# 75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

**FACULTAD DE INGENIERÍA**
**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

## TRABAJO PRÁCTICO Nº 1
***2do. Cuatrimestre 2010***

**Objetivos:**

- Experimentar con el uso de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales ralos resultantes de discretizaciones mediante diferencias finitas de ecuaciones diferenciales.
- Verificar experimentalmente los resultados teóricos y las estimaciones empíricas respecto de la velocidad de convergencia del proceso iterativo.
- Analizar el efecto de incrementar la discretización del problema.
- Efectuar un cálculo asociado a una eventual aplicación práctica.

**Introducción:**

La solución aproximada $\phi$ de la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ en un dominio bidimensional cuadrado discretizado usando una grilla uniforme ($x_i=x_0+ih;$ $y_j=y_0+jh$) puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que surge de aplicar el siguiente operador a cada uno de los nodos de la grilla

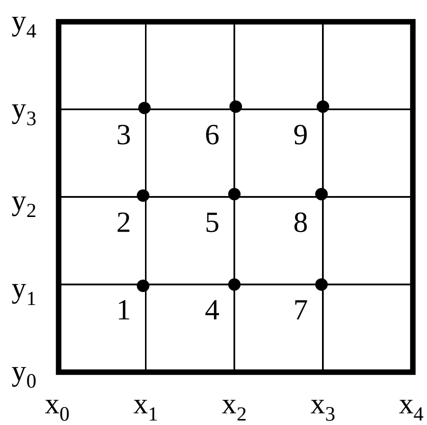
$$4\phi_{i\,j} - \phi_{i-1\,j} - \phi_{i+1\,j} - \phi_{i\,j-1} - \phi_{i\,j+1} = 0 \qquad (1)$$

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales resultante es rala (a lo sumo 5 elementos por fila son distintos de cero) y presenta una estructura tridiagonal en bloques. La resolución de este sistema de ecuaciones fue ampliamente estudiada en forma teórica durante la época de auge del método de las diferencias finitas (aproximadamente a mediados del siglo XX). Mediante estos resultados teóricos se demuestra, por ejemplo, que el método de Gauss-Seidel siempre converge cuando se imponen condiciones de borde de tipo Dirichlet (o sea, se impone la solución en todo el contorno) pero que la velocidad de convergencia disminuye a medida que se mejora la discretización (reducción de $h$ que surge de dividir el tamaño del lado del dominio en $N$ partes iguales). Esta situación se mejora notablemente utilizando sobre-relajación y el valor de $\omega_{\text{óptimo}}$ fue establecido en forma teórica para casos en que el dominio de cálculo es rectangular. Entre las aplicaciones más importantes efectuadas en ese momento con esta técnica se encuentra el desarrollo de reactores nucleares.

**Planteo del trabajo práctico:**

El trabajo práctico se divide en dos partes: en la primera se analiza el comportamiento del método SOR y en la segunda se efectúa una aplicación práctica consistente en determinar la distribución de temperaturas sobre una región del "motherboard" de una computadora.

Parte I:




En la figura se muestra la discretización de un dominio cuadrado cuyos lados se dividieron en $N$=4 partes iguales, con lo cual se podrá obtener una solución aproximada $\phi$ en los ($N$-1) x ($N$-1) nodos interiores de la grilla mientras que en los contornos el valor de $\Phi$ se encuentra impuesto. Numerando los nodos como se indica en la figura la solución aproximada $\phi$ en los nodos interiores se obtiene como solución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes, para $N$=4, adquiere la siguiente estructura:

A= $\begin{bmatrix} T & -I & 0 \\ -I & T & -I \\ 0 & -I & T \end{bmatrix}$ con $T$= $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

siendo $I$ la matriz identidad de dimensión $N$-1. Si se aplica el método de Gauss Seidel a un sistema de ecuaciones con estas características el radio espectral de la matriz de iteración resulta $\rho(T_{GS})=\cos^2(\pi/N)$. Aplicando el método Sobre-relajación Sucesiva (SOR) resulta $\rho(T_\omega)_{óptimo}=\omega_{óptimo}-1 < \rho(T_{GS})$ donde el factor de relajación óptimo es :

$$\omega_{optimo} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_{GS})}} = \frac{2}{1+sen(\pi/N)}.$$

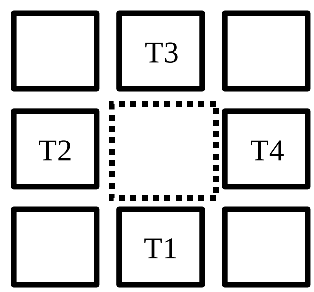
Dado que las propiedades de convergencia no dependen del valor de arranque ni del valor sobre los contornos, en la primera parte de este TPM se asume, por simplicidad, que en los contornos $\Phi$=1 y se toma $\phi$=0 como valor de arranque en los nodos de la malla. Además se indica utilizar el siguiente criterio de convergencia:

$$R \le RTOL \text{ donde } R = \frac{\left\| \underline{\phi}^{k+1} - \underline{\phi}^{k} \right\|_2}{\left\| \underline{\phi}^{k+1} \right\|_2}$$

Se pide:

a) Aplicar el operador indicado en (1) al problema planteado y determinar la estructura que adquiere la matriz A para un valor de $N$ genérico. Analizar si la estructura que adquiere la matriz depende de la forma de numerar los nodos.
b) Escribir un programa para aplicar el método SOR al problema planteado considerando como datos los valores de $N$, $RTOL$ y ω.
c) Aplicar el programa desarrollado considerando $RTOL$=0.01, $N$=4 y ω variable (1, 1.05 , 1.10 , ..., 1.95 ).
d) Repetir considerando $N$=32 (Tener en cuenta de operar solamente con los elementos no nulos de A para poder resolver este caso sin requerimientos excesivos de memoria.
e) Presentar los resultados obtenidos graficando la cantidad ***n*** de iteraciones necesarias para converger en cada caso en función de ω. En el mismo gráfico presentar la siguiente estimación empírica $\rho(T\omega) \approx R^{1/n}$ donde $R$ es la tolerancia alcanzada y ***n*** el número de iteraciones efectuadas en cada caso.
f) Verificar si los datos obtenidos experimentalmente se corresponden con los valores teóricos de $\rho(T_{GS})$, $\omega_{óptimo}$ y $\rho(T\,\omega_{óptimo})$. Escribir conclusiones.

Parte II




En la figura se representa una región de la plaqueta madre de una computadora, los cuadrados indican procesadores que se encuentran operando a distintas temperaturas. En el centro van a estar colocadas memorias y por ello se desea conocer la distribución de temperaturas en esa zona. Despreciando las perdidas de calor de la plaqueta, las temperaturas en la zona en estudio se pueden calcular resolviendo la ecuación de Laplace usando T1 a T4 como condiciones de borde aplicadas en las líneas punteadas.

Cada grupo obtendrá los datos de temperatura en °C descomponiendo la parte entera del promedio de los N° de padrón de los integrantes del grupo, o NPP de ahora en más, de la siguiente manera:

$$NPP=a10^4+b10^3+c10^2+d10^1+e.$$

De esta forma

- T1=a*10+e,
- T2=a*10+d,
- T3=a*10+c y
- T4=a*10+b.

Cada grupo deberá reportar el valor de temperatura en el centro correspondiente a sus datos.

Se pide además graficar las isolíneas (o isobandas) de la temperatura calculada en forma bidimensional o en su defecto efectuar graficar la distribución de temperatura según cortes horizontales o verticales utilizando diagramas cartesianos.

Tomar N=8, RTOL=0.001 y el $\omega=\omega_{optimo}$ para efectuar estos cálculos.