Marco Ferraro Rodriguez | Quiz 0 | Programa de Ciencias de Datos
Estadística para Ciencias de los Datos
Profesor: Saúl Calderon

- **Pregunta 1: Algoritmo del descenso del gradiente para calcular p óptimo**

  Tenemos la siguiente función de distribución para un modelo paramétrico binomial:

$$p(t|\rho) = \rho^t (1-\rho)^{t-1}$$

  Y tenemos la siguiente serie para el calculo de verosimilitud de dicha distribución:

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} p^{t_i}(1-p)^{t_i-1}\right)$$

  Vamos a descomponer la función usando propiedades de logaritmos

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(p^{t_i}(1-p)^{t_i-1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(p^{t_i}\right) + \ln\left((1-p)^{t_i-1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \ln(p) + (t_i - 1)\ln(1-p)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \ln(p) + t_i \ln(1-p) - \ln(1-p)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\ln(p) + \ln(1-p)) - \ln(1-p)$$

  Ahora podemos separar las sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\ln(p) + \ln(1-p)) - \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p)$$

$$(\ln(p) + \ln(1-p)) \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p)$$

$$(\ln(p) + \ln(1-p)) \sum_{i=1}^{n} t_i - N\ln(1-p)$$

$$\ln\left(p - p^2\right) \sum_{i=1}^{n} t_i - N\ln(1-p)$$

  Ahora, para calcular el vector de descenso de gradiente utilizamos las derivadas con respecto a p:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\ln\!\left(p-p^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i - N\ln(1-p)\right)$$

$$\frac{1-2p}{p-p^2}\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{N}{1-p}$$

$$\frac{1-2p}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{N}{1-p}$$

$$\frac{1}{1-p}\left(\frac{1-2p}{p}\sum_{i=1}^{n} t_i + N\right)$$

El valor de sumatoria se usa como constante, pero se aplicó las derivadas sobre los logaritmos.

Por lo tanto, conociendo que la actualización de parámetros

$$p(t+1) = p(t) + \Delta p(t)$$

Los parámetros son:

$$p(t) = \ln\!\left(p-p^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i - N\ln(1-p)$$

$$\Delta p(t) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1-2p}{p}\sum_{i=1}^{n} t_i + N\right)$$

- **Pregunta 2: Derivada igualando a 0**

  Otra alternativa de solución es obtener todas las derivadas

$$\frac{1}{1-p}\left(\frac{1-2p}{p}\sum_{i=1}^{n} t_i + N\right) = 0$$

  Como son dos multiplicaciones, podemos igualar cada lado a 0

$$\frac{1}{1-p} = 0$$

  Sin embargo, en este lado no hay una solución para los números reales. Pero, para el otro lado tenemos lo siguiente:

$$\frac{1-2p}{p}\sum_{i=1}^{n} t_i + N = 0$$

$$\frac{1-2p}{p}\sum_{i=1}^{n} t_i = -N$$

$$(1-2p)\sum_{i=1}^{n} t_i = -Np$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i - 2p\sum_{i=1}^{n} t_i = -Np$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 2p\sum_{i=1}^{n} t_i - Np$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = p(\sum_{i=1}^{n} t_i - N)$$

Por lo tanto, el valor de un p óptimo es el siguiente:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{(\sum_{i=1}^{n} t_i) - N}$$