

Ejemplo de cómo calcular la matriz Hessiana

Vamos a ver un ejemplo de cómo hallar una matriz Hessiana de dimensión 2×2 :

- Calcula la matriz Hessiana en el punto $(1,0)$ de la siguiente función:

$$f(x, y) = y^4 + x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 5y + 8$$

Primero de todo tenemos que calcular las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 8y - 4x - 5$$

Una vez ya sabemos las primeras derivadas, calculamos todas las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

Por lo tanto, ahora ya podemos hallar la matriz Hessiana a partir de la fórmula para matrices 2×2 :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 6 & -4 \\ -4 & 12y^2 + 8 \end{pmatrix}$$

De manera que la matriz Hessiana evaluada en el punto (1,0) será:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6(1) + 6 & -4 \\ -4 & 12(0)^2 + 8 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (12 * 8) - (-4 * -4)$$

$$= 96 - 16$$

$$= 80$$

Then the second partial derivative test goes as follows:

- If $H < 0$, then (x_0, y_0) is a saddle point. [\[See a picture\]](#)
- If $H > 0$, then (x_0, y_0) is either a maximum or a minimum point, and you ask one more question:
 - If $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) is a local maximum point. [\[See a picture\]](#)
 - If $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) is a local minimum point. [\[See a picture\]](#)

(You could also use $f_{yy}(x_0, y_0)$ instead of $f_{xx}(x_0, y_0)$, it actually doesn't matter)

- If $H = 0$, we do not have enough information to tell.

80 es mayor que cero

F_{xx} es mayor que cero (claro y F_{yy}) por lo que es un mínimo local.