ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΜ&ΜΥ
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων
Ακ. έτος 2010-2011

Λύρας Γρηγόρης
Α.Μ.: 03109687

5 Δεκεμβρίου 2011

1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις

α′ Ταξινόμηση

(i) $\log n^3$
(ii) $\sqrt{n} * \log^{50} n$
(iii) $\frac{n}{\log\log n}$
(iv) $\log n!$
(v) $n * \log^{10} n$
(vi) $n^{1.01}$
(vii) $5^{\log_2 n}$
(viii) $\sum_{k=1}^{n} k^5$
(ix) $\log^{\log n} n = n^{\log\log n}$
(x) $2^{\log_2^4 n}$
(xi) $\log^{\sqrt{n}} n$
(xii) $e^{\frac{n}{\ln n}}$
(xiii) $n * 3^n$
(xiv) 2^{2*n}
(xv) $\sqrt{n!}$

β′ Τάξη Μεγέθους

(i) $T(n) = 5 * T(n/7) + n * \log(n) \Rightarrow n^{\log_7 5} = n^{0.827} \Rightarrow n^{0.827} < n * \log n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(ii) $T(n) = 4 * T(n/5) + n/\log^2 n \Rightarrow n^{\log_5 4} = n^{0.861} \Rightarrow n^{0.861} < n/\log^2 n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n/\log^2 n)$

(iii) $T(n) = T(n/3) + 3 * T(n/7) + n$
$\Rightarrow T(n) \in O(n)$

(iv) $T(n) = 6 * T(n/6) + n \Rightarrow n^{\log_6 6} = n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(v) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(vi) $T(n) = 16 * T(n/4) + n^3 * \log^2 n \Rightarrow n^{\log_4 16} = n^2 \Rightarrow n^2 < n^3 * \log^2 n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3 * \log^2 n)$

(vii) $T(n) = T(\sqrt{(n)}) + \Theta(\log\log n)$ $(k = \log n, f(k) = T(n))$
$\Rightarrow T(\sqrt{n}) = f(\log\sqrt{n}) = f(\frac{1}{2} * \log n) = f(\frac{k}{2})$
$\Rightarrow f(k) = f(\frac{k}{2}) + \Theta(\log k)$
$\Rightarrow \Theta(n)$

(viii) $T(n) = T(n-3) + \log n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * logn)$

2 Ταξινόμιση σε Πίνακα με Πολλά Ίδια Στοιχεία

3 Δυαδική Αναζήτηση

α′ Ξεκινάμε με ένα στοιχείο. Και συγκρίνουμε με τον x. Όσο ο x είναι μεγαλύτερος από αυτόν διπλασιάζουμε τον αριθμό των στοιχείων και ελέγχουμε πάλι με τον τελευταίο. Μόλις φτάσουμε σε μεγαλύτερο αριθμό από τον x έστω στη θέση k και εφαρμόζουμε κλασσική δυαδική αναζήτηση στο τμήμα $A[1...k]$. Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είναι $O(\log k)$.

β′ Παίρνω τα k πρώτα στοιχεία από κάθε πίνακα. Τα χωρίζω στη μέση και συγκρίνω τα $A[k/2]$ με $B[k/2+1]$ και $A[k/2+1]$ με $B[k/2]$. Αν $A[k/2] < B[k/2+1]$ και $B[k/2] < A[k/2+1]$ τοτε το k-οστό στοιχείο είναι το $max\{A[k/2], B[k/2]\}$. Αν $A[k/2] < B[k/2+1]$ και $B[k/2] > A[k/2+1]$ τότε επαναλαμβάνω χρησιμοποιώντας τα στοιχεία $[A[k/2+1]..A[k]]$ και $[B[1]..B[k/2]]$.

4 Συλλογή Comics

Ζητάμε πρώτα το MSB για όλα τα τεύχη. Έτσι τα χωρίζουμε σε $\frac{n}{2}$ και $\frac{n}{2} - 1$. Προφανώς αυτό που λείπει είναι στα λιγότερα. Εφαρμόζουμε πάλι κάνοντας $\frac{n}{2}$ ερωτήσεις και κρατάμε πάλι το υποσύνολο με το μικρότερο πλήθος. Αναδρομικά θα καταλήξουμε στο τεύχος που λείπει από τη συλλογή έχοντας ρωτήσει $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + .. + 1 = 2 * n * (1 - \frac{1}{2^n}) < 2 * n$ φορές.

5 Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Ξεκινάμε με τον από τον $A[1]$ θέτοντας το $B[1] = 0$ εφόσον δεν υπάρχει κάποιος δυτικότερα από αυτόν. Προχωράμε στον επόμενο $A[2]$ και συγκρίνουμε το ύψος του με τον $A[1]$. Αν $A[2] < A[1]$ τότε θέτουμε $B[2] = 1$ αλλιώς συγκρίνουμε το ύψος $A[2]$ με το ύψος του στόχου του $A[1]$. Αν πάλι δεν βρούμε ψηλότερο τρέχουμε πάλι για το στόχο του στόχου αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε σε 0 ή σε κάποιον ψηλότερο του $A[2]$ και τον θέτουμε ως στόχο στο πεδίο $B[2]$. Επαναλαμβάνουμε μέχρι n. Μέγιστος αριθμός συγκρίσεων είναι $2n$.