# Tarefa 2 - Métodos Numéricos 2

Caio de Freitas Oliveira
501375

Matheus Ribeiro Alencar
494711

## 1 Polinômio de substituição de grau 4, abordagem fechada

Interpolaremos 5 pontos: $x_i, ...x_f$

Onde $\Delta X = \frac{x_f - x_i}{2}$ ;

$h = \frac{\Delta X}{4}$ ;

Assim:

$$\begin{gathered}
f(x_i) = f(x(s=0)) = g(0) \\
f(x_{i+h}) = f(x(s=1)) = g(1) \\
f(x_{i+2h}) = f(x(s=2)) = g(2) \\
f(x_{i+3h}) = f(x(s=3)) = g(3) \\
f(x_f) = f(x(s=4)) = g(4) \\
x(s) = x_i + sh;
\end{gathered}$$

Satisfaz essas relações pois:

$x(0) = x_i + 0h = x_i$
$x(1) = x_i + 1h$
$x(2) = x_i + 2h$
$x(3) = x_i + 3h$
$x(4) = x_i + 4h = x_f$

Aplicando a mudança de variável temos o seguinte:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{s_i}^{s_f} p(x(s)) \frac{dx(s)}{ds}\, ds = h \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\, ds = h \int_0^4 g(s)\, ds$$

Sabemos que :

$$h \int_0^4 g(s)\, ds = h \int_0^4 \sum_{k=0}^{4} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0$$

Desenvolvendo a fórmula acima temos o seguinte:

$$h \int_0^4 \sum_{k=0}^{4} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0 =$$

$$h \int_0^4 [\frac{s!}{0!(s-0)!} \Delta^0 r_0 + \frac{s!}{1!(s-1)!} \Delta^1 r_0 + \frac{s!}{2!(s-2)!} \Delta^2 r_0 + \frac{s!}{3!(s-3)!} \Delta^3 r_0 + \frac{s!}{4!(s-4)!} \Delta^4 r_0] ds =$$

$$h \int_0^4 [\Delta^0 r_0 + s\Delta^1 r_0 + \frac{s^2 - s}{2} \Delta^2 r_0 + \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6} \Delta^3 r_0 + \frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{24} \Delta^4 r_0] ds \qquad (1)$$

Sabemos que:

$\Delta^0 r_0 = r(0)$
$\Delta^1 r_0 = r(1) - r(0)$
$\Delta^2 r_0 = r(2) - 2r(1) + r(0)$
$\Delta^3 r_0 = r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)$
$\Delta^4 r_0 = r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0)$

Substituindo em (1) temos o seguinte:

$$h\int_0^4 [r(0) + s(r(1) - r(0)) + \frac{s^2 - s}{2}(r(2) - 2r(1) + r(0)) + \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6}(r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)) +$$

$$+\frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{24}(r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0))]ds$$

Simplificando a fórmula acima temos:

$$h\int 0^4[r(0)(1 - s + \frac{s^2 - s}{2} - \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6} + \frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{24})+$$

$$+r(1)(s - s^2 - s + \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{2} - \frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{6})+$$

$$+r(2)(\frac{s^2 - s}{2} - \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{2} + \frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{6})+$$

$$+r(3)(\frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6} - \frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{6})+$$

$$+r(4)(\frac{s^4 - 3s^3 - s^2 + 3s}{24})]ds =$$

$$h\int 0^4[r(0)(\frac{s^4}{24} - \frac{5s^3}{12} + \frac{35s^2}{24} - \frac{25s}{12} + 1) + r(1)(-\frac{s^4}{6} + \frac{3s^3}{2} - \frac{13s^2}{3} - 4s) + r(2)(\frac{s^4}{4} - 2s^3 + \frac{19s^2}{4} - 3s)+$$

$$r(3)(-\frac{s^4}{6} + \frac{7s^3}{6} - \frac{7s^2}{6} + \frac{4s}{3}) + r(4)(\frac{s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s}{24})]ds$$

Agora, resolvendo a integral temos o seguinte:

$$h[\frac{14}{45}r(0) + \frac{64}{45}r(1) + \frac{24}{45}r(2) + \frac{64}{45}r(3) + \frac{14}{45}r(4)] =$$

$$\frac{2h}{45}[7r(0) + 32r(1) + 12r(2) + 32r(3) + 7r(4)]$$

Resolvendo a fórmula acima, substituindo $r(0)$ por $f(x_i)$, $r(1)$ por $f(x_i + h)$, $r(2)$ por $f(x_i + 2h)$ e assim por diante temos:

$$\int_{x_i}^{x^f} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}[7f(x_i) + 32f(x_i + h) + 12f(x_i + 2h) + 32f(x_i + 3h) + 7f(x_f)]$$

## 2 Polinômio de substituição de grau 4 abordagem aberta

Para abordagem aberta, não poderemos usar os pontos $x_i$ e $x_f$, teremos que pegar 5 pontos igualmente espaçados entre $x_i$ e $x_f$.

Manteremos $\Delta X = \frac{x_f - x_i}{2}$ e agora $h$ passará a ser:
$h = \frac{\Delta X}{6}$

$$\begin{gathered}
f(x_0) = f(x_i + h) = f(x(s = 0)) = g(0);\\
f(x_1) = f(x_i + 2h) = f(x(s = 1)) = g(1);\\
f(x_2) = f(x_i + 3h) = f(x(s = 2)) = g(2);\\
f(x_3) = f(x_i + 4h) = f(x(s = 3)) = g(3);\\
f(x_4) = f(x_i + 5h) = f(x(s = 4)) = g(4);\\
x(s) = x_i + h + sh;
\end{gathered}$$

Satisfaz essas relações pois:

$x(0) = x_i + h + 0h = x_0$
$x(1) = x_i + h + 1h = x_1$
$x(2) = x_i + h + 2h = x_2$
$x(3) = x_i + h + 3h = x_3$
$x(4) = x_i + h + 4h = x_4$

Aplicando a mudança de variável:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}\,ds = h\int_{-1}^{5} p(x(s))\,ds = h\int_{-1}^{5} g(s)\,ds$$

Desenvolvendo a fórmula acima temos:

$$h\int_{-1}^{5} g(s)\,ds = h\int_{-1}^{5}\sum_{k=0}^{4}\frac{s!}{k!(s-k)!}\Delta^k r_0 ds \qquad (2)$$

Sabemos que :

$$\sum_{k=0}^{4}\frac{s!}{k!(s-k)!}\Delta^k r_0 = \Delta^0 r_0 + s\Delta^1 r_0 + \frac{s^2-s}{2}\Delta^2 r_0 + \frac{s^3-3s^2+2s}{6}\Delta^3 r_0 + \frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{24}\Delta^4 r_0$$

Substituindo em (2)

$$h\int_{-1}^{5} g(s)\,ds = h\int_{-1}^{5}[\Delta^0 r_0 + s\Delta^1 r_0 + \frac{s^2-s}{2}\Delta^2 r_0 + \frac{s^3-3s^2+2s}{6}\Delta^3 r_0 + \frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{24}\Delta^4 r_0]ds =$$

$$= h\int_{-1}^{5}[r(0) + s(r(1)-r(0)) + \frac{s^2-s}{2}(r(2)-2r(1)+r(0)) + \frac{s^3-3s^2+2s}{6}(r(3)-3r(2)+3r(1)-r(0)) +$$

$$+\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{24}(r(4)-4r(3)+6r(2)-4r(1)+r(0))]ds$$

Simplificando a fórmula acima:

$$= h\int_{-1}^{5}[r(0)(1-s+\frac{s^2-s}{2}-\frac{s^3-3s^2+2s}{6}+\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{24})+$$

$$+r(1)(s-s^2-s+\frac{s^3-3s^2+2s}{2}-\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{6})+$$

$$+r(2)(\frac{s^2-s}{2}-\frac{s^3-3s^2+2s}{2}+\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{6})+$$

$$+r(3)(\frac{s^3-3s^2+2s}{6}-\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{6})+r(4)(\frac{s^4-3s^3-s^2+3s}{24})]ds=$$

Resolvendo a integral:

$$=h[r(0)(\frac{33}{10})+r(1)(\frac{-21}{5})+r(2)(\frac{39}{5})+r(3)(\frac{-21}{5})+r(4)(\frac{33}{10})]=$$

$$h[r(0)(\frac{33}{10})+r(1)(\frac{-42}{10})+r(2)(\frac{78}{10})+r(3)(\frac{-42}{10})+r(4)(\frac{33}{10})]=$$

$$\frac{3h}{10}[11r(0)-14r(1)+26r(2)-14r(3)+11r(4)]$$

Finalmente, substituindo $r(4)$ por $f(x_i+5h)$, $r(3)$ por $f(x_i+4h)$, $r(2)$ por $f(x_i+3h)$, $r(1)$ por $f(x_i+2h)$ e $r(0)$ por $f(x_i+h)$ temos o seguinte:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{3h}{10}[11f(x_i+h)-14f(x_i+2h)+26f(x_i+3h)-14f(x_i+4h)+11f(x_i+5h)]$$