75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Trabajo Práctico Nro 2

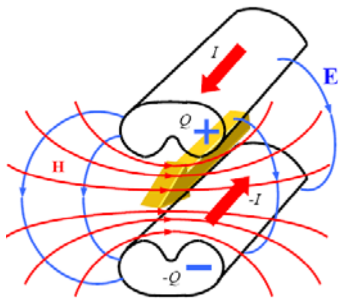
2do. Cuatrimestre 2010

03/Nov/2010

Resolución de problemas de valores iniciales

Autor: Horacio Gastón Arrigo

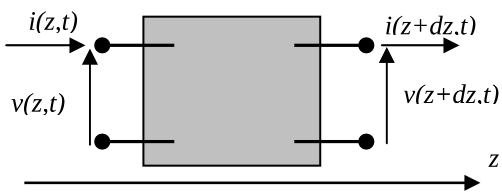
Una línea de transmisión* es un dispositivo o medio físico material que se utiliza para transportar energía electromagnética y/o información de un sitio a otro. Esta clasificación abarca cables, cables coaxiales, materiales dieléctricos, líneas strip, fibras ópticas, líneas de energía eléctrica y guías de onda.

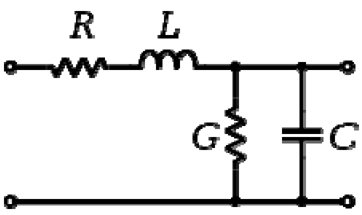


Una línea de transmisión básica puede ser pensada como un par de electrodos que se extienden paralelos por una longitud grande (en relación con la longitud de onda) en una dada dirección. El par de electrodos se encuentran cargados con distribuciones de carga (variables a lo largo de la línea) iguales y opuestas, formando un capacitor distribuido. Al mismo tiempo circulan corrientes opuestas (variables a lo largo de la línea) de igual magnitud, creando un campo magnético que puede expresarse a través de una inductancia distribuida. La potencia fluye a lo largo de la línea. Los ejemplos más importantes de líneas de transmisión son el par bifilar, el coaxil y la microcinta.

Modelo circuital de la línea de transmisión

Se puede modelar a la línea como una sucesión o cascada de *cuadripolos de longitud infinitesimal* y para cada uno de ellos usar un modelo circuital, cuyos parámetros descriptivos son las tensiones y corrientes a la entrada y salida, ya que las dimensiones del cuadripolo satisfacen la condición cuasiestática. Elegimos la dirección del eje cartesiano z a lo largo de la línea. Cada tramo de longitud dz a lo largo de la dirección z puede asociarse a un cuadripolo.





Las cargas y corrientes en los conductores crearán campos eléctricos y magnéticos cuya energía almacenada puede modelarse por componentes reactivos puros: capacidad e inductancia. La capacidad

* *Generalmente se utiliza el término línea de transmisión a la guía de ondas usada en el extremo de menor frecuencia del espectro. A estas frecuencias es posible utilizar un análisis cuasiestático. Para frecuencias más elevadas dicha aproximación deja de ser válida y se requiere un análisis en términos de campos, que es de mayor complejidad.*

C, está asociada al campo eléctrico creado por las cargas en los conductores de la línea y la inductancia L, al campo magnético generado por las corrientes que circulan por ella.

En una línea de transmisión las pérdidas son debidas a:

- Efecto Joule en los conductores
- Pérdidas dieléctricas.

Estas pérdidas pueden ser incorporadas al modelo circuital del cuadripolo mediante una resistencia en serie R, que modela las pérdidas por efecto Joule debidas a la circulación de corriente en los conductores de la línea y una conductancia en paralelo G, que modela las pérdidas dieléctricas mediante una conductividad equivalente del material, como se ilustra en la figura.
Una línea de transmisión ideal, será aquella que no posea pérdidas (R = G = 0), este concepto es meramente teórico ya que todas las líneas poseen pérdidas.

Ecuaciones del telegrafista

El modelo circuital del cuadripolo, puede ser descripto matemáticamente mediante las llamadas "Ecuaciones del Telegrafísta". Dicho modelo y sus respectivas ecuaciones fueron desarrolladas principalmente por Oliver Heaviside en la década de 1880. Éstas son un par de ecuaciones diferenciales lineales que describen el voltaje y la corriente en función del tiempo y la distancia (respecto de la fuente) en una línea de transmisión. Estas son:

$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t) = -L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) - RI(z,t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t) = -C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) - GV(z,t) \qquad (2)$$

Es importante notar que estas ecuaciones se encuentran *acopladas* entre si. Para poder resolverlas se pueden desacoplar a través de derivadas cruzadas. Esto es por ejemplo, derivando la ecuación (1) respecto del tiempo y la ecuación (2) respecto de z. Reordenando las igualdades obtenidas llegamos a las nuevas ecuaciones del telegrafista:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}V(z,t) = LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(z,t) + (RC+GL)\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) + GRV(z,t) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}I(z,t) = LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}I(z,t) + (RC+GL)\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) + GRI(z,t) \qquad (4)$$

No existe una solución general de estas ecuaciones como en el caso ideal. Sin embargo cualquier forma de onda físicamente realizable puede expresarse mediante una integral de Fourier y la resolución es simple para **variaciones armónicas** de la forma:

$$V(z,t) = Vs(z).e^{i\omega t} \quad / \quad I(z,t) = Is(z).e^{i\omega t}$$

Resolución

Dada una línea de transmisión de características especificadas en el apéndice, resuelva los siguientes puntos:

1) Partiendo de las educaciones (3) y (4) obtenga las ecuaciones de onda de D'Alembert, considerando pérdidas nulas (R=0 ; G=0) en la línea de transmisión y variaciones armónicas de V(z,t) e I(z,t). Describa matemáticamente como queda planteado el problema.

2) Discretize el problema mediante el método de Euler explícito y describa en detalle como queda planteado. Resuelva para $z \in [0 ; 15]$ eligiendo un paso de cálculo adecuado.

3) Repita el punto 2) utilizando el método de RK-2. Compare ambos resultados para un mismo valor de paso de cálculo. Realice una breve apreciación al respecto.

4) En base a los resultados del punto 2) y 3) encuentre, en forma experimental, el valor de paso máximo para el cual el método de Euler se hace estable. Repita lo mismo para el método de RK-2. Defina su propio criterio para determinar el cumplimiento de lo pedido.

5) Analice el error introducido por Euler y RK-2 en z = 15, en función del paso de cálculo.

6) La impedancia característica de la línea se define como la relación $Z_0 = \dfrac{V(z,t)}{I(z,t)}$. Halle dicha relación en función de z y compárela con el valor teórico $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Explique los resultados obtenidos.

7) **<u>Optativo</u>**: Rehaga el punto 2) considerando que la línea de transmisión posee pérdidas. R = 10Ω, G = 1e-3S. Analice los resultados y describa una breve apreciación personal.

Objetivos del trabajo

- Familiarizarse con los métodos numéricos para resolución de problemas de valores iniciales, aplicados a un caso práctico.

- Comprender de manera experimental los conceptos de orden de un método y como influye la selección del paso de cálculo en la estabilidad del método.

- Realizar un algoritmo que resuelva en forma numérica el problema matemático planteado.

- Comprender las ventajas y limitaciones de los métodos numéricos aplicados a un caso real.

Observaciones y recomendaciones

- Se debe presentar un informa conteniendo en forma detallada, ordenada y prolija toda la información que demuestre la correcta resolución de los puntos pedidos.
- Los gráficos incluidos en el informe deberán tener nombre y unidades en sus ejes como así también una tabla de referencias que permita identificar las curvas presentadas en el mismo.
- El informe debe incluir una sección “Conclusiones” en donde se deberán expresar los resultados obtenidos en función de los objetivos propuestos.
- El informe presentado deberá estar en conformidad con el reglamento del curso.

Apéndice

Línea de transmisión

C = 83 pF/m

$v = 66\%\ c$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C}$$

Constantes y Unidades

$c = 3.10^8$ m/s

f = 200 MHz

ω = 2π.f

$\lambda = c / f$

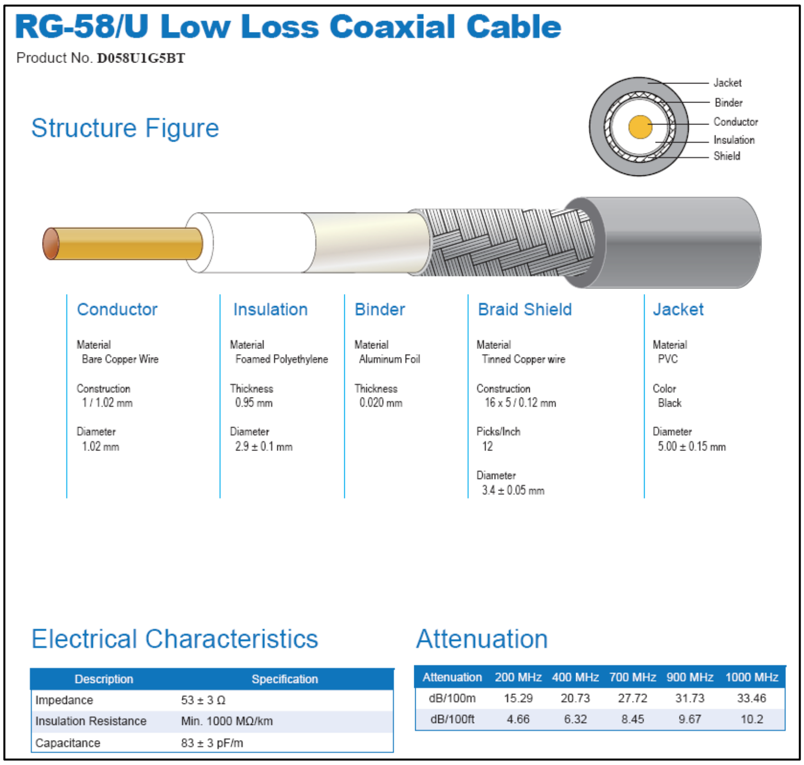
Condiciones Iniciales

V(z=0) = 10 V

V’(z=0) = 0

I(z=0) = 200 mA (200e-3 A)

I’(z=0) = 0



RG-58/U Low Loss Coaxial Cable

Product No. D058U1G5BT

Structure Figure

Conductor
Material
Bare Copper Wire
Construction
1 / 1.02 mm
Diameter
1.02 mm

Insulation
Material
Foamed Polyethylene
Thickness
0.95 mm
Diameter
2.9 ± 0.1 mm

Binder
Material
Aluminum Foil
Thickness
0.020 mm

Braid Shield
Material
Tinned Copper wire
Construction
16 x 5 / 0.12 mm
Picks/Inch
12
Diameter
3.4 ± 0.05 mm

Jacket
Material
PVC
Color
Black
Diameter
5.00 ± 0.15 mm

Electrical Characteristics

Description	Specification
Impedance	53 ± 3 Ω
Insulation Resistance	Min. 1000 MΩ/km
Capacitance	83 ± 3 pF/m

Attenuation

Attenuation	200 MHz	400 MHz	700 MHz	900 MHz	1000 MHz
dB/100m	15.29	20.73	27.72	31.73	33.46
dB/100ft	4.66	6.32	8.45	9.67	10.2

Hoja de datos de la línea de transmisión propuesta.