



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

عنوان: تکلیف اول درس ساختمان های گسسته

نیم سال تحصیلی: ۴۰۰۲
مدرّس: دکتر منصوره میرزایی

۱. جمله زیر را در نظر بگیرید:

اگر چای می نوشم، یک کلوچه می خورم، یا اگر دارم یک کلوچه می خورم، پس در حال نوشیدن چای هستم.

(آ) جمله مورد نظر را با استفاده از متغیرهای گزاره ای (p, q, \dots) به صورت منطقی بیان کنید.

(ب) جدول درستی نظیر عبارت منطقی بدست آمده را رسم کنید.

۲. برقراری تساوی های زیر را بررسی کنید:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \quad (\bar{A})$$

$$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r) \quad (B)$$

۳. در رابطه با گزاره های سوردار حاوی چند متغیر، گاهی ترتیب استفاده از سورها اهمیت پیدا میکند. اگر متغیرهای x و y

مقادیر خود را از بین اعداد $-۲, -۱, ۰, ۱$ بگیرند و همچنین گزاره باز $p(x, y)$ به صورت :

$$p(x, y) : "x \times y \geq 0"$$

تعریف شده باشد، بررسی کنید که هر کدام از گزاره های a و b چه معنایی دارند و اینکه آیا این دو گزاره هم ارز هستند ؟

$$\forall x \exists y \quad p(x, y) \quad (\bar{A})$$

$$\exists y \forall x \quad xp(x, y) \quad (B)$$

۴. فرض کنیم $p(x, y)$ گزاره نما باشد و دامنه x فقط سه عدد صحیح $۱, ۲, ۳$ و دامنه y فقط سه عدد صحیح $۴, ۵, ۶$ باشد در

این صورت گزاره سوردار $\exists y p(1, y)$ به طور منطقی هم ارز با $p(1, 4) \vee p(1, 5) \vee p(1, 6)$ است همچنین گزاره سوردار

$\exists x \forall y p(x, y)$ به طور منطقی هم ارز با:

$$[p(1, 4) \wedge p(1, 5) \wedge p(1, 6)] \vee [p(2, 4) \wedge p(2, 5) \wedge p(2, 6)] \vee [p(3, 4) \wedge p(3, 5) \wedge p(3, 6)]$$

است. همانند بالا و با استفاده از ترکیب های عطفی و فصلی گزاره های زیر را بدون سور بیان کنید.

$$\forall x \quad p(x, 4) \quad ۵.$$

$$\forall y \forall x \quad p(x, y) \quad ۶.$$

$$\exists y \forall x \quad p(x, y) \quad ۷.$$

۸. دانشجویی برای اینکه اثبات کند نتیجه $\neg r$ از فرض های $a \wedge \neg b$ و $r \rightarrow s$ و $a \rightarrow \neg(\neg b \wedge s)$

بدست می آید اثبات زیر را نوشته است :

$$۱. \quad a \wedge \neg b$$

$$۲. \quad b$$

$$۳. \quad a \rightarrow \neg(\neg b \wedge s)$$

$$۴. \quad \neg(\neg b \wedge s)$$

$$۵. \quad \neg\neg b \wedge \neg s$$

$$6. b \wedge \neg s$$

$$7. \neg s$$

$$8. r \rightarrow s$$

$$9. \neg s \rightarrow \neg r$$

$$10. \neg r$$

۱. مهم ترین اشتباه در این اثبات چیست؟ خط را بیان کنید و به طور خلاصه توضیح دهید که چرا اشتباه است.

۲. با رفع خطا، صحت قضیه را نشان دهید. برای این مشکل، لطفاً اثبات را کاملاً بازنویسی کنید

۹. اثبات زیر برای نتیجه گرفتن q از فرض های $s \rightarrow (t \wedge q)$ ، $s \rightarrow r$ و $(r \vee t) \rightarrow q$ ارایه شده است:

$$1. \neg s \rightarrow r \quad [\text{فرض}]$$

$$2. (r \vee t) \rightarrow q \quad [\text{فرض}]$$

$$3. r \rightarrow q$$

$$4. \neg s \quad [\text{فرض}]$$

$$5. r \quad [4, 1]$$

$$6. q \quad [5, 3]$$

$$7. \neg s \rightarrow q$$

$$8. s \quad [\text{فرض}]$$

$$9. s \rightarrow (t \wedge q) \quad [\text{فرض}]$$

$$10. t \wedge q \quad [9, 8]$$

$$11. q$$

$$12. s \rightarrow q$$

$$13. (s \rightarrow q) \wedge (\neg s \rightarrow q)$$

$$14. (\neg s \vee q) \wedge (\neg \neg s \vee q)$$

$$15. (\neg s \vee q) \wedge (s \vee q) \quad [\text{Double Negation}]$$

$$16. ((\neg s \vee q) \wedge s) \vee ((\neg s \vee q) \wedge q) \quad [\text{توزیع پذیری (Associativity)}]$$

$$17. ((\neg s \vee q) \wedge s) \vee (q \wedge (\neg s \vee q)) \quad [\text{جابجایی (Commutativity)}]$$

$$18. ((\neg s \vee q) \wedge s) \vee (q \wedge (q \vee \neg s)) \quad [\text{جابجایی (Commutativity)}]$$

$$19. ((\neg s \vee q) \wedge s) \vee q \quad [\text{اجذب (Absorption)}]$$

$$20. (s \wedge (\neg s \vee q)) \vee q \quad [\text{جابجایی جابجایی (Commutativity)}]$$

$$21. ((s \wedge \neg s) \vee q) \vee q \quad [\text{توزیع پذیری (Associativity)}]$$

$$[Negation] \quad (F \vee q) \vee q \quad ۲۲$$

$$[Commutativity] \quad (q \vee F) \vee q \quad ۲۳$$

$$[Identity] \quad q \vee q \quad ۲۴$$

$$[Idempotence] \quad q \quad ۲۵$$

۱. دو اشتباه عمده در این اثبات وجود دارد. مشخص کنید که کدام خطوط حاوی خطا هستند و برای هر یک توضیح دهید (تا حد امکان به طور خلاصه) چرا آن خط نادرست است.

۲. برای آنچه در سطرهای ۱۳ تا ۲۵ ادعا شده است، دلیل درستی ارائه دهید، یعنی از $(s \rightarrow q) \wedge (\neg s \rightarrow q)$ ، می توانیم استنباط کنیم که q درست است.

موفق باشید