

Lista zadań – Kolokwium śródsemestralne

1. Hokeista uderzył kijem w nieruchomy krążek. Po uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości $v_1 = 14 \text{ m/s}$. Dalej krążek poruszał się po powierzchni lodu ruchem jednostajnie opóźnionym prostoliniowym. Od momentu uzyskania prędkości v_1 po uderzeniu aż do chwili zatrzymania krążek przebył drogę $s_1 = 28 \text{ m}$. Przyjmij, że siła tarcia kinetycznego działająca na krążek poruszający się po lodzie ma stałą wartość, proporcjonalną do wartości ciężaru krążka. Pomiń inne siły działające na krążek w kierunku poziomym.

- a. Wykaż, że wartość a przyspieszenia krążka nie zależy od jego masy m . W tym celu wyprowadź wzór pozwalający wyznaczyć a tylko za pomocą współczynnika tarcia f i przyspieszenia ziemskiego g .

$$T = fF_N = fF_g = F_w = ma \rightarrow fmg = ma \rightarrow a = fg$$

- b. Oblicz czas ruchu krążka od momentu uzyskania prędkości v_1 aż do zatrzymania się.

$$v_k = v_0 + at = 0 \rightarrow a = \frac{-v_1}{t_1}$$

$$s_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = v_1 t_1 - \frac{1}{2} \frac{v_1}{t_1} * t_1^2 = v_1 t_1 - \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{v_1 t_1}{2}$$

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_1} = 4 \text{ s}$$

- c. Następnie hokeista ponownie uderzył kijem w ten sam nieruchomy już krążek. Po tym uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości v_2 dwukrotnie mniejszej od v_1 . Oblicz drogę jaką przebył krążek od momentu uzyskania prędkości v_2 aż do chwili zatrzymania się.

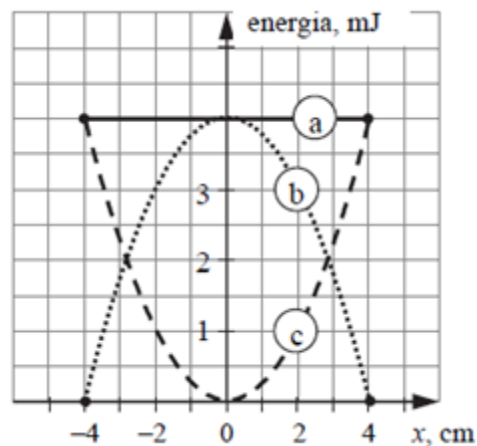
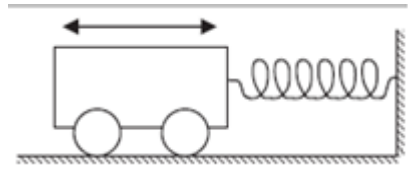
Jedyną działającą na krążek siłą jest tarcie, które jest stałe, a więc przyspieszenie jest stałe

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \rightarrow v_1 = 2v_2$$

$$s_2 = v_2 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \text{ a koniec ruchu } v_{k2} = 0 = a t_2 + v_2$$

$$t_2 = -\frac{v_2}{a} = -\frac{\frac{v_1}{2}}{-\frac{v_1}{t_1}} = \frac{t_1}{2} \text{ i stąd } s_2 = \frac{v_2 t_2}{2} - \frac{\frac{v_1}{t_1} t_2^2}{4 * 2} = \frac{v_1 t_1}{8} = 7 \text{ m}$$

2. Wózek o masie 200 g jest doczepiony do sprężyny, której drugi koniec jest unieruchomiony (patrz na rysunek). Wózek wykonuje drgania wzdłuż osi poziomej. Opory ruchu, masę kółek i masę sprężyny pomijamy. Na wykresie poniżej przedstawiono w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności energii kinetycznej, potencjalnej i całkowitej układu wózek – sprężyna od wychylenia wózka x .



- a. Wiedząc w jaki sposób poszczególne energie zależą od wychylenia x przypisz odpowiednią literę a, b lub c odpowiadającą zależności tej energii od wychylenia x do jej nazwy tj. energii kinetycznej, energii potencjalnej sprężystości i całkowitej energii mechanicznej. Uzasadnij swój wybór.

Wartość energii potencjalnej E_p układu wózek – sprężyna zależy wprost proporcjonalnie od wychylenia układu z położenia równowagi. Dla położenia $x = 0$ m $E_p = 0$ J, a dla $x = x_{\max}$ $E_p = E_{p,\max}$. Zależność $E_p(x)$ poprawnie opisuje więc krzywa C.

Zupełnie odwrotna sytuacja, do opisanej powyżej, występuje w przypadku energii kinetycznej E_k układu wózek – sprężyna. Dla położenia $x = 0$ m $E_k = E_{k,\max}$, a dla $x = x_{\max}$ $E_k = 0$ J. Zależność $E_k(x)$ poprawnie opisuje więc krzywa B.

Energia całkowita układu drgającego zawsze pozostaje stała w czasie (przy założeniu braku oporów ruchu), dlatego zależność $E_c(x)$ przedstawia krzywa A.

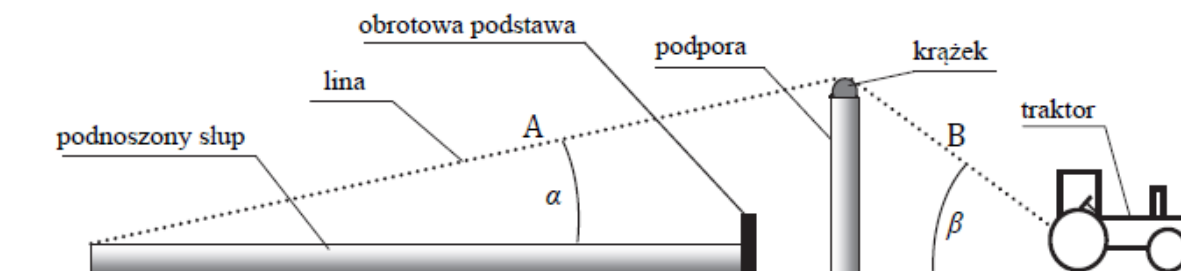
b. Oblicz maksymalną prędkość, z jaką porusza się wózek.

$$E_{k,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{k,max}}{m}} = 0.2 \frac{m}{s}$$

c. Oblicz stałą sprężystości sprężyny.

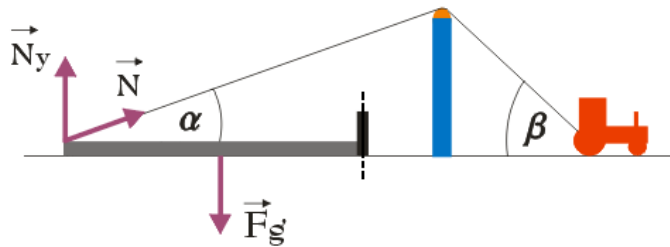
$$E_c = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \rightarrow k = \frac{2E_c}{x_{max}^2} = 5 \frac{N}{m}$$

3. Słupy energetyczne linii przesyłowych wysokiego napięcia można składać z części na powierzchni ziemi, a następnie podnosić je do pozycji pionowej za pomocą liny, podpory z obrotowym krążkiem i pojazdu, np. traktora. Do wierzchołka leżącego słupa przyczepia się jeden z końców liny i przerzuca ją przez podporę, natomiast drugi koniec liny jest ciągnięty przez traktor. Drugi koniec słupa opiera się o zakotwiczoną w ziemi obrotową podstawę (patrz rysunek). Zakładamy, że krążek na podporze obraca się bez tarcia.



a. Oceń prawdziwość zdań:

- Podczas powolnego podnoszenia słupa siła naciągu liny w części A ma inną wartość niż siła naciągu liny w części B. **Fałsz**
Siła naciągu liny w każdym jej punkcie ma taką samą wartość.
 - W początkowej fazie podnoszenia słupa kąt β między liną, a poziomem maleje. **Prawda**
Maksymalna wartość kąta β jest osiągnięta w początkowej fazie ruchu, potem maleje.
 - Przy niezmiennej wysokości podpory i niezmiennym położeniu obrotowej podstawy siła naciągu liny konieczna do uniesienia słupa z pozycji poziomej zależy od wysokości (długości) słupa. **Prawda**
Im większa wysokość tym większa siła potrzebna jest do postawienia słupa, a więc i większa siła naciągu liny.
- b. Masa słupa wynosi 2000kg, a kąt α jest równy 15° . Przyjmujemy, że środek masy słupa znajduje się w połowie jego długości. Oblicz minimalną wartość naciągu liny konieczną do uniesienia leżącego słupa.



Aby obliczyć wartość siły naciągu liny skorzystamy z równowagi momentów sił: ciężkości oraz naciągu liny. Obydwa momenty sił zapiszemy względem osi przechodzącej przez obrotową podstawę walca, oznaczoną na powyższym rysunku linią przerywaną. Ramieniem siły ciężkości F_g jest odległość od środka masy do podstawy walca równa $l/2$, a ramieniem składowej siły naciągu N_y jest odległość od końca słupa do podstawy walca równa l . Z równowagi momentów sił mamy:

$$M_g = M_n \rightarrow \frac{mgl}{2} = N \sin \alpha$$

$$N = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = 37.9 \text{ kN}$$

- c. Słup o długości 12 m był podnoszony bardzo powoli. Gdy był on już w położeniu prawie pionowym, lina odczepiła się od niego i słup się przewrócił. Oblicz wartość prędkości liniowej końca słupa w chwili uderzenia o powierzchnię ziemi. Przyjmij, że słup jest jednorodnym prętem, a jego moment bezwładności względem osi prostopadłej i przechodzącej przez jego koniec wynosi $\frac{1}{3}ml^2$, gdzie m to masa pręta, a l jego długość.

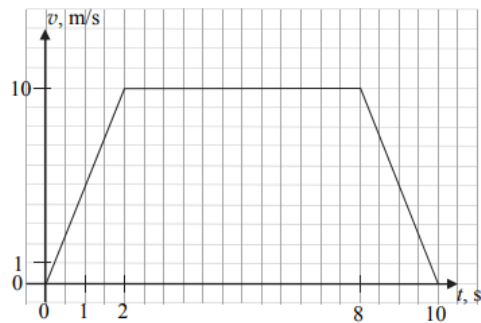
Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej. W chwili zerwania liny całkowita energia mechaniczna słupa równa jest energii potencjalnej grawitacji słupa $E_p = mgl/2$ – środek masy słupa znajduje się w połowie jego długości, w związku z czym całkowita masa słupa skupiona jest właśnie w tym punkcie. W chwili upadku całkowita energia mechaniczna słupa równa jest energii kinetycznej ruchu obrotowego słupa $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$, gdzie I to moment bezwładności słupa równy $I = 1/3 ml^2$, ω – prędkość kątowa słupa równa $\omega = v/l$ i stąd mamy:

$$\frac{mgl}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{\frac{1}{3}ml^2 v^2}{l^2} = \frac{1}{6}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{3gl} = 18.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Rozważamy ruch dwóch samochodów, które poruszały się po poziomym i prostym odcinku trasy. Pierwszy samochód ruszył i jadąc ze stałym przyspieszeniem, rozpędził się w czasie 2 s do prędkości o wartości 10 m/s. Następnie przez 6 s jechał ze stałą prędkością, a potem 2 s hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się. Drugi

samochód ruszył równocześnie z pierwszym. Przez pierwszą połowę czasu trwania ruchu rozpędzał się ze stałym przyspieszeniem, a potem hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się. Oba samochody przebyły tę samą drogę w tym samym czasie.

- a. Narysuj wykres zależności $v(t)$ – wartości prędkości od czasu – dla ruchu pierwszego samochodu.



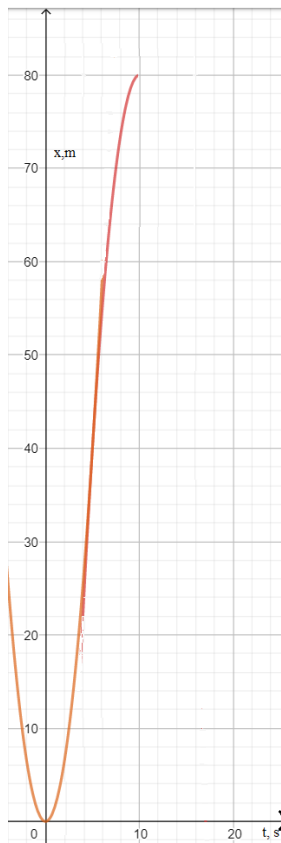
- b. Oblicz całkowitą drogę przebytą przez pierwszy samochód oraz maksymalną wartość prędkości drugiego samochodu.

$$s_1 = \frac{1}{2} * 2s * 10 \frac{m}{s} + 6s * 10 \frac{m}{s} + \frac{1}{2} * 2s * 10 \frac{m}{s} = 80m \text{ i wiemy, że } s_1 = s_2$$

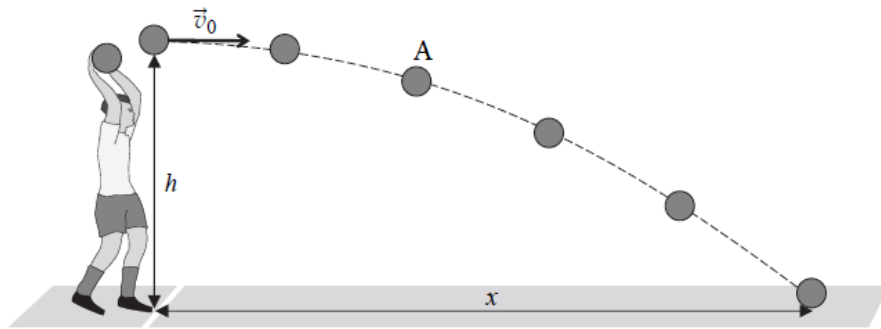
$$\frac{s_2}{2} = \frac{1}{2} a \left(\frac{t}{2} \right)^2 \rightarrow a = \frac{4s_2}{t^2} \rightarrow a = \frac{320 m}{10^2 s^2} = 3.2 \frac{m}{s^2}$$

$$v_{2max} = a \left(\frac{t}{2} \right) = 3.2 \frac{m}{s^2} * 5s = 16 \frac{m}{s}$$

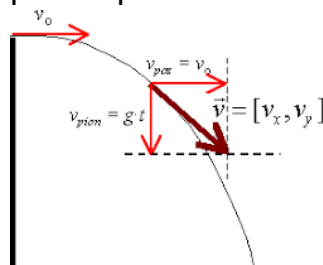
- c. Narysuj wykres zależności $x(t)$ – wartości położenia od czasu – dla ruchu drugiego samochodu.



5. Rzut z autu jest elementem gry w piłkę nożną i polega na wprowadzeniu piłki do gry z linii bocznej boiska. Podczas wykonywania autu piłkarz rzuca piłkę oburącz zza głowy. Rozwiązując zadanie pominiemy opory ruchu oraz przyjmijmy, że prędkość początkowa piłki rzuconej z autu v_0 ma kierunek poziomy, a przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Rysunek poniżej przedstawia położenie piłki podczas ruchu w jednakowych odstępach czasu.



- a. Narysuj wykres rozkładu poszczególnych składowych prędkości dla piłki w punkcie A.



- b. Zawodnik podczas meczu wyrzuca piłkę z autu w kierunku poziomym. W momencie wyrzutu piłka znajduje się na wysokości $h = 1.96 \text{ m}$ ponad powierzchnią boiska. Oblicz czas lotu piłki od momentu wyrzutu do chwili uderzenia piłki o ziemię.

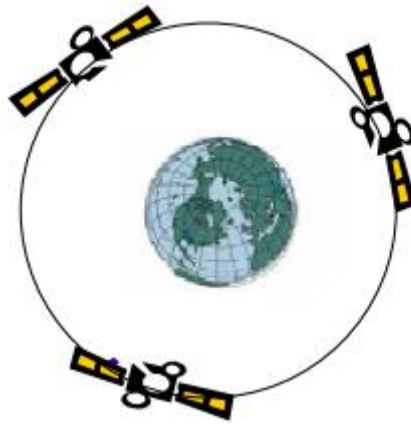
$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + y_0 \rightarrow h = 0 * t - \frac{gt^2}{2} + h \rightarrow$$

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.63 \text{ s}$$

- c. Piłka wyrzucona poziomo z autu, z wysokości $h = 1.96 \text{ m}$, spada na boisko w odległości $x = 5.10 \text{ m}$ – jeśli zmierzyć w kierunku poziomym od miejsca wyrzutu. Oblicz wartość v_0 prędkości początkowej piłki.

$$x = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow v_0 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = 8.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6. Do celów telekomunikacji wykorzystywane są tzw. satelity geostacjonarne, które krążąc dookoła Ziemi pozornie "wiszą" nad wybranym punktem powierzchni Ziemi.



- a. Satelity nadające programy telewizyjne to satelity geostacjonarne, które krążą nad Ziemią na orbicie leżącej w płaszczyźnie równika. Wyznacz wzór na promień tej orbity. Okres obiegu musi być równy okresowi obrotu Ziemi dookoła osi, kierunek zgodny z kierunkiem obrotu Ziemi, a płaszczyzna orbity powinna leżeć w płaszczyźnie równika. Jej promień wyniesie

$$F_g = F_o \rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

- b. Wykaż, że jeżeli promień orbity takiego satelity wynosi 42 300 km, to prędkość z jaką krąży, wynosi około 3.08 km/s.

$$r = \frac{GM}{v^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 3 \frac{km}{s}$$

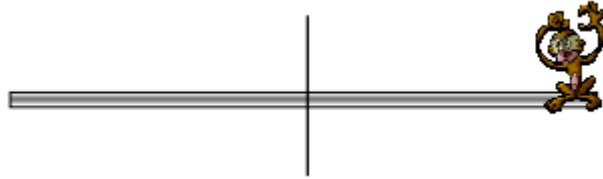
- c. W wyniku błędu obsługi inna firma ulokowała na takiej samej orbicie satelitę telekomunikacyjnego o masie dwa razy mniejszej i poruszającego się w przeciwną stronę. W wyniku zderzenia oba obiekty utworzyły jedną bryłę. Oblicz prędkość tej bryły tuż po zderzeniu. Dlaczego utworzona w wyniku zderzenia bryła nie może poruszać się po orbicie stacjonarnej?

Z zasady zachowania pędu mamy

$$mv_1 - \frac{m}{2}v_1 = \left(\frac{3}{2}m\right)v \rightarrow v = \frac{2 * (v_1 - \frac{v_1}{2})}{3} = \frac{v_1}{3} = 1 \frac{km}{s}$$

$$1 \frac{km}{s} < v_I \text{ czyli prędkości orbitalnej}$$

7. Na jednym z końców obracającej się wokół pionowej osi cienkościennej rurki siedzi małpka. Rurka ma długość 2 m, a jej masa wynosi 0.5 kg, małpka ma masę 2 kg. Oś obrotu przechodzi przez środek rurki.



- a. Oblicz wartość momentu bezwładności pręta z małpką siedzącą na końcu pręta. Przyjmij, że rozmiary małpki są niewielkie w stosunku do długości pręta.

$$I = \frac{1}{12} m_{\text{pręta}} l_{\text{pręta}}^2 + m_{\text{małpy}} \left(\frac{l_{\text{pręta}}}{2} \right)^2 = \frac{13}{6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- b. W pewnej chwili pręt z małpką siedzącą na końcu został wprowadzony w powolny ruch obrotowy, tak, że wykonał jeden obrót w 10 s. Małpka nie była z tego zadowolona i przeszła na środek pręta. Pręt z siedzącą na środku małpką zaczął wirować szybciej pomimo, iż nikt do niego nie podchodził. Dlaczego tak się stało? Uzasadnij odpowiednimi obliczeniami.

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = \text{const. (z zasady zachowania momentu pędu)}$$

$$I_1 > I_2 \text{ czyli } \omega_1 < \omega_2$$

- c. Oblicz okres obrotu pręta, jeżeli małpka siedzi na jego środku.

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = \text{const.}$$

$$\frac{I_1 2\pi}{T_1} = \frac{I_2 2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{I_2 T_1}{I_1} = 0.77 \text{ s}$$

8. Tarcza szlifierska ma kształt walca o średnicy 20 cm i masie 2000 g. Maksymalną prędkość obrotów tarcza osiąga po 5 s od momentu włączenia. Tarcza rozpędza się ruchem przyspieszonym ze stałym przyspieszeniem kątowym za pomocą siły przyłożonej stycznie do wałka napędowego w odległości $r = 2$ cm od osi obrotu. Podczas rozpędzania tarczy zmierzono częstotliwość jej obrotów (z dokładnością 1 Hz) w zależności od czasu ruchu. Wyniki pomiarów zebrano w tabeli. Czas zmierzono z dokładnością do 0.1 s. Moment bezwładności walca wynosi $\frac{1}{2}mr^2$.

f [Hz]	t [s]
0	0
5	0.8
7	1
10	1.6
12	2
15	2.5
20	3.2
22	3.5
25	4
28	4.5
30	5

- a. Oblicz wartość przyspieszenia kątownego tarczy podczas rozpędzania.

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t \rightarrow \epsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi f}{t} = 37.69 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- b. Wyznacz wartość siły rozpędzającej tarczę.

$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{I} \rightarrow F = \frac{\epsilon I}{r} = \frac{\epsilon * \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2}{r} = \frac{\epsilon m d^2}{8r} = 19 \text{ N}$$

- c. Na skutek oporów ruchu tarcza zatrzymuje się po czasie 30 s od momentu, gdy przestaje na nią działać siła rozpędzająca. Ile razy wartość przyspieszenia kątownego jest większa od wartości opóźnienia kątownego?

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_1}{t_1}, \epsilon_2 = \frac{-\omega_1}{t_2} \rightarrow \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right| = \frac{t_2}{t_1} = \frac{30 \text{ s}}{5 \text{ s}} = 6$$