دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تکلیف اول درس طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال تحصیلی: بهار ۱۴۰۲

مدرّس: دکتر محمّدرضا حیدرپور

دستیاران آموزشی: مصطفی دریس‌پور - مجید فرهادی - محمّدیاسین کرباسیان - محمّدرضا مزروعی - امیر منصوریان - امیرارسلان یاوری

۱ مرتب‌سازی توابع

توابع زیر را براساس پیچیدگی زمانی مرتب نمایید. (۱۵ نمره)

$$n!, 4^{\log n}, e^n, n2^n, \binom{100}{n}, \log n^{\log n}, 2^{2^n}, 2^{3^{5^{10000}}}, \sqrt{2}^{\log n}, n^3$$

۲ مقایسه توابع

به ازای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ مشخص کنید که تابع $f(x)$ از O، o، ω، Ω و Θ تابع $g(x)$ هست یا خیر. c و k اعدادی ثابت و بزرگ‌تر از 1 هستند. (۴۰ نمره)

$f(x)$	$g(x)$	O	o	ω	Ω	Θ
n^k	c^n					
2^n	$2^{\frac{n}{2}}$					
$\log n!$	$\log n^n$					
2^n	2^{n-2}					
$n2^n$	3^n					
$\log n$	$\log^2 n$					
$\log n$	$\log n^2$					
$n \log^2 n$	$\frac{n^2}{\log n}$					

۳ بررسی عضویت در مجموعه توابع

گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید. (۲۵ نمره)

- $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n) + g(n))$
- $c > 1, 1 + c + c^2 + ... + c^n \in \Theta(c^n)$
- $\log n \in O(\sqrt[3]{n})$
- $f(n) \in O(s(n)), g(n) \in O(r(n)) \implies \frac{f(n)}{g(n)} \in O\left(\frac{s(n)}{r(n)}\right)$
- $f(n) \in O(s(n)), g(n) \in O(r(n)) \implies f(n) - g(n) \in O(s(n) - r(n))$

۴ تحلیل برنامه

برنامه زیر را از لحاظ پیچیدگی زمانی تحلیل کنید. (۲۰ نمره)

```
#include <stdio.h>
void f(int n, int m)
{
        long long sum = 0;
        for (int i = 2; i < n; i *= 3)
        {
                for (int j = 0; j < m; j += 2)
                {
                        for (int k = 0; k < j; k++)
                        {
                                sum += 1;
                        }
                }
        }
        printf("%d\n", sum);
}
int main()
{
        int a;
        scanf("%d", &a);
        for (int i = 0; i < a; i++)
        {
                f(1 << i, i);
        }
        return 0;
}
```

۵ بهینه‌سازی

اگر $f(n) \in \Theta(P)$ و $g(n) \in \Theta(\frac{n}{P})$ باشد، P را طوری تعیین کنید که $h(n) = f(n) + g(n)$ کم‌ترین پیچیدگی زمانی ممکن را داشته باشد. (۲۰ نمره مازاد)

1

$2^{2^n} > n! > e^n > n2^n > \log n^{\log n} > n^3 > 4^{\log n} > \sqrt{2}^{\log n}$

$2^{3510000} > (n^{100})$

2

$f(n)$	$g(n)$	O	o	ω	Ω	Θ
n^k	c^n	✓	✓	✗	✗	✗
2^n	$2^{n/6}$	✗	✗	✗	✓	✗
$\log n!$	$\log n^n$	✓	✗	✗	✓	✓
2^n	2^{n-6}	✓	✗	✗	✓	✓
$n2^n$	3^n	✓	✓	✗	✗	✗
$\log^n$	$\log^2 n$	✓	✓	✗	✗	✗
$\log^n$	$\log n^2$	✓	✗	✗	✓	✓
$n\log^2 n$	$\frac{n^2}{\log n}$	✓	✓	✗	✗	✗

۳

A) $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n)+g(n))$

$\Rightarrow c_1(f(n)+g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq c_2(f(n)+g(n))$

حال می توان فرض کرد $c_1 = \frac{1}{2}$ و $c_2 = 1$ در این صورت طبق تعریف Θ اثبات می شود
که $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n)+g(n))$

B) $c>1$, $1+c+c^2+\dots+c^n \in \Theta(c^n)$

دنباله هندسی است

چون $c>1$

$\frac{c^{n+1}-1}{c-1} \simeq \frac{c^{n+1}}{c} = c^n \Rightarrow (1+\dots+c^n) \in \Theta(c^n)$

اما می دانیم که $\underbrace{k}_{\text{ثابت}} c^n \not\leq 1+\dots+c^n \Rightarrow 1+\dots+c^n \notin \Omega(c^n)$

پس حکم رد می شود و درست نیست.

C) $\log^n \in O(\sqrt[3]{n})$

می دانیم که اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ آنگاه $g(n) \in \underbrace{o}_{\text{small o}}(f(n))$ و اگر

$g(n) \in \underbrace{o}_{\text{small o}}(f(n))$ آنگاه $g(n) \in \underbrace{O}_{\text{big O}}(f(n))$ حال داریم:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log^n}{\sqrt[3]{n}} = 0 \Rightarrow$ حکم اثبات می شود

۳

d) $f_{(n)} = n^2 \quad s_{(n)} = n^3 \quad g_{(n)} = n \quad r_{(n)} = n^4$

$\Leftarrow$

$f_{(n)} \in O(s_{(n)})$ ، $g_{(n)} \in O(r_{(n)})$ ✓

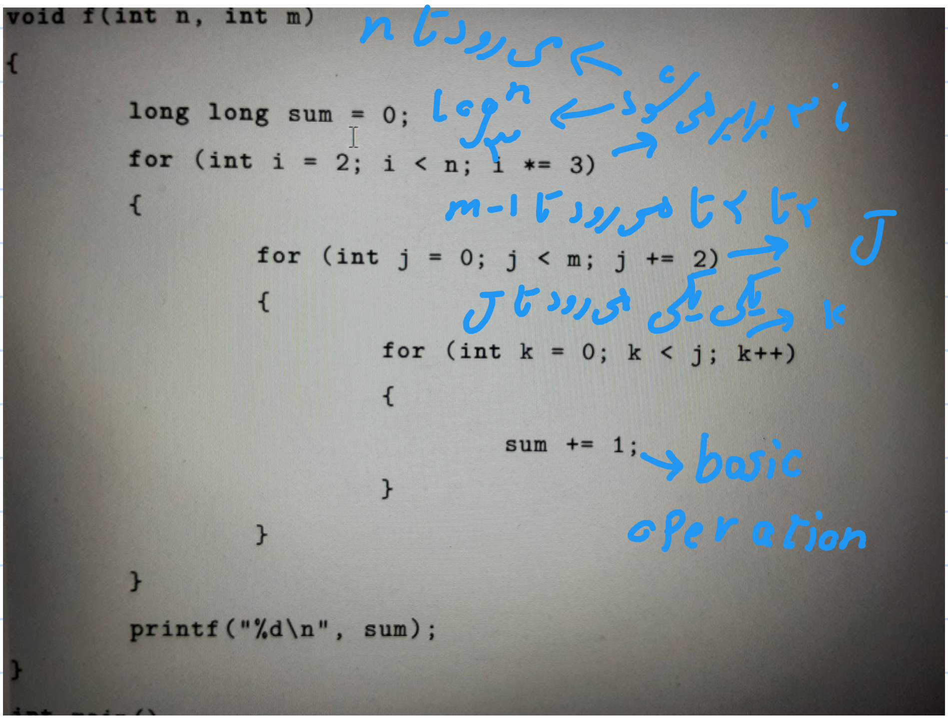
ولی

$\frac{n^2}{n} = n \notin O\left(\frac{n^3}{n^4}\right) \rightarrow$ حکم رد می‌شود

E) $f_{(n)} = n \quad s_{(n)} = n^8 \quad g_{(n)} = n^2 \quad r_{(n)} = n!$

$\swarrow$ اشتباه است.

٤



```
void f(int n, int m)
{
    long long sum = 0;
    for (int i = 2; i < n; i *= 3)
    {
        for (int j = 0; j < m; j += 2)
        {
            for (int k = 0; k < j; k++)
            {
                sum += 1;
            }
        }
    }
    printf("%d\n", sum);
}
```

n تا می رود

i ۳ برابر می شود $\log_3^n$

۲ تا ۲ تا می رود تا m-1 → J

یکی یکی می رود تا J → k

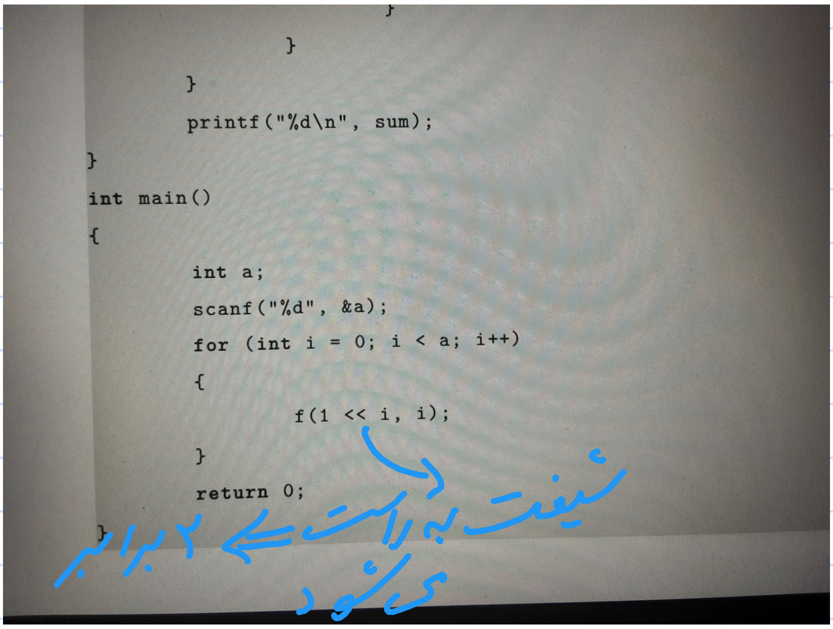
basic operation

J	k
0	0
۲	۲
٤	٤
۶	۶
⋮	⋮
m-1	m-1

$\frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله}} + 1 \times$ تعداد

$$\text{مجموع} = \left(\frac{m-1-0}{2}+1\right)\times\left(\frac{m-1}{2}\right) = \frac{m^2-1}{4} \simeq m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_3^n \times m^2}$$



```
            }
        }
        printf("%d\n", sum);
}
int main()
{
    int a;
    scanf("%d", &a);
    for (int i = 0; i < a; i++)
    {
        f(1 << i, i);
    }
    return 0;
}
```

شیفت به راست ۲ برابر می شود

n	m	
1	0	$\to \log_3^1 \times (0)^2$
۲	1	$\to \log_3^2 \times (1)^2$
٤	۲	
⋮	⋮	
2^a	a	$\to \log_3^{2^a} \times (a)^2$

$$\Rightarrow \log_3^{2^a} \times a^2 = a^3 \log_3^2$$

⇐ حال ضرایب را جمع می زنیم و داریم:

$$(1+2^3+3^3+\dots+a^3)\underbrace{\log_3^2}_{\text{ثابت}}$$

$$(1+2^3+3^3+\dots+a^3) \in O(a^4)$$