بسم الله الرحمن الرحیم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۵

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

اتوماتای متناهی نامعین (NFA)

DEFINITION 1.37

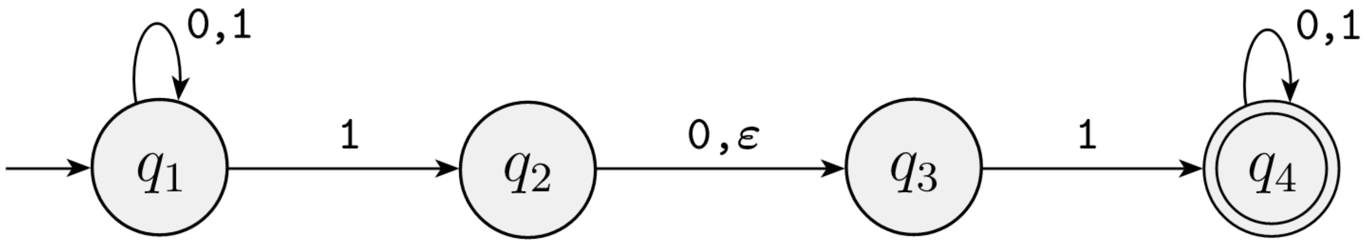
A ***nondeterministic finite automaton*** is a 5-tuple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, where

1. Q is a finite set of states,
2. Σ is a finite alphabet,
3. $\delta \colon Q \times \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ is the transition function,
4. $q_0 \in Q$ is the start state, and
5. $F \subseteq Q$ is the set of accept states.

EXAMPLE 1.38

مثال

Recall the NFA N_1:



The formal description of N_1 is $(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, where

1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,
2. $\Sigma = \{0,1\}$,
3. δ is given as

	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$,

4. q_1 is the start state, and
5. $F = \{q_4\}$.

تعریف فرمال محاسبه (پذیرش) NFA

Let $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be an NFA and w a string over the alphabet Σ. Then we say that N ***accepts*** w if we can write w as $w = y_1 y_2 \cdots y_m$, where each y_i is a member of Σ_ε and a sequence of states $r_0, r_1, \ldots, r_m$ exists in Q with three conditions:

1. $r_0 = q_0$,

2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$, for $i = 0, \ldots, m-1$, and

3. $r_m \in F$.

زبان یک NFA

- مجموعه همه رشته‌های پذیرفته شده توسط یک NFA

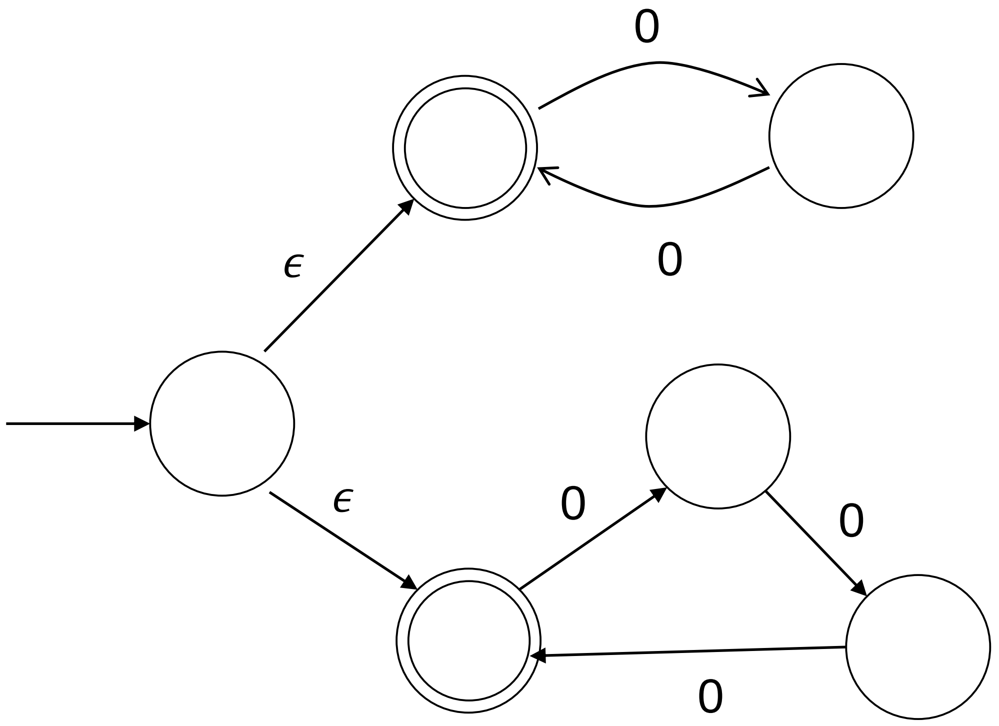
زبان یک NFA

- فرض کنید N یک NFA است. زبانی را که توسط N تشخیص داده می‌شود به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is accepted by } N\}$$

مثال

- زبان NFA زیر چیست؟



A. $\{0^k \mid k$ is a multiple of 2$\}$.
B. $\{0^k \mid k$ is a multiple of $3\}$.
C. $\{0^k \mid k$ is a multiple of 6$\}$.
D. $\{0^k \mid k$ is a multiple of 2 or 3$\}$.
E. None.

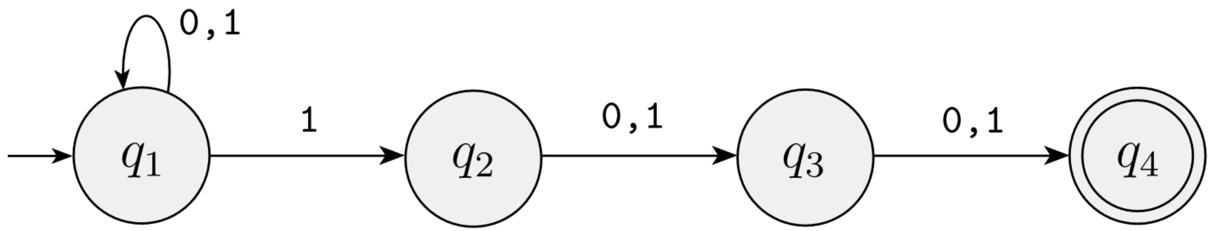
رابطه بین DFA و NFA

- هر DFA، یک NFA است؛ بنابراین قدرت NFAها دست کم به اندازه قدرت DFAهاست.

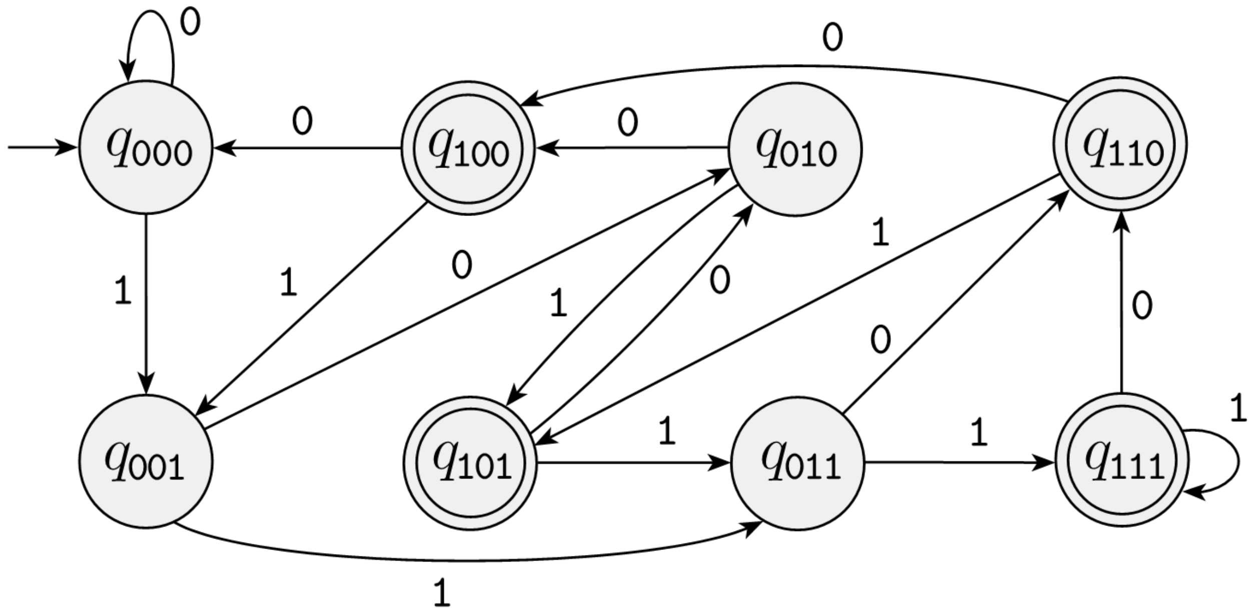
- اما آیا برعکس نیز صادق است؟ آیا زبانی وجود دارد که زبان یک NFA باشد اما زبان یک DFA نباشد؟

مثال

○ یک NFA که یک رشته باینری را تشخیص دهد که سومین حرف از آخر برابر 1 باشد.



○ یک DFA که یک رشته باینری را تشخیص دهد که سومین حرف از آخر برابر 1 باشد.



هم‌ارزی NFA و DFA

THEOREM 1.39

Every nondeterministic finite automaton has an equivalent deterministic finite automaton.

- ماشین M1 هم ارز ماشین M2 است اگر L(M1)=L(M2).

COROLLARY 1.40

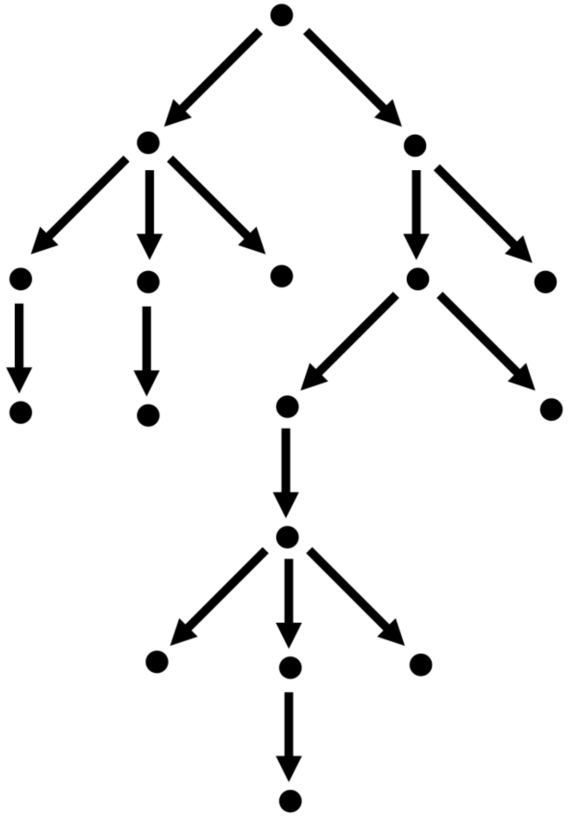
A language is regular if and only if some nondeterministic finite automaton recognizes it.

هم‌ارزی NFA و DFA

- اثبات:
  - فرض کنید $N = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ یک NFA باشد.
  - هدف: ساخت یک DFA به صورت $M = (Q',\Sigma,\delta',{q_0}',F')$ که زبان $L(N)$ را تشخیص دهد.

هم‌ارزی NFA و DFA

IUT-ECE

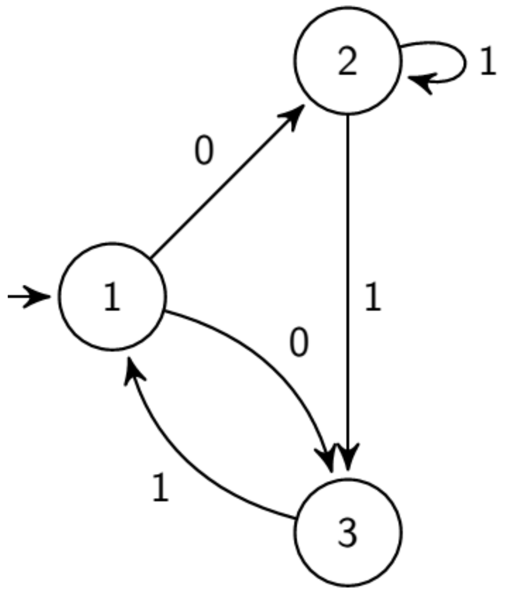


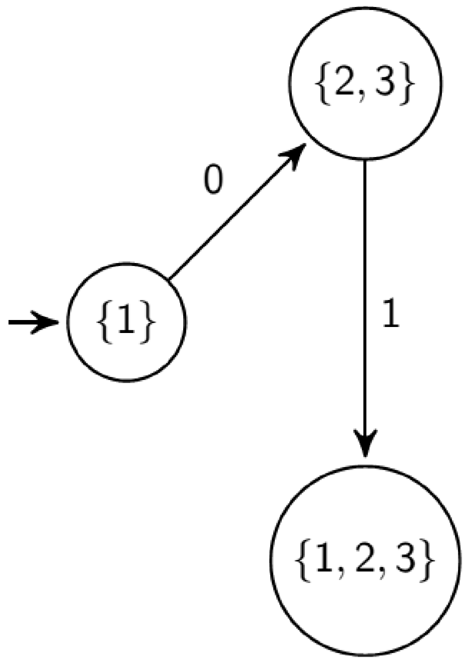
- ایده:

  - شبیه‌سازی NFA با یک DFA
  - تحت یک ورودی، همه شاخه‌های محتمل NFA در نظر گرفته شود.
  - در NFA، هر حالت میتواند چندین حالت بعدی داشته باشد که باید در DFA متناظر این حالتها در یک حالت نشان داده شود.
  - در DFA معادل، همه حالت‌های محتمل متناظر در NFA در نظر گرفته شود.
  - اگر NFA دارای k حالت است آنگاه 2^k زیرمجموعه محتمل دارد.
    - ✓ هر زیرمجموعه یکی از موارد محتمل است که DFA باید بخاطر بسپارد.
    - ✓ در نتیجه DFA دارای 2^k حالت است.

هم‌ارزی NFA و DFA

- مثال:





هم‌ارزی NFA و DFA

- اثبات:
  - فرض کنید $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ یک NFA باشد.
  - هدف: ساخت یک DFA به صورت $M = (Q', \Sigma, \delta', {q_0}', F')$ که زبان $L(N)$ را تشخیص دهد.

همارزی NFA و DFA

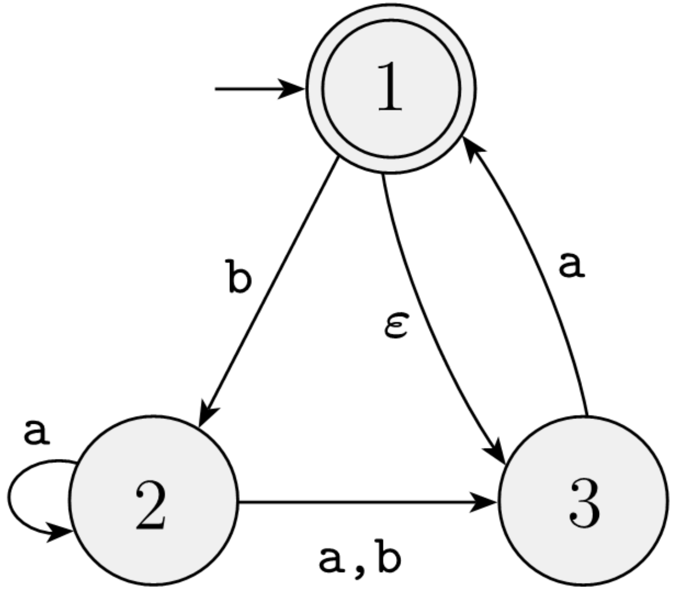
IUT-ECE

$$M = (Q', \Sigma, \delta', {q_0}', F')$$

- Q’ = $\mathcal{P}$ (Q)

هم‌ارزی NFA و DFA

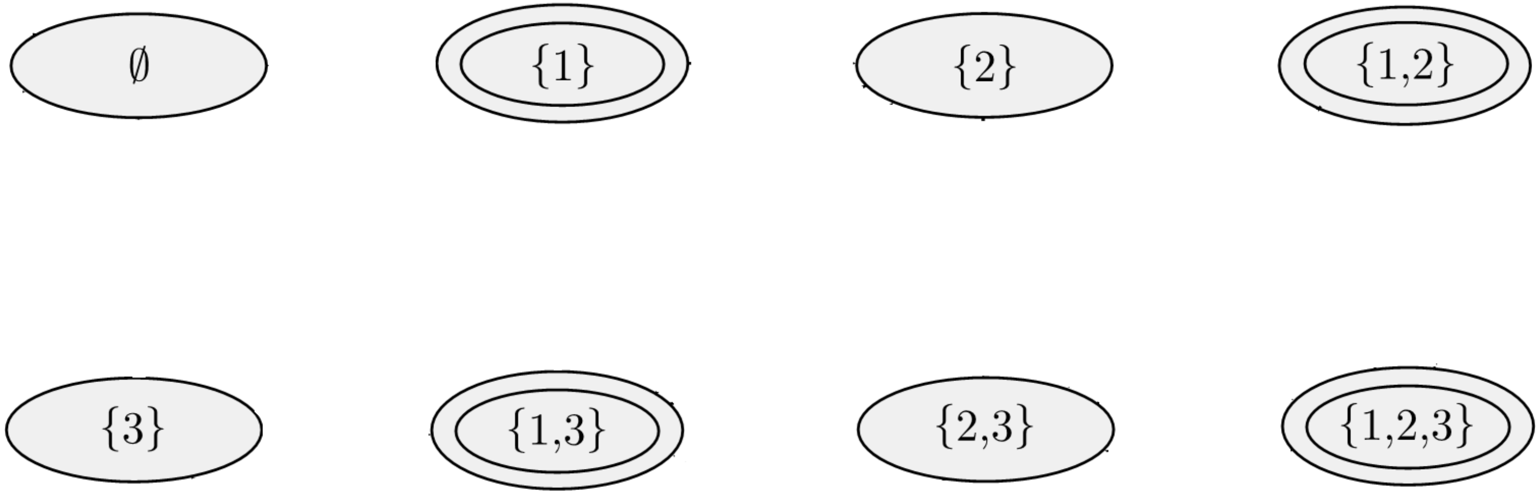
IUT-ECE



NFA N

Q’ = $\mathcal{P}$ (Q) = $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1{,}2\}, \{1{,}3\}, \{2{,}3\}, \{1{,}2{,}3\}\}.$

هم‌ارزی NFA و DFA



$Q' = \mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$

هم‌ارزی NFA و DFA

IUT-ECE

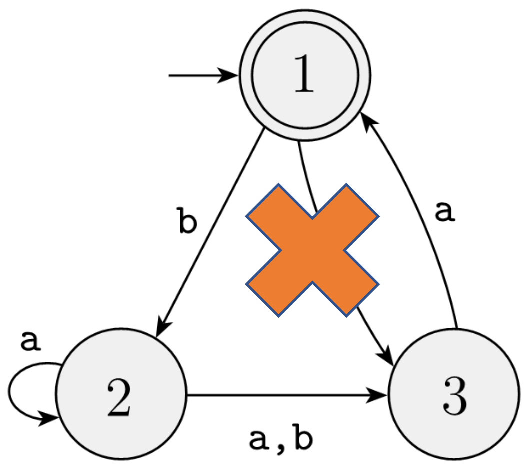
$$M = (Q', \Sigma, \delta', {q_0}', F')$$

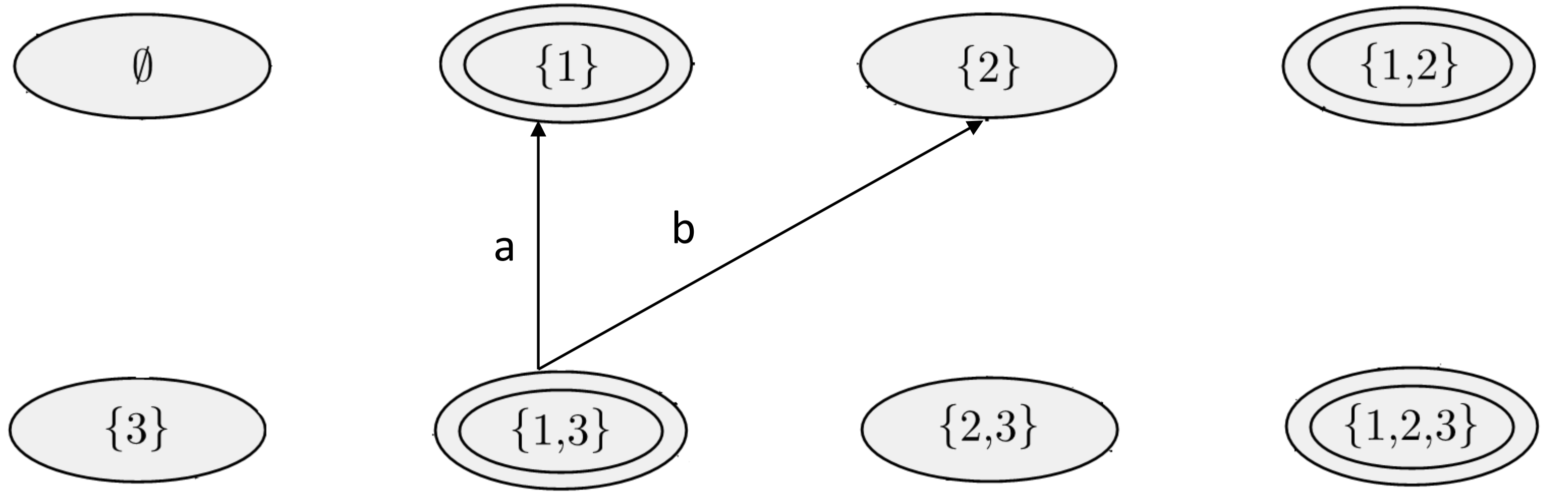
- برای سادگی، ابتدا فرض کنیم ϵ نداریم:
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $\delta'(R, a) = \cup_{r \in R}\, \delta(r, a)$

$R \in Q'$

$a \in \Sigma$

هم‌ارزی NFA و DFA



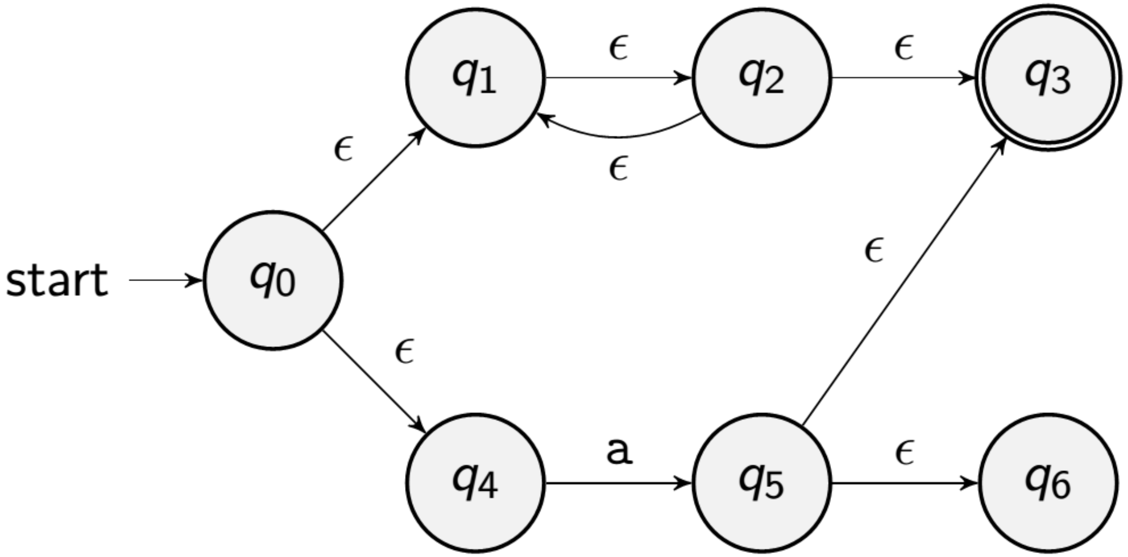


ϵ-Closure

IUT-ECE

- برای حالت $q \in Q$، از $E(q)$ برای نمایش مجموعه حالت‌هایی استفاده می‌کنیم که از حالت q با کمک ϵ-transition در δ قابل رسیدن هستند.

ϵ-Closure



$$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

همارزی NFA و DFA

IUT-ECE

$$M = (Q', \Sigma, \delta', {q_0}', F')$$

- اکنون ϵ داریم:
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $\delta'(R, a) = \cup_{r \in R} E(\delta(r, a))$

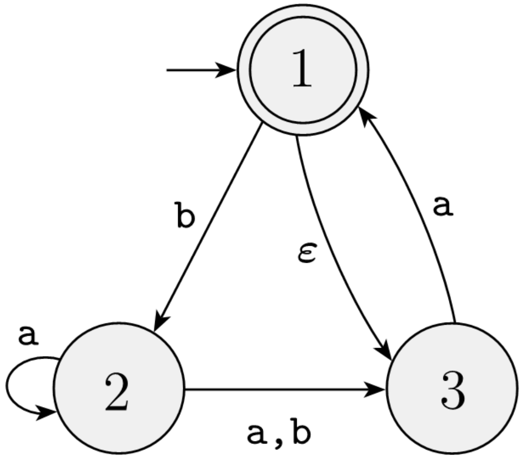
  $R \in Q'$

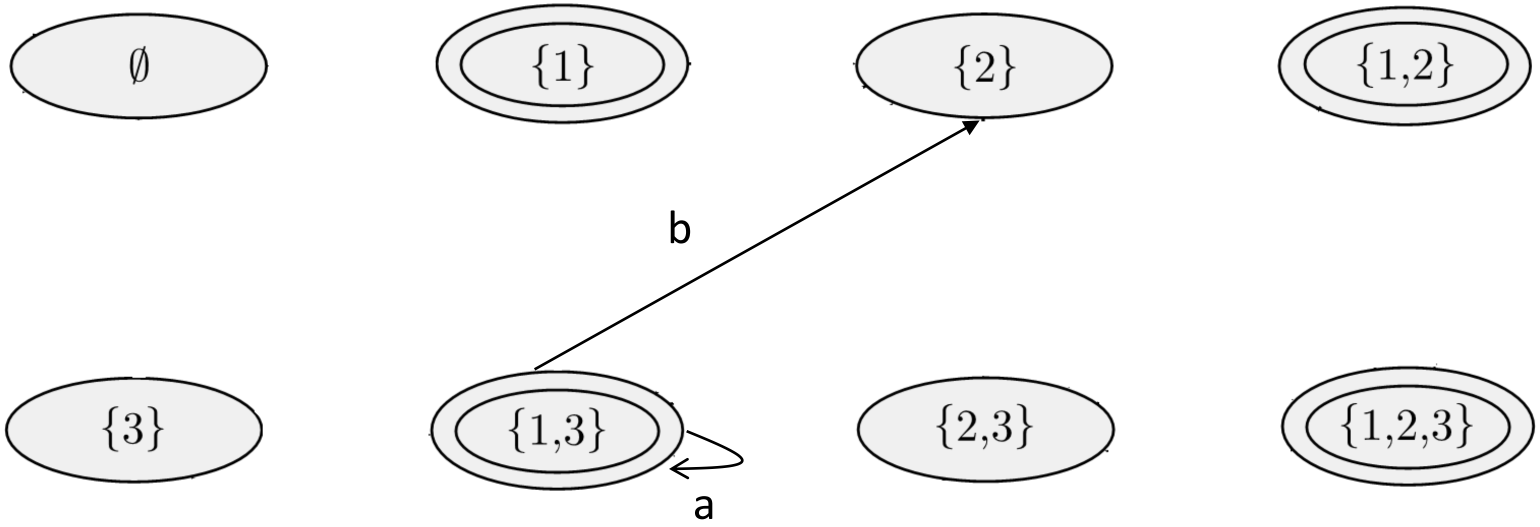
  $a \in \Sigma$

E(q) = {q’ ∈ Q : q’ reachable from q by traveling along 0 or more ε-arrow}

هم‌ارزی NFA و DFA

IUT-ECE





همارزی NFA و DFA

IUT-ECE

$$M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $\delta'(R, a) = \cup_{r \in R} E(\delta(r, a))$
- $q_0' = E(\{q_0\})$
- $F' = \{R \in Q' : R$ contains at least an accept state of N$\}$

مثال

EXAMPLE 1.41