



دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

## تکلیف دوم درس طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال تحصیلی: بهار ۱۴۰۲

مدرس: دکتر محمدرضا حیدرپور

دستیاران آموزشی: مصطفی دریس‌پور - مجید فرهادی - محمدیاسین

کرباسیان - محمدرضا مزروعی - امیر منصوریان - امیرارسلان یآوری

## ۱ سکه تقلبی

تعداد زیادی سکه که تعداد آن‌ها توانی از عدد 3 است و یک ترازوی دوکفه‌ای در اختیار داریم که می‌توان هر تعداد سکه را در هر کفه آن قرار داد. در میان این سکه‌ها دقیقاً یک سکه با وزنی متفاوت (کم‌تر یا بیش‌تر) وجود دارد. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن این سکه تقلبی با کم‌ترین تعداد مقایسه ارائه دهید. (۱۰ نمره)

سکه‌ها را به سه مجموعه تقسیم می‌کنیم و با یک یا دو بار وزن کردن، مجموعه با وزن متفاوت را می‌یابیم و این عملیات را تکرار می‌کنیم تا تعداد سکه‌ها به یک برسد و سکه با وزن متفاوت شناسایی شود.

## ۲ یگانه

آرایه‌ای به طول فرد که همه عناصر آن به جز یکی، دو بار تکرار شده‌اند مفروض است. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن این عنصر یگانه ارائه دهید. (۱۰ نمره)

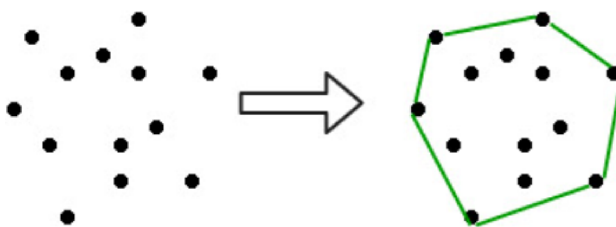
$$A = [1, 5, 4, 8, 1, 8, 2, 2, 5]$$

$$Unique = 4$$

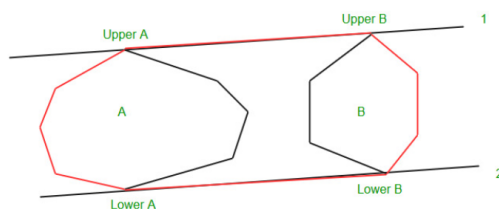
ابتدا آرایه را مرتب می‌کنیم. سپس آرایه را از ابتدا تا انتها پیمایش می‌کنیم و اگر تعداد تکرار عنصری فرد بود، آن عنصر، عنصر یگانه است.

## ۳ تحدب

آرایه‌ای از مختصات تعدادی نقطه در صفحه مفروض است. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن زیرمجموعه‌ای از این نقاط که یک چندضلعی محدب را تشکیل داده و شامل تمام نقاط دیگر است ارائه دهید. (۲۰ نمره)



نقاط را بر اساس مختص  $x$  مرتب و به دو نیمه تقسیم می‌کنیم. به صورت بازگشتی مسئله را برای نیمه چپ و راست حل می‌کنیم. برای ادغام، نقاط با بیشینه و کمینه مختص  $y$  را در هر دو نیمه پیدا کرده و متناظراً وصل می‌کنیم.



## ۴ میانه

الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن میانه ادغام دو آرایه مرتب ارائه دهید. (۲۰ نمره)

$$A = [1, 12, 15, 26, 38]$$

$$B = [2, 13, 17, 30]$$

$$\text{Merge}(A, B) = [1, 2, 12, 13, 15, 17, 26, 30, 38]$$

$$\text{Median} = 15$$

میانه دو آرایه را مقایسه می‌کنیم و اگر برابر بودند، میانه ادغام دو آرایه شناسایی شده است. در غیر این صورت، نیمه سمت چپ میانه بزرگ‌تر و نیمه سمت راست میانه کوچک‌تر را در نظر گرفته و این عملیات را تکرار می‌کنیم تا طول هر دو آرایه به دو برسد (اگر طول یکی از آرایه‌ها زودتر از دیگری به دو رسید، عملیاتی روی آن انجام نمی‌دهیم). در نهایت میانه ادغام دو آرایه برابر است با میانگین بیشینه عناصر اول و کمینه عناصر دوم.

## ۵ روابط بازگشتی

رفتار مجانبی توابع زیر را بیابید. (۲۰ نمره)

- $T(1) = 1, T(2) = 2, T(n) = 8T(n-1) - 15T(n-2)$

$$r^n = 8r^{n-1} - 15r^{n-2} \implies r = 3, 5 \implies T(n) \in O(5^n)$$

- $T(1) = 1, T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n^2$

$$T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n^2 = T(\frac{n}{16}) + T(\frac{3n}{16}) + (\frac{n}{4})^2 + T(\frac{3n}{16}) + T(\frac{9n}{16}) + (\frac{3n}{4})^2 + n^2 = n^2 \times \sum_{i=0}^{\frac{\log n}{2}} (\frac{10}{16})^i \implies T(n) \in O(n^2)$$

- $T(2) = 1, T(n) = 4T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + 1$

$$T(n) = 4T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + 1 = 16T(\lceil \sqrt{\lceil \sqrt{n} \rceil} \rceil) + 1 + 4 = \sum_{i=0}^{\log \log n} 4^i \in O(\log^2 n)$$

- $T(1) = 1, T(2^n) = 7T(2^{n-1}) + 2^n$

$$T(2^n) = 7T(2^{n-1}) + 2^n \implies T(2^{\log n}) = 7T(2^{\log n - 1}) + 2^{\log n} \implies T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n \implies T(n) \in O(n^{\log 7})$$

## ۶ کوئرا

به یکی از سوالات کوئرا پاسخ دهید. (۴۰ نمره)

## ۷ بهینه‌سازی

آرایه‌ای شامل  $n$  عدد صحیح و  $i$  و  $j$  به عنوان اندیس دو عنصر متفاوت از این آرایه مفروض است. تابع  $f(i, j)$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(i, j) = g(i, j)^2 + (i - j)^2$$

که در آن تابع  $g(i, j)$  از برنامه زیر به دست می‌آید.

```
int g(int i, int j)
{
    int sum = 0;
    int min = (i < j) ? i : j;
    int max = (i > j) ? i : j;
    for (int k = min + 1; k <= max; k++)
    {
        sum += a[k];
    }
    return sum;
}
```

الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n \log n)$  برای محاسبه کمینه مقدار  $f(i, j)$  ارائه دهید. (راهنمایی: این مسئله چه ارتباطی با مسئله Closest Pair دارد؟) (۲۰ نمره مازاد)

با تعریف  $S_i$  به صورت:

$$S_i = \sum_{k=0}^i a[k]$$

داریم:

$$f(i, j) = (S_i - S_j)^2 + (i - j)^2 = d((i, S_i), (j, S_j))^2$$

که با حل مسئله Closest Pair برای این نقاط، کمینه مقدار  $f(i, j)$  محاسبه می‌شود.