75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1
1er. Cuatrimestre 2009

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos iterativos

Preparado por el Prof. Miguel Ángel Cavaliere

Objetivos:

- Experimentar con el uso de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales representados por matrices simétricas definidas positivas y tridiagonales en bloques (similares por ejemplo a los que se obtienen discretizando ecuaciones diferenciales por el método de diferencias finitas).
- Verificar experimentalmente los resultados teóricos mediante estimaciones empíricas respecto de la velocidad de convergencia del proceso iterativo.

Desarrollo:

En el apéndice se presentan tres matrices cuadradas denominadas A_6, A_9 y A_{12} (donde el subíndice corresponde a la dimensión de las mismas). Dichas matrices son simétricas definidas positivas y presentan una estructura tridiagonal en bloques definidas a partir de submatrices de 3x3 tal como allí se indica. Asimismo estas tres matrices sugieren un patrón para generar matrices A_n siendo n un multiplo de 3. Se pide:

a) Escribir uno o varios programas que permitan aplicar los métodos iterativos estacionarios (Jacobi, Gauss Seidel y SOR) a sistemas de ecuaciones lineales representados por $\boldsymbol{A_n}\ \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_n}$ (donde el subíndice identifica la dimensión del sistema de acuerdo con lo indicado en el Apéndice). Es un requisito que el ó los programas desarrollados tengan en cuenta la estructura de estas matrices y operen solamente con los elementos no nulos de las mismas, o sea, que dichas matrices $\boldsymbol{A_n}$ no deberán estar representadas computacionalmente por un arreglo bidimensional sino que las fórmulas de los métodos deberán escribirse para estas matrices en particular.

b) Para $\boldsymbol{n}$ = 6, 9, 12 y 30 calcular los vectores $\boldsymbol{b_n}$ tal que correspondan a los casos en que la solución $\boldsymbol{x_n}$ tiene todas sus componentes iguales a 1.

c) Para los 4 sistemas de ecuaciones definidos en el punto anterior obtener soluciones con una precisión relativa RTOL= 0.001 aplicando el método de Jacobi y arrancando el proceso iterativo considerando nulas todas las componentes de $\boldsymbol{x^{(0)}}$. Para ello se utilizará el siguiente criterio de convergencia:

$$R^{(k)} \leq RTOL \text{ donde } R^{(k)} = \frac{\left\| \underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)} \right\|_\infty}{\left\| \underline{x}^{(k)} \right\|_\infty}$$

d) Utilizando los resultados obtenidos durante todo el proceso iterativo del punto anterior obtener una estimación del radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi (ρ_J) utilizando la siguiente expresión aproximada (se sugiere tabular los resultados en función de k a los efectos de reportar un valor aproximadamente representativo)

$$R^{(k)} \approx \rho_J \; R^{(k-1)}$$

e) Repetir los dos puntos anteriores aplicando ahora el método de Gauss-Seidel y verificar si $\rho_{GS} = \rho_J^2$, tal como indica la teoría.

f) Repetir el punto c) aplicando el método SOR utilizando para cada sistema de ecuaciones distintos valores de ω comprendidos entre 1 y 2 (se sugiere tomar alrededor de 20 valores distintos) y graficar la cantidad de iteraciones requeridas para alcanzar la precisión pedida en función del parámetro de sobrerelajación ω.

g) Estimar para cada sistema de ecuaciones el valor de ω que minimiza el número de iteraciones requeridas ($\omega_{óptimo}$). Dado que es muy probable que de la curva obtenida no presente un valor mínimo sino que haya un intervalo de valores de ω para los cuales el número de iteraciones sea mínimo, se sugiere incrementar adecuadamente el valor de RTOL y barrer el intervalo donde se presupone que esta el mínimo con valores de ω lo suficientemente cercanos para poder estimar dos decimales de $\omega_{óptimo}$.

h) Calcular para cada sistema de ecuaciones el valor de ($\omega_{óptimo}$) a partir de las estimaciones del radio espectral de la matriz de iteración de Gauss Seidel (ρ_{GS}) obtenidos en el punto e) utilizando la siguiente expresión teórica y comparar con los resultados obtenidos en el punto anterior explicitando las conclusiones correspondientes.

$$\omega_{optimo} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_{GS})}}$$

Desarrollo adicional optativo

Dado que en este trabajo práctico se conoce la solución exacta es posible controlar el proceso iterativo utilizando directamente el error de truncamiento, o sea

$$R^{(k)} \le RTOL \text{ donde } R^{(k)} = \frac{\left\| \underline{x}^{(k)} - \underline{x} \right\|_\infty}{\left\| \underline{x}^{(k)} \right\|_\infty}.$$

Además se puede utilizar la siguiente expresión para obtener las estimaciones del radio espectral de las matrices de iteración correspondientes a cada método.

$$\left\| \underline{x}^{(k)} - \underline{x} \right\| \approx \rho^k \left\| \underline{x}^{(0)} - \underline{x} \right\|$$

Dicha estimación puede efectuarse tomando logaritmos en la expresión anterior de forma tal de ajustar una recta cuya pendiente sea el logaritmo del radio espectral buscado.

A su vez estos cambios tendrán efecto sobre los valores de $\omega_{\text{óptimo}}$ previamente estimados y calculados.

Se propone obtener conclusiones a partir de la comparación entre todos los resultados obtenidos conociendo el verdadero error de truncamiento (situación que no se da en la práctica) y los resultados obtenidos previamente utilizando estimadores aproximados del error de truncamiento.

Apéndice:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ y } D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ D_1 & B_3 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 & \\ D_1 & B_2 & D_1 \\ & D_1 & B_3 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 & & \\ D_1 & B_2 & D_1 & \\ & D_1 & B_2 & D_1 \\ & & D_1 & B_3 \end{pmatrix}$$