Instituto Tecnológico de Costa Rica **Escuela de Computación** Programa en Ciencias de Datos **Curso: Estadistica** Profesor: Ph. D. Saúl Calderón Ramírez	QUIZ 0 Entrega: Domingo 14 de Abril, a través del TEC digital Debe subir un *pdf* con la respuesta, generado con latex (adjunte los archivos .tex asociados). Valor: 100 pts. Puntos Obtenidos: ____________ Nota: ________________
Nombre del (la) estudiante: **Marco Ferraro Rodriguez** Carné: **1 1782 1786**	

1. **(60 puntos)** Demuestre que el *skew* o la inclinación de una función de densidad exponencial:

$$p\left(x|\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$

es siempre $\gamma = 2$, tomando en cuenta que $E\left[X^3\right] = \frac{6}{\lambda^3}$.

Respuesta:

Con respecto a lo visto en clase sabemos que

$$\gamma = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

Así mismo, también conocemos que para una función de distribución exponencial

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

También, del material sabemos que la varianza de una función distribución exponencial es

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Para hacer la comprobación, debemos tener algunas propiedades fundamentales, asi como de linealidad de la esperanza en mente

$$E[c] = c$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

Teniendo este en mente, y con el uso de propiedades, podemos expresar el skew de la siguiente forma:

$$\gamma = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E\left[(X-\mu)^3\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E\left[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(E\left[X^3\right] - 3E[X^2]\mu + 3E[X]\mu^2 - \mu^3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(E\left[X^3\right] - 3\mu(E[X^2] - E[X]\mu) - \mu^3)$$

Recordemos que para este caso, mu es equivalente a la esperanza de X.

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(E\left[X^3\right] - 3\mu(E[X^2] - E[X]^2) - \mu^3)$$

Recordemos que la varianza puede expresarse en terminos de esperanza

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$Var(X) = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$

$$Var(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Teniendo esto, podemos sustituir en nuestra ecuación

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(E\left[X^3\right] - 3\mu(Var(X) - \mu^3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(E\left[X^3\right] - 3\mu(\sigma^2) - \mu^3)$$

Remplazamos el supuesto que tenemos en el enunciado

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(\frac{6}{\lambda^3} - 3\mu(\sigma^2) - \mu^3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3}(\frac{6}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda}(\sigma^2) - \frac{1}{\lambda^3})$$

Recordemos que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^3}}(\frac{6}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^3})$$

$$\gamma = \lambda^3(\frac{2}{\lambda^3})$$

$$\gamma = 2$$

2. **(40 puntos)** Con pytorch, genere 100 muestras de tamaño N=1000, usando una densidad exponencial. Hagalo para dos valores diferentes de λ a su elección. Para esas muestras, calcule de forma vectorial el sesgo γ, y verifique la demostracion anterior. Adjunte el archivo jupyter con tal codigo.

Respuesta (Archivo con Saluda Adjuntado):

```python
import torch
lambda_a = 0.5
lambda_b = 173

torch.manual_seed(42)

num_samples = 100
N = 1000

samples_a = torch.empty(num_samples, N).exponential_(lambd=lambda_a)
samples_b = torch.empty(num_samples, N).exponential_(lambd=lambda_b)

print(samples_a.shape)
print(samples_b.shape)
```

Listing 1: Creación de Muestras

```python
def calculate_skewness(samples):
    mean = torch.mean(samples)
    std = torch.std(samples, unbiased=True)
    skewness = torch.mean(((samples - mean) / std) ** 3)
    return skewness
```

Listing 2: Función de Skewness

```python
skewness_a = calculate_skewness(samples_a.flatten())
skewness_b = calculate_skewness(samples_b.flatten())

print("Skewness for samples_a:", skewness_a)
print("Skewness for samples_b:", skewness_b)
```

Listing 3: Llamado de función