Tarefa 4 - Métodos Numéricos 2

Caio de Freitas Oliveira
501375

Matheus Ribeiro Alencar
494711

1 Estimativa de erro para Fórmula de Milne

1.1 Fórmula de Milne

Fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2:

(1) $\int_{x_i}^{x_f} \approx \frac{4h}{3} \cdot (2f(x_i + h) - f(x_i + 2h) + 2f(x_i + 3h))$

com $h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4}$ ccnsiderando o intervalo completo.

1.2 Série de Taylor

Utilizando a Série de Taylor desenvolvida no material da aula para casos gerais de I_e:

$(2) I_e = 2h \int_{-1}^{1} (f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(2\xi h) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x})(2\xi h)^2 + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\bar{x})(2\xi h)^3 + \ldots) d\xi$

Note que como $h = \frac{b-a}{4}$, temos que $dx = 2hd\xi$

com $\bar{x}$ sendo o ponto médio do intervalo, ou seja, $(3)\bar{x} = \frac{b-a}{2}$, e ξh a distância entre o ponto x e o ponto $\bar{x}$.

1.3 Cálculo de I_f

Primeiro, temos que calcular $f(a)$ e $f(b)$. Reescrevendo a fórmula (1):

$(4) I_f = \frac{4h}{3} \cdot (2f(a) - f(\frac{b-a}{2}) + 2f(b))$

ou seja, $a = \bar{x} - h$ e $b = \bar{x} + h$. Sabemos também que $\Delta x = 4h$ pela fórmula . Calculando f(a) e f(b):

$(5) f(a) = f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x})(h)^2 - \frac{1}{3!} \cdot f'''(\bar{x})(h)^3 + \ldots$

$(6) f(b) = f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\bar{x})(h)^3 + \ldots$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos:

$I_f = \frac{\Delta x}{3} \cdot [2 \cdot (2f(\bar{x}) + 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x})(h)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4!} \cdot f^{IV}(\bar{x})(h)^4 + \ldots) - f(\bar{x})]$

Desenvolvendo:

$I_f = \frac{\Delta x}{3} \cdot [4f(\bar{x}) + 2f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{6} \cdot f^{IV}(\bar{x})(h)^4 + \ldots - f(\bar{x})]$

Efetuando as integrações de (2), temos

$(2) I_e = 2h[2f(\bar{x}) + \frac{4h^2}{2!} f''(\bar{x})\frac{2}{3} + \frac{16h^4}{4!} f^{IV}(\bar{x})\frac{2}{5} + \ldots]$

Sabemos que o erro absoluto é dado por:

$E_a = I_e - I_f$

Substituindo os valores de I_e e I_f, temos:

$\frac{2\Delta X}{4}[2f(\bar{x}) + \frac{4h^2}{2!}f''(\bar{x})\frac{2}{3} + \frac{16h^4}{4!}f^{IV}(\bar{x})\frac{2}{5} + \ldots]$ - $\frac{\Delta x}{3} \cdot [4f(\bar{x}) + 2f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{6} \cdot f^{IV}(\bar{x})(h)^4 + \ldots - f(\bar{x})]$

Retendo apenas o termo dominante do erro fica:

$E_a = \frac{7}{90}(\frac{\Delta x}{4})^5 f^{IV}(\bar{x})$