

Notations

Introduction

L'objectif de ce document est de formaliser un ensemble de notations cohérentes pour l'ensemble du cours.

Vecteur aléatoire en entrée

Soit $p \in \mathbb{N}$ le nombre de composantes du vecteur d'entrée. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p$ le support de \mathbf{X} . Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T \in \mathcal{X}$ le vecteur aléatoire d'entrée. On note $i \in \{1, \dots, p\}$ l'indice d'une composante du vecteur d'entrée \mathbf{X} . Pour tout $i = 1, \dots, p$, on a donc $X_i \in \mathbb{R}$.

Densité de probabilité du vecteur d'entrée

On note f la densité de probabilité du vecteur aléatoire \mathbf{X} . Dans le contexte de l'inférence (c'est à dire de l'étape B), lorsqu'on considère un modèle probabiliste paramétrique, on peut chercher à estimer les paramètres du modèle s'ajustant au mieux à un échantillon donné de \mathbf{X} .

Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de paramètres de la densité de probabilité f . Soit $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ le sous-ensemble des paramètres. Alors $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ est la valeur de la densité de probabilité au point \mathbf{x} dont le vecteur de paramètres est $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

Variable aléatoire en sortie

On note $i \in \{1, \dots, p\}$ l'indice d'une composante du vecteur d'entrée \mathbf{X} . Pour tout $i = 1, \dots, p$, on a donc $X_i \in \mathbb{R}$. On note f la densité de probabilité du vecteur aléatoire \mathbf{X} . Soit $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère la variable aléatoire :

$$Y = g(\mathbf{X}).$$

Nous allons estimer l'espérance de Y :

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathcal{X}} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

De plus, nous allons estimer la variance de Y :

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2].$$

Pour un seuil $s \in \mathbb{R}$ fixé, on peut souhaiter la probabilité de dépasser le seuil s :

$$\mathbb{P}(Y > s) = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_{g(\mathbf{x}) > s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

où $\mathbf{1}_{g(\mathbf{x}) > s}$ est la fonction indicatrice définie par :

$$\mathbf{1}_{g(\mathbf{x}) > s}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } g(\mathbf{x}) > s, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Echantillon Monte-Carlo simple

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier représentant la taille de l'échantillon. Soit :

$$\left\{ \mathbf{X}^{(j)} \right\}_{j=1, \dots, n}$$

un échantillon i.i.d. du vecteur aléatoire \mathbf{X} . Par conséquent, la réalisation $x_i^{(j)}$ est la i -ème composante de la j -ème réalisation, pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, n$. Le plan d'expériences A associé est donc :

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_p^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_p^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_p^{(n)} \end{pmatrix}$$

où chaque ligne représente une réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{X} et chaque colonne représente une composante. Soit :

$$y^{(j)} = g(\mathbf{x}^{(j)})$$

pour $j = 1, \dots, n$. L'estimateur Monte-Carlo de la moyenne empirique est :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y^{(j)}.$$

Modèle paramétrique

Dans certains cas, on suppose que la fonction g est un modèle paramétrique dont on cherche à déterminer les paramètres. Il peut s'agir d'un contexte de calage de modèle (dans l'étape B') ou d'estimation des hyper-paramètres d'un méta-modèle (dans l'étape C). Soit $q \in \mathbb{N}$ le nombre de paramètres de la fonction g . Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^q$ le sous-ensemble des paramètres. Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, on considère la fonction $y = g(\mathbf{x}, \beta)$.

Réplifications

Pour observer la variabilité d'un estimateur, on considère parfois des réplifications d'une simulation de Monte-Carlo. Dans ce cas, le nombre de réplifications est noté $r \in \mathbb{N}$ et chaque réplification porte l'indice $k = 1, \dots, r$.