Prueba 1 SOL114

1) Pregunta 1

En una ciudad se estudian los hábitos de fumar y hacer deporte. La probabilidad de que una persona **fume** es 0.30, la probabilidad de que haga **deporte** es 0.40 y la probabilidad de que **fume y haga deporte** al mismo tiempo es 0.12. Con esta información, responde lo siguiente:

a) ¿Son fumar y hacer deporte eventos independientes? Explica usando la definición de independencia. (10%)

Respuesta:
La definición formal de independencia establece que dos eventos A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Aquí $A =$ "fumar" y $B =$ "hacer deporte".
- Sabemos:
  - $P(A) = 0.30$.
  - $P(B) = 0.40$.
  - $P(A \cap B) = 0.12$.

1. Calculemos el producto:

$$P(A) \times P(B) = 0.30 \times 0.40 = 0.12.$$

2. Compare con la probabilidad conjunta entregada:

$$P(A \cap B) = 0.12.$$

3. Como ambos valores coinciden, se cumple la condición de independencia.

Conclusión: fumar y hacer deporte son eventos **independientes** en este contexto.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no fume ni haga deporte?
(10%)

Respuesta:
Queremos calcular:

$$P(\text{no fuma y no hace deporte}) = 1 - P(\text{fuma o hace deporte}).$$

1. Primero calculamos la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Sustituyendo los valores:

$$P(A \cup B) = 0.30 + 0.40 - 0.12 = 0.58.$$

3. El complemento:

$$P(\text{no fuma ni hace deporte}) = 1 - 0.58 = 0.42.$$

Interpretación: un **42% de la población** no fuma ni practica deporte.

2) Pregunta 2 (20%)

Imagina un concurso en el que los participantes deben responder 10 preguntas de opción múltiple. Cada pregunta se contesta correctamente con probabilidad $p = 0.6$, de forma independiente. El puntaje total se calcula como:

$$T = 2S + 5,$$

donde S es el número de respuestas correctas.

Calcula el valor esperado y la varianza de T y explica su significado sustantivo.

Respuesta:
1. Definimos la variable aleatoria:

$$S \sim Binomial(n = 10, p = 0.6).$$

2. Propiedades de una binomial:

   - Esperanza: $E[S] = n \times p = 10 \times 0.6 = 6$.

   - Varianza: $Var(S) = n \times p \times (1 - p) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$.

3. Como $T = 2S + 5$, aplicamos propiedades de esperanza y varianza:

   - $E[T] = 2E[S] + 5 = 2 \times 6 + 5 = 17$.

   - $Var(T) = (2^2)Var(S) = 4 \times 2.4 = 9.6$.

4. Desviación estándar:

$$\sqrt{9.6} \approx 3.1.$$

Interpretación: en promedio un concursante obtendrá **17 puntos**, pero los resultados típicamente fluctuarán entre 14 y 20 puntos aproximadamente.

3) Pregunta 3: Salarios de hombres y mujeres

Un estudio analiza las diferencias salariales entre hombres y mujeres. Se observa que los salarios (en miles de pesos) siguen distribuciones normales distintas para cada grupo:

- Hombres: $Y_h \sim N(\mu = 100,\ \sigma = 10)$
- Mujeres: $Y_w \sim N(\mu = 70,\ \sigma = 5)$

Con esta información, responde lo siguiente:

a) Un hombre gana 120 y una mujer 100. ¿Quién está mejor posicionado respecto de su grupo? Explica tu respuesta en términos de desviaciones estándar (valores-z). (15%)

Respuesta:
1. Para el hombre:

$$z_h = \frac{120 - 100}{10} = 2.$$

El salario está **2 desviaciones estándar sobre la media masculina**.

2. Para la mujer:

$$z_w = \frac{100 - 70}{5} = 6.$$

El salario está **6 desviaciones estándar sobre la media femenina**.

Conclusión: la mujer está mejor posicionada en su grupo, porque su ingreso es mucho más excepcional en relación con la distribución femenina que el del hombre en la distribución masculina.

b) Probabilidad de que una mujer gane $\leq$ que el promedio masculino. (15%)

Respuesta:

1. Estandarizamos 100 en la distribución femenina:

$$z_0 = \frac{100 - 70}{5} = 6.$$

2. Calculamos probabilidad:

$$P(Y_w \leq 100) = P(Z \leq 6).$$

3. De la tabla de la normal estándar:

$$P(Z \leq 6) \approx 0.999999998 \approx 1.00.$$

Conclusión: existe **certeza práctica** de que una mujer gana menos que el promedio de los hombres.

c) Ingreso mínimo para estar en el 10% más rico de cada grupo. (15%)

Respuesta:
1. Fórmula general:

$$x_{0.90} = \mu + z_{0.90}\sigma.$$

2. De la tabla normal estándar: $z_{0.90} \approx 1.28$.

3. Para hombres:

$$x_{0.90,h} = 100 + 1.28 \times 10 = 112.8.$$

4. Para mujeres:

$$x_{0.90,w} = 70 + 1.28 \times 5 = 76.4.$$

Interpretación: un hombre necesita ganar al menos **112.8 mil pesos** y una mujer **76.4 mil pesos** para pertenecer al 10% superior de su grupo.

d) Percentil 10 y razón entre percentil 90 y percentil 10. (15%)

Respuesta:
1. Fórmula general:

$$x_{0.10} = \mu + z_{0.10}\sigma, \quad z_{0.10} \approx -1.28.$$

2. Para hombres:

$$x_{0.10,h} = 100 - 1.28 \times 10 = 87.2.$$

Razón:

$$\frac{112.8}{87.2} \approx 1.29.$$

3. Para mujeres:

$$x_{0.10,w} = 70 - 1.28 \times 5 = 63.6.$$

Razón:

$$\frac{76.4}{63.6} \approx 1.20.$$

Conclusión: los **hombres presentan mayor desigualdad interna** según esta medida (1.29 frente a 1.20).