# Математическое ожидание. Условное математическое ожидание относительно $\sigma$-алгебры

*Ссылка на видеокурс от МИАН*

## Математическое ожидание

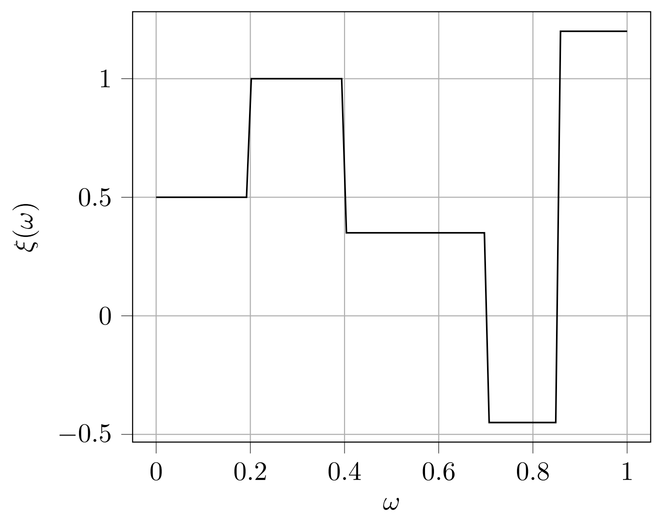
Зафиксируем вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} \rangle$.

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, которая каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставит некоторое вещественное число. Что значит измеримая? Для $\forall C \in \mathbb{R}$ множество $\{\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) < C\} \in \mathcal{A}$. Помним, что при фиксированном $\omega$ значение случайной величины $\xi$ является детерминированным, а при случайном $\omega$ значение $\xi$ является случайным.

Пусть $\xi(\omega)$ — конечнозначная функция, которая принимает $N$ различных значений

$$\xi(\omega) \in \{c_1, c_2, \dots, c_N\}.$$

Такая функция называется **простой случайной величиной**. К примеру, допустим, что $\omega \in [0, 1]$, тогда некоторая конечнозначная функция $\xi$ имеет график




Рассмотрим множество элементарных исходов $A_n = \{\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) = c_n\}$. Понятно, что $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$. Поскольку функция $\xi$ измерима относительно $\sigma$-алгебры, то множество $A_n$ является событием, т.е. $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, \dots, N$. Можно вычислить вероятность каждого такого события.

**Определение 1.** **Математическое ожидание** (expected) от простой случайной величины по опредлению есть

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \mathbb{P}(A) = (L) \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

То есть математическое ожидание — некоторое число, причем не случайное, зависящее от $\xi$, которая является строго детерминированной функцией. Это число является аналогом среднего значения случайной величины.

**Пример 1.** Бросается нечестная монетка: $\Omega = \{\text{‘орел’}, \text{‘решка’}\}$, $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, \{\text{‘орел’}\}, \{\text{‘решка’}\}\}$ и $\mathbb{P}(\text{‘орел’}) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(\text{‘решка’}) = \frac{1}{3}$.

Допустим, что мы ставим на ‘орла’. Пусть наш выигрыш (или проигрыш) при одном бросании есть случайная величина

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 2, \omega = \text{‘орел’}, \\ -3, \omega = \text{‘решка’}. \end{cases}$$

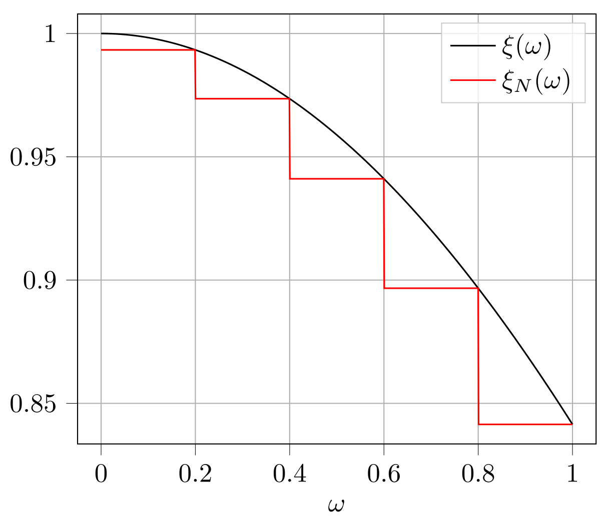
Встает вопрос: если мы играем много раз, стоит ли надеяться на выигрыш? Нужно посчитать средний выигрыш, то есть математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[\xi] = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

При таких ставках $\xi$ наш выгрыш составляет в среднем $\frac{1}{3}$ у.е.

## Интеграл Лебега

Рассмотрим неотрицательные случайные величины $\xi(\omega) \geq 0$ (все их значения неотрицательны), измеримые относительно $\sigma$-алгебры. Можно найти простые случайные величины $\xi_N(\omega)$, которые измеримы относительно той же $\sigma$-алгебры и $\xi_N(\omega) \leq \xi(\omega), \forall \omega \in \Omega$.



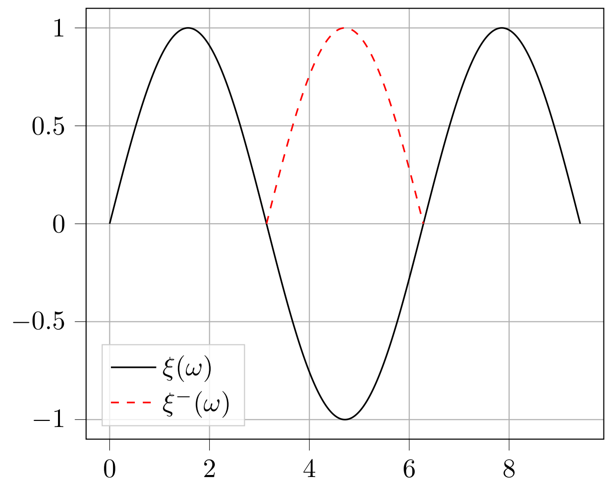

Этот класс простых случайных величин непустой, поскольку функция $\xi_N(\omega) \equiv 0$ точно принадлежит такому классу.

**Определение 2.** Определим **интеграл Лебега** как

$$\int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sup_{\xi_N} \int\limits_{\Omega} \xi_N(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Всегда можно найти точную верхнюю грань (sup) любого множества. В нашем случае мы ищем sup числового множества (интеграл — это какое-то число). Может оказаться так, что точная верхняя грань — бесконечность, эти случаи нас не интересуют. Если sup конечен, говорят, что функция $\xi(\omega)$ интегрируема или суммируема по Лебегу.

Любую случайную величину (в том числе принимающую отрицательные значения) можно представить как $\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega)$, где $\xi^+(\omega), \xi^-(\omega) \geq 0$.




Если $\xi^+(\omega), \xi^-(\omega)$ интегрируемы одновременно, то и $\xi(\omega)$ интегрируема (по Лебегу).

**Пример 2.** Пусть $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ — **борелевская $\sigma$-алгебра**. В борелевской $\sigma$-алгебре содержатся все подмножества отрезка: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения.

В качестве случайной величины возьмем аналог функции Дирихле

$$\xi(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ (иррациональное)}, \\ 1, & \omega \in \mathbb{Q} \text{ (рациональное)}. \end{cases}$$

Ясно, что предложенная функция измерима относительно борелевской $\sigma$-алгебры.

Зададим вероятность для каждого события из $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}\{[a, b]\} = b - a.$$

Вероятность того, что случайный исход окажется внутри интервала $[a, b]$, принадлежащего единичному отрезку, — длина этого интервала. Такое распределение называют равномерным.

Найдем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[\xi] = (-1) \cdot \mathbb{P}\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{\mathbb{Q}\}.$$

Мера рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ равна 0, а мера иррациональных — 1:

$$\mathbb{E}[\xi] = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1.$$

Пусть теперь

$$\xi(\omega) = \sin \omega.$$

Интеграл Лебега от синуса на числовой прямой совпадает с интегралом по Риману. Найдем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[\xi] = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_0^1 \sin \omega d\omega = -\cos \omega \Big|_0^1 = 1 - \cos 1 > 0.$$

## Условное математическое ожидание относительно $\sigma$-алгебры

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — некоторая $\sigma$-алгебра.

Имеется случайная величина $\xi(\omega)$, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$.

Имеется другая случайная величина $\eta(\omega)$, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}$.

**Определение 3.** Случайная величина $\eta(\omega)$ называется **условным математическим ожиданием** $\xi(\omega)$ **относительно $\sigma$-алгебры** $\mathcal{B}$, если выполнены следующие условия:

- $\mathbb{E}[\xi] < \infty, \mathbb{E}[\eta] < \infty$;
- $\int\limits_B \eta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_B \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Обозначение УМО: $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{B}] = \eta(\omega)$.

**Замечание 1.** $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}] = \xi(\omega)$.

**Замечание 2.** $\mathbb{E}[\xi|\{\Omega, \varnothing\}] = \mathbb{E}[\xi]$.

Приведем поясняющий определение пример.

**Пример 3.** Пусть $\Omega = [-1, 1]$ и $\mathcal{A}$ — борелевская $\sigma$-алгебра.

$\mathcal{B} = \{\Omega, \varnothing, [-1, 0], [-1, 0), \{0\}, (0, 1], [0, 1], \Omega \backslash \{0\}\}$ — условная $\sigma$-алгебра. Понятно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

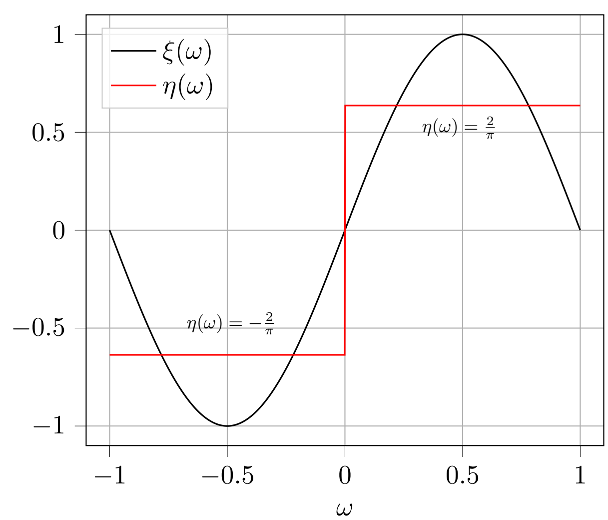
Возьмем $\xi(\omega) = \sin \pi\omega$. Каким должна быть $\eta(\omega)$, чтобы она удовлетворяла определению УМО?

Первое, что приходит на ум — это равенство случайных величин $\eta(\omega) = \xi(\omega)$. Но это неверно, так как функции измеримы относительно разных $\sigma$-алгебр: функция $\xi$ измерима относительно "богатой" борелевской $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, а функция $\eta$ должна быть измерима относительно "бедной" $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}$.

Стоит ответить на вопрос: что значит измерима? Случайная величина $\eta$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}$ $\Rightarrow \forall C \in \mathbb{R}$ множество $\{\forall \omega \in \Omega : \eta(\omega) < C\} \in \mathcal{B}$. Какая функция может удовлетворить этому определению? Только простая функция $\eta(\omega) = \eta_N(\omega)$.

Пусть $B = (0, 1]$, тогда $\int\limits_B \xi(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \int\limits_0^1 \sin \pi\omega d\omega = \frac{2}{\pi}$. При $B = [-1, 0)$, $\int\limits_B \xi(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{-1}^0 \sin \pi\omega d\omega = -\frac{2}{\pi}$.

Построим графики случайных величин:




Можно сделать вывод, что чем "беднее" $\sigma$-алгебра, тем "проще" случайная величина, измеримая относительно неё. По мере увеличения числа событий в "бедной" $\sigma$-алгебре случайная величина, измеримая относительно этой $\sigma$-алгебры, будет ЛУЧШЕ приближаться к случайной величине, измеримой по Борелю. Переводя на язык теории информации, чем больше событий в условной $\sigma$-алгебре, тем большей информацией мы можем располагать (см. предыдущие конспекты).