



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΜ&ΜΥ

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

1^η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Ακ. έτος 2010-2011

Λύρας Γρηγόρης Α.Μ.: 03109687

4 Δεκεμβρίου 2011

1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις

α' Ταξινόμηση

- (i) $\log n^3$
- (ii) $\sqrt{n} * \log^{50} n$
- (iii) $\frac{n}{\log \log n}$
- (iv) $\log^{\log n} n$
- (v) $\log^{\sqrt{n}} n$
- (vi) $\log n!$
- (vii) $n * \log^{10} n$
- (viii) $n^{1.01}$
- (ix) $5 * \log_2 n$
- (x) $2^{\log_2^4 n}$
- (xi) $\sum_{k=1}^n k^5$
- (xii) $n^{\log \log n}$
- (xiii) $e^{\frac{n}{\ln n}}$
- (xiv) $n * 3^n$
- (xv) $2^{\log_2^4 n}$
- (xvi) $\sqrt{n!}$

β' Τάξη Μεγέθους

- (i) $T(n) = 5 * T(n/7) + n * \log(n) \Rightarrow n^{\log_7 5} = n^{0.827} \Rightarrow n^{0.827} < n * \log n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (ii) $T(n) = 4 * T(n/5) + n / \log^2 n \Rightarrow n^{\log_5 4} = n^{0.861} \Rightarrow n^{0.861} < n / \log^2 n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n / \log^2 n)$
- (iii) $T(n) = T(n/3) + 3 * T(n/7) + n$
 $\Rightarrow T(n) \in O(n)$
- (iv) $T(n) = 6 * T(n/6) + n \Rightarrow n^{\log_6 6} = n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (v) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (vi) $T(n) = 16 * T(n/4) + n^3 * \log^2 n \Rightarrow n^{\log_4 16} = n^2 \Rightarrow n^2 < n^3 * \log^2 n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3 * \log^2 n)$
- (vii) $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log \log n)$ ($k = \log n, f(k) = T(n)$)
 $\Rightarrow T(\sqrt{n}) = f(\log \sqrt{n}) = f(\frac{1}{2} * \log n) = f(\frac{k}{2})$
 $\Rightarrow f(k) = f(\frac{k}{2}) + \Theta(\log k)$
 $\Rightarrow \Theta(n)$
- (viii) $T(n) = T(n-3) + \log n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

2 Ταξινόμηση σε Πίνακα με Πολλά Ίδια Στοιχεία

3 Δυαδική Αναζήτηση

α' Ξεκινάμε με ένα στοιχείο. Και συγκρίνουμε με τον x . Όσο ο x είναι μεγαλύτερος από αυτόν διπλασιάζουμε τον αριθμό των στοιχείων και ελέγχουμε πάλι με τον τελευταίο. Μόλις φτάσουμε σε μεγαλύτερο αριθμό από τον x έστω στη θέση k και εφαρμόζουμε κλασσική δυαδική αναζήτηση στο τμήμα $A[1...k]$. Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είναι $O(\log k)$.

β' Παίρνω τα k πρώτα στοιχεία από κάθε πίνακα. Τα χωρίζω στη μέση και συγκρίνω τα $A[k/2]$ με $B[k/2 + 1]$ και $A[k/2 + 1]$ με $B[k/2]$. Αν $A[k/2] < B[k/2 + 1]$ και $B[k/2] < A[k/2 + 1]$ τότε το k -οστό στοιχείο είναι το $\max\{A[k/2], B[k/2]\}$. Αν $A[k/2] < B[k/2 + 1]$ και $B[k/2] > A[k/2 + 1]$ τότε επαναλαμβάνω χρησιμοποιώντας τα στοιχεία $A[k/2 + 1]..A[k]$ και $B[1]..B[k/2]$.

4 Συλλογή Comics

Ζητάμε πρώτα το MSB για όλα τα τεύχη. Έτσι τα χωρίζουμε σε $\frac{n}{2}$ και $\frac{n}{2} - 1$. Προφανώς αυτό που λείπει είναι στα λιγότερα. Εφαρμόζουμε πάλι κάνοντας $\frac{n}{2}$ ερωτήσεις και κρατάμε πάλι το υποσύνολο με το μικρότερο πλήθος. Αναδρομικά θα καταλήξουμε στο τεύχος που λείπει από τη συλλογή έχοντας ρωτήσει $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 = 2 * n * (1 - \frac{1}{2^n}) < 2 * n$ φορές.

5 Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Ξεκινάμε με τον από τον $A[1]$ θέτοντας το $B[1] = 0$ εφόσον δεν υπάρχει κάποιος δυτικότερα από αυτόν. Προχωράμε στον επόμενο $A[2]$ και συγκρίνουμε το ύψος του με τον $A[1]$. Αν $A[2] < A[1]$ τότε θέτουμε $B[2] = 1$ αλλιώς συγκρίνουμε το ύψος $A[2]$ με το ύψος του στόχου του $A[1]$. Αν πάλι δεν βρούμε ψηλότερο τρέχουμε πάλι για το στόχο του στόχου αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε σε 0 ή σε κάποιον ψηλότερο του $A[2]$ και τον θέτουμε ως στόχο στο πεδίο $B[2]$. Επαναλαμβάνουμε μέχρι n . Μέγιστος αριθμός συγκρίσεων είναι $2n$.