2.

Оценка правого дочернего узла $W(G_4)$ равна оценке материнского узла $W(G_1)$, $w_1(G_4) = w_1(G_1)$, $w_2(G_4) = w_2(G_1)$, и $W(G_4) = W(G_1) = 0$.

Разбиваем множества G_4 на два подмножества $G_5 = G_4^1$ ($\pi_{32} = 1$) и $G_6 = G_4^2$ ($\pi_{32} = 0$).

Исследование множества G_5 .

Случай 1. Успешная проверка требования 1.

Случай 2.

Построение оценки $W(G_5)$:

$$W(G_5) = w_1(G_5) + w_2(G_5).$$

Недопокрытие слева от размещаемой БС s_2 :

$$w_1(G_5) = w_1(G_5) + (l_3 - l_1) - (r_1 + r_2) \rightarrow 0 + \max\{(40 - 20) - (25 + 9), 0\} = 0 + 0 = 0$$

Оценка недопокрытия справа от размещаемой БС s_2 :

$$w_2(G_5) = \max\{(l_4 - l_3) - r_2, 0\} \rightarrow \max\{(50 - 40) - 9, 0\} = 1.$$

$$W(G_5) = 0 + 1 = 1.$$

Все m станции размещены, $f(P_2) = W(G_5)$. Так как $f(P_2) \leq f(\hat{P})$, полученное недопокрытие $f(P_2)$ принимается за новый рекорд.

№	Номер узла дерева, \mathbf{v}	Оценка недопокрытия, $W(G_v)$	Недопокрытие, $f(P)$	Размещение		
				a_1	a_2	a_3
1	0	0	50	—	—	—
2	1	0		s_1	—	—
3	3	11	Рекорд	s_1	s_2	—
4	4	0		s_1	—	—
5	5	1	Рекорд	s_1	—	s_2
6	6	0	\emptyset	s_1	—	—
7	2	0		—	—	—
8	7	11		s_2	—	—
9	8	0		—	—	—
10	9	5		—	s_1	—
11	10	0		—	—	—
12	11	21		—	s_2	—
13	12	0		—	—	—
14	13	15		—	—	s_1
15	14	0		—	—	—
16	15	0	\emptyset	—	—	—
17	16	0		—	—	—

Таблица 26 — Решение методом ветвей и границ

В ходе движения по дереву поиска исследования вершин происходило аналогичным образом как показано ранее. Оптимальным решением задачи стала

расстановка P_2 с нелопокрытием $f(P_2) = 1$. В таблице 26 представлены полученные оценки в ходе движения по дереву ветвлений. Все вершины закрыты, количество пройденных узлов бинарного дерева поиска МВиГ составляет 16.

Решение полным перебором.

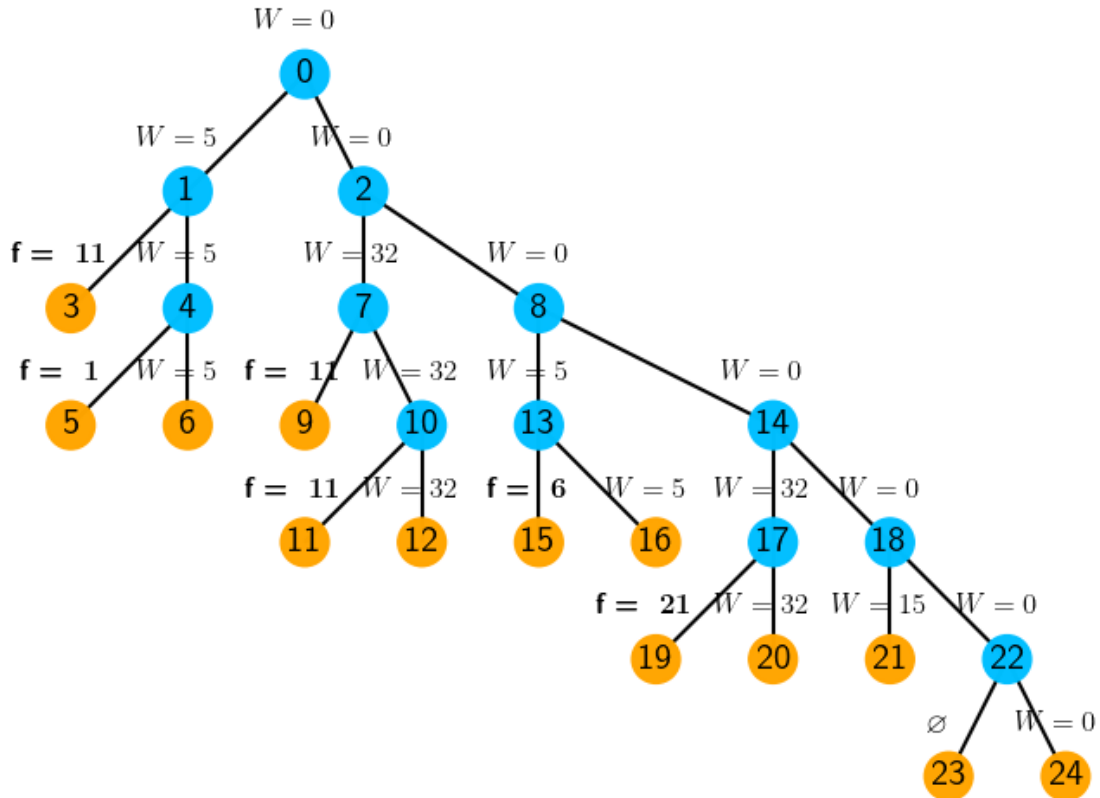


Рисунок 4.6 — Решение задачи методом полного перебора

Процесс решения задачи полным перебором представлен в виде бинарного дерева поиска (Рисунок 4.6). В таблице 27 представлены полученные в ходе решения расстановки. Все расстановки пронумерованы в соответствии с порядком их нахождения. Оптимальным решением P^* с минимальным значением функции (2.17) является допустимая расстановка P_2 . Количество пройденных узлов в ходе решения задачи составляет 24.

На примере частного случая размещения 2 БС по 3 точкам размещения был представлен МВиГ. Представлены деревья бинарного поиска для МВиГ и МПП. Предложенный метод позволяет сократить количество пройденных узлов в ходе поиска оптимального решения.

Расстановка, P	Недопокрытие, $f(P)$	Номер узла дерева, ν	Размещение		
			a_1	a_2	a_3
P_1	11	3	S_1	S_2	–
P_2	1	5	S_1	–	S_2
P_3	11	9	S_2	S_1	–
P_4	11	11	S_2	–	S_1
P_5	6	15	–	S_1	S_2
P_6	21	19	–	S_2	S_1
Количество пройденных узлов			24		

Таблица 27 — Решение полным перебором

4.5 Сравнительная оценка полученных моделей

Для решения задачи оптимального размещения базовых станций вдоль линейной территории были представлены математическая модель целочисленного линейного программирования и комбинаторная модель в экстремальной форме, для которой представлен специальный алгоритм на основе метода ветвей и границ, учитывающий специфику задачи – размещение вдоль линейной территории и обеспечения связи между всеми размещенными станциями.

В обеих моделях предполагается, что из заданного множества БС может быть размещено любое количество станций, удовлетворяющих условиям задачи. Через систему размещенных БС необходимо обеспечить связь между левым и правым шлюзом. Для задачи ЦЛП размещение должно удовлетворять бюджетному ограничению. И для задачи в комбинаторной форме задача должна удовлетворять бюджетному ограничению и ограничению на время межконцевой задержки сети.

Для того чтобы сравнить полученные модели, рассмотрим частный случай задачи максимизации покрытия с размещением всех имеющихся БС. Опустим бюджетное ограничение для обеих задач и для комбинаторной модели также ограничение на время задержки в сети. Вместо данных ограничений, добавим условие размещения всех имеющихся m станций. Такая постановка позволит зафиксировать множество вариантов размещения, необязательно только допустимых. Общее количество γ вариантов расстановки m станций по n точкам размещения равна

$$\gamma = C_n^m \cdot m! . \quad (4.6)$$

Для задачи ЦЛП условие размещения m станций будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = m. \quad (4.7)$$

Пример решения комбинаторной задачи. В приложении ?? представлен пример решения задачи размещения двух БС по трем точкам методом полного перебора и методом ветвей и границ. На рисунке 4.6 представлено дерево полного перебора. Общее количество размещения двух станций по трем точкам равно $\gamma = 6$ (формула (4.6)). Каждый узел пронумерован согласно правилам *процедуры 1*. В закрытых вершинах (листьях), либо получена расстановка БС, либо на данном множестве G_v набор фиксированных и запрещенных переменных π_{ij} нет допустимого размещения (обозначено символом \emptyset).

Расстановка, P	Недопокрытие, $f(P)$	Номер узла дерева, v
P_1	11	3
P_2	1	5
P_3	11	9
P_4	11	11
P_5	6	15
P_6	21	19

Таблица 28 — Решение полным перебором

В таблице 28 представлены полученные в ходе решения расстановки. Все расстановки пронумерованы в соответствии с порядком их нахождения. Оптимальным решением P^* с минимальным значением функции (2.17) является допустимая расстановка P_2 . Общее количество пройденных узлов составило 24.

Решение с помощью МВиГ. =====

Оценка недопокрытия, $W(G_v)$	Недопокрытие, $f(P)$	Номер узла дерева, v
11	Рекорд	3
1	Рекорд	5
32		7
5		9
32		11
15		13

Таблица 29 — Решение полным перебором

4.6 Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи 2, 3 и 4

В таблице 30 приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающего время решения задач 2, 3, 4 и относительную точность задачи 3, 4 по отношению к задаче 2.

Для непокрытого участка справа длины $|\beta| = 50$, варьируя количеством неразмещенных станций, а также количеством свободных мест размещения рассчитаем оценку недопокрытия при бюджетном ограничении $C = 600$.

Как видно из результатов расчетов в таблице 30, представляется целесообразным использовать задачу 3 в качестве оценки $w_2(G_v)$ для решения задач большой размерности, так как время ее расчета в виде задачи линейного программирования существенно ниже с учетом высокой точности.

4.7 Сравнение модели ЦЛП и комбинаторной модели

Теперь перейдем к решению задач большей размерности. Для различных случаев числа мест размещения m и числа станций n сравним результаты решения задачи представленными моделями. Оценка сравнения с помощью времени счета необъективна, так как алгоритм МВиГ и комбинаторная модель написаны на интерпретируемом языке Python. Коммерческие продукты представляют быстрые и качественные инструменты. Написание производительного кода для предложенных в данной диссертации моделей является отдельной не простой задачей, выходящей за рамки данного исследования. Коммерческие продукты

Количество точек размещения, m	Количество свободных станций, $ S_f $	ЦЛП		Задача «О ранце»			ЛП		
		Время расчета, сек	Недопокрытие, z	Время расчета, сек	Недопокрытие, z	Точность, %	Время расчета, сек	Недопокрытие, z	Точность, %
5	6	0,3250	436,00	0,3214	426,00	97,71	0,0047	436,00	100,00
5	8	0,3218	431,00	0,3582	398,00	92,34	0,0045	431,00	100,00
8	10	0,3765	395,00	0,3621	375,00	94,94	0,0094	395,00	100,00
8	12	0,3746	390,00	0,2977	347,00	88,97	0,0094	390,00	100,00
12	15	0,3363	339,00	0,2960	309,00	91,15	0,0114	339,00	100,00
12	17	0,4072	336,00	0,3456	283,00	84,23	0,0136	336,00	100,00
18	20	0,3558	265,00	0,3407	265,00	100,00	0,0121	265,00	100,00
18	25	0,3794	260,00	0,3096	259,00	99,62	0,0169	257,60	99,08
25	30	0,3177	246,00	0,3576	246,00	100,00	0,0222	244,33	99,32
25	45	0,3539	229,00	0,3556	229,00	100,00	0,0494	226,40	98,86
30	50	0,2994	225,00	0,3146	225,00	100,00	0,0570	224,13	99,61
30	100	0,5179	223,00	0,5177	223,00	100,00	0,1513	218,75	98,09

Таблица 30 — Сравнения оценок «недопокрытия» для задачи ЦЛП и ЛП

решающие задачи ЦЛП основаны на алгоритме, предложенный Алисой Лэнд и Элисон Дойг [33], в котором процедура поиска целочисленного решения также использует МВиГ. Поэтому для сравнения моделей будет использована характеристика – число просмотренных вершин в ходе поиска оптимального решения. Для сравнения также будут представлены решения задачи в комбинаторной форме методом полного перебора (МПП).

Для каждого набора станций и мест размещения было рассчитано по 10 примеров с различными параметрами БС. В таблице 31 приводятся усредненные показатели числа просмотренных вершин дерева поиска по каждому 10 примерам. Результаты решения задачи максимизации покрытия влияют не только от количества точек размещения n , но также от их координат. Примем, что для

Таблица 31 — Результаты численного решения.

Число точек размещения, n	Число станций, m	Количество вариантов размещения, γ	Количество пройденных узлов дерева поиска, ν		
			МПП	МВиГ	ЦЛП
7	4	840	3122	360	275
7	5	2 520	16 114	560	45
7	6	5 040	59 564	364	19
8	4	1 680	4954	434	189
8	5	6 720	6720	852	878
8	6	20 160	15 9170	592	185
9	4	3 024	9 882	458	5511
9	5	15 120	58 190	768	1236
9	6	60 480	366 512	720	13294
10	4	5 040	14 868	800	6243
10	5	30 240	113 932	414	8043
10	6	151 200	828 952	40 872	71587
11	4	7 920	23 482	354	15538
11	5	55 440	204 894	9 138	74440
11	6	332 640	1 592 500	88 002	413 767

каждой размерности для всех 10 примеров координаты фиксированные для всех моделей: МПП, МВиГ и ЦЛП.

Жирным цветом в колонках пройденных узлов в ходе движения по дереву поиска МПП, МВиГ и ЦЛП выделены минимальные значения для фиксированных значений n и m (размерностей задачи). Как видно из результатов сравнения, при увеличении размерности задачи разработанный алгоритм метода ветвей и границ для комбинаторной модели показывает лучшие результаты по сравнению с математической моделью ЦЛП.

Список литературы

- [1] В.М. Вишнеvский и др. — «Методы исследования и проектирования широкополосных беспроводных сетей вдоль протяженных транспортных магистралей». — В: *T-Comm: Телекоммуникации и Транспорт* 9.5 (2015), с. 9—15.
- [2] Renzo Massobrio, Jamal Toutouh и Sergio Nesmachnow. — «Multi-Objective Evolutionary Algorithms for Smart Placement of Roadside Units in Vehicular Networks». — В: *Evolutionary Multi-Objective System Design* (2020), с. 85—114. — DOI: 10.1201/9781315366845-5.
- [3] Claudia Campolo, Antonella Molinaro и Riccardo Scopigno. — «Vehicular ad hoc networks standards, solutions, and research». — В: *Vehicular Ad Hoc Networks Standards, Solutions, and Research* (2015), с. 1—544. — DOI: 10.1007/978-3-319-15497-8.
- [4] Evellyn S. Cavalcante и др. — «Roadside unit deployment for information dissemination in a VANET: An evolutionary approach». — В: *GECCO'12 - Proceedings of the 14th International Conference on Genetic and Evolutionary Computation Companion* (2012), с. 27—34. — DOI: 10.1145/2330784.2330789.
- [5] Abdelkrim KHireddine и Ouamri Mohamed Amine. — «Base station Placement Optimization Using Genetic Algorithms Approach». — В: *International Journal of Computer Aided Engineering and Technology* 12.1 (2020), с. 1. — DOI: 10.1504/ijcaet.2020.10006440.
- [6] Mohamed Ben Brahim, Wassim Drira и Fethi Filali. — «Roadside units placement within city-scaled area in vehicular ad-hoc networks». — В: *2014 International Conference on Connected Vehicles and Expo, ICCVE 2014 - Proceedings* (2014), с. 1010—1016. — DOI: 10.1109/ICCVE.2014.7297500.
- [7] V. M. Vishnevsky, Andrey Larionov и R. V. Smolnikov. — «Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes». — В: *Communications in Computer and Information Science* 601 (2016), с. 30—39. — DOI: 10.1007/978-3-319-30843-2_4.

- [8] Hai-qing Liu и др. — «A Connectivity-based Strategy for Roadside Units Placement in Vehicular Ad Hoc Networks». — В: *International Journal of Hybrid Information Technology* 7.1 (2014), с. 91—108. — DOI: 10.14257/ijhit.2014.7.1.08.
- [9] Zhenguo Gao и др. — «Optimal and Greedy Algorithms for the One-Dimensional RSU Deployment Problem with New Model». — В: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 67.8 (2018), с. 7643—7657. — DOI: 10.1109/TVT.2018.2837033.
- [10] Ali Jalooli, Min Song и Wenye Wang. — «Message coverage maximization in infrastructure-based urban vehicular networks». — В: *Vehicular Communications* 16 (2019), с. 1—14. — DOI: 10.1016/j.vehcom.2019.02.001.
- [11] Andre B. Reis и др. — «Deploying roadside units in sparse vehicular networks: What really works and what does not». — В: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 63.6 (2014), с. 2794—2806. — DOI: 10.1109/TVT.2013.2292519.
- [12] Abderrahim Guerna, Salim Bitam и Carlos T. Calafate. — «AC-RDV: a novel ant colony system for roadside units deployment in vehicular ad hoc networks». — В: *Peer-to-Peer Networking and Applications* 14.2 (2021), с. 627—643. — DOI: 10.1007/s12083-020-01011-3.
- [13] Chunyan Liu, Hejiao Huang и Hongwei Du. — «Optimal RSUs deployment with delay bound along highways in VANET». — В: *Journal of Combinatorial Optimization* 33.4 (2017), с. 1168—1182. — DOI: 10.1007/s10878-016-0029-5.
- [14] Haizhou Bao и др. — «Minimal road-side unit placement for delay-bounded applications in bus Ad-hoc networks». — В: *2017 IEEE 36th International Performance Computing and Communications Conference, IPCCC 2017 2018-January* (2018), с. 1—7. — DOI: 10.1109/PCCC.2017.8280441.
- [15] Ioannis Mavromatis и др. — «Efficient millimeter-wave infrastructure placement for city-scale ITS». — В: *IEEE Vehicular Technology Conference 2019-April* (2019). — DOI: 10.1109/VTCSpring.2019.8746518. — arXiv: 1903.01372.
- [16] Ю. В. Чиркова. — «Задача выбора и размещения базовых станций в беспроводной сет». — В: *Управление большими системами: сборник трудов*. 87 (2020), с. 26—46.

- [17] Roman Ivanov и др. — «On a problem of base stations optimal placement in wireless networks with linear topology». — В: *Communications in Computer and Information Science* 919 (2018), с. 505—513. — DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5_43.
- [18] С.В. Дейнеко и др. — *Основное технологическое оборудование и процессы транспорта нефти и нефтепродуктов*. — Москва: РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, 2018.
- [19] Laith M. Fawzi и др. — «Two levels alert verification technique for smart oil pipeline surveillance system (SOPSS)». — В: *International Journal of Computing and Digital Systems* 8.2 (2019), с. 115—124. — DOI: 10.12785/ijcds/080203.
- [20] Mateusz Krzysztoń и Ewa Niewiadomska-Szynkiewicz. — «Intelligent Mobile Wireless Network for Toxic Gas Cloud Monitoring and Tracking». — В: *Sensors* 21.11 (май 2021), с. 3625. — DOI: 10.3390/s21113625.
- [21] Amjad Mehmood, Jaime Lloret и Sandra Sendra. — «A secure and low-energy zone-based wireless sensor networks routing protocol for pollution monitoring». — В: *Wireless Communications and Mobile Computing* 16.17 (2016), с. 2869—2883. — DOI: 10.1002/wcm.2734.
- [22] Tzu-Hsuan Lin и др. — «Buried Wireless Sensor Network for Monitoring Pipeline Joint Leakage Caused by Large Ground Movements». — В: *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice* 10.4 (2019), с. 04019023. — DOI: 10.1061/(asce)ps.1949-1204.0000392.
- [23] Mutiu Adesina Adegboye, Wai Keung Fung и Aditya Karnik. — «Recent advances in pipeline monitoring and oil leakage detection technologies: Principles and approaches». — В: *Sensors (Switzerland)* 19.11 (2019). — DOI: 10.3390/s19112548.
- [24] N. Yu. Alekseev и P. V. Zyuzin. — «Assessment of Applicability of Wi-Fi Analytics in Studies of Urban Public Transport Passenger Flow (Moscow Case Study)». — В: *World of Transport and Transportation* 19.3 (2021), с. 54—66. — DOI: 10.30932/1992-3252-2021-19-3-6.
- [25] *Moscow Metro delivers fast Wi-Fi to millions of passengers*. — URL: <https://www.radwin.com/wp-content/uploads/2018/07/case-study-Moscow-Metro-w.pdf> (дата обр. 28.02.2022).

- [26] Oleg Soykin и др. — «Wideband Dual-polarized Antenna for Wi-Fi Communication Networks». — В: *14th European Conference on Antennas and Propagation, EuCAP 2020* (2020). — DOI: 10.23919/EuCAP48036.2020.9135260.
- [27] А. А. Адеркина и др. — «Радиопланирование систем беспроводной связи в тоннелях метрополитена». — В: *Радиотехнические и телекоммуникационные системы* 37.1 (2020), с. 41—53.
- [28] А. А. Адеркина и др. — «Измерение и анализ ослабления сигнала диапазона 5 ГГц при распространении вдоль участков метрополитена различного типа». — В: *Радиотехнические и телекоммуникационные системы* 41.1 (2021), с. 33—45.
- [29] G. B. Dantzig. — *Linear Programming and Extensions*. — Princeton University Press, 1963.
- [30] О.Ю. Першин. — *Оптимизации на конечных множествах и методы неявного перебора. Монография*. — Москва: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2013. — 85 с.
- [31] О. Г. Алексеев. — *Комплексное применение методов дискретной оптимизации*. — М: Наука, 1987. — 248 с.
- [32] А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов и Федоров В. В. — *Курс методов оптимизации*. — М: Наука, 1986. — 328 с.
- [33] A. H. Land и A. G. Doig. — «An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems». — В: *Econometrica* 28.3 (1960), с. 497. — DOI: 10.2307/1910129.
- [34] Bernhard Meindl и Matthias Templ. — «Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems». — В: *ESSnet on common tools and harmonised methodology for SDC in the ESS* 1.1 (2012), с. 1—14. — URL: <http://www.statistik.tuwien.ac.at/forschung/CS/CS-2012-1complete.pdf>.
- [35] Wen Yang Ku и J. Christopher Beck. — «Mixed Integer Programming models for job shop scheduling: A computational analysis». — В: *Computers and Operations Research* 73 (2016), с. 165—173. — DOI: 10.1016/j.cor.2016.04.006.

- [36] Rimmi Anand, Divya Aggarwal и Vijay Kumar. — «A comparative analysis of optimization solvers». — В: *Journal of Statistics and Management Systems* 20.4 (2017), с. 623—635. — DOI: 10.1080/09720510.2017.1395182.
- [37] И.Х. Сигал и А.П. Иванова. — *Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы*. — Москва: Физматлит, 2007. — 304 с.
- [38] М Гэри и Д Джонсон. — *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. — Мир, 1982. — 416 с.
- [39] В. А. Емеличев и В.И. Комлик. — *Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации*. — Москва: Наука, 1981. — 208 с.
- [40] О. Ю. Першин. — «Метод нахождения последовательности лучших решений для задач оптимизации на конечных множествах и задача реконструкции сети». — В: *Автоматика и телемеханика* 12 (1999).
- [41] О. Ю. Першин. — «Метод нахождения последовательности лучших решений для задач оптимизации на конечных множествах и задача реконструкции сети». — В: *Автоматика и телемеханика* 6 (2002).
- [42] Р. Е. Иванов, А. А. Мухтаров и О.Ю. Першин. — «Задача оптимального размещения заданного множества базовых станций беспроводной сети связи с линейной топологией». — В: *Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности* 549.4 (2019), с. 39—45.
- [43] R. Ivanov, A. Mukhtarov и O. Pershin. — «A Problem of Optimal Location of Given Set of Base Stations in Wireless Networks with Linear Topology». — В: *Communications in Computer and Information Science* 1141 CCIS (2019), с. 53—64. — DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4_5.
- [44] А. А. Мухтаров, Р. Е. Иванов и О. Ю. Першин. — «Математические модели задачи размещения базовых станций для контроля линейной территории». — В: *Proceedings of the 22nd International Scientific Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2019, Moscow)*. — 2019, — С. 205—212.

- [45] Amir Mukhtarov и др. — «On Optimal Placement of Base Stations in Wireless Broadband Networks to Control a Linear Section with End-to-End Delay Limited». — В: *Communications in Computer and Information Science* 1337 (2020), с. 30—42. — DOI: 10.1007/978-3-030-66242-4_3.
- [46] В. М. Вишневский, А. А. Мухтаров и О.Ю. Першин. — «Задача оптимального размещения базовых станций широкополосной сети для контроля линейной территории при ограничении на величину межконцевой задержки». — В: *Материалы 23-й Международной научной конференции "Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь" (DCCN-2020, Москва)*. — 2020, — С. 148—155.
- [47] В. Е. Лазарева, А. А. Ларионов и А. А. Мухтаров. — «Расчёт межконцевых задержек и длин очередей в многошаговой тандемной сети с применением методов машинного обучения». — В: *Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем" (Москва, 2020)*. — 2020, — С. 43—48.
- [48] В. М. Вишневский, А. А. Ларионов и А. А. Мухтаров. — «Расчёт характеристик тандемной сети с фиксированными длинами входящих пакетов методом машинного обучения». — В: *Материалы 13-й конференции с международным участием "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" (ICAM 2020, Томск)*. — 2020, — С. 82.
- [49] А. А. Mukhtarov и А.М. Sokolov. — «A base station placement of an wireless network with linear topology and a network performance evaluation with NS-3». — В: *Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, 19–23 апреля 2021 года*. — 2021, — С. 425—430.
- [50] *Gurobi Optimizer*. — URL: <https://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/> (дата обр. 10.03.2022).
- [51] *SciPy*. — URL: <https://scipy.org/> (дата обр. 10.03.2022).