Tarefa 9 - Métodos Numéricos 2

Caio de Freitas Oliveira
501375

Matheus Ribeiro Alencar
494711

1 O problema

A região $U \in xy$ é $U = (x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1$

2 Solução

2.1 Passo 1: Mudança de variável 1 como para elipse na aula 15

Primeiros passos são similares ao da tarefa anterior.

Mudança de variável para favorecer o processo de varredura da elipse:

$$\begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \cdot cos(\beta) \\ a \cdot sen(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot cos(\beta) \\ \alpha \cdot b \cdot sen(\beta) \end{pmatrix}$$

Pela inequação sabemos que a varia entre -40 e 40 e b varia entre -20 e 20. Substituindo na fórmula acima valores absolutos de a e b temos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot cos(\beta) \\ \alpha \cdot b \cdot sen(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\alpha \cdot cos(\beta) \\ 20\alpha \cdot sen(\beta) \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$dA = |J| \cdot d\Omega$$

Onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana, e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$|J| = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot cos(\beta) & -40\alpha sen(\beta) \\ 20 \cdot sen(\beta) & 20\alpha cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz acima, temos que:

$$det \begin{pmatrix} 40 \cdot cos(\beta) & -40\alpha sen(\beta) \\ 20 \cdot sen(\beta) & 20\alpha cos(\beta) \end{pmatrix} = (40 \cdot cos(\beta) \cdot 20\alpha cos(\beta)) - (20 \cdot sen(\beta) \cdot -40\alpha sen(\beta)) =$$

$$800cos(\beta)\alpha cos(\beta) + 800sen(\beta)\alpha sen(\beta) = 800\alpha \cdot (cos^2(\beta) + sen^2(\beta)) = 800\alpha$$

Sabemos ainda que: $d\Omega = d\alpha d\beta$ ou seja: $dA = |J| d\alpha d\beta$

Assim, fazendo-se as mudanças de variáveis, o volume do nosso sólido pode ser calculada como

$$V = \int_S dS = \int_U (f(x,y))dA = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (\int_{y_{min}}^{y_{max}} (f(x,y))dy)dx$$

Sabemos que $f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$; Então temos o seguinte:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} (\int_{y_{min}}^{y_{max}} (0.2(x^2 - y^2))dy)dx = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (0.2((40\alpha cos(\beta))^2 - (20\alpha \cdot sen(\beta))^2))|J|d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (0.2((40\alpha cos(\beta))^2 - (20\alpha \cdot sen(\beta))^2))800\alpha d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} 0.2((1600\alpha^2 cos^2(\beta)) - (400\alpha^2 sen^2(\beta)))800\alpha d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} ((320\alpha^2 cos^2(\beta)) - (80\alpha^2 sen^2(\beta)))800\alpha d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} ((800\alpha \cdot 80\alpha^2(4cos^2(\beta) - sen^2(\beta))d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} 64000\alpha^3((4cos^2(\beta) - sen^2(\beta))d\beta)d\alpha =$$

$$\int_0^1 (64000\alpha^3 3\pi)d\alpha \approx 1.5080 \cdot 10^5$$

2.2 Passo 2: Mudança de variável 2 como para o problema 1 da aula 16

Iremos fazer uma mudança de variável para s e t.

$\beta -> x(s,t)$

$\alpha -> y(s,t)$

A quadratura de Gauss-Legendre necessita de uma mudança de coordenadas dadas pela expressão:

$$\begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2}s \\ \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + \pi s \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Assim, calcularemos o determinante da matriz de derivadas parciais:

$$|J_2| = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \pi/2$$

Ao aplicarmos a mudança de variável acima, teremos:

$$\int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 64000(\frac{t+1}{2})^3(4cos^2(\pi + \pi s) - sen^2(\pi + \pi s))|J_2|ds)dt =$$

$$\int_{-1}^1 64000(\frac{t+1}{2})^3(\int_{-1}^1 ((4cos^2(\pi + \pi s) - sen^2(\pi + \pi s))\frac{\pi}{2}ds)dt =$$

$$\int_{-1}^1 64000(\frac{t+1}{2})^3 \cdot \frac{3\pi}{2}dt = 48000\pi \approx 1.5080 \cdot 10^5$$

2.3 Passo 3: Quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção

Resolvendo por Gauss-Legendre, teríamos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(w_i w_j 64000(\frac{t_i+1}{2})^3(4cos^2(\pi+\pi s_j)-sen^2(\pi+\pi s_j))\frac{\pi}{2}) \approx 272293.8226$$

A forma final na equação acima indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (s_j, t_i).

Sabemos que para 3 pontos temos os seguintes termos presentes na Quadratura de Gauss-Legendre:

$$x_0 = 0; x_1 = \frac{3}{5}; x_2 = -\frac{3}{5}$$
$$w_0 = \frac{8}{9}; w_1 = w_2 = \frac{5}{9}$$

Na forma tabular temos:

(s_j, t_i)	$w_j \cdot w_i$	$g(s,t) = 64000(\frac{t_i+1}{2})^3(4cos^2(\pi+\pi s_j) - sen^2(\pi+\pi s_j))\frac{\pi}{2}$	$w_i w_j g(s,t)$
$(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	271.2454	83.7177
$(0, -\sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	575.6398	284.2665
$(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	271.2454	83.7177
$(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	23685.4397	11696.5134
(0,0)	$\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9} = \frac{64}{81}$	50265.4824	39715.9367
$(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	23685.4397	11696.5134
$(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	132367.2172	40854.0793
$(0, \sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	280911.061922	138721.512
$(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}})$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	132367.2172	40854.0793
			272293.8226