Exámen Final SOL114

Instrucciones: Responde a las preguntas proporcionadas, asegurándote de justificar tus respuestas con cálculos y razonamientos claros.

I. En el Antiguo Testamento, el libro del Génesis comienza así: *"Y creó Dios al hombre a su imagen, a imagen de Dios lo creó; varón y hembra los creó"* (Génesis 1:27).

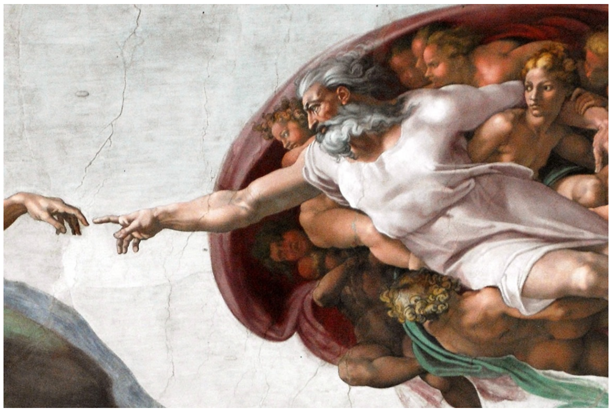

Figure 1: La creación

En esta pregunta, reemplazaremos la idea de creación divina por una versión probabilística: **variables aleatorias**.

Preguntas:

I.i. Sea X una variable aleatoria que describe el sexo de una persona, donde la probabilidad de ser "varón" ($X = 1$) es p, y la probabilidad de ser "hembra" ($X = 0$)

es $1-p$. Identifica qué distribución sigue la variable aleatoria X y escribe su función de masa de probabilidad (PMF).

Respuesta: La variable aleatoria X sigue una distribución de Bernoulli, cuya función de masa de probabilidad (PMF) es:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta distribución es adecuada para modelar eventos dicotómicos con probabilidades constantes.

I.ii. Si la probabilidad de ser “varón” y “hembra” es la misma, ¿cuál es el valor de p?

Respuesta: Si $P(X = 1) = P(X = 0)$, entonces:

$$p = 1 - p \implies 2p = 1 \implies p = 0.5.$$

Por lo tanto, la probabilidad de ser “varón” es 0.5.

I.iii. Si Adán (X_1) y Eva (X_2) son dos realizaciones independientes de X, expresa y calcula la probabilidad de generar dos personas secuencialmente y obtener un “varón” y una “hembra” (en ese orden).

Respuesta: Dado que las realizaciones son independientes, la probabilidad es:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) = p \cdot (1 - p).$$

Sustituyendo $p = 0.5$:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

La probabilidad de obtener un “varón” seguido de una “hembra” es 0.25.

ewpage

II. Asimismo, el creador probabilístico estableció que la variable aleatoria Y describe la altura (en cms) de un “varón” y de una “hembra” de la siguiente manera:

- $Y \mid X = 1 \sim \text{Normal}(\mu_v = 170, \sigma_v = 20)$
- $Y \mid X = 0 \sim \text{Normal}(\mu_h = 160, \sigma_h = 10)$

Preguntas:

II.i. ¿Son sexo y altura dos variables independientes? Fundamenta tu respuesta.

Respuesta: No, sexo y altura no son variables independientes porque la distribución de Y (altura) depende condicionalmente del valor de X (sexo). Esto se evidencia en que las medias y desviaciones estándar son distintas para varones y hembras.

II.ii. Calcula la probabilidad de que un hombre tenga una altura superior a 180 cms.

Respuesta: Para $Y \mid X = 1$, estandarizamos:

$$Z = \frac{Y - \mu_v}{\sigma_v} = \frac{180 - 170}{20} = 0.5.$$

Usando una tabla de la normal estándar:

$$P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$$

La probabilidad de que un hombre mida más de 180 cm es 0.3085.

II.iii. ¿Qué altura debe tener una mujer para ubicarse en el percentil 90 (10% más alto)?

Respuesta: Para $Y \mid X = 0$, buscamos el valor z tal que $P(Z \leq z) = 0.9$. Según la tabla de la normal estándar:

$$z \approx 1.28.$$

La altura requerida es:

$$Y = \mu_h + z \cdot \sigma_h = 160 + 1.28 \cdot 10 = 172.8 \text{ cm}.$$

Por lo tanto, una mujer debe medir 172.8 cm para estar en el percentil 90.

ewpage

III. Teorémas Asintóticos

Preguntas:

III.i. Identifica los siguientes teoremas y explica en palabras haciendo referencia a los términos usados en las ecuaciones respectivas.

Respuesta:

a) El Teorema del Límite Central establece que la distribución de la media muestral $\bar{X}$ se aproxima a una normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra (n), con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b) La Ley de los Grandes Números asegura que la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ difiera significativamente de la media poblacional μ tiende a cero cuando $n \to \infty$.

III.ii. Explica los conceptos de "distribución muestral" y "error estándar".

Respuesta: La distribución muestral de un estimador describe cómo varía el estimador a través de diferentes muestras de una población. El error estándar mide la variabilidad del estimador y se calcula como:

$$\mathrm{SE}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

(Continuar con las respuestas detalladas para las secciones IV, V y VI con el mismo nivel de detalle y formato.)