## Оглавление

Стр.

Стр.

# Глава 3. Размещение базовых станций БШС для обслуживания множества рассредоточенных объектов

В данной главе будут представлены модели задачи синтеза топологии при развертывании БШС на плоскости для телекоммуникационного покрытия множества рассредоточенных объектов.

Алгоритм Дейкстры для проверки условия наличия пути от объектов до шлюза

## 3.1 Актуальность внедрения БШС для обслуживания рассредоточенных объектов на месторождении

Построение современной инфраструктуры передачи информации для обслуживания множества объектов промышленного или гражданского назначения, рассредоточенных на некоторой территории, является актуальной задачей при создании единой систем контроля и управления указанными объектами. Создание такой инфраструктуры позволяет обеспечить оперативный контроль и управление объектами путем передачи необходимой информации с сенсоров и датчиков объектов в соответствующий внешнее приемное устройство. Для создания подобной инфраструктуры эффективно используются сети широкополосной беспроводной связи, необходимым этапом проектирования которых является решение задачи определения мест размещения базовых станций [1].

В работе [2] предложен новый протокол сенсорной сети на базе IEEE 802.11 для мониторинга случаев загрязнений углеводородами.

В работе [3] исследуются различные протоколы сенсорных сетей для мониторинга над газораспределительной сети. Вся сеть разделена на более мелкие, управляемые сегменты, каждый из которых имеет свою базовую станцию для отправки пакетов в центральный пункт управления.

В настоящей работе строятся и исследуются две математические модели задач размещения базовых станций, которые применимы на этапе синтеза топологии сети в процессе комплексного проектирования мультимедийных сетей. Предлагается модель для проверки существования допустимого решения при условии выполнении технологических ограничений для предложенной на предыдущих этапах схемы расстановки станций и модель для оптимизационной задачи. Оптимизационная задача состоит в выборе множества станций из заданного набора типов станций с различными характеристиками и их расстановки на избыточном множестве возможных мест размещения. В поставленной задаче рассматривается задача обслуживания объектов, расположение которых задано их координатами на плоскости. Особенностью такой задачи в широком классе задач оптимального размещения мощностей является наличие условия на наличие информационной связи между станциями и внешним приемным устройством (шлюзом), выполнение которого гарантирует поступление всей информации с контролируемых объектов в центр управления.

В данной главе будет предложена задача оптимального размещения базовых станций, принадлежащая к широкому классу задач размещения мощностей (Resource Allocation Problem).

В [4] решают задачу размещения мощностей с помощью генетического алгоритма. Авторы занимаются развертыванием устройств распределенных вычислений, серверов, вблизи устройств конечных пользователей. Связующим звеном между конечным пользователем и сервером являются базовые станции.

В рамках широкого класса задач размещения мощностей в наших задачах размещения присутсвует специфика на связь между всеми узлами сети и наличие линейной траектории в случае задачи с линейной топологией.

## 3.2 Математическая модель задачи оптимизации при заданных местах размещения станций.

Модели задачи оптимизации, которые исследуются в диссертации, предлагается использовать при проектировании БШС на этапе синтеза топологии. После ввода в эксплуатацию сети часто требуется модернизировать, так как любое производство непрерывно развивается. Со временем, телекоммуникационную сеть требует усовершенствование своей инфраструктуры: масштабирование с целью увеличения покрытия сети, демонтаж оборудования, смена протоколов и т.д. Любое изменение приводит к тому, что необходимо провести качество обслуживания сети QoS, надежность и в целом проверить возможно ли обеспечить телекоммуникационное покрытие будущей сети. В данном параграфе будет представлена задача оптимизации при уже заданных размещения базовых станций. В такой постановке возможность сбора такой информации с множества рассредоточенных объектов и поиска кратчайшего пути передачи пакетов от множества объектов к шлюзу через множества размещенных станций.

### 3.2.1 Постановка задачи

Имеются множество узлов БШС рассредоточенных на плоскости. Все множество можно разбить на две категории:

– объекты, с которых необходимо собирать информацию, являются оконечными узлами сети;
– станции для сбора и передачи на шлюз данных с объектов, являются промежуточными узлами сети;

Под объектом понимается любое устройство с антенной для передачи пакетов в канале. К ним можно отнести измерительные устройства, шлюзы сенсорных сетей и т.д. В частности, объектами могут быть любые стационарные абонентские устройства сети 802.11n.

Задано множество вершин $A = \{a_i\}, i = \overline{0,n}$ на плоскости. Каждая вершина $a_i$ имеет координаты $\{x_i, y_i\}$.

Множество $A$ состоит из двух подмножеств:

– $A_1$ — множество вершин, соответствующее объектам; с которых необходимо собирать информацию.
– $A_2$ – множество мест, где размещены базовые станции. В дальнейшем вершину из $A_2$ будем идентифицировать не только как место размещения, но и как соответствующую станцию.

С вершин $A_1$ необходимо собирать информацию. Каждой вершине $a_i \in A_1$ приписана величина $v_i$ – максимальный объем информации в единицу времени, который генерирует расположенный на этой вершине объект. В дальнейшем будем считать, что каждая вершина из $A_1$ является, непосредственно, объектом. В дальнейшем вершинs $a_i \in A_2$ будем идентифицировать не только как место размещения, но и как соответствующую станцию.

По определению:

$$A_1 \cup A_2 = \varnothing;$$

$$A_1 \cap A_2 = A.$$

Все вершины пронумерованы так, что:

$$A_1 = \{a_i\}, i = \overline{1,n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1,n}.$$

Каждой станции, размещенной на вершине множества $A_2$ приписаны три параметра $s_i = \{\{r_{ij}\}, \{R_{ij}\},\vartheta_i\}$, где:

– $\{r_{ij}\}$ – множество радиус телекоммуникационного покрытия станции. Параметр $r_{ij}$ характеризует дальность связи между станцией размещенной в вершине $a_i, a_i \in A_2$ и объектом в вершине $a_j, a_j \in A_1$;
– $\{R_{ij}\}$ – множество радиусов связи станции. Параметр $R_{ij}$ характеризует дальность связи между станциями $s_i$ и $s_j$, $i = \overline{n_1 + 1,n}, j = \overline{n_1 + 1,n}, i \neq j$;
– $\vartheta_i$ – объем информации в единицу времени, который может быть получен от объектов, обслуживаемых станцией.

Также станция специального вида – шлюз $s_0 = \{\{R_{0j}\}, \vartheta_0\}$, размещенная на вершине $a_0$ с координатами $\{x_0, y_0\}$. Данная станция не имеет телекоммуникационного покрытия и служит для сбора всей информации в сети. По условию задачи величина $\vartheta_0$ больше суммы величин $\vartheta_i$ всех вершин множества $A_1$.

Задано условие, со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества $A_2$, то есть только станции.

Требуется проверить, что при заданных наборе и размещении станций на множества $A_2$ вся имеющаяся информация с объектов множества $A_1$ может быть собрана и передана системой станций до шлюза $s_0$.

### 3.2.2 Модель линейного программирования

Перед тем как приступить к задаче оптимизации, необходимо подготовить правила составления графа сети, в соответствии с постановкой задачи.

#### Граф потока информации

Составим граф $H = \{A,E\}$ для возможного потока информации между вершинами множества $A = A_1 \cup A_2$. По определению, каждой вершине $a_i \in A_2$ соответствует станция $s_i$ со своим набором параметров $\{r_i\{R_{ij}\}, \vartheta_i\}$. Матрица смежности $E = \{e_{ij}\}$ графа $H$ строится по следующим правилам:

- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ым объектом вершины $a_i \in A_1$ и $j$-ой станцией, размещенной на вершине $a_j \in A_2$ не более радиуса покрытия для станции соответствующего этой вершине типа;
- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ой станцией на вершине $a_i \in A_2$ и $j$-ой станцией на вершине $a_j \in A_2$, не более минимального из радиусов связей этих станций;
- $e_{i0} = 1$, если расстояние от вершины $a_i \in A_2$ до шлюза не более минимального из радиусов связей станции и шлюза;
- $e_{ij} = 0$, во всех остальных случаях.

#### Формулировка в виде задачи линейного программирования

С помощью полученного графа смежность $H$, необходимо подготовить условия ограничения для величины потока в каналах.

Введем переменные $x_{ij} \geqslant 0$, определяющее количество информации, передаваемой в единицу времени по дуге $e_{ij}$ графа $H$.

Каждый объект множества $A_1$ генерирует пакеты объемом $\vartheta_i$ в единицу времени. Для канала $e_{ij}, i = \overline{1,n_1}, j = \overline{n_1+1,n}$ величина потока равна весу $\vartheta_i$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma^+(a_i)} x_{ij} = \vartheta_i, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}, \tag{3.1}$$

где $\Gamma^+(a_i)$ – множество вершин на графе $H$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Для каждой вершины $a_i i \in A_2$ необходимо обеспечить выполнения условия баланса между потоком входящем в эту вершину от объектов множества $A_1$, а также других станций множества $A_2$ и выходящего потока из данной вершины. Сумма входящих и выходящих потоков для любой $i$-ой вершины множества $A_2$ должна быть равна нулю:

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} x_{ij} + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0, \forall a_i \in A_2. \tag{3.2}$$

Здесь множество $\Gamma_1^-(a_i)$ – вершины множества $A_1$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^-(a_i)$ – вершины множества $A_2$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^+(a_i)$ – вершины множества $A_2$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз $s_0$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i; \tag{3.3}$$

проверить индексы i, g Объем информации, поступающей с других вершин на станцию, если она размещена на $j$-ой вершине, ограничен мощностью станции $\vartheta_j$:

$$\sum_{a_j \in \Gamma^-(a_i)} x_{ji} \leqslant \vartheta_j, \forall a_j \in A_2 D. \tag{3.4}$$

==========================================

Представленная модель задачи ЛА является задачей о потоке минимальной стоимости. Задача о потоке минимальной стоимости играет одну из основных ролей в области оптимизации сетей [5]. Она используется для нахождения минимальной стоимости потока с множества узлов поставок до множества узлов потребителей в направленном графе с ограничениями на пропускную способность и целевой функцией стоимости, зависящей от пути потока в графе. Задача имеет широкой спектр приложений в различных областях:

задачах транспортировки, расписания, ресурсного планирования, телекоммуникации, проектировании сетей и маршрутизации [5] добавить.

Задачу о потоке минимальной стоимости можно решить с помощью симплекс-метода [6]. Для решения классическим способом задачи ЛП необходимо задавать ориентированный граф. В случае модели () – () моя модель ЛП, ребра графа между станциями $s_j$ в точках $A_2$ двунаправленные. Предполагается, что передача информации может идти в обоих направлениях либо от $s_i$ к $s_j$ через ребро $w_{ij}$, либо от $s_j$ к $s_i$ через ребро $w_{ji}$, соответственно, $i = \overline{n_1+1,n}, j = \overline{n_1+1,n}, i \neq j$ (Рисунок 3.1). Данное особенность задачи портит решение, полученное с помощью классического симплекс метода в линейной форме. Допустимым решением в таком случае будет являться сеть, содержащая циклы между узлами $s_i$ и $s_j$. Для получения объективного решения воспользуемся сетевым симплекс методом, чтобы учесть специфику задачи.

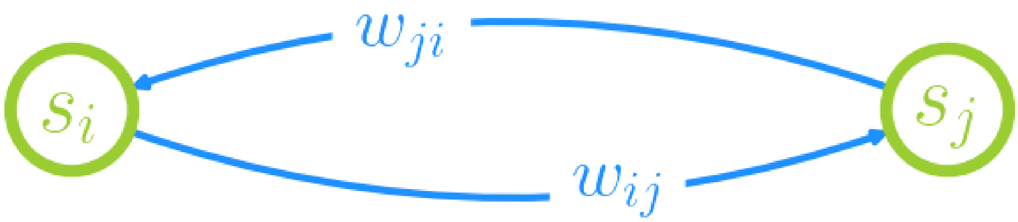


Рисунок 3.1 — Направления потоков между станциями.

С момента публикации Данцигом симплекс-метода [6], изначально разработанного для задач транспортировки, были получены много новых усовершенствованные моделей, большой обзор метод представлен автором в [5]. Одним из популярных методов решения является сетевой симплекс-метод, которой представляет собой версию хорошо известного симплекс метода ЛП, использующий графовое представление задачи о потоке минимальной стоимости. Метод симплекс-типа применяется для решения задач потока минимальной стоимости. Сетевой симплекс алгоритм с наилучшей стоимостью был разработан Орлином [7] в сочетании с древовидной структурой данных Тарьяна [8].

Алгоритм симплекс-метода основана на концепции нахождения минимального остовного дерева.

========================================

После получения, матрицы смежности $H$ необходимо, убедиться, что данный граф является связным. Хотя может это и проверяем в ЛП. Пока так оставить

ПРОВЕРИТЬ Задача о потоке минимальной стоимости Примем допущение, что интенсивность везде одинакова и равна $\lambda$ . Потом умножить на средий размер пакетов. Проверить идею кратчайшего остовного дерева. Проверить как считает стоимости ========================================

Для нахождение допустимого решения задачи (3.1) — (3.4) (или доказательства, что допустимого решения не существует) может быть применена стандартная процедура нахождения допустимого решения задачи линейного программирования с вводом искусственных переменных в уравнения (3.1) — (3.4) и минимизации состоящей из этих переменных линейной формы. Если значение целевой функции в результате решения задачи окажется больше нуля, то допустимого решения для данного размещения станций не существует, в противном случае полученное решение дает допустимое распределение потоков по каналам связи.

## 3.3 Оптимизационная задача выбора набора размещаемых станций и определения мест их размещения

### 3.3.1 Постановка задачи.

Задано множество вершин $A = a_i$, $i = \overline{0,n}$ на плоскости. Каждая вершина $a_i$ имеет координаты $\{x_i, y_i\}$. Множество $A$ состоит из двух подмножеств:

– $A_1$ – множество вершин, с которых необходимо собирать информацию. Каждой вершине $a_i$ приписана величина $v_i$ – максимальный объем информации, снимаемой с объекта, расположенного на этой вершине;

– $A_2$ – множество возможных мест размещения базовых станций.

По определению

$$A_1 \cup A_2 = A;$$

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing.$$

Все вершины пронумерованы так, что:

$$A_1 = \{a_i\}\,, i = \overline{1{,}n_1};$$

$$A_2 = \{a_i\}\,, i = \overline{n_1 + 1{,}n}.$$

Задано множество типов базовых станций $S = \{s_j\}$, $j = \overline{1{,}m}$, которые необходимо разместить на множестве точек $A_2$.

Каждой станции приписаны четыре параметра $s_j = \{\{r_{ji}\}, \{R_{ji}\}, \vartheta_j, c_j\}$, где:

- $\{r_{ji}\}$ – множество радиусов покрытия. Параметр $r_{ji}$ характеризует телекоммуникационную связь доделать . связи для обеспечения соединения между $j$-ой станцией и объектом, размещенный в координате $a_i$, $j = \overline{n_1 + 1{,}n}$, $i = \overline{1{,}n_1}$. Данный параметр характеризует радиус покрытия станции ;
- $R_{ji}$ – радиус связи между $j$-ой и $i$-ой станциями. Параметр характеризует максимальную дальность связи $j$-ой станции, обеспечивающее заданное качество соединения с $i$-ой станцией, $j = \overline{n_1 + 1{,}n}$, $i = \overline{n_1 + 1{,}n}$, $j \neq i$;
- $\vartheta_j$ – пропускная способность;
- $c_j$ – стоимость.

Задана станция специального вида (шлюз) $s_0 = \{r_0, \{R_{0j}\}, \vartheta_0, c_0\}$ с координатами $\{x_0, y_0\}$. Шлюз уже имеет свое расположение, стоимость размещения $c_0 = 0$. Для шлюз задан параметр радиус связи $\{R_{0j}\}, j = \overline{n_1 + 1{,}n}$ для соединения с размещаемыми БС. Полагается, что шлюз не имеет соединения напрямую с объектами $r_0 = 0$. Также будем считать, что шлюз $s_0$ позволяет собрать данные со всех объектов, размещенных в точках $a_i$, $i = \overline{1{,}n_1}$, в данной постановке задачи пропускная способность равна $\vartheta_0 = \infty$.

Множества вершин $A_1$ будем идентифицировать как размещенные на них объекты. Множества веришe $A_2$, на которых будут размещены БС, будем рассматривать, непосредставенно, как сами БС.

Требуется разместить станции таким образом, чтобы вся информация с объектов на вершинах множества $A_1$ могла быть собрана и передана системой БС, размещенных на выбранных в результате решения задачи в вершинах множества $A_2$, до шлюза $s_0$ и итоговая стоимость размещения была бы минимальной.

Задано условие, что информация с вершин множества $A_1$ может передаваться непосредственно только на вершины множества $A_2$, а со шлюзом и между собой могут быть связаны только вершины множества $A_2$.

### 3.3.2 Построение матрицы смежности

На этапе обследования местности проектировании БШС были отобраны точки, куда возможно расставить БС. Необходимо отметить, что в данной задаче этапа синтеза топологии размещаются не множества имеющихся БС, а выбираются только их типы. Так результатом данного этапа будут набор типов БС и их места размещения.

На каждой вершине $a_i$, $i = \overline{n_1 + 1, n}$ может разместиться одна из $m$-типов БС. Вместо каждой такой вершины $a_i$ введем $m$ вершин с координатами вершины $\{x_i, y_i\}$, и различными параметрами, соответствующими различным типам станций. Обозначим такую группу вершин, записанных с одинаковыми координатами вместо вершины $a_i$,как $D_i$. Каждой вершине из $D_i$ поставим в соответствие набор параметров только одного типа станции из $S$, т.е. на данной вершине может стоять либо станция приписанного типа либо никакая. Обозначим расширенное множество вершин $A_2$ через $A_2D = \{a_i\}, i = \overline{n_1 + 1,\, n \cdot m}$.

Составим граф $H = \{AD, E\}$, описывающий сеть для передачи потока информации между вершинами расширенного множества $AD = A_1 \cup A_2D$ и шлюзом. Матрица смежности $E = \{e_{ij}\}$ графа $H$, где каждое ребро $e_{ij}$ определяет возможность передачи информации между вершинами, строится по следующим правилам. проверить индексы для ребра между устройством и станцией.

- $e_{ij} = 1$, если расстояние между $i$-ой вершиной ($a_i \in A_1$) и $j$-ой вершиной ($a_j \in A_2D$) не более радиуса покрытия $r_{ji}$, приписанного этой вершине;
- $e_{ij} = 1$, если вершины $a_i$ и $a_j$ принадлежат разным множествам $D_i$ и $D_j$ и расстояние между ними не больше минимального из радиусов связи $\min\{R_{ij}, R_{ji}\}$, приписанных данным вершинам;

- $e_{i0} = 1$ $(a_i \in A_2D)$, если расстояние от вершины до шлюза не больше минимального радиуса связей $\min\{R_{i0}, R_{0i}\}$;
- $e_{ij} = 0$, во всех остальных случаях.

### 3.3.3 Математическая модель частично целочисленного линейного программирования

С помощью полученного графа потока, опишем ограничения для задачи частично целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП).

Введем булевы переменную $z_{ij} = \{0, 1\}, i = \overline{1,n_1}, j = \overline{n_1 + 1,\ n \cdot m}$.

Все объекты, размещенные на вершинах $A_1$, оснащены антеннами для передачи сигнала в беспроводной среде. Каждая объект одновременно может поддерживать соединение только с одной БС. Данной условие можно записать в виде ограничения равенства (3.5)

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} z_{ij} = 1, \forall a_i, i = \overline{1, n_1}, \tag{3.5}$$

где $\Gamma^+(a_i)$ – множество вершин на графе $H$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Введем потоковые переменные $x_{ij} \in \mathbb{R}^+$.

Потоки информации объектов с вершин $A_1$ должны поступать на станции. Также на станции может поступать потоки с других станций. Необходимо, чтобы сумма входящих и выходящих потоков для любой $i$-ой вершины множества $A_2D$ был равен нулю (3.6) проверить индексы

$$\sum_{a_j \in \Gamma_1^-(a_i)} z_{ij} \cdot \vartheta_i + \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ji} - \sum_{a_j \in \Gamma_2^+(a_i)} x_{ij} = 0, \forall a_i \in A_2. \tag{3.6}$$

Здесь множество $\Gamma_1^-(a_i)$ – вершины множества $A_1$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^-(a_i)$ – вершины множества $A_2D$, из которых выходят дуги, входящие в вершину $a_i$, $\Gamma_2^+(a_i)$ – вершины множества $A_2D$, в которые входят дуги, исходящие из вершины $a_i$.

Через систему станций вся информация от объектов должна поступить на шлюз $s_0$ (3.7)

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_0)} x_{j0} = \sum_{a_i \in A_1} \vartheta_i, \qquad (3.7)$$

здесь $\Gamma_2^-(a_0)$ — подмножество вершин множества $A_2D$, дуги которых входят в шлюз $a_0$.

Введем булевы переменные $y_{ij} = \{0{,}1\}$ для вершин $a_i$, $a_i \in A_2D$, характеризующие наличие соединения между вершинами.

Поток информации $w_{ij}$ вершин $a_i$ множества $A_2D$ может передаваться только при наличии соединения $y_{ij}$. Также данный поток ограничен пропускной способностью БС $\vartheta_i$ на вершине $a_i$ (3.8)

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} x_{ij} \leqslant y_{ij} \cdot \vartheta_i, \forall a_i \in A_2D. \qquad (3.8)$$

Каждая станция может иметь только одно соединение для передачи потока информации в единицу времени. Также необходимо обеспечить условие, что в каждом множестве $D_i$ может быть размещено не более одной станции. Оба этих требования можно записать в виде ограничения неравенства (3.9)

$$\sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} y_{ij} \leqslant 1, \forall D_i. \qquad (3.9)$$

Целевая функция задачи минимизации стоимости размещения (3.10)

$$\sum_{a_i \in A_2D} \sum_{a_j \in \Gamma_2^-(a_i)} c_i \cdot y_{ij} \to min. \qquad (3.10)$$

Задача (3.5) — (3.10) представляет собой частично целочисленную задачу линейного программирования с $m \cdot |A_2|$ булевыми переменными.

Численный пример решения задачи оптимизации представлен в Приложении Д.

## 3.4 Выводы к главе 3

В работе рассмотрены задачи размещения базовых станций при проектировании беспроводных широкополосных сетей связи. Предложены формулировки задач в виде моделей линейного и частично целочисленного линейного программирования как для случая проверки наличия допустимых решений для вариантов, предложенных проектировщиками, так и для экстремальной задачи отбора множества станций из имеющегося набора типов станций и оптимального размещения станций выбранного множества на избыточном множестве возможных мест размещения. Предложены алгоритмы построения графов информационных потоков, позволившие формализовать задачи в виде соответствующих моделей математического программирования. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

## Список литературы


[1] В. М. Вишневсикй. — *Теоретические основы проектирования компьютерных сетей.* — Москва: Техносфера, 2003. — 512 с.

[2] Amjad Mehmood, Jaime Lloret и Sandra Sendra. — «A secure and low-energy zone-based wireless sensor networks routing protocol for pollution monitoring». — В: *Wireless Communications and Mobile Computing* 16.17 (2016), с. 2869—2883. — DOI: 10.1002/wcm.2734.

[3] Zaheer Abbas и др. — «Monitoring of Gas Distribution Pipelines Network Using Wireless Sensor Networks». — В: *Wireless Personal Communications* 117.3 (2021), с. 2575—2594. — DOI: 10.1007/s11277-020-07997-6.

[4] S. Sabahat H. Bukhari и др. — «Novel Cost Efficient Resource Allocation Technique Based on Deadline and Budget Constraints for Edge Users». — В: *Wireless Personal Communications* (2021). — DOI: 10.1007/s11277-021-08453-9.

[5] Péter Kovács. — «Minimum-cost flow algorithms: An experimental evaluation». — В: *Optimization Methods and Software* 30.1 (2015), с. 94—127. — DOI: 10.1080/10556788.2014.895828.

[6] G. B. Dantzig. — *Linear Programming and Extensions.* — Princeton University Press, 1963.

[7] James B. Orlin. — «A polynomial time primal network simplex algorithm for minimum cost flows». — В: *Mathematical Programming, Series B* 78.2 (1997), с. 109—129. — DOI: 10.1007/BF02614365.

[8] Robert E. Tarjan. — «Dynamic trees as search trees via Euler tours, applied to the network simplex algorithm». — В: *Mathematical Programming, Series B* 78.2 (1997), с. 169—177. — DOI: 10.1007/BF02614369.