Conferencia 4 Método Simplex de la Optimización Lineal

4.1 Problema de Optimización Lineal en forma explícita respecto a una base B.

Sea el POL en forma estándar

$$\begin{aligned} &\min z = c^t x \\ &s.a. \quad Ax = b, \\ &x \geq 0, \ x \in R^n \end{aligned} \tag{4.1}$$

Descompongamos la matriz del sistema de restricciones en una base de R^m, en la forma $A = (B \mid R)$ y la correspondiente descomposición del vector de las variables $x = (x_B, x_R)$. Premultiplicando el sistema $Ax = b$ por B^{-1} se obtiene el sistema en forma explícita respecto a la base B:

$$x_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b = y_0. \tag{4.2}$$

Con el sistema en forma explícita respecto a una base es posible despejar las variables básicas en términos de las variables no básicas, del siguiente modo:

$$x_B = y_0 - B^{-1}Rx_R \tag{4.3}$$

Si se sustituye (4.3) en la función objetivo, esta puede ser expresada en términos de las variables no básicas:

$c^T x = c_B^T x_B + c_R^T x_R = c_B^T(y_0 - B^{-1}Rx_R) + c_R^T x_R = c_B^T y_0 + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R,$

donde c_B y c_R denotan los vectores cuyas componentes son los costos de las variables básicas y secundarias respectivamente.

Denotando $z_R^t = c_B^t B^{-1}R$, $r_R = (c_R - z_R)$ y $z_0 = c_B^T y_0$ la función objetivo del POL en forma estándar toma la forma: $z = c^T x = z_0 + r_R^T x_R = z_0 + \sum_{j \in R} r_j x_j \quad (4.4)$

A las componentes del vector r_R se les llama "costos reducidos".

Condiciones de optimalidad.

Si para una solución factible básica del POL en forma estándar (de *min*) se tiene que $r_j \geq 0 \ \ \forall j \in J$, entonces, esta solución es óptima.

NOTA:

Mediante un análisis equivalente es posible deducir que si se alcanza el criterio de optimalidad y algún r_j es igual a cero, para algún índice j no básico entonces el problema tiene óptimos múltiples.

Con el objetivo de simplificar las notaciones, la matriz $B^{-1}R$ de orden mx(n-m) se denota por Y, las columnas de Y por y_j, $(y_j = B^{-1}a_j,)$. El sistema $Ax = b$ puede escribirse entonces como $x_B + Yx_R = y_{0.}$

4.2 Criterios de entrada y salida de la base

Definición 4.2.1
Si todas la soluciones básicas primal factibles de un problema de Optimización Lineal son no degeneradas, se dice que se cumple la hipótesis de no degeneración.

Definición 4.2.2
Dos bases B y B' son adyacentes si difieren solamente en una columna.

Proposición 4.2.1
Sea B una base primal factible y a_q una columna cualquiera de R. Bajo hipótesis de no degeneración la matriz $(B,\ a_q)$ contiene como máximo una base primal factible diferente de B.

Demostración
En el sistema $x_B + B^{-1}Rx_R = y_0$ se asigna valor cero a todas las componentes de x_R excepto a x_q . Se tiene entonces:

$$x_B + y_q x_q = y_0, \qquad x_B, x_q \geq 0. \tag{4.5}$$

Si se supone que la variable x_q aumenta su valor desde cero hasta $x_q = \theta,$
Se pueden presentar dos casos:

Caso 1: $y_q \leq 0$

Para todo $\theta > 0$ se tiene $x_B = y_0 - y_q\theta \geq 0$. Esto significa que para toda solución factible de (4.5) con $x_q > 0$ se tiene $x_B > 0$, de modo que B es la única base primal.

Caso 2 Al menos una componente de y_q es positiva

Se calcula
$$\theta^* = \min_i \left\{ \frac{y_{io}}{y_{iq}};\ y_{iq} > 0 \right\} = \frac{y_{po}}{y_{pq}} \tag{4.6}$$

En este caso se tiene $y_0 - y_q\theta^* \geq 0$ y en particular $y_{p0} - \theta^* y_{pq} = 0$. De este modo se obtiene una base primal factible adyacente sustituyendo en B la columna a_p por la columna a_q. La independencia lineal de los vectores que forman la nueva base se obtiene por ser $y_{pq} \neq 0$.

Nótese que por la hipótesis de no degeneración $y_{i0} - y_{iq}\theta^* > 0,\ \forall i \neq p$, de modo que el mínimo en (4.6) es único. Cualquier base que se forme incluyendo la columna a_q y eliminando a_p con $i \neq p$, no es primal factible.
El valor necesario de θ^* para que x_p se anule, provocaría el valor negativo de al menos una variable básica.

Criterio de salida de la base

Si se desea que $\boldsymbol{a_q}$ entre en la base, sale de la base el vector $\boldsymbol{a_p}$ con:

$$\frac{\boldsymbol{y_{po}}}{\boldsymbol{y_{pq}}} = \min_{i}\left\{\frac{\boldsymbol{y_{io}}}{\boldsymbol{y_{iq}}};\ \boldsymbol{y_{iq}} > \boldsymbol{0}\right\}$$

Si $\boldsymbol{y_{iq} \leq 0}, \forall \boldsymbol{i}$, no es posible hacer el cambio de base deseado.
En este caso el conjunto de SF es no acotado.

Corolario 4.2.1
Suponga que B es una base primal factible no degenerada y que $r_q < 0$ para algún índice no básico q.

a) Si $y_q \leq 0$, el problema no tiene óptimo finito.
b) Si al menos una componente de y_q es positiva $B' = B \cup \{a_q\} \backslash \{a_p\}$ con p seleccionado de acuerdo al criterio de salida es una base primal factible adyacente que contiene a_q, y cumple $c_{B'}^T x_{B'} < c_B^T x_B$.

Demostración

a) Se cumple $c^T x = z_0 + r_R^T x_R$ (según la expresión (4.4)). Si x_q toma un valor $\theta > 0$ y el resto de las variables no básicas permanecen con valor cero, esto es $x_i = 0,\ i \in R$, como $r_q < 0$, cuando $\theta \to \infty$ se tiene $c^T x = z_0 + r_q\theta \to -\infty$ y por tanto el problema no tiene óptimo finito.
b) Cuando la variable x_q toma un valor $\theta^* > 0$ (según la expresión (4.6)) y el resto de las variables no básicas permanecen con valor cero, el valor de la función objetivo varía de acuerdo a la siguiente expresión:
$c_{B'}^T x_{B'} = c_B^T(y_0 - y_q\theta^*) + c_q\theta^* = c_B^T y_0 + (c_q - c_B^T y_q)\theta^* = c_B^T y_0 + r_q\theta^* < c_B^T x_B$.
Se cumple la desigualdad porque θ^* es positivo y $r_q < 0$.

Criterio de entrada a la base

Sea x^* una solución factible básica no degenerada del POL en forma estandar

$$\min c^T x$$
$$s.a.\ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

con valor de la función objetivo igual a z^*.
Suponga que existe $q \in R$, tal que $r_q < 0$. Si la columna a_q puede sustituir algún vector de la base original, se obtiene una nueva solución factible básica con valor de la función objetivo igual a $z' < z^*$.
Si a_q no puede ser introducida en la base, entonces el conjunto de SF es no acotado y la función objetivo puede tomar valores arbitrariamente

Para obtener la solución factible básica asociada a la nueva base B' se realizan las siguientes transformaciones elementales:

Primero se divide la fila p por y_{pq} para que el nuevo coeficiente de x_q en la $p-ésima$ ecuación sea 1. Posteriormente se procura que en el resto de las ecuaciones el coeficiente de x_q se haga 0. Para ello se multiplica la fila p por un coeficiente apropiado y se le añade a la fila correspondiente.

Es decir, si se denota el coeficiente de x_q en la fila i como y_{iq}, se multiplica la fila p (ya previamente dividida por y_{pq}) por $-y_{iq}$, y se suma a la fila i.

Al elemento y_{pq} se le llama **pivote** y al proceso de realizar esta transformación del sistema, pivotear. Este paso corresponde a un paso en el conocido método de eliminación de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Este procedimiento conduce a las siguientes **fórmulas de pivoteo** que permiten obtener los nuevos coeficientes en función de los anteriores.

$$\begin{cases} y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n \\ y'_{ij} = y_{ij} - y_{iq}\frac{y_{pj}}{y_{pq}} \quad , \quad i \neq p \end{cases} \tag{4.7}$$

En forma tabular sería:

x_j	x_p	x_q	
y_{pj}	1	y_{pq}	$p - ésima\ fila$
y_{ij}	0	y_{iq}	$i - ésima\ fila$

Al transformar el sistema mediante las fórmulas (4.7) queda:

x_j	x_p	x_q	
y_{pj}/y_{pq}	$1/y_{pq}$	1	$p-ésima\ fila$
$y_{ij}-y_{iq}.y_{pj}/y_{pq}$	$-y_{iq}/y_{pq}$	0	$i-ésima\ fila$

4.3 Formulación general del método Simplex

Paso 1 Inicialización. Comenzar con una base primal factible B.
Paso 2 Criterio de optimalidad. Si $r_R \geq 0$, FIN.
$x_B = B^{-1}b,\ x_R = 0,$ es una solución óptima. En otro caso ir al paso 3
Paso 3 Escoger $q \in R$ con $r_q < 0$,

- Si $y_q = B^{-1}a_q \leq 0$, el problema no tiene óptimo finito. FIN
- Encontrar la única base adyacente primal factible B' que contiene a_q. Hacer $B = B'$. Ir al paso 2.

Usualmente en el paso 3 se escoge $q = argmin\{r_j : j \in R\}$, ya que en este caso se produce el mayor decrecimiento de la función objetivo por unidad de incremento de la variable x_q. Si n es muy grande este criterio pudiera ser costoso y se puede escoger entonces cualquier índice q∈R con $r_q < 0$

Si en el paso 2 se cumple $r_R \geq 0$, pero para algún índice $k \in R$ se tiene $r_k = 0$, entonces hay óptimos múltiples. En efecto, si se escoge la columna a_k para formar parte de la base y se aplica el criterio de salida de la base, la nueva solución básica sigue siendo factible y proporciona una evaluación de la función objetivo igual al de la solución básica óptima de partida. Esto quiere decir que las soluciones óptimas del problema se obtienen formulando todas las combinaciones lineales convexas de todas las soluciones básicas obtenidas.

En el caso que no sea posible aplicar el criterio de salida de la base, esto es, $y_k \leq 0$, el valor de la variable x_k puede aumentar indefinidamente y el valor de la función objetivo permanece constante e igual a su valor óptimo. En este caso se tienen también óptimos múltiples, pero el conjunto de soluciones óptimas no es acotado. El conjunto de soluciones óptimas puede describirse como:

$$x_B = y_0 - y_j\theta$$
$$x_k = \theta$$
$$x_j = 0,\ j \in R,\ j \neq k.$$

Forma Tabular del Simplex

Es usual representar el sistema de restricciones mediante una tabla en la que se resume toda la información para una iteración del algoritmo.

		c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_n	
C_B	x_B	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	...	x_n	y_0
c_1	x_1	1	0		0	y_{1m+1}	y_{1m+2}	...	y_{1n}	y_{10}
c_2	x_2	0	1		0	y_{2m+1}	y_{2m+2}	...	y_{2n}	y_{20}
	...									
c_m	x_m	0	0	...	1	y_{mm+1}	y_{mm+2}	...	y_{mn}	y_{m0}

En la tabla se colocan los coeficientes de las variables en la matriz del sistema de restricciones expresado en forma explícita respecto a una base determinada, esto significa que el vector $y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{ij} \end{bmatrix}$ es igual a $B^{-1}a_j$.

El vector $y_0 = B^{-1}b$ es el vector de términos independientes del sistema en forma explícita respecto a la base B, es decir, el vector formado por los valores que toman las variables básicas en la solución básica correspondiente.

En la parte superior de la tabla se coloca una fila con el nombre de las variables y sobre ella los costos asociados a cada variable en la función objetivo. A la izquierda de la tabla se colocan las variables básicas en cada iteración con sus respectivos costos (C_B).

La tabla se completa con una fila en la parte inferior donde se colocan los coeficientes r_j. Estos coeficientes se calculan de acuerdo a la expresión $c_j - c_B B^{-1} a_{j.}$ esto es, al costo de la variable x_j se le resta el producto del vector c_B con los costos de las variables básicas por la columna $y_j = B^{-1}a_j$ asociada a la variable x_j.

Ejemplo 4.6.1

Resolver utilizando el Método Simplex el siguiente POL

$$\begin{aligned} \min\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\quad &= 9 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 3 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1{,}5} & \end{aligned}$$

Tabla Simplex inicial:

	$C_j \rightarrow$	2	1	3	2	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_0
2	X_4	1	1	1	1	0	9
1	X_5	-1	**1***	**2**	0	1	3
	$r_j \rightarrow$	1	-2	-1	0	0	**21**

Evaluación de la función objetivo

Solución básica asociada: $x_{B_1} = (0,0,0,9,3)$ con $z_1 = 21$.
Como existen índices $j \in$ (no básicos) con $r_j < 0$ no se tiene una solución óptima. Se escoge al vector a_2 para entrar a la base pues

$$\min_{j\in R}\{r_j\} = min\{-2,-1\} = -2 = r_2.$$

Para determinar el vector que sale de la base, se calcula de acuerdo con (4.6)

$$min\left\{\frac{y_{40}}{y_{42}}, \frac{y_{50}}{y_{52}}\right\} = \left\{\frac{9}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3 = \theta\ .$$

Corresponde en este caso a a_2 sustituir a a_5 en la base.

Para obtener el sistema de restricciones en forma explícita respecto a la nueva base se pivotea la tabla anterior tomando como pivote a y_{52} y se obtiene:

	$C_j \rightarrow$	2	1	3	2	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_0
2	X_4	**2***	0	-1	1	-1	6
1	X_2	-1	1	2	0	1	3
	$r_j \rightarrow$	-1	0	3	0	2	**15**

La nueva solución básica es: $x_{B_2} = (0,3,0,6.0,3)$ con $z_2 = 15$.
Observe que se obtuvo un decrecimiento del valor de la función objetivo.
Como $c_1 - z_1 < 0$ la solución actual no es óptima. El único vector con posibilidades de entrar en la base es el vector a_1. De acuerdo con el criterio de salida de la base el único vector que puede salir de la base es a_4.
El sistema en forma explícita respecto a la nueva base queda:

	$C_j \rightarrow$	2	1	3	2	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_0
2	X_1	1	0	-1/2	1/2	-1/2	3
1	X_2	0	1	3/2	1/2	1/2	6
	$r_j \rightarrow$	0	0	5/2	1/2	3/2	**12**

Como todos los r_j son ≥ 0 y la solución básica $X_{B_3} = (3,6,0,0,0)$ es óptima.

El valor óptimo de la función objetivo es: $z^* = 12$.

4.6 Determinación de una solución factible básica inicial

Observe que hasta aquí se ha supuesto el conocimiento de una solución factible básica para comenzar la aplicación del método Simplex. Para completar el procedimiento computacional sólo falta resolver el problema de encontrar una solución factible básica inicial.

Para un problema de optimización lineal con un conjunto de restricciones del tipo

$$\begin{aligned} &Ax \le b \;\; con \; b \ge 0 \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad (4.6)$$

se obtiene de forma inmediata una solución factible básica.

En efecto, escogiendo como base inicial B, la formada por las columnas asociadas a las variables de holgura, se obtiene inmediatamente la solución básica asociada, asignando valor cero a todas las variables originales y el valor de los términos independientes a las correspondientes variables de holgura. Se tiene la solución factible básica $X_B = (0, b)$, $x = 0, x^h = b$ y se puede entonces aplicar el Simplex, pues se dispone del sistema de restricciones en forma explícita respecto a la base correspondiente.

Se considerara ahora el caso más general en que no se cuenta con una submatriz identidad *mxm* en la matriz del sistema de restricciones del sistema estandarizado.

Una idea para construir la solución factible básica inicial necesaria podría ser añadir variables con vector columna unitario, de manera que se obtenga una matriz identidad de orden m:

$$Ax + Ix^a = b \quad con \;\; x^a = (x_1^a, \ldots, x_m^a), \qquad x, x^a \ge 0 \qquad (4.7)$$

Puesto que estas variables no tienen significado en términos del problema original, se les llama **"*variables artificiales*".** Una solución factible de (4.7) será solución factible de (4.6) si y sólo si el valor de las variables artificiales en dicha solución es cero y una forma de obtenerlo pudiera ser penalizar valores positivos de las variables artificiales, esto es, resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min \;\; z = c^t x + M \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ &s.a. \qquad Ax + Ix^a = b \\ &\qquad\qquad x, x^a \ge 0 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

con M suficientemente grande.

Sin embargo, este enfoque presenta algunas desventajas desde el punto de vista numérico. El hecho de que se trabaje con valores de *M* relativamente grandes puede provocar la pérdida de cifras significativas y que se acepten como soluciones factibles soluciones que no lo son realmente.

Por otra parte si M no se escoge suficientemente grande puede ocurrir que se llegue al criterio de parada del Simplex, con variables artificiales básicas a nivel mayor estricto que cero, aunque existan soluciones factibles del problema original.

El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 4.6.1

Considere la tabla Simplex

	200	100	M	M	
	x_1	x_2	x_1^a	x_2^a	B
x_1^a	1/16	-1/5	1	0	1
x_2^a	1/8	4/15	0	1	2
r_j	200-3M/16	100-M/15	0	0	

Si se toma, por ejemplo, *M = 1000* (valor que parece bastante grande en comparación con los coeficientes que aparecen en el problema). Se obtiene entonces:

$$r_1 = 200 - \frac{3(1000)}{16} = 12{,}5 > 0$$
$$r_2 = 100 - \frac{1(1000)}{15} = 33{,}3 > 0$$

Lo que significa que la solución básica actual es óptima. En este caso, como hay variables artificiales a nivel positivo, se dice que el problema no tiene solución factible, lo cual es falso (por ejemplo $x_1 = 16, x_2 = 0$ es solución factible).

Otra forma de alcanzar el objetivo de anular las variables artificiales consiste en considerar el problema auxiliar

$$\begin{aligned} &\min\ w = \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ &s.a \quad Ax + Ix^a = b \qquad\qquad (4.9) \\ &\qquad\quad x, x^a \geq 0 \end{aligned}$$

Si el problema original con restricciones (4.6) tiene solución factible, entonces, el problema auxiliar (4.9) tiene solución óptima con valor mínimo $w = 0$, y recíprocamente. De este modo se puede obtener una solución factible básica inicial para el problema original, aplicando la iteración general del método Simplex, descrita en el epígrafe anterior, al problema auxiliar *(4.9).* Se tiene entonces, una solución factible básica inicial trivial, la que resulta de asignar a las variables artificiales el valor de los términos independientes de las restricciones y cero al resto de las variables.

Al proceso de resolver el problema auxiliar *(4.9)* se le llama ***primera fase***. Observe que este problema siempre tiene solución óptima, pues la función objetivo está acotada inferiormente por el valor cero.

Si al concluir la primera fase el valor óptimo de la función objetivo w^* es estrictamente positivo entonces, el problema original no tiene solución factible.

Si por el contrario, se cumple $w^* = 0$, se tiene una solución factible básica del problema original. En este caso termina la primera fase y se pasa a la segunda fase***.*** Para ello, se eliminan las columnas correspondientes a las variables artificiales (no básicas pues $x^a = 0$), se actualizan los coeficientes $r_j, j \in J$, utilizando los costos de la función objetivo original y se continua aplicando el método Simplex.

De hecho, las columnas de las variables artificiales se pueden eliminar según dejan de ser básicas. Se puede demostrar que cuando una variable artificial deja de ser básica no puede volver a serlo.

La primera fase del algoritmo se puede resumir como sigue:

Primera fase

Paso 1 Transformar el problema de modo que se cumpla $b \geq 0$ (en el caso que alguna componente de b sea negativa, multiplicar la restricción correspondiente por -1).

Paso 2 Añadir las variables artificiales x_i^a que sean necesarias, de modo que se disponga de una base identidad,

Paso 3 Resolver el problema auxiliar (4.9) aplicando el Simplex. Sea w^* el valor óptimo de la función objetivo.

- **a)** Si $w^* > 0$ FIN, el problema original no tiene solución factible.
- **b)** Si $w^* = 0$, ha sido encontrada una solución factible del problema original.

  Si aún permanecen variables artificiales como variable básicas a nivel cero, eliminar dichas variables y las filas redundantes correspondientes.

  Si todas las variables artificiales han dejado de ser básicas, se dispone de una solución básica del sistema de restricciones del problema original. Actualizar los costos reducidos r_j utilizando los costos originales. Y continuar aplicando el Simplex (segunda fase).

Ejemplo 4.6.2

Resolver el problema de Optimización Lineal

$$\begin{aligned} \min\ z &= 4x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_j \geq 0,\ j &= \overline{1,3} \end{aligned}$$

aplicando las dos fases del método Simplex.

Primera Fase

Se resuelve el problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min\ z &= x_1^a + x_2^a \\ s.a \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1^a &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + x_2^a &= 3 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}, x_i^a &\geq 0, i = 1,2 \end{aligned}$$

Observe que en este caso se dispone de una base inicial identidad y por tanto se obtiene directamente la solución factible básica asociada asignando el valor de los términos independientes a las variables artificiales correspondientes. En la primera fase se trabaja con un problema auxiliar y por tanto los costos asociados a las variables son diferentes de cero e igual a 1 solamente para las variables artificiales.

$C_j \rightarrow$	0	0	0	1	1	
x_B	X_1	X_2	X_3	X_1^a	X_2^a	Y_0
X_1^a	2	1	**2**	1	0	4
X_2^a	**3***	3	1	0	1	3
$r_j \rightarrow$	-5	-4	-3	0	0	**7**

Como $\min_{j \in J} \{r_j\} = \{-5,-4,-3\} = -5 = r_1$, se escoge al vector a_1 para entrar en la base. De acuerdo con el criterio de salida de la base del método Simplex sale de la base el vector a_2^a. El sistema en forma explícita respecto a la nueva base es:

$C_j \rightarrow$	0	0	0	1	
x_B	X_1	X_2	X_3	X_1^a	Y_0
X_1^a	0	-1	**4/3***	1	2
X_1	1	1	1/3	0	1
$r_j \rightarrow$	0	1	-4/3	0	**2**

La solución básica asociada a la nueva base no es óptima pues $r_3 < 0$. Entra a_3 en la base y sale de acuerdo al criterio de salida de la base el vector a_1^a. Esto quiere decir que se ha llegado al final de la primera fase. La solución básica obtenida es una solución factible del problema original pues todas las variables artificiales están a nivel cero.

$C_j \rightarrow$	0	0	0	
x_B	X_1	X_2	X_3	Y_0
X_3	0	-3/4	1	3/2
X_1	1	5/4	0	1/2
$r_j \rightarrow$	0	0	0	**0**

Observe que efectivamente todos los $rj, j \in J$ son no negativos. Se pasa entonces a la siguiente fase

Segunda Fase

Se comienza con la tabla óptima de la primera fase, considerando los costos de la función objetivo del problema original. Como los costos intervienen en la definición de los coeficientes r_j, estos deben ser actualizados también.

	$C_j \rightarrow$	4	1	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_3	Y_0
1	X_3	0	-3/4	1	3/2
4	X_1	1	**5/4***	0	1/2
	$r_j \rightarrow$	0	-13/4	0	**7/2**

Teniendo en cuenta que $r_2 < 0$ entra a_2 en la base y salea a_1. El sistema en forma explícita respecto a la nueva base es:

	$C_j \rightarrow$	4	1	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_3	Y_0
1	X_3	3/5	0	1	9/5
1	X_2	4/5	1	0	2/5
	$r_j \rightarrow$	13/5	0	0	**11/5**

Se llega al criterio de parada de la segunda fase. La solución óptima del problema es:

$x^* = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, con valor de la función objetivo es $z^* = 11/6$.

Si al terminar la primera fase permanecen variables artificiales en la base pero a nivel cero, entonces el problema original tiene solución factible, pero todavía no se dispone de una solución factible básica del problema original pues aún una o más columnas artificiales forman parte de la base. Es por tanto necesario extraer dichas columnas de la base.

Sea la variable artificial básica $x_k^a = 0$. Se presentan dos posibilidades:

1) Si en la fila de esta variable existe $j \in J$, (conjunto de índices de las variables originales secundarias), tal que $y_{kj} \neq 0$, se puede entrar a la base el vector a_j en sustitución del vector asociado a dicha variable artificial Pivoteando sobre y_{kj} se obtiene la misma solución óptima pero asociada a una base diferente. Observe que incluso puede seleccionarse j tal que $y_{kj} < 0$. Cuando se repite este procedimiento para todas las variables artificiales básicas (a nivel cero) se obtiene finalmente una solución factible básica del problema original (degenerada) y se puede comenzar la segunda fase.

2) Si por el contrario $y_{kj} = 0 \; \forall j \in J$, no es posible extraer de la base la columna asociada a la variable x_k^a. Esto significa que esa fila es combinación lineal de las demás, lo que implica que esta restricción es redundante en el sistema original y puede eliminarse. En este caso se eliminan la fila correspondiente a la restricción redundante y la columna correspondiente a la variable artificial asociada a dicha restricción. Se pasa a la segunda fase con una tabla que posee menos filas pues el rango de la matriz no es m.

NOTA. Sorprendente y paradójica la filosofía del **Método de las Dos Fases**:
En una situación en la que no es posible aplicar el Método Simplex por no contar con una solución factible básica inicial, se aplica el propio método Simplex, al problema auxiliar en la primera fase, para encontrarla si existe.

Ejemplo 4.6.3
Sea la siguiente tabla correspondiente a una iteración de la primera fase en la solución de un problema de optimización lineal dado.

	$C_j \rightarrow$	0	0	0	1	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_1^h	X_1^a	X_2^a	Y_0
1	X_1^a	-2	**-4***	0	1	0	0
0	X_1^h	5	-3	1	0	0	3
1	X_2^a	1	2	0	0	1	0
	$r_j \rightarrow$	1	2	0	0	0	**0**

Todos los r_j son no negativos y la suma de las variables w_i es cero.
Se tendría el fin de la primera fase, pero quedan variables artificiales a nivel cero en el conjunto de variables básicas.
Podemos pivotear la tabla utilizando como pivote cualquier elemento diferente de cero, de las filas donde aparecen las variables artificiales en la base.
Si se utiliza como pivote -4 (marcado) se obtiene la tabla:

	$C_j \rightarrow$	0	0	0	1	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_1^h	X_2^a	Y_0
0	X_2	1/2	1	0	0	0
0	X_1^h	13/2	0	1	0	3
1	X_2^a	0	0	0	1	0
	$r_j \rightarrow$	0	0	0	0	**0**

Todavía aparece una variable artificial en la base a nivel cero, pero no es posible sacar de la base a la columna asociada a esta variable artificial pues $y^a_{2j} = 0$ para todo $j \in J$, por lo que la ecuación es redundante.

Se eliminan la fila y columna correspondientes y se pasa a la segunda fase con la siguiente tabla:

	$C_j \rightarrow$	0	0	0	
C_B	x_B	X_1	X_2	X_1^h	Y_0
0	X_2	1/2	1	0	0
0	X_1^h	13/2	0	1	3
	$r_j \rightarrow$	0	0	0	**0**