

## **Глава 1. Оптимальное размещение базовых станций широкополосной беспроводной сети связи для обслуживания заданного множества рассредоточенных объектов**

Построение современной инфраструктуры передачи информации для обслуживания множества объектов промышленного или гражданского назначения, рассредоточенных на некоторой территории, является актуальной задачей при создании единой систем контроля и управления указанными объектами. Создание такой инфраструктуры позволяет обеспечить оперативный контроль и управление объектами путем передачи необходимой информации с сенсоров и датчиков объектов в соответствующий внешнее приемное устройство. Для создания подобной инфраструктуры эффективно используются сети широкополосной беспроводной связи, необходимым этапом проектирования которых является решение задачи определения мест размещения базовых станций [VishnevskyBook]. В настоящей работе строятся и исследуются две математические модели задач размещения базовых станций, которые применимы на этапе синтеза топологии сети в процессе комплексного проектирования мультимедийных сетей. Предлагается модель для проверки существования допустимого решения при условии выполнения технологических ограничений для предложенной на предыдущих этапах схемы расстановки станций и модель для оптимизационной задачи. Оптимизационная задача состоит в выборе множества станций из заданного набора типов станций с различными характеристиками и их расстановки на избыточном множестве возможных мест размещения. В поставленной задаче рассматривается задача обслуживания объектов, расположение которых задано их координатами на плоскости. Особенностью такой задачи в широком классе задач оптимального размещения мощностей является наличие условия на наличие информационной связи между станциями и внешним приемным устройством (шлюзом), выполнение которого гарантирует поступление всей информации с контролируемых объектов в центр управления.

### 1.1 Задача при заданных местах размещения станций.

Задано множество вершин  $A = \{a_i\}, i = \overline{0, n}$  на плоскости. Каждая вершина  $a_i$  имеет координаты  $\{x_i, y_i\}$ .

Множество  $A$  состоит из двух подмножеств:

- $A_1$  — множество вершин, которое соответствует объектам, с которых необходимо собирать информацию. Каждой вершине  $a_i$  приписана величина  $v_i$  — максимальный объем информации, снимаемой с объекта, расположенного на этой вершине. В частности, объектами могут быть любые стационарные абонентские устройства сети 802.11n. В дальнейшем будем считать, что каждая вершина из  $A_1$  является объектом контроля.
- $A_2$  — множество мест, где размещены базовые станции. В дальнейшем вершину из  $A_2$  будем идентифицировать не только как место размещения, но и как соответствующую станцию.

По определению:

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset;$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Все вершины пронумерованы так, что:

$$A_1 = \{a_i\}, i = \overline{1, n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1, n}.$$

Каждой вершине из  $A_2$  приписаны три параметра  $s_i = \{r_i, R_i, \vartheta_i\}$ , где:

- $r_i$  — максимальный радиус покрытия станции. Параметр, который характеризует зону охвата территории каждой станцией;
- $R_i$  — максимальный радиус связи станции. Параметр характеризует расстояние, на котором обеспечивается радиорелейная связь между станциями;
- $\vartheta_i$  — максимальный объем информации в единицу времени, который может быть получен от объектов, обслуживаемых станцией.

Также задана вершина специального вида (шлюз)  $s_0 = \{r_0, R_0, \vartheta_0\}$  с координатами  $\{x_0, y_0\}$ . По условию задачи величина  $\vartheta_0$  больше суммы величин  $\vartheta_i$  у всех вершин множества  $A_1$ .

Задано условие, что со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества  $A_2$ .

Требуется проверить, что при заданных наборе и размещении станций вся имеющаяся информация с объектов (множество  $A_1$ ) может быть собрана и передана системой станций (множество  $A_2$ ) до шлюза  $s_0$ .

Сформулируем задачу в виде модели **ЛП**.

Составим граф  $H = \{A, E\}$  для возможного потока информации между вершинами множества  $A = A_1 \cup A_2$ . По определению, каждой вершине из  $A_2$  соответствует свой набор параметров  $\{r_i, R_i, \vartheta_i\}$ . Матрица смежности  $E = \{e_{ij}\}$  графа  $H$  строится по следующим правилам:

- $e_{ij} = 1$ , если расстояние между  $i$ -ым объектом ( $a_i \in A_1$ ) и  $j$ -ым местом размещения станции ( $a_j \in A_2$ ) не более радиуса покрытия для станции соответствующего этой вершине типа;
- $e_{ij} = 1$ , если расстояние между  $i$ -ым местом размещения ( $a_i \in A_2$ ) и  $j$ -ым местом размещения ( $a_j \in A_2$ ), не более радиуса связи той станции, у которой радиус связи не больше радиуса связи другой станции;
- $e_{i0} = 1$ , если расстояние от вершины  $a_i \in A_2$  до шлюза не более  $R_i$ ;
- $e_{ij} = 0$ , во всех остальных случаях.

Введем переменные  $x_{ij} \geq 0$ . Это искомое количество информации, передаваемой в единицу времени по дуге  $e_{ij}$  графа  $H$ . Распишем условия для нашей задачи. Величина суммарного потока, который выходит с объекта равен весу  $\vartheta_i$ :

$$\sum_{a_j \in \Gamma^+(a_i)} x_{ij} = \vartheta_i, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}, \quad (1.1)$$

где  $\Gamma^+(a_i)$  – множество вершин на графе  $H$ , в которые входят дуги, исходящие из вершины  $a_i$ .

Сумма входящих и исходящих потоков для любой  $i$ -ой вершины множества  $A_2$  равна нулю:

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} x_{ij} + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0, \forall a_i \in A_2. \quad (1.2)$$

Здесь множество  $\Gamma_1^-(a_i)$  – вершины множества  $A_1$ , из которых выходят дуги, входящие в вершину  $a_i$ ,  $\Gamma_2^-(a_i)$  – вершины множества  $A_2$ , из которых выходят дуги, входящие в вершину  $a_i$ ,  $\Gamma_2^+(a_i)$  – вершины множества  $A_2$ , в которые входят дуги, исходящие из вершины  $a_i$ .

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз  $s_0$ :

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i; \quad (1.3)$$

Объем информации, поступающей с других вершин на станцию, если она размещена на  $j$ -ой вершине, ограничен мощностью станции  $\vartheta_j$ :

$$\sum_{a_j \in \Gamma^-(a_i)} x_{ji} \leq \vartheta_j, \forall a_j \in A_2 D. \quad (1.4)$$

Для нахождения допустимого решения задач ???????? (или доказательства, что допустимого решения не существует) может быть применена стандартная процедура нахождения допустимого решения задачи линейного программирования с вводом искусственных переменных в уравнения ???????? и минимизации состоящей из этих переменных линейной формы. Если значение целевой функции в результате решения задачи окажется больше нуля, то допустимого решения для данного размещения станций не существует, в противном случае полученное решение дает допустимое распределение потоков по каналам связи.

## 1.2 Оптимизационная задача выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения

Постановка задачи Задано множество вершин  $A = a_i, i = \overline{0, n}$  на плоскости. Каждая вершина  $a_i$  имеет координаты  $\{x_i, y_i\}$ . Множество  $A$  состоит из двух подмножеств:

- $A_1$  – множество вершин, с которых необходимо собирать информацию. Каждой вершине  $a_i$  приписана величина  $v_i$  – максимальный объем информации, снимаемой с объекта, расположенного на этой вершине;

–  $A_2$  – множество возможных мест размещения базовых станций.

По определению

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset;$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Все вершины пронумерованы так, что:

$$A_1 = \{a_i\}, i = \overline{1, n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1, n}.$$

Задано множество типов базовых станций  $S = s_j, j = \overline{1, s}$ , которые необходимо разместить на множестве  $A_2$ .

Каждой станции приписаны четыре параметра  $s_j = \{r_j, R_j, \vartheta_j, c_j\}$ , где:

- $r_j$  – максимальный радиус покрытия;
- $R_j$  – максимальный радиус связи между станциями;
- $\vartheta_j$  – максимальный объем информации в единицу времени, который может быть получен от объектов, обслуживаемых данной станцией;
- $c_j$  – стоимость станции.

Также задана станция специального вида (шлюз)  $s_0 = \{r_0, R_0, \vartheta_0, c_0\}$  с координатами  $\{x_0, y_0\}$ , где  $r_0 = R_0 = \vartheta_0 = c_0 = 0$

Требуется разместить станции таким образом, чтобы вся информация с объектов (вершинах множества  $A_1$ ) могла быть собрана и передана системой станций, размещенных на выбранных в результате решения задачи вершинах множества  $A_2$ , до шлюза  $s_0$  и общая стоимость размещенных станций была бы минимальной. Как и в предыдущих задачах вершины и станции будем, соответственно, идентифицировать как объекты или станции на них размещенные. Задано условие, что информация с вершин множества  $A_1$  может передаваться непосредственно только на вершины множества  $A_2$ , а со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества  $A_2$ .

Заметим, что в отличие от предыдущих двух задач в данной задаче задано не множество станций, которые все должны быть использованы в проектируемой сети, а только типы станций. Таким образом в результате решения задачи определяется как набор станций, так и места их размещения. Формулировка

задачи в виде модели частично целочисленного ЛП. Вместо каждой вершины  $a_i$ ,  $i = \overline{n_1 + 1, n}$  введем  $m$  вершин с координатами вершины  $a_i$ , и различными параметрами, соответствующими различным типам станций. Обозначим такую группу вершин, записанных с одинаковыми координатами вместо вершины  $a_i$ , как  $D_i$ . Каждой вершине из  $D_i$  поставим в соответствие набор параметров только одного типа станции из  $S$ , т.е. на данной вершине может стоять либо станция приписанного типа либо никакая. Обозначим расширенное множество вершин  $A_2$  через  $A_2D$ .

Составим граф  $H = \{AD, E\}$ , описывающий сеть для передачи потока информации между вершинами расширенного множества  $AD = A_1 \cup A_2D$  и шлюзом. Матрица смежности  $E = e_{ij}$  графа  $H$  строится по следующим правилам.

- $e_{ij} = 1$ , если расстояние между  $i$ -ой вершиной ( $a_i \in A_1$ ) и  $j$ -ой вершиной ( $a_j \in A_2D$ ) не более радиуса покрытия, приписанного этой вершине;
- $e_{ij} = 1$ , если вершины  $a_i$  и  $a_j$  принадлежат разным множествам  $D_i$  и  $D_j$  и расстояние между ними не более радиуса связи той вершины, у которой радиус связи не больше радиуса связи другой вершины;
- $e_{i0} = 1$  ( $a_i \in A_2D$ ) если расстояние от вершины до шлюза не более  $R_i$ ;
- $e_{ij} = 0$ , во всех остальных случаях.

Введем потоковые переменные  $x_{ij} \geq 0$ .

Распишем условия для нашей задачи. Величина суммарного потока, который выходит с вершины  $a_i$  равен весу  $\vartheta_i$

$$\sum_{a_j \in \Gamma^+(a_i)} x_{ij} = \vartheta_i, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}; \quad (1.5)$$

где  $\Gamma^+(a_i)$  – множество вершин на графе  $H$ , в которые входят дуги, исходящие из вершины  $a_i$ .

Сумма входящих и исходящих потоков для любой  $i$ -ой вершины множества  $A_2D$  равна нулю

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} x_{ij} + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0, \forall a_i \in A_2. \quad (1.6)$$

Здесь множество  $\Gamma_1^-(a_i)$  – вершины множества  $A_1$ , из которых выходят дуги, входящие в вершину  $a_i$ ,  $\Gamma_2^-(a_i)$  – вершины множества  $A_2D$ , из которых выходят дуги, входящие в вершину  $a_i$ ,  $\Gamma_2^+(a_i)$  – вершины множества  $A_2D$ , в которые входят дуги, исходящие из вершины  $a_i$ .

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз  $s_0$

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i. \quad (1.7)$$

Здесь  $\Gamma_2^-(a_0)$  — подмножество вершин множества  $A_2D$ , дуги которых входят в шлюз  $a_0$ .

Введем булевы переменные  $y_i$  для вершин  $a_i$ ,  $a_i \in A_2D$

- $y_i = 1$ , если станция стоит на месте  $a_i$ ;
- $y_i = 0$ , в противном случае.

Объем информации, поступающей от вершин множества  $A_1$  на вершину  $a_i \in A_2D$ , ограничен мощностью станции  $\vartheta_i$ .

$$\sum_{a_j \in \Gamma^-(a_i)} x_{ji} \leq y_i \cdot \vartheta_i, \forall a_i \in A_2D. \quad (1.8)$$

На множестве  $D_i$  может быть размещено не более одной станции

$$\sum_{a_j \in D_i} y_j \leq 1, \forall D_i. \quad (1.9)$$

Целевая функция

$$\sum_{a_i \in A_2D} c_i \cdot y_i \rightarrow \min. \quad (1.10)$$

Задача ??????????? представляет собой частично целочисленную задачу линейного программирования с  $s \cdot |A_2|$  булевыми переменными.

### 1.3 Пример решения задачи

Рассмотрим пример для оптимизационной задачи выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения. Задано множество рассредоточенных объектов  $A_1$ ,  $|A_1| = 4$  и шлюз (таблица ??).

Задано множество  $A_2$  возможных мест расположения станций,  $|A_2| = 4$ . Все вершины представлены на рисунке ??.

Таблица 1 — Координаты размещения

|   |          |                                      |
|---|----------|--------------------------------------|
| 0 | (7,4)    | <b>Координаты шлюза</b>              |
| 1 | (1, 5)   | <b>Координаты объектов</b>           |
| 2 | (4.5, 4) |                                      |
| 3 | (6, 3)   |                                      |
| 4 | (3.5, 5) |                                      |
| 5 | (2, 4)   | <b>Координаты размещения станций</b> |
| 6 | (5, 5)   |                                      |
| 7 | (2, 6)   |                                      |
| 8 | (6, 5.5) |                                      |

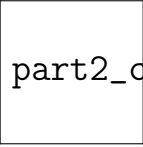

 part2\_coordinates.png

Рисунок 1.1 — Координаты размещения

Таблица 2 — Координаты размещения

|          |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|
| Объекты  | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Мощность | 10 | 15 | 17 | 18 |

Задано ограничение по мощности для кадного объекта (таблица ??).

Задано множество типов станций (таблица ??).

Необходимо разместить станции таким образом, чтобы минимизировать их суммарную общую стоимость. Построим граф сети  $H$  для данного набора типов станции. Матрица смежности представлена на рисункке ??

Таблица 3 — Множество типов станций

| Тип | Мощность, $\vartheta_j$ | Радиус покрытия, $r_j$ | Радиус связи, $R_j$ | Стоимость, $c_j$ |
|-----|-------------------------|------------------------|---------------------|------------------|
| 1   | 80                      | 1                      | 6                   | 70               |
| 2   | 100                     | 2                      | 5                   | 75               |
| 3   | 100                     | 2                      | 5                   | 75               |



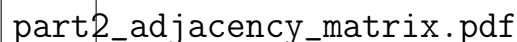


Рисунок 1.2 — Координаты размещения

На основе матрицы смежности полученного графа запишем систему равенств и неравенств???????????? и решим задачу частично целочисленного ЛП. В ходе решения мы получили следующее размещение станции (рис. ??)

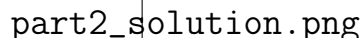


Рисунок 1.3 — Координаты размещения

Из графика видно, что были размещены на точках 7 и 8 две станции типа 2 и 3, соответственно. Решением задачи является суммарная стоимость равная:  $f = 160$ .

## 1.4 Результаты численного эксперимента

Алгоритмы построения графов  $H$  были запрограммированы на языке Python. Задачи, сформулированные на основании графов  $H$  в виде соответствующих задач математического программирования, были решены пакетом Optimization Toolbox MATLAB. В таблице 4 представлены результаты времени счета задач частично целочисленного ЛП для различных случаев числа мест размещения станций и числа объектов. Для каждого случая было проведено по 10 примеров.

## 1.5 Выводы к главе 1

В работе рассмотрены задачи размещения базовых станций при проектировании беспроводных широкополосных сетей связи. Предложены формулировки задач в виде моделей линейного и частично целочисленного линейного программирования как для случая проверки наличия допустимых решений

Таблица 4 — Множество типов станций

| Количество<br>объектов, $n_1$ | Количество мест<br>размещения станций, $n - n_1$ | Среднее время<br>счета, сек. |
|-------------------------------|--|------------------------------|
| 4                             | 3  | 12,34                        |
| 4                             | 4  | 12,42                        |
| 4                             | 5  | 12,31                        |
| 6                             | 6  | 11,20                        |
| 8                             | 7  | 11,27                        |
| 10                            | 7  | 12,32                        |
| 12                            | 10   | 12,51                        |
| 14                            | 7  | 12,42                        |
| 17                            | 8  | 12,18                        |
| 21                            | 8  | 12,53                        |
| 25                            | 8  | 14,22                        |

для вариантов, предложенных проектировщиками, так и для экстремальной задачи отбора множества станций из имеющегося набора типов станций и оптимального размещения станций выбранного множества на избыточном множестве возможных мест размещения. Предложены алгоритмы построения графов информационных потоков, позволившие формализовать задачи в виде соответствующих моделей математического программирования. Приведены результаты вычислительного эксперимента.