بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

در هر طرف ز خیل حوادث کمین گهی است   زان رو عنان گسسته دواند سوار عمر

تکلیف دوم

دکتر منصوره میرزایی

مسیح تنورساز

دانشگاه صنعتی اصفهان

4002

1. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

a. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
b. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
c. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
d. $B\cap(A\cup C)=(A\cup C)-\left((A\cap\bar{B})\cup(C\cap\bar{B})\right)$
e. $A-C=((A\cup\bar{C})\cap B)\cup((A-B)\cap\bar{C})$

2. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

a. $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B)$
b. $(A\ \cup\ B\ \cup\ C)\ \cap\ \overline{(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})}\cap\bar{C}$
c. $(B\cap(\bar{B}\cup\bar{A}))\cup(\bar{A}\cap(A\cup\bar{B}))$

3. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را ثابت یا رد کنید. (دامنه و برد f و g اعداد حقیقی است)

a. h(x)=f(x)g(x) با همان دامنه و برد، پوشا است.
b. h(x)=f(x)+g(x) با همان دامنه و برد، پوشا است.
c. اگر f اکیداً صعودی باشد، پوشا است.
d. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

4. ثابت کنید کاردینالیتی مجموعه‌ی توابعی که از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، اکیداً بزرگ‌تر از $\mathbb{R}$ است.

5. برد و دامنه‌ی توابع زیر با در نظر گرفتن شرایط زیر مشخص کنید:

f(x)=|x|
g(x)=$x^{1/3}$
h(x)=1/x

a. fog(x)
b. goh(x)
c. foh(x)
d. f(g(h(x)))
e. x^2h(x)

6. تهمورث می‌خواهد برای یکی از فرماندهان لشکرش اسبی انتخاب کند. از میان 25 اسب موجود هیچ‌کدام هم "تیزرو" هم "قوی" هم "باهوش" نیست. 8تای آن‌ها تیزرو، 17تا باهوش، 13 تا قوی هستند و 6تا هیچ کدام از این ویژگی‌ها را ندارند. اگر او دنبال اسبی تیزرو و قوی باشد، چند انتخاب متفاوت دارد؟

-1

a) $A-(B\cup C) = A\cap(B\cup C)' = A\cap(B'\cap C') = (A\cap B')\cap(A\cap C')$

$= (A-B)\cap(A-C)$

b) $A-(B\cap C) = A\cap(B\cap C)' = A\cap(B'\cup C') = (A\cap B')\cup(A\cap C')$

$= (A-B)\cup(A-C)$

c) $(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C) = \{(A\cap B)-(A\cap C)\}\cup\{(A\cap C)-(A\cap B)\}$

$= \{(A\cap B)\cap(A\cap C)'\}\cup\{(A\cap C)\cap(A\cap B)'\}$

$= \{(A\cap B)\cap(A'\cup C')\}\cup\{(A\cap C)\cap(A'\cup B')\}$

$= \left[\{\underbrace{(A\cap B)\cap A'}_{\emptyset\ \cancel{(A\cap A')\cap B}}\}\cup\{(A\cap B)\cap C'\}\right]\cup\left[\{\underbrace{(A\cap C)\cap A'}_{\emptyset\ \cancel{(A\cap A')\cap C}}\}\cup\{(A\cap C)\cap B'\}\right]$

$= \{A\cap(B\cap C')\}\cup\{A\cap(C\cap B')\}$

$= A\cap\{(B-C)\cup(C-B)\} = A\cap(B\,\Delta\,C)$

d) $(A\cup C)-((A\cap B')\cup(C\cap B')) = (A\cup C)\cap((A'\cup B)\cap(B\cup C'))$

$= (A\cup C)\cap(B\cup\overset{(A\cup C)'}{\cancel{(A'\cap C')}})$ $\qquad k = (A\cup C)$

$= k\cap(B\cup k') = (\overset{\emptyset}{\cancel{k\cap k'}})\cup(k\cap B) = B\cap(A\cup C)$

e) $((A\cap C')\cap B)\cup((A-B)\cap C') =$

$= ((A\cap C')\cap B)\cup((A\cap C')\cap B')$

$= (A\cap C')\cap(\underset{M}{\cancel{B\cup B'}}) = A\cap C' = A-C$

-۲

$$A\cap B\cap M \qquad\qquad A'\cap B\cap M$$

a) $\underbrace{(\cancel{A\cap B})\cup(A\cap B\cap C)}\cup\underbrace{(\cancel{A'\cap B})\cup(A'\cap B\cap C')}$

$$\cancel{(A\cap B)\cap(M\cup C)} \qquad\qquad (A'\cancel{\cap B)\cap(M\cup C')}$$

$$(A\cap B) \qquad\qquad (A'\cap B)$$

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B) = B\cap(A\cup A') = B$$

b) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')'\cap C'$

$$(A'\cup B\cup C)$$

$$\cancel{(B\cup C)\cup(A\cap A')}$$

$$B\cup C \longrightarrow (B\cup C)\cap C' = B-C$$

c) $(B\cap(B'\cup A'))\cup(A'\cap(A\cup B'))$

$$((\cancel{B\cap B'})\cup(B\cap A'))\cup((\cancel{A'\cap A})\cup(A'\cap B'))$$

$$\varnothing \qquad\qquad \varnothing$$

$$(A'\cap B)\cup(A'\cap B') = A'\cap(B\cup B') = A'$$

-۳

a) غلط $f(x)=x$ و $g(x)=x$ ⇐ $h(x)=x^2$

تابع $h(x)=x^2$ پوشا نیست زیرا $h(x)=-1$

جواب ندارد.

b) غلط $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2$ ⇐ $h(x)=2x^2$

تابع $h(x)=2x^2$ پوشا نیست زیرا $h(x)=-1$

جواب ندارد.

c) درست است طبق صورت سوال
اگر f اکیداً صعودی باشد یک تابع
پوشا است.

d) $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ درست

$x \in A , \{ y \in B \cap C \}$

$x \in A , \{ y \in B \text{ and } y \in C \}$

$\{ x \in A , y \in B \} \text{ and } \{ x \in A , y \in C \}$

$(x,y) \in A \times B \text{ and } (x,y) \in A \times C$

$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ع ـ

(1) Prove that the set of functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has cardinality bigger than $\mathbb{R}$.

Solution

for a subset $A \subset \mathbb{R}$ define its characteristic function χ_A by the formula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x \in A \\ 0 \text{ if } x \notin A \end{cases}$$

It's then clear that the map $A \mapsto \chi_A$ gives a 1-1 and onto correspondence between $P(\mathbb{R})$ and functions from $\mathbb{R}$ to $\{0,1\}$. The latter is a subset of functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ so it's cardinality is no bigger. Thus we have $|P(\mathbb{R})| = |\{$ functions from $\mathbb{R}$ to $\{0,1\}\}| \leq |\{$ functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}\}|$.

Lastly note that $|\mathbb{R}| < |P(\mathbb{R})|$ by the general theorem from class. Together with the above this yields the result.

۵ -

a) $fog(x) = |x^{\frac{1}{۲}}|$

دامنه: IR برد: $[0 , +\infty)$

b) $goh(x) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{۲}}$

دامنه: $IR - \{0\}$

برد: $IR - \{0\}$

c) $foh(x) = |\frac{1}{x}|$

دامنه: $IR - \{0\}$

برد: $(0 , +\infty)$

d) $f(g(h(x))) = |(\frac{1}{x})^{\frac{1}{۲}}|$

دامنه: $IR - \{0\}$

برد: $(0 , +\infty)$

e) $x^۲ h(x) = x^۲ \times \frac{1}{x}$

دامنه: $IR - \{0\}$

برد: $IR - \{0\}$

۶ -

t: تیزرو   g: قوی   b: باهوش

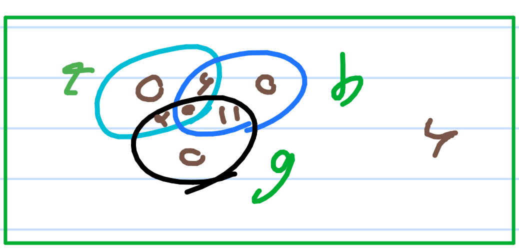
$|t \cup g \cup b| = |t| + |g| + |b| - |t \cap g| - |t \cap b| - |g \cap b| + |t \cap b \cap g|$

۲۵ - ۶ = ۱۹ تعداد اسب های دارای ویژگی خاص

۱۹ = ۸ + ۱۷ + ۱۳ - x - y - z + ۰

$|t \cap g| = ۲$

$x + y + z = ۱۹$



۲۵