ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΜ&ΜΥ
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων
Ακ. έτος 2010-2011

Λύρας Γρηγόρης
Α.Μ.: 03109687

5 Δεκεμβρίου 2011

1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις

α′ Ταξινόμηση

(i) $\log n^3$

(ii) $\sqrt{n} * \log^{50} n$

(iii) $\frac{n}{\log\log n}$

(iv) $\log n!$

(v) $n * \log^{10} n$

(vi) $n^{1.01}$

(vii) $5^{\log_2 n}$

(viii) $\sum_{k=1}^{n} k^5$

(ix) $\log^{\log n} n = n^{\log\log n}$

(x) $2^{\log_2^4 n}$

(xi) $\log^{\sqrt{n}} n$

(xii) $e^{\frac{n}{\ln n}}$

(xiii) $n * 3^n$

(xiv) 2^{2*n}

(xv) $\sqrt{n!}$

β′ Τάξη Μεγέθους

(i) $T(n) = 5 * T(n/7) + n * \log(n) \Rightarrow n^{\log_7 5} = n^{0.827} \Rightarrow n^{0.827} < n * \log n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(ii) $T(n) = 4 * T(n/5) + n/\log^2 n \Rightarrow n^{\log_5 4} = n^{0.861} \Rightarrow n^{0.861} > n/\log^2 n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n/\log^2 n)$

(iii) $T(n) = T(n/3) + 3 * T(n/7) + n$
$\Rightarrow T(n) \in O(n)$

(iv) $T(n) = 6 * T(n/6) + n \Rightarrow n^{\log_6 6} = n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(v) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

(vi) $T(n) = 16 * T(n/4) + n^3 * \log^2 n \Rightarrow n^{\log_4 16} = n^2 \Rightarrow n^2 < n^3 * \log^2 n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3 * \log^2 n)$

(vii) $T(n) = T(\sqrt(n)) + \Theta(\log\log n)$ $(k = \log n, f(k) = T(n))$
$\Rightarrow T(\sqrt{n}) = f(\log\sqrt{n}) = f(\frac{1}{2} * \log n) = f(\frac{k}{2})$
$\Rightarrow f(k) = f(\frac{k}{2}) + \Theta(\log k)$
$\Rightarrow \Theta(n)$

(viii) $T(n) = T(n-3) + \log n$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * logn)$

2 Ταξινόμηση σε Πίνακα με Πολλά Ίδια Στοιχεία

Για να κάνουμε ταξινόμηση σε ένα τέτοιο πίνακα σε πρώτο στάδιο μετράμε τα στοιχεία που είναι ίδια σε κάθε πέρασμα και τα βγάζουμε από τον πίνακα. Για να ολοκληρώσουμε αυτή τη διαδικασία και με δεδομένο πως το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων είναι μόλις $\log^d n$ προκύπτει ο αναδρομικός τύπος $T(n) = T(n * \frac{m-1}{m}) + f(n), f(n) \in O(n), m = \log^d n$. Επιλύοντας με χρήση του Master Theorem καταλήγουμε σε πολυπλοκότητα $O(n)$ για το πρώτο βήμα. Έπειτα με mergesort ταξινομούμε τα στοιχεία που έχουμε και τα επεκτείνουμε ανάλογα με το πλήθος του καθενός έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι και πάλι μήκους n. Η διαδικασία ολοκληρώνεται σε άλλο $\log^d n * \log\log^d n = d * \log^d n * \log\log n$. Προφανώς το κύριο κομμάτι του χρόνου καταναλώνεται στο δεύτερο στάδιο. Συνεπώς η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\Theta\log^d n * \log\log n$ άρα και $O(n * \log\log n)$.

3 Δυαδική Αναζήτηση

α′ Ξεκινάμε με ένα στοιχείο. Και συγκρίνουμε με τον x. Όσο ο x είναι μεγαλύτερος από αυτόν διπλασιάζουμε τον αριθμό των στοιχείων και ελέγχουμε πάλι με τον τελευταίο. Μόλις φτάσουμε σε μεγαλύτερο αριθμό από τον x έστω στη θέση k και εφαρμόζουμε κλασσική δυαδική αναζήτηση στο τμήμα $A[1...k]$. Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είναι $O(\log k)$.

β′ Παίρνω τα k πρώτα στοιχεία από κάθε πίνακα. Τα χωρίζω στη μέση και συγκρίνω τα $A[k/2]$ με $B[k/2+1]$ και $A[k/2+1]$ με $B[k/2]$. Αν $A[k/2] < B[k/2+1]$ και $B[k/2] < A[k/2+1]$ τότε το k-οστό στοιχείο είναι το $max\{A[k/2], B[k/2]\}$. Αν $A[k/2] < B[k/2+1]$ και $B[k/2] > A[k/2+1]$ τότε επαναλαμβάνω χρησιμοποιώντας τα στοιχεία $[A[k/2+1]..A[k]]$ και $[B[1]..B[k/2]]$.

4 Συλλογή Comics

Ζητάμε πρώτα το MSB για όλα τα τεύχη. Έτσι τα χωρίζουμε σε $\frac{n}{2}$ και $\frac{n}{2} - 1$. Προφανώς αυτό που λείπει είναι στα λιγότερα. Εφαρμόζουμε πάλι κάνοντας $\frac{n}{2}$ ερωτήσεις και κρατάμε πάλι το υποσύνολο με το μικρότερο πλήθος. Αναδρομικά θα καταλήξουμε στο τεύχος που λείπει από τη συλλογή έχοντας ρωτήσει $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + .. + 1 = 2 * n * (1 - \frac{1}{2^n}) < 2 * n$ φορές.

5 Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Ξεκινάμε με τον από τον $A[1]$ θέτοντας το $B[1] = 0$ εφόσον δεν υπάρχει κάποιος δυτικότερα από αυτόν. Προχωράμε στον επόμενο $A[2]$ και συγκρίνουμε το ύψος του με τον $A[1]$. Αν $A[2] < A[1]$ τότε θέτουμε $B[2] = 1$ αλλιώς συγκρίνουμε το ύψος $A[2]$ με το ύψος του στόχου του $A[1]$. Αν πάλι δεν βρούμε ψηλότερο τρέχουμε πάλι για το στόχο του στόχου αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε σε 0 ή σε κάποιον ψηλότερο του $A[2]$ και τον θέτουμε ως στόχο στο πεδίο $B[2]$. Επαναλαμβάνουμε μέχρι n. Μέγιστος αριθμός συγκρίσεων είναι $2n$.