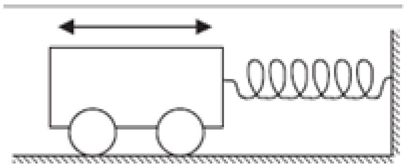
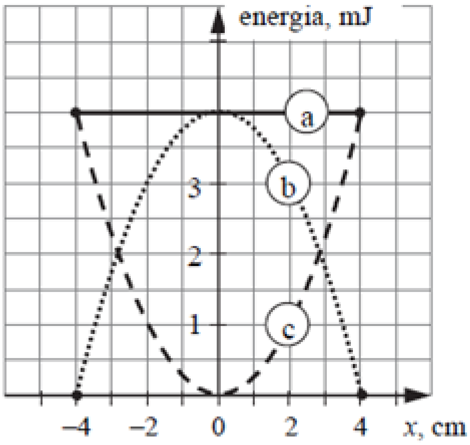
Lista zadań – Kolokwium śródsemestralne

1. Hokeista uderzył kijem w nieruchomy krążek. Po uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości v_1 = 14 m/s. Dalej krążek poruszał się po powierzchni lodu ruchem jednostajnie opóźnionym prostoliniowym. Od momentu uzyskania prędkości v_1 po uderzeniu aż do chwili zatrzymania krążek przebył drogę s_1 = 28 m. Przyjmij, że siła tarcia kinetycznego działająca na krążek poruszający się po lodzie ma stałą wartość, proporcjonalną do wartości ciężaru krążka. Pomiń inne siły działające na krążek w kierunku poziomym.
   a. Wykaż, że wartość a przyspieszenia krążka nie zależy od jego masy m. W tym celu wyprowadź wzór pozwalający wyznaczyć a tylko za pomocą współczynnika tarcia f i przyspieszenia ziemskiego g.
   $$T = fF_N = fF_g = F_w = ma \rightarrow fmg = ma \rightarrow a = fg$$
   b. Oblicz czas ruchu krążka od momentu uzyskania prędkości v_1 aż do zatrzymania się.
   $$v_k = v_0 + at = 0 \rightarrow a = \frac{-v_1}{t_1}$$
   $$s_1 = v_1t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = v_1t_1 - \frac{1}{2}\frac{v_1}{t_1} * t_1^2 = v_1t_1 - \frac{v_1t_1}{2} = \frac{v_1t_1}{2}$$
   $$t_1 = \frac{2s_1}{v_1} = 4s$$
   c. Następnie hokeista ponownie uderzył kijem w ten sam nieruchomy już krążek. Po tym uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości v_2 dwukrotnie mniejszej od v_1. Oblicz drogę jaką przebył krążek od momentu uzyskania prędkości v_2 aż do chwili zatrzymania się.
   Jedyną działającą na krążek siła jest tarcie, które jest stałe, a więc przyspieszenie jest stałe
   $$v_2 = \frac{v_1}{2} \rightarrow v_1 = 2v_2$$
   $$s_2 = v_2t_2 + \frac{at_2^2}{2}, a\ koniec\ ruchu\ v_{k2} = 0 = at_2 + v_2$$
   $$t_2 = -\frac{v_2}{a} = -\frac{\frac{v_1}{2}}{-\frac{v_1}{t_1}} = \frac{t_1}{2}\ i\ stąd\ s_2 = \frac{v_2t_2}{2} - \frac{\frac{v_1}{t_1}t^2}{4 * 2} = \frac{v_1t_1}{4}$$
   $$= 14\ m$$

2. Wózek o masie 200 g jest doczepiony do sprężyny, której drugi koniec jest unieruchomiony (patrz na rysunek). Wózek wykonuje drgania wzdłuż osi poziomej. Opory ruchu, masę kółek i masę sprężyny pomijamy. Na wykresie poniżej przedstawiono w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności energii kinetycznej, potencjalnej i całkowitej układu wózek – sprężyna od wychylenia wózka x.





   a. Wiedząc w jaki sposób poszczególne energie zależą od wychylenia x przypisz odpowiednią literę a, b lub c odpowiadającą zależności tej energii od wychylenia x do jej nazwy tj. energii kinetycznej, energii potencjalnej sprężystości i całkowitej energii mechanicznej. Uzasadnij swój wybór.

   Wartość energii potencjalnej Ep układu wózek – sprężyna zależy wprost proporcjonalnie od wychylenia układu z położenia równowagi. Dla położenia x = 0 m E_p = 0 J, a dla x = x_{max} E_p = $E_{p,max}$. Zależność $E_p(x)$ poprawnie opisuje więc krzywa C.

   Zupełnie odwrotna sytuacja, do opisanej powyżej, występuje w przypadku energii kinetycznej E_k układu wózek – sprężyna. Dla położenia x = 0 m E_k = $E_{k,max}$, a dla x = x_{max} E_k = 0 J. Zależność $E_k(x)$ poprawnie opisuje więc krzywa B.

   Energia całkowita układu drgającego zawsze pozostaje stała w czasie (przy założeniu braku oporów ruchu), dlatego zależność $E_c(x)$ przedstawia krzywa A.

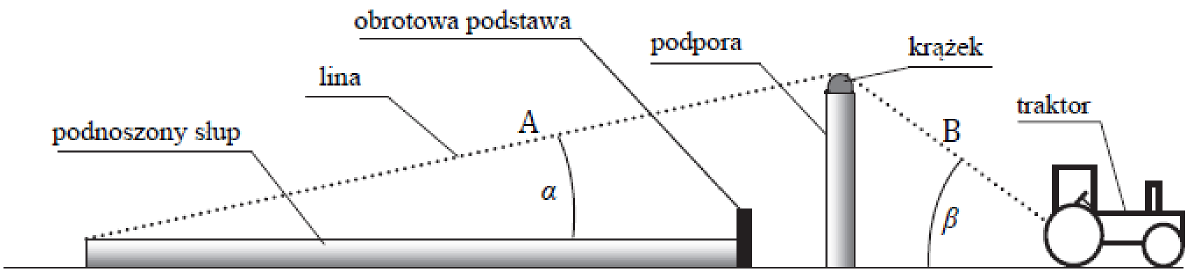
b. Oblicz maksymalną prędkość, z jaką porusza się wózek.

$$E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{k,max}}{m}} = 0.2 \frac{m}{s}$$

c. Oblicz stałą sprężystości sprężyny.

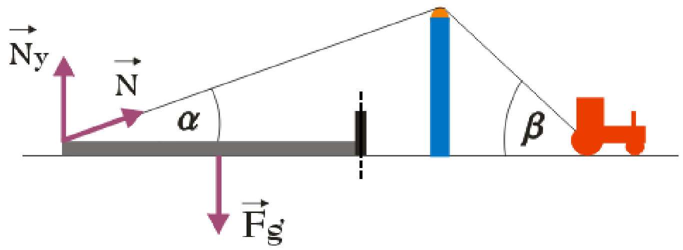
$$E_c = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \rightarrow k = \frac{2E_c}{x_{max}^2} = 5 \frac{N}{m}$$

3. Słupy energetyczne linii przesyłowych wysokiego napięcia można składać z części na powierzchni ziemi, a następnie podnosić je do pozycji pionowej za pomocą liny, podpory z obrotowym krążkiem i pojazdu, np. traktora. Do wierzchołka leżącego słupa przyczepia się jeden z końców liny i przerzuca ją przez podporę, natomiast drugi koniec liny jest ciągnięty przez traktor. Drugi koniec słupa opiera się o zakotwiczoną w ziemi obrotową podstawę (patrz rysunek). Zakładamy, że krążek na podporze obraca się bez tarcia.



a. Oceń prawdziwość zdań:
   i. Podczas powolnego podnoszenia słupa siła naciągu liny w części A ma inną wartość niż siła naciągu liny w części B. Fałsz
   Siła naciągu liny w każdym jej punkcie ma taką sama wartość.
   ii. W początkowej fazie podnoszenia słupa kąt β między liną, a poziomem maleje. Prawda
   Maksymalna wartość kąta β jest osiągnięta w początkowej fazie ruchu, potem maleje.
   iii. Przy niezmiennej wysokości podpory i niezmiennym położeniu obrotowej podstawy siła naciągu liny konieczna do uniesienia słupa z pozycji poziomej zależy od wysokości (długości) słupa. Prawda
   Im większa wysokość tym większa siła potrzebna jest do postawienia słupa, a więc i większa siła naciągu liny.

b. Masa słupa wynosi 2000kg, a kąt α jest równy 15°. Przyjmujemy, że środek masy słupa znajduje się w połowie jego długości. Oblicz minimalną wartość naciągu liny konieczną do uniesienia leżącego słupa.



Aby obliczyć wartość siły naciągu liny skorzystamy z równowagi momentów sił: ciężkości oraz naciągu liny. Obydwa momenty sił zapiszemy względem osi przechodzącej przez obrotową podstawę walca, oznaczoną na powyższym rysunku linią przerywaną. Ramieniem siły ciężkości F_g jest odległość od środka masy do podstawy walca równa l/2, a ramieniem składowej siły naciągu N_y jest odległość od końca słupa do podstawy walca równa l. Z równowagi momentów sił mamy:

$$M_g = M_n \rightarrow \frac{mgl}{2} = Nsin\alpha l$$

$$N = \frac{mg}{2sin\alpha} = 37.9kN$$

c. Słup o długości 12 m był podnoszony bardzo powoli. Gdy był on już w położeniu prawie pionowym, lina odczepiła się od niego i słup się przewrócił. Oblicz wartość prędkości liniowej końca słupa w chwili uderzenia o powierzchnię ziemi. Przyjmij, że słup jest jednorodnym prętem, a jego moment bezwładności względem osi prostopadłej i przechodzącej przez jego koniec wynosi $\frac{1}{3}ml^2$, gdzie m to masa pręta, a l jego długość.

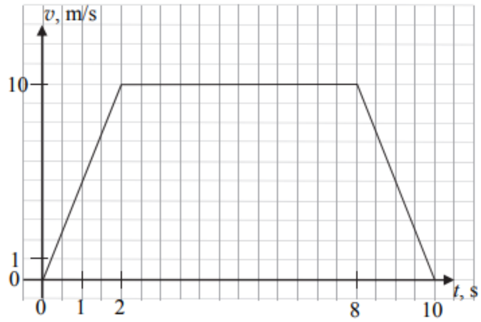
Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej. W chwili zerwania liny całkowita energia mechaniczna słupa równa jest energii potencjalnej grawitacji słupa E_p = mgl/2 – środek masy słupa znajduje się w połowie jego długości, w związku z czym całkowita masa słupa skupiona jest właśnie w tym punkcie. W chwili upadku całkowita energia mechaniczna słupa równa jest energii kinetycznej ruchu obrotowego słupa E_k = ½ Iω^2, gdzie I to moment bezwładności słupa równy I = 1/3 ml^2, ω – prędkość kątowa słupa równa ω = v/l i stąd mamy:

$$\frac{mgl}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2v^2}{l^2} = \frac{1}{6}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{3gl} = 18.8\frac{m}{s}$$

4. Rozważamy ruch dwóch samochodów, które poruszały się po poziomym i prostym odcinku trasy. Pierwszy samochód ruszył i jadąc ze stałym przyspieszeniem, rozpędził się w czasie 2 s do prędkości o wartości 10 m/s. Następnie przez 6 s jechał ze stałą prędkością, a potem 2 s hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się. Drugi

samochód ruszył równocześnie z pierwszym. Przez pierwszą połowę czasu trwania ruchu rozpędzał się ze stałym przyspieszeniem, a potem hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się, Oba samochody przebyły tę samą drogę w tym samym czasie.

a. Narysuj wykres zależności v(t) – wartości prędkości od czasu – dla ruchu pierwszego samochodu.



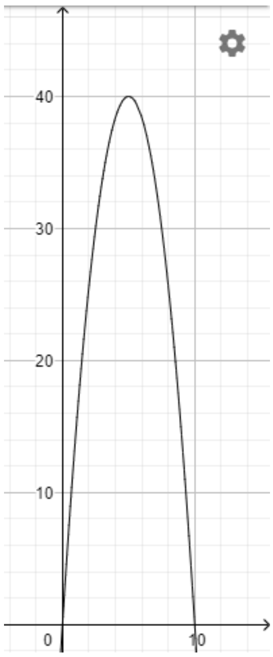
b. Oblicz całkowitą drogę przebytą przez pierwszy samochód oraz maksymalna wartość prędkości drugiego samochodu.

$$s_1 = \frac{1}{2} * 2s * 10\frac{m}{s} + 6s * 10\frac{m}{s} + \frac{1}{2} * 2s * 10\frac{m}{s} = 80m\ i\ wiemy, że\ s_1 = s_2$$

$$\frac{s_2}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2 \rightarrow a = \frac{4s_2}{t^2} \rightarrow a = \frac{320}{10^2}\frac{m}{s^2} = 3.2\frac{m}{s^2}$$

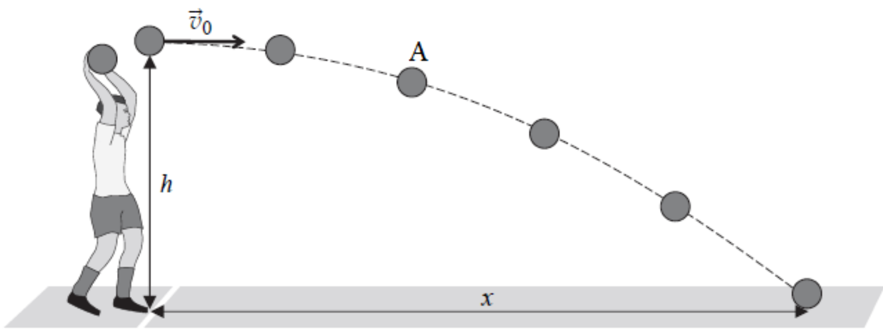
$$v_{2\max} = a\left(\frac{t}{2}\right) = 3.2\frac{m}{s^2} * 5s = 16\frac{m}{s}$$

c. Narysuj wykres zależności x(t) – wartości położenia od czasu – dla ruchu drugiego samochodu.

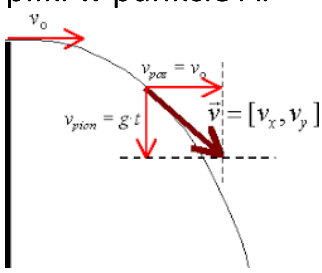


5. Rzut z autu jest elementem gry w piłkę nożną i polega na wprowadzeniu piłki do gry z linii bocznej boiska. Podczas wykonywania autu piłkarz rzuca piłkę oburącz zza głowy. Rozwiązując zadanie pomiń opory ruchu oraz przyjmij, że prędkość początkowa piłki rzuconej z autu v_0 ma kierunek

poziomy, a przyspieszenie ziemskie ma wartość g = 9.81 m/s^2. Rysunek poniżej przedstawia położenie piłki podczas ruchu w jednakowych odstępach czasu.



a. Narysuj wykres rozkładu poszczególnych składowych prędkości dla piłki w punkcie A.



b. Zawodnik podczas meczu wyrzuca piłkę z autu w kierunku poziomym. W momencie wyrzutu piłka znajduje się na wysokości h = 1.96 m ponad powierzchnia boiska. Oblicz czas lotu piłki od momentu wyrzutu do chwili uderzenia piłki o ziemię.

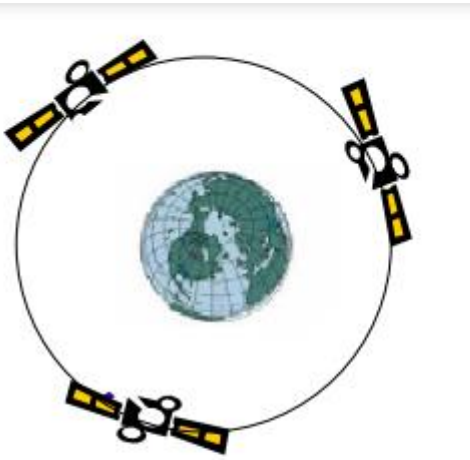
$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + y_0 \rightarrow h = 0 * t - \frac{gt^2}{2} + h \rightarrow$$

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.63\ s$$

c. Piłka wyrzucona poziomo z autu, z wysokości h = 1.96 m, spada na boisko w odległości x = 5.10 m – jeśli zmierzyć w kierunku poziomym od miejsca wyrzutu. Oblicz wartość v_0 prędkości początkowej piłki.

$$x = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow v_0 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = 8.1\frac{m}{s}$$

6. Do celów telekomunikacji wykorzystywane są tzw. satelity geostacjonarne, które krążąc dookoła Ziemi pozornie "wiszą" nad wybranym punktem powierzchni Ziemi.



a. Satelity nadające programy telewizyjne to satelity geostacjonarne, które krążą nad Ziemią na orbicie leżącej w płaszczyźnie równika. Wyznacz wzór na promień tej orbity.
Okres obiegu musi być równy okresowi obrotu Ziemi dookoła osi, kierunek zgodny z kierunkiem obrotu Ziemi, a płaszczyzna orbity powinna leżeć w płaszczyźnie równika. Jej promień wyniesie

$$F_g = F_o \rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

b. Wykaż, że jeżeli promień orbity takiego satelity wynosi 42 300 km, to prędkość z jaką krąży, wynosi około 3.08 km/s.

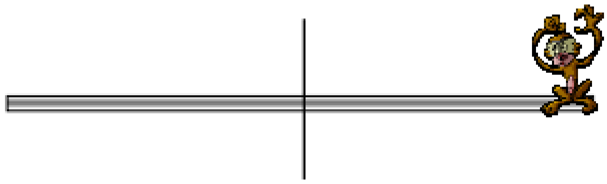
$$r = \frac{GM}{v^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 3\frac{km}{s}$$

c. W wyniku błędu obsługi inna firma ulokowała na takiej samej orbicie satelitę telekomunikacyjnego o masie dwa razy mniejszej i poruszającego się w przeciwną stronę. W wyniku zderzenia oba obiekty utworzyły jedną bryłę. Oblicz prędkość tej bryły tuż po zderzeniu. Dlaczego utworzona w wyniku zderzenia bryła nie może poruszać się po orbicie stacjonarnej?
Z zasady zachowania pędu mamy

$$mv_1 - \frac{m}{2}v_1 = \left(\frac{3}{2}m\right)v \rightarrow v = \frac{2 * (v_1 - \frac{v_1}{2})}{3} = \frac{v_1}{3} = 1\frac{km}{s}$$

$$1\frac{km}{s} < v_I \; czyli \; prędkości \; orbitalnej$$

7. Na jednym z końców obracającej się wokół pionowej osi cienkościennej rurki siedzi małpka. Rurka ma długość 2 m, a jej masa wynosi 0.5 kg, małpka ma masę 2 kg. Oś obrotu przechodzi przez środek rurki.



a. Oblicz wartość momentu bezwładności pręta z małpka siedzącą na końcu pręta. Przyjmij, że rozmiary małpki są niewielkie w stosunku do długości pręta.

$$I = \frac{1}{12} m_{pręta} l_{pręta}^2 + m_{małpy} \left(\frac{l_{pręta}}{2}\right)^2 = \frac{13}{6} kg * m^2$$

b. W pewnej chwili pręt z małpka siedzącą na końcu został wprawiony w powolny ruch obrotowy, tak, że wykonał jeden obrót w 10 s. Małpka nie była z tego zadowolona i przeszła na środek pręta. Pręt z siedzącą na środku małpką zaczął wirować szybciej pomimo, iż nikt do niego nie podchodził. Dlaczego tak się stało? Uzasadnij odpowiednimi obliczeniami.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = const. (z\ zasady\ zachowania\ momentu\ pędu)$$
$$I_1 > I_2\ czyli\ \omega_1 < \ \omega_2$$

c. Oblicz okres obrotu pręta, jeżeli małpka siedzi na jego środku.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = const.$$
$$\frac{I_1 2\pi}{T_1} = \frac{I_2 2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{I_2 T_1}{I_1} = 0.77s$$

8. Tarcza szlifierska ma kształt walca o średnicy 20 cm i masie 2000 g. Maksymalną prędkość obrotów tarcza osiąga po 5 s od momentu włączenia. Tarcza rozpędza się ruchem przyspieszonym ze stałym przyspieszeniem kątowym za pomocą siły przyłożonej stycznie do wałka na pędowego w odległości r = 2 cm od osi obrotu. Podczas rozpędzania tarczy zmierzono częstotliwość jej obrotów (z dokładnością 1 Hz) w zależności od czasu ruchu. Wy ni ki pomiarów zebrano w tabeli. Czas zmierzono z dokładnością do 0.1 s. Moment bezwładności walca wynosi $\frac{1}{2}mr^2$.

f [Hz]	**t [s]**
0	0
5	0.8
7	1
10	1.6
12	2
15	2.5
20	3.2
22	3.5
25	4
28	4.5
30	5

a. Oblicz wartość przyspieszenia kątowego tarczy podczas rozpędzania.

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t \rightarrow \epsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi f}{t} = 37.69\frac{rad}{s^2}$$

b. Wyznacz wartość siły rozpędzającej tarczę.

$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{I} \rightarrow F = \frac{\epsilon I}{r} = \frac{\epsilon * \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2}{r} = \frac{\epsilon m d^2}{8r} = 19N$$

c. Na skutek oporów ruchu tarcza zatrzymuje się po czasie 30 s od momentu, gdy przestaje na nią działać siła rozpędzająca. Ile razy wartość przyspieszenia kątowego jest większa od wartości opóźnienia kątowego?

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_1}{t_1}, \epsilon_2 = \frac{-\omega_1}{t_2} \rightarrow \left|\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right| = \frac{t_2}{t_1} = \frac{30s}{5s} = 6$$