بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

گر بندم این بصر را ور بگسلم نظر را

از دل نه‌ای گسسته از تو کجا گریزم

تکلیف چهارم

دکتر منصوره میرزایی

مسیح تنورساز

دانشگاه صنعتی اصفهان

4002

1. با استفاده از استقرا نشان دهید رابطه زیر برای تمام اعداد صحیح بزرگتر از 1 برقرار است

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} \geq \frac{1}{2n+2}$$

2. می‌خواهیم کلاسی با n دانشجو را به گروه‌های 4 یا 5 نفره تقسیم کنیم. با استفاده از استقرای قوی نشان دهید برای هر $n\geq12$ این کار ممکن است.

3. ثابت کنید اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ، n عدد اول متمایز باشند، دنباله‌ای به طول 2^{n-1} از P_i ها موجود است که در آن حاصل ضرب هیچ تعداد متوالی از جملات دنباله مربع کامل نشود.

4. فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی با از اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم S مجموعه‌ای ویژه است اگر مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از S برابر نباشند. برای هر عدد طبیعی $n\geq4$ ثابت کنید زیر مجموعه‌ای ویژه با n عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}-1\}$ وجود دارد.

5. 2n نفر در یک جمع حضور دارند. ثابت کنید این افراد می‌توانند با یکدیگر دست دهند طوری که هر دو نفر حداکثر یک بار با هم دست دهند و برای هر i ، $1\leq i\leq n$، دو نفر وجود داشته باشند که هر یک دقیقا با i نفر دیگر دست داده باشند.

6. ثابت کنید مجموع بزرگترین مقسوم‌علیه فرد اعداد $n+1, n+2, \ldots, 2n$ ، برابر n^2 است.

7. هر خانه ازیک جدول $2n\times2n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است طوری که در هر مربع ۲ × ۲ هیچ دو خانه‌ای هم رنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از چهار خانه ی واقع در گوشه های جدول نیز هم رنگ نیستند.

8. فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام 1, 2, 3 باشد که تعداد زوجی رقم 1 دارند. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید و سپس این رابطه را حل کنید.

9. رابطه صریحی برای روابط بازگشتی زیر بدست آورید:
   a. $a_1=18, a_2= 24, a_n= a_{n-1}+6a_{n-2}$
   b. $b_1=4, b_2=-20, b_n=2b_{n-1}-b_{n-2}-12n$
   c. $c_0=4, c_1=2, c_n=c_{n-1}+3c_{n-2}$

10. تعداد اعداد n رقمی که با ارقام 1 تا 5 که اختلاف هر دو رقم مجاور در این اعداد 1 باشد را a_n می‌نامیم، یک رابطه بازگشتی برای a_n بیابید.

۱- عدد صحیح بزرگتر از یک ⇐ گام پایه: $P(2)$

$$P(2) = \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} = \frac{15}{48} \geq \frac{1}{6}$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k+2)} \geq \frac{1}{(2k+2)}$

$$\frac{1\times3\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times\cdots\times(2k+2)} - \frac{1}{(2k+2)} \geq 0$$

مخرج مشترک $\rightarrow$ $\underbrace{1\times3\times\cdots\times(2k+1) - 2\times4\times\cdots\times2k}_{\text{صورت کسر}} \geq 0$

سپس نگاه برای $P(k+1)$ داریم: $1\times3\times\cdots\times(2k+1)\times(2k+3) - 2\times4\times\cdots\times2k\times(2k+2)$ ⇐ می‌دانیم $(2k+3) \geq (2k+2)$

⇐ این رابطه برای $P(k+1)$ نیز صحیح است!

۲- فرض می‌کنیم $S(12)$ ، $S(13)$ ، $S(14)$ ، ... ، $S(k)$ درست باشد می‌خواهیم اثبات کنیم $S(k+1)$ نیز درست است ⇐ اگر $S(k)$ درست باشد برای رسیدن به $S(k+1)$ لازم است یکی از (۵) ها را خط زدن و ۴ تا (۴) اضافه کنیم مثال:

$S(12) = 4+4+4$

$S(13) = 4+4+5$

$S(14) = 5+5+4$

$S(15) = 5+5+5 \rightarrow S(16) = 4+4+4+4$

۳- گام پایه: $P(1)$

$$P(1) = 2 \xrightarrow{n=1} 2^{1-1} = 2^0 = 1 \xRightarrow{\text{دنباله به طول یک}} \{2\}$$

حال فرض می‌کنیم $P(n)$ درست است یعنی P_1 و P_2 و ... و P_n دنباله‌ای می‌دهد به صورت

$$\{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{2^{n-1}}}\}$$

طبق فرض مسئله ضرب هیچ تعداد متوالی از دنباله مربع کامل نمی‌شود

اثبات می‌کنیم $P(n+1)$ نیز درست می‌باشد

مطابق قبل برای $P_{(n+1)}$ داریم: زمانی که ما n را به $n+1$ تغییر می‌دهیم طول دنباله‌ی $P_{(n)}$ ۲ برابر می‌شود یعنی طول دنباله برابر با 2^n می‌شود
که ما آن دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم

برای انتخاب جملات متوالی ۳ حالت ممکن است اتفاق بیوفتد

$$P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \xrightarrow{\text{دنباله}} \{\underbrace{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{2^{n-1}}}}_{1}, P_{n+1}, \underbrace{P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_{2^{n-1}-1}}}_{2}\} \Longrightarrow 2^{(n+1)-1} = 2^n$$

② اگر اعداد متوالی را از این محدوده انتخاب کنیم ⟸ شرط برقرار است (مانند بازه‌ی قبل)

① اگر اعداد متوالی را از این محدوده انتخاب کنیم ⟸ شرط برقرار است (طبق فرض برای $P_{(n)}$)

③ جمله‌ی P_{n+1} نیز انتخاب شود که در این حالت ⟸ ما می‌دانیم عددی مربع کامل است که توان عوامل اول آن زوج باشد اما اگر ما جمله‌ی P_{n+1} انتخاب کنیم (نکته: P_{n+1} یک عدد اول جدید است) یعنی توان این عامل (۱) می‌باشد پس در حالت ۳ نیز ضرب هیچ تعداد متوالی از جملات دنباله مربع کامل نمی‌شود!

۴ـ گام پایه: $P_{(4)}$:

$$P_{(4)} \to \{1,2,3,4,5,6,7\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه ویژه ۴ عضوی}} \{3,5,6,7\}$$

پس برای $P_{(4)}$ ثابت شد

فرض می‌کنیم $P_{(n)}$ درست است و سپس $P_{(n+1)}$ را اثبات می‌کنیم: فرض کنید برای P_n زیرمجموعه‌ی ویژه‌ی $\underbrace{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}_{n\ \text{عضو}}$ موجود باشد حال برای $P_{(n+1)}$ زیرمجموعه را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

می‌دانیم ⟸ $\underbrace{2\times(2^{n-1}-1)}_{\text{همان } 2\times x_n} < \underbrace{2^{(n+1)-1}-1}_{\text{آخرین جمله‌ی } P_{(n+1)}}$ ⟸ اعداد این زیرمجموعه $\underbrace{\{1, 2\times x_1, 2\times x_2, \dots, 2\times x_n\}}_{n+1\ \text{عضو}}$ همگی عضو $P_{(n+1)}$ می‌باشند ⟸ حال ثابت می‌کنیم ⟸ برای $P_{(n)}$ اختلاف لااقل ۲ عضو حداقل (۱) بود حال اگر همه را ۲ برابر کنیم اختلاف حداقل ۲ می‌شود که با اضافه کردن ۱ این اختلاف جبران نمی‌شود!

- ए

۶ - می دانیم هر عدد صحیح مثبت را می توان به شکل $b\times 2^a$ نوشت که در آن b یک عدد صحیح فرد مثبت است

مثلاً $12 = 2^2\times 3$ یا $8 = 2^3\times 1$ دقت شود که عدد b درواقع همان بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد n می باشد. توجه کنید که اگر M و N
قسمت فرد یکسانی داشته باشند یکی از M و N مضرب دیگری است حال با توجه به صورت سوال بزرگترین عدد یعنی $2n$ آنقدر کوچک است
که نمی تواند مضرب $n+1$ (کوچکترین عدد) باشد ⇐ هیچ یک از این اعداد صحیح نمی تواند مضرب دیگری باشد ⇐ همه ی اعداد قسمت فرد متفاوتی
دارند. بزرگترین قسمت فرد هر عدد نهایتاً خود آن عدد می تواند باشد ⇐ بزرگترین قسمت فرد در بین اعداد سوال $2n-1$ می تواند باشد چرا که $2n$ زوج است

n عدد در مجموعه ی $(n+1, n+2, \dots, 2n)$ وجود دارد که همگی قسمت فرد متفاوتی دارند پس قسمت های فرد را می توان اعداد فرد

$(1, 3, \dots, 2n-1)$ دانست ⇐ حال ما می دانیم که مجموع اعداد فرد یک عدد مربع کامل است یعنی $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$

7

The first thing to understand is that every positive integer N can be written uniquely in the form $2^a b$, where a is a non-negative integer, and b is a positive *odd* integer. For example, $12 = 2^2 \cdot 3$ ($a = 2, b = 3$), $11 = 2^0 \cdot 11$ ($a = 0, b = 11$), and $8 = 2^3 \cdot 1$ ($a = 3, b = 1$). In this decomposition the number b is called the *odd part* of N, so 3 is the odd part of 12, 11 is the odd part of 11, and 1 is the odd part of 8. Note that the odd part of N is indeed the largest odd number that divides N.

Next, notice that if N and M have the same odd part, then one of N and M is a multiple of the other. Say that $N = 2^a b$ and $M = 2^c b$, where b is the odd part of N and M; then either $a \le c$, in which case M is a multiple of N, or $c \le a$, in which case N is a multiple of N.

Now look at the integers $n+1, n+2, \dots, 2n$. The largest of these, $2n$, is too small to be a multiple of the smallest, $n+1$, so none of these integers can be a multiple of another. Thus, they must all have different odd parts. The odd part of any integer is at most as large as that integer, so the largest possible odd part of any of the integers $n+1, \dots, 2n$ is $2n$ — except that $2n$ isn't odd, so the largest possible odd part here is actually only $2n-1$.

There are n numbers in the set $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, and each has a different odd part that is at most $2n-1$. The first n odd positive integers are $1, 3, \dots, 2n-1$. Thus, the odd parts of the integers $n+1, n+2, \dots, 2n$ must be precisely these n odd integers, $1, 3, \dots, 2n-1$. Thus,

$$\sum(\text{largest odd divisors of } n+1, n+2, \dots, 2n) = \sum(\text{odd parts of } n+1, n+2, \dots, 2n) = 1+3+\dots+(2n-1)\,,$$

the sum of the first n positive odd integers.

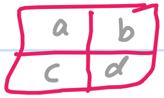
The proof by induction that

$$1+3+\dots+(2n-1) = n^2$$

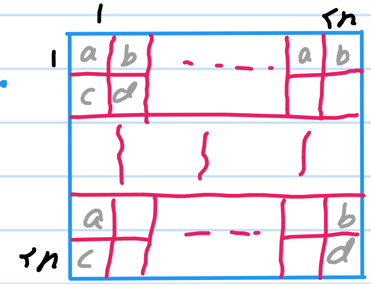
is quite straightforward and can be found in many places.

Share Cite Follow

answered Dec 30, 2012 at 15:26
Brian M. Scott
587k 51 700 1164

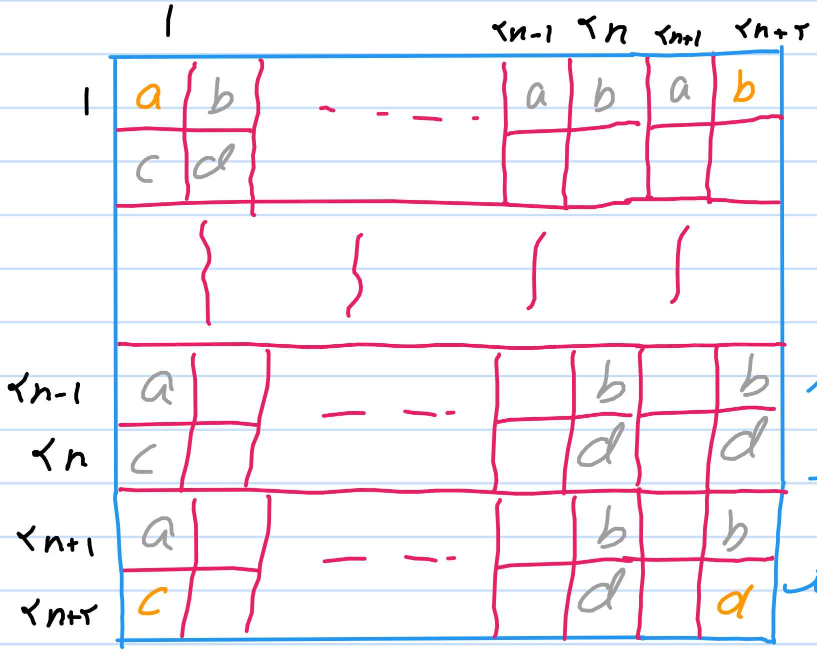
۷ـ چهار رنگی  را در نظر بگیرید. فرض کنید $n \geq 1$ که در این صورت هر ۴ گوشه رنگ های متفاوتی دارند
(گام به اثبات شو)

حال ما فرض می کنیم $P_{(n)}$ برقرار است و $P_{(n+1)}$ را اثبات می کنیم ⟸



مطابق با جدول $۲n \times ۲n$ طبق فرض $P_{(n)}$ درست است حال اثبات می کنیم $P_{(n+1)}$ نیز شرایط مسئله را

دارا است ⟸ برای $P_{(n+1)}$ داریم: جدول $۲(n+1) \times ۲(n+1)$



با توجه به $۲(n+1) = ۲n+۲$ باید در خانه های $۲n+1$، $۲n+۲$ به ترتیب

رنگ خانه های $۲n-1$، $۲n$ تکرار شود ⟸ در هر سطر دوتایی (a, b)

و در هر ستون دوتایی های

$\binom{a}{c}$ و $\binom{b}{d}$ یکی در میان تکرار

می شوند و چون فرم کلی جدول به صورت

ضرب یک عدد زوج است $(۲n \times ۲n)$ پس می توان

مطمئن شد که هر گوشه از جدول دارای یک رنگ

متفاوت است!

-1

_ ۹

a) $a_1 = ۱۸ \quad a_2 = ۲۴ \quad a_n = a_{n-1} + ۶a_{n-2}$

۱۸, ۲۴, ۱۳۲, ۲۷۶, ۱۰۶۸, ...

اگر ما فرض کنیم $F_n = AF_{n-1} + BF_{n-2}$ آنگاه می دانیم: اگر $x^2 - Ax + B = 0 \Leftarrow F_n = ax_1^n + bx_2^n$ پس برای این سوال داریم:

$F_n = F_{n-1} + ۶F_{n-2}$

$x^2 - x - ۶ = 0 \rightarrow (x-۳)(x+۲) = 0 \rightarrow x_1 = ۳, \; x_2 = -۲ \Big\} \; F_n = a(-۲)^n + b(۳)^n \Rightarrow$

$a_1 = ۱۸ \rightarrow -۲a + ۳b = ۱۸$
$a_2 = ۲۴ \rightarrow ۴a + ۹b = ۲۴$
$\Big\} \; a = -۳, \; b = ۴ \Rightarrow F_n = -۳(-۲)^n + ۴ \times ۳^n$

b) $b_1 = ۴ \quad b_2 = -۲۰ \quad b_n = ۲b_{n-1} - b_{n-2} - ۱۲n$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} ۴ & & -۲۰ & & -۸۰ & & -۱۸۸ & & -۳۵۶ & & -۵۹۶ & & -۹۲۰ \\ & ۲۴ & & ۶۰ & & ۱۰۸ & & ۱۶۸ & & ۲۴۰ & & ۳۲۴ & \\ & & ۳۶ & & ۴۸ & & ۶۰ & & ۷۲ & & ۸۴ & & \\ & & & ۱۲ & & ۱۲ & & ۱۲ & & ۱۲ & & & \end{array}$$

$an^3 + bn^2 + cn + d = F_n \Leftarrow$ مرتبه ۳

$a + b + c + d = ۴$
$۸a + ۴b + ۲c + d = -۲۰$
$۲۷a + ۹b + ۳c + d = -۸۰$
$۶۴a + ۱۶b + ۴c + d = -۱۸۸$
$\Big\} \Rightarrow a = -۲ \quad b = -۶ \quad c = ۸ \quad d = ۴ \Longrightarrow F_n = -۲n^3 - ۶n^2 + ۸n + ۴$

c) $c_0 = ۴ \quad c_1 = ۲ \quad c_n = c_{n-1} + ۳c_{n-2}$

مطابق قسمت (a) داریم: $x^2 - x - ۳ = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{۱۳}}{۲}, \; x_2 = \frac{1-\sqrt{۱۳}}{۲} \Leftarrow$

$a\left(\frac{1+\sqrt{۱۳}}{۲}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{۱۳}}{۲}\right) = ۲$
$a + b = ۲$
$\Big\} \Rightarrow a = ۲, \; b = ۲ \Rightarrow F_n = ۲\left(\frac{1+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n + ۲\left(\frac{1+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n$

۱۰ -

$a_k(n)$ ⟵ تعداد دنباله‌هایی که شرایط سوال را دارند و به k ختم می‌شوند

n: طول دنباله

با توجه به صورت سوال می‌دانیم اعداد ما از (۱) تا (۵) هستند یعنی ⇐

$$a_{(n)} = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n) + a_5(n)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1(n) &= a_2(n-1) \\
a_2(n) &= a_1(n-1) + a_3(n-1) \\
a_3(n) &= a_2(n-1) + a_4(n-1) \\
a_4(n) &= a_3(n-1) + a_5(n-1) \\
a_5(n) &= a_4(n-1)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - 3a_{n-3}$$

$a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 14$

۵ و ۸ و ۱۴ و ۲۴ و ۴۲ و ۷۲ و ...