Prueba 2 SOL114

Problema I. (10%)

La prueba **PISA** (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) es una evaluación global organizada por la **OCDE** que mide las competencias de los estudiantes de 15 años en tres áreas clave: **lectura**, **matemáticas** y **ciencias**. Esta evaluación se realiza cada tres años y busca proporcionar una visión comparativa del rendimiento educativo entre los países.

La siguiente tabla muestra los resultados en la prueba de **matemáticas** del último PISA 2022 para una submuestra de estudiantes de **Chile** y **Dinamarca**, segmentados por el nivel socioeconómico de los estudiantes. Los datos presentados incluyen los **puntajes promedio** y las **desviaciones estándar** para cada cuartil socioeconómico en ambos países.

Estos resultados se **estimaron** a partir de submuestras de $N_c = 1000$ estudiantes en Chile y $N_d = 1000$ estudiantes en Dinamarca. La tabla muestra que, por ejemplo, segùn los estadìsticos muestras los estudiantes más favorecidos en Chile obtuvieron un puntaje promedio en matemáticas de 470 puntos, con una desviación estándar de 70 puntos.

Cuartil Socioeconómico	Chile: $\hat{\mu}$ (s), (N_c = 1000)	Dinamarca: $\hat{\mu}$ (s), (N_d = 1000)
25% Inferior (Desfavorecidos)	**369** (85)	**450** (80)
Segundo Cuartil	**400** (80)	**470** (75)
Tercer Cuartil	**430** (75)	**490** (70)
25% Superior (Favorecidos)	**470** (70)	**510** (65)

Nota #1: Recuerda que cada cuartil representa 1/4 de la muestra de cada país.

Nota #2: Estudios cienfíticos indican que el puntaje de un estudiante en la prueba PISA puede ser tratado como una manifestación una variable aleatoria que sigue una distribución *Lomax* (también conocida como Pareto tipo-II).

I.1. Siguiendo el Teorema del Límite Central, caracteriza la distribución muestral del promedio de puntaje para el segundo cuartil socioeconómico en Chile. Dado que no conocemos los parámetros poblacionales usa su estimado muestral.

Respuesta:

Podemos utilizar el Teorema del Límite Central (TLC) para aproximar la distribución muestral del promedio de puntaje para el segundo cuartil socioeconómico en Chile.

Dado que cada cuartil representa $\frac{1}{4}$ de la muestra total en cada país, el tamaño de la submuestra para cada cuartil es:

$$N_{\text{cuartil}} = \frac{N_c}{4} = \frac{1000}{4} = 250$$

El TLC establece que, para muestras suficientemente grandes, la distribución muestral del promedio $\bar{X}$ se aproxima a una distribución normal, incluso si la población original no es normal (distribución Lomax en nuestro caso). Por lo tanto, podemos caracterizar la distribución muestral del promedio como:

$$\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\hat{\mu}, \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}}\right)$$

donde:

- $\hat{\mu} = 400$ es el puntaje promedio muestral para el segundo cuartil socioeconómico en Chile,
- $s = 80$ es la desviación estándar muestral para este grupo,
- $N_{\text{cuartil}} = 250$ es el tamaño de la submuestra para el cuartil.

Calculamos el error estándar del promedio $SE_{\bar{X}}$:

$$SE_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}} = \frac{80}{\sqrt{250}} \approx 5.06$$

Entonces, la distribución muestral del promedio de puntaje para el segundo cuartil socioeconómico en Chile es aproximadamente:

$$\bar{X} \sim \text{Normal}\,(400, 5.06)$$

Esto significa que, bajo el TLC, podemos aproximar la distribución del promedio de puntajes del segundo cuartil en Chile con una distribución normal con media (400) y desviación estándar (5.06).

I.2. Calcula un intervalo al 95% de confianza para el promedio puntaje promedio del cuartil socioeconómico más rico en Chile y otro para el puntaje promedio del cuartil socioeconómico más pobre en Dinamarca. Explica que significa cada intervalo de confianza.

Respuesta:

Para calcular un intervalo de confianza al 95% para el promedio de puntaje en cada grupo (el cuartil socioeconómico más rico en Chile y el cuartil socioeconómico más pobre en Dinamarca), utilizaremos la fórmula del intervalo de confianza para el promedio:

$$\text{IC}_{95\%} = \hat{\mu} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}}$$

donde:

- $\hat{\mu}$ es el puntaje promedio muestral,
- s es la desviación estándar muestral,
- $N_{\text{cuartil}} = 250$ (ya que cada cuartil representa $\frac{1}{4}$ de la muestra total de 1000 estudiantes en cada país),
- z es el valor crítico para un nivel de confianza del 95%, que es aproximadamente 1.96.

- Intervalo de confianza al 95% para el cuartil socioeconómico más rico en Chile:

Para los estudiantes del cuartil superior en Chile:

- $\hat{\mu} = 470$,
- $s = 70$.

El error estándar es:

$$SE_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}} = \frac{70}{\sqrt{250}} \approx 4.43$$

El intervalo de confianza al 95% es:

$$470 \pm 1.96 \cdot 4.43$$
$$470 \pm 8.68 = (461.32, 478.68)$$

- Intervalo de confianza al 95% para el cuartil socioeconómico más pobre en Dinamarca:

Para los estudiantes del cuartil inferior en Dinamarca:

- $\hat{\mu} = 450$,
- $s = 80$.

El error estándar es:

$$SE\_\bar{X} = \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}} = \frac{80}{\sqrt{250}} \approx 5.06$$

El intervalo de confianza al 95% es:

$$450 \pm 1.96 \cdot 5.06$$

$$450 \pm 9.92 = (440.08, 459.92)$$

Cada intervalo de confianza proporciona un rango en el cual esperamos que se encuentre el verdadero promedio de puntaje en matemáticas para los respectivos grupos, con un nivel de confianza del 95%. Esto quiere decir que, si repitiéramos este proceso de muestreo muchas veces, aproximadamente el 95% de esos intervalos incluirían el verdadero promedio de puntaje para el grupo en cuestión.

I.3. Calcula la probabilidad de que el promedio muestral del puntaje el cuartil socioeconómico más rico en Chile sobrestime el verdadero promedio en 20 puntos o más.

Respuesta:

Queremos calcular:

$$P(\bar{X} - \mu > 20)$$

Dado que $\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}}\right)$, con: - $\mu = 470$ (el verdadero promedio poblacional), - (s = 70) (desviación estándar de la muestra), - $N\_\text{cuartil} = 250$ (tamaño de la submuestra),

primero calculamos el error estándar del promedio:

$$SE\_\bar{X} = \frac{s}{\sqrt{N_{\text{cuartil}}}} = \frac{70}{\sqrt{250}} \approx 4.43$$

Ahora, reescribimos la probabilidad en términos de la variable normal estándar (Z):

$$P(\bar{X} - \mu > 20) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{SE_{\bar{X}}} > \frac{20}{4.43}\right)$$

Calculamos el valor (z)-estándar:

$$z = \frac{20}{4.43} \approx 4.51$$

Finalmente, la probabilidad es:

$$P(Z > 4.51)$$

Para (z = 4.51), la probabilidad es extremadamente baja, prácticamente cero. Esto significa que la probabilidad de que el promedio muestral sobrestime el verdadero promedio en 20 puntos o más es casi nula.

I.4. Un político chileno del partido UTI afirma: "Nuestros estudiantes màs aventajados (socioeconómicamente) tienen un desempeño en matemáticas superior al de los estudiantes menos aventajados de paises socialistas como Dinamarca". Desarrolla un test de hipótesis para testear esta afirmación con un nivel de significación del 5%.

Respuesta:

Para evaluar la afirmación del político chilenorealizaremos un test de hipótesis para diferencia de medias usando un nivel de significación del 5%.

- **Hipótesis nula** H_0: El promedio de puntaje en matemáticas de los estudiantes más favorecidos en Chile es igual al de los estudiantes menos favorecidos en Dinamarca.

$$H_0 : \mu_{\text{Chile, alto}} = \mu_{\text{Dinamarca, bajo}}$$

- **Hipótesis alternativa** H_1: El promedio de puntaje en matemáticas de los estudiantes más favorecidos en Chile es mayor que el de los estudiantes menos favorecidos en Dinamarca.

$$H_1 : \mu_{\text{Chile, alto}} > \mu_{\text{Dinamarca, bajo}}$$

- Estadísticos de la Muestra

Dado:

Para el cuartil socioeconómico superior en Chile:

- Puntaje promedio muestral, $\hat{\mu}_{\text{Chile, alto}} = 470$
- Desviación estándar muestral, $s_{\text{Chile, alto}} = 70$
- Tamaño de la submuestra, $N_{\text{Chile, alto}} = 250$

Para el cuartil socioeconómico inferior en Dinamarca:

- Puntaje promedio muestral, $\hat{\mu}_{\text{Dinamarca, bajo}} = 450$
- Desviación estándar muestral, $s_{\text{Dinamarca, bajo}} = 80$
- Tamaño de la submuestra, $N_{\text{Dinamarca, bajo}} = 250$

Distribución Nula

La distribución nula describe el comportamiento del estadístico de prueba bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. En este caso, asumimos que el verdadero promedio de puntaje en matemáticas de los estudiantes más aventajados en Chile es igual al de los estudiantes menos aventajados en Dinamarca, es decir, $\mu_{\text{Chile, alto}} = \mu\text{Dinamarca, bajo}$.

Cuando (H_0) es verdadera, la diferencia en las medias muestrales $\bar{X}_{\text{Chile, alto}} - \bar{X}_{\text{Dinamarca, bajo}}$ sigue una distribución normal con media 0 y varianza dada por la suma de las varianzas de cada media muestral. Por lo tanto, la distribución nula de $\bar{X}_{\text{Chile, alto}} - \bar{X}_{\text{Dinamarca, bajo}}$ es:

$$\bar{X}**\text{Chile, alto} - \bar{X}\text{Dinamarca, bajo} \sim \text{Normal}\left(0, \sqrt{\frac{s^2_{\text{Chile, alto}}}{N_{\text{Chile, alto}}} + \frac{s^2_{\text{Dinamarca, bajo}}}{N_{\text{Dinamarca, bajo}}}}\right)$$

Sustituyendo los valores:

- Para los estudiantes del cuartil superior en Chile:
  - Desviación estándar muestral, $s_{\text{Chile, alto}} = 70$,
  - Tamaño de la muestra, $N_{\text{Chile, alto}} = 250$).
- Para los estudiantes del cuartil inferior en Dinamarca:
  - Desviación estándar muestral, $s_{\text{Dinamarca, bajo}} = 80$,
  - Tamaño de la muestra, $N_{\text{Dinamarca, bajo}} = 250$.

La varianza combinada es:

$$\text{Var}(\bar{X} * *\text{Chile, alto} - \bar{X}\text{Dinamarca, bajo}) = \frac{70^2}{250} + \frac{80^2}{250} = 19.6 + 25.6 = 45.2$$

Por lo tanto, el error estándar de la diferencia es:

$$\text{SE} = \sqrt{45.2} \approx 6.72$$

- Calcular el Estadístico de Prueba

Dado que ambas muestras son grandes, podemos usar un **test (Z) para dos muestras**. El estadístico de prueba es:

$$Z = \frac{\hat{\mu}_{\text{Chile, alto}} - \hat{\mu}_{\text{Dinamarca, bajo}}}{\text{SE}}$$

Sustituyendo los valores:

$$Z = \frac{470 - 450}{6.72} \approx 2.98$$

- Determinar el Valor Crítico y la Región de Rechazo

Con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ y un test unilateral, el valor crítico de (Z) para un nivel de confianza del 95% es aproximadamente $Z_{0.05} = 1.645$.

Paso 3: Comparar el Estadístico de Prueba con el Valor Crítico

Dado que el estadístico (Z = 2.98) es mayor que el valor crítico de (1.645), rechazamos la hipótesis nula.

Conclusión con un nivel de significación del 5%, hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio de puntaje en matemáticas de los estudiantes más favorecidos en Chile es, en términos estadísticos, significativamente mayor que el de los estudiantes menos favorecidos en Dinamarca.

I.5. Teniendo en mente la afirmación del político chileno, compara los resultados obtenidos en I.2 e I.4. Explica las potenciales diferencias y similitudes entre ambos.

Respuesta:

Para comparar los enfoques de **I.2** e **I.4** y entender sus resultados en el contexto de la afirmación del político chileno, consideremos lo siguiente:

- Los intervalos de confianza en **I.2** fueron calculados a dos colas, lo que los hace más estrictos, ya que consideran diferencias en ambas direcciones. Este criterio conservador implica una sobreestimación implícita del error estándar en la comparación de los dos grupos, aumentando el rigor al requerir mayor separación para evitar la superposición.

- En cambio, el test de hipótesis en **I.4** proporciona una comparación directa y precisa, enfocada solo en si el promedio de los estudiantes más aventajados en Chile es mayor que el de los menos aventajados en Dinamarca. Este enfoque unilateral permite evaluar la afirmación de manera más sensible y específica.
- La falta de superposición en los intervalos de confianza en **I.2** refuerza la robustez del resultado obtenido en el test de hipótesis en **I.4**. Ambos métodos, aunque con enfoques diferentes, respaldan firmemente la afirmación del político chileno: el desempeño en matemáticas de los estudiantes más aventajados en Chile es significativamente superior al de los estudiantes menos aventajados en Dinamarca.

Problema II.

Un estudio epidemiológico fue llevado a cabo para evaluar la efectividad de una vacuna contra una enfermedad infecciosa en una comunidad de la Región Metropolitana. Los investigadores hicieron seguimiento durante un año a un grupo de personas, de las cuales algunas recibieron la vacuna como medida preventiva (grupo vacunado), mientras que otras no la recibieron (grupo de control). Los resultados muestran que en el grupo de control, **7 de 10 personas** contrajeron la enfermedad, mientras que **3 no la contrajeron**. Por otro lado, en el grupo vacunado, solo **4 de 10 personas** contrajeron la enfermedad, mientras que **6 no la contrajeron**.

La siguiente tabla resume los resultados

	Contrajo la enfermedad	No contrajo la enfermedad
Grupo Control	7	3
Grupo Vacunado	4	6

Aunque los resultados son preliminares y basados en una muestra pequeña, sugieren un posible beneficio de la vacunación en la reducción de la incidencia de la enfermedad en esta comunidad.

II.1 Testea la hipótesis de existe un beneficio de la vacunación en la reducción de la incidencia de la enfermedad. Trabaja al 95% de confianza.

Respuesta:

Para evaluar si la vacunación reduce la incidencia de la enfermedad, usaremos una prueba de diferencia de proporciones a una cola. Las hipótesis son:

- **Hipótesis nula (H_0)**: La vacunación no reduce la incidencia de la enfermedad, es decir, $p_1 \leq p_2$.
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: La vacunación reduce la incidencia de la enfermedad, es decir, $p_1 > p_2$.

Donde: - p_1 es la proporción de personas que contrajeron la enfermedad en el grupo de control. - p_2 es la proporción de personas que contrajeron la enfermedad en el grupo vacunado.

- **Datos de la muestra**
  - **Grupo Control**:
    - Personas que contrajeron la enfermedad: 7
    - Total de personas: $n_1 = 10$
  - **Grupo Vacunado**:
    - Personas que contrajeron la enfermedad: 4
    - Total de personas: $n_2 = 10$
- **Proporciones de incidencia en cada grupo**
  - Proporción en el grupo de control: $p_1 = \frac{7}{10} = 0.7$
  - Proporción en el grupo vacunado: $p_2 = \frac{4}{10} = 0.4$
- **Diferencia en proporciones observada**
  - La diferencia en proporciones observada es diferencia observada $= p_1 - p_2 = 0.7 - 0.4 = 0.3$
- **Cálculo del error estándar bajo la hipótesis de diferencia cero**

$$\text{Error estándar} = \sqrt{\frac{p_1 \times (1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \times (1 - p_2)}{n_2}}$$

  Sustituyendo los valores:

$$\text{Error estándar} = \sqrt{\frac{0.7 \times (1 - 0.7)}{10} + \frac{0.4 \times (1 - 0.4)}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.21}{10} + \frac{0.24}{10}}$$

$$= \sqrt{0.045} = 0.2121$$

- **Cálculo del estadístico Z**

Usamos Z porque el calculo del error estándar no conlleva pérdida de grados de libertad.

$$Z = \frac{\text{diferencia observada}}{\text{Error estándar}} = \frac{0.3}{0.2121} = 1.414$$

Luego, para una prueba de una cola (donde estamos interesados en si la incidencia en el grupo vacunado es menor), el valor p se calcula tomando el área bajo la curva normal para $Z = 1.414$:

$$p = 1 - \text{P(Z} \quad 1.414) \approx 0.079$$

Es decir, dado el valor p de 0.079 es mayor que el nivel de significancia de 0.05, no tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto indica que no podemos concluir que la vacunación reduzca significativamente la incidencia de la enfermedad en esta comunidad.

II.2 En este estudio se midió además la gravedad de los síntomas en una escala continua (de 0 a 100, donde 0 indica ausencia total de síntomas y 100 los síntomas más graves observados). Los resultados mostraron que el grupo vacunado presentó una media de severidad de síntomas de 30, mientras que el grupo de control presentó una media de 70, sugiriendo una posible reducción en la gravedad de la enfermedad en los vacunados.

En base a estos datos, testea la hipótesis de que existe un beneficio de la vacunación en la reducción de la severidad de los síntomas. Trabaja al 95% de confianza.

**Importante*: Considera 16 grados de libertad para la diferencia de medias ($df = 16$).

La siguiente tabla resume los resultados:

	Media de severidad de síntomas	$\sum(x_i - \bar{x})^2$	n
Grupo Control	70	1800	10
Grupo Vacunado	30	900	10

Respuesta:

Para evaluar si la vacunación reduce la severidad de los síntomas, realizaremos una prueba prueba$t$ para dos muestras independientes.

- **Hipótesis nula (H_0)**: No hay diferencia en la severidad de los síntomas entre los grupos, es decir, $\mu_{\text{control}} = \mu_{\text{vacunado}}$.
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: La vacunación reduce la severidad de los síntomas, es decir, $\mu_{\text{control}} > \mu_{\text{vacunado}}$.

Usando los datos de la tabla:

- **Grupo Control**:
  - Media ($\bar{x}_1$) = 70
  - Suma de residuos al cuadrado ($\sum(x_i - \bar{x})^2$) = 1800
  - Tamaño de muestra (n_1) = 10
- **Grupo Vacunado**:
  - Media ($\bar{x}_2$) = 30
  - Suma de residuos al cuadrado ($\sum(x_i - \bar{x})^2$) = 900
  - Tamaño de muestra (n_2) = 10

Varianza Muestral para cada grupo:

La varianza muestral (s^2) se calcula como:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

- **Varianza del grupo control**:

$$s_1^2 = \frac{1800}{10 - 1} = \frac{1800}{9} = 200$$

- **Varianza del grupo vacunado**:

$$s_2^2 = \frac{900}{10-1} = \frac{900}{9} = 100$$

Luego, el estadístico$t$ es:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{70-30}{\sqrt{\frac{200}{10} + \frac{100}{10}}} = \frac{40}{\sqrt{20+10}} = \frac{40}{\sqrt{30}} = \frac{40}{5.477} \approx 7.3$$

Al calcular el valor p asociado a un estadístico $t = 7.3$ en una distribución t-student con 16 grados de libertad en una prueba de una cola, obtenemos un valor extremadamente pequeño (cerca de 0.000001). Este resultados constituye evidencia fuerte contra la hipótesis nula, sugiriendo que la diferencia en la severidad de los síntomas entre los grupos es altamente significativa.

Dado que el valor del estadístico t calculado (aproximadamente 7.3) es mucho mayor que el valor crítico de 1.75, rechazamos la hipótesis nula. Esto proporciona evidencia estadísticamente significativa de que la vacunación reduce la severidad de los síntomas en esta muestra.

Por lo tanto, podemos concluir, con un nivel de confianza del 95%, que la vacunación tiene un efecto beneficioso en la reducción de la severidad de los síntomas de la enfermedad.

II.3. Un laboratorio desea repetir este experimento, garantizando que, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza para la proporción de personas en cada uno de los grupos tenga un margen de error de, como máximo, ± 0.01 (1 punto porcentual). Suponiendo que tanto el grupo de tratamiento como el de control tendrán el mismo tamaño, calcula el tamaño de muestra necesario para cada grupo para lograr este margen de error.

Respuesta:

Para calcular el tamaño de la muestra necesario para cada grupo con un margen de error de± 0.01 y un nivel de confianza del 95%, utilizamos la fórmula del tamaño de muestra para una proporción.

$$n = \frac{Z^2 \cdot p \cdot (1-p)}{E^2}$$

donde:

-Z es el valor crítico para el nivel de confianza del 95%, aproximadamente1.96.

-p es una estimación de la proporción en la población. Para maximizar el tamaño de la muestra (considerando la máxima varianza), tomamos$p = 0.5$.

-E es el margen de error deseado, en este caso$E = 0.01$.

Sustituyendo los valores:

1. **Valor crítico** Z: Para un nivel de confianza del 95%, $Z = 1.96$.
2. **Proporción estimada** p: Usamos $p = 0.5$ para maximizar la varianza.
3. **Margen de error** E: $E = 0.01$.

$$n = \frac{(1.96)^2 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}{(0.01)^2} = \frac{3.8416 \cdot 0.25}{0.0001} = 9604$$

Por tanto, para alcanzar un margen de error de± 0.01 con un nivel de confianza del 95%, se necesita un tamaño de muestra de **9604 participantes en cada grupo** (tratamiento y control), lo que da un total de **19208 participantes** para el experimento completo.