



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΜ&ΜΥ

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

1<sup>η</sup> Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Ακ. έτος 2010-2011

Λύρας Γρηγόρης Α.Μ.: 03109687

4 Δεκεμβρίου 2011

# 1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις

α' Ταξινόμηση

- $\log n^3$
- $\sqrt{n} * (\log n)^{50}$
- $\frac{n}{\log \log n}$
- $\log n! = n * \log n$
- $(\log n)^{\sqrt{n}}$
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

$n * 3^n$	$\Rightarrow O(3^n)$
$n^{1.01}$	$\Rightarrow O(n^{1.01})$
$5^{\log_2 n}$	$\Rightarrow O(n^{2.321})$
$\sum_{k=1}^n k^5$	$\Rightarrow O(n^6)$
$2^{\log_2 n^4}$	$\Rightarrow O(n^4)$
$\log^{\log n} n$	$\Rightarrow O()$
$\frac{n}{\log \log n}$	$\Rightarrow O()$
$\exp \frac{n}{\ln n}$	$\Rightarrow O()$
$\log n^{\frac{n}{3}}$	$\Rightarrow O()$
$\sqrt{n} * (\log n)^{50}$	$\Rightarrow O()$
$n * (\log n)^{10}$	$\Rightarrow O()$
$(\log n)^{\sqrt{n}}$	$\Rightarrow O()$
$n^{\log \log n}$	$\Rightarrow O()$
$2^{2*n}$	$\Rightarrow O(2^n)$
$\sqrt{n!}$	$\Rightarrow O()$
$\log(n!)$	$\Rightarrow O(n * \log n)$

β' Τάξη Μεγέθους

- (i)  $T(n) = 5 * T(n/7) + n * \log(n) \Rightarrow n^{\log_7 5} = n^{0.827} \Rightarrow n^{0.827} < n * \log n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (ii)  $T(n) = 4 * T(n/5) + n / \log^2 n \Rightarrow n^{\log_5 4} = n^{0.861} \Rightarrow n^{0.861} < n / \log^2 n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n / \log^2 n)$
- (iii)  $T(n) = T(n/3) + 3 * T(n/7) + n$   
 $\Rightarrow T(n) \in O(n)$
- (iv)  $T(n) = 6 * T(n/6) + n \Rightarrow n^{\log_6 6} = n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (v)  $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$
- (vi)  $T(n) = 16 * T(n/4) + n^3 * \log^2 n \Rightarrow n^{\log_4 16} = n^2 \Rightarrow n^2 < n^3 * \log^2 n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3 * \log^2 n)$

- (vii)  $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log \log n)$  ( $k = \log n, f(k) = T(n)$ )  
 $\Rightarrow T(\sqrt{n}) = f(\log \sqrt{n}) = f(\frac{1}{2} * \log n) = f(\frac{k}{2})$   
 $\Rightarrow f(k) = f(\frac{k}{2}) + \Theta(\log k)$   
 $\Rightarrow \Theta(n)$
- (viii)  $T(n) = T(n-3) + \log n$   
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

## 2 Ταξινόμηση σε Πίνακα με Πολλά Ίδια Στοιχεία

### 3 Δυαδική Αναζήτηση

- α' Ξεκινάμε με ένα στοιχείο. Και συγκρίνουμε με τον  $x$ . Όσο ο  $x$  είναι μεγαλύτερος από αυτόν διπλασιάζουμε τον αριθμό των στοιχείων και ελέγχουμε πάλι με τον τελευταίο. Μόλις φτάσουμε σε μεγαλύτερο αριθμό από τον  $x$  έστω στη θέση  $k$  και εφαρμόζουμε κλασσική δυαδική αναζήτηση στο τμήμα  $A[1...k]$ . Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είναι  $O(\log k)$ .
- β' Παίρνω τα  $k$  πρώτα στοιχεία από κάθε πίνακα. Τα χωρίζω στη μέση και συγκρίνω τα  $A[k/2]$  με  $B[k/2 + 1]$  και  $A[k/2 + 1]$  με  $B[k/2]$ . Αν  $A[k/2] < B[k/2 + 1]$  και  $B[k/2] < A[k/2 + 1]$  τότε το  $k$ -οστό στοιχείο είναι το  $\max\{A[k/2], B[k/2]\}$ . Αν  $A[k/2] < B[k/2 + 1]$  και  $B[k/2] > A[k/2 + 1]$  τότε επαναλαμβάνω χρησιμοποιώντας τα στοιχεία  $[A[k/2 + 1]..A[k]]$  και  $[B[1]..B[k/2]]$ .

### 4 Συλλογή Comics

Ζητάμε πρώτα το MSB για όλα τα τεύχη. Έτσι τα χωρίζουμε σε  $\frac{n}{2}$  και  $\frac{n}{2} - 1$ . Προφανώς αυτό που λείπει είναι στα λιγότερα. Εφαρμόζουμε πάλι κάνοντας  $\frac{n}{2}$  ερωτήσεις και κρατάμε πάλι το υποσύνολο με το μικρότερο πλήθος. Αναδρομικά θα καταλήξουμε στο τεύχος που λείπει από τη συλλογή έχοντας ρωτήσει  $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 = 2 * n * (1 - \frac{1}{2^n}) < 2 * n$  φορές.

### 5 Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Ξεκινάμε με τον από τον  $A[1]$  θέτοντας το  $B[1] = 0$  εφόσον δεν υπάρχει κάποιος δυτικότερα από αυτόν. Προχωράμε στον επόμενο  $A[2]$  και συγκρίνουμε το ύψος του με τον  $A[1]$ . Αν  $A[2] < A[1]$  τότε θέτουμε  $B[2] = 1$  αλλιώς συγκρίνουμε το ύψος  $A[2]$  με το ύψος του στόχου του  $A[1]$ . Αν πάλι δεν βρούμε ψηλότερο τρέχουμε πάλι για το στόχο του στόχου αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε σε 0 ή σε κάποιον ψηλότερο του  $A[2]$  και τον θέτουμε ως στόχο στο πεδίο  $B[2]$ . Επαναλαμβάνουμε μέχρι  $n$ . Μέγιστος αριθμός συγκρίσεων είναι  $2n$ .