ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

فصل پنجم

استقرا

استقرای ریاضی

- قانون استقرای ریاضی: برای اینکه ثابت کنیم p(n) برای همه n های صحیح مثبت، درست است (که p(n) یک تابع گزاره ای است) دو گام زیر باید انجام شود:
  - گام پایه: مشخص میکنیم که p(1) درست است.
  - گام استقرا: نشان میدهیم که گزاره شرطی $p(k) \rightarrow p(k+1)$ برای همه k های صحیح مثبت درست است.

استقرای ریاضی

مثال1 : ثابت کنید $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

حل:

گام پایه: p(1) درست است، چون $1=\frac{1\times 2}{2}$

گام استقرا: فرض میکنیم $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

بنابراین p(k+1) درست است.

استقرای ریاضی

مثال ۲. نشان دهید هر عدد $n \geq ۱۴$ را می‌توان به صورت مجموعی از ۳ ها و یا ۸ ها نوشت. مثلاً $۱۴ = ۳ + ۳ + ۸$، $۱۵ = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳$ و ... .

اثبات: فرض کنید $S(n)$ حکم باشد. فرض می‌کنیم $S(۱۴), S(۱۵), \ldots, S(k)$ درست است نشان می‌دهیم $S(k+۱)$ درست است یعنی $k+۱$ را می‌توان به صورت مجموع ۳ و یا ۸ ها نوشت. برای این منظور کافیست از $S(k)$ یک عدد ۸ کم کنیم و ۳ تا عدد ۳ اضافه کنیم. یا اگر $S(k)$ عدد ۸ نداشت، ۵ تا عدد ۳ کم کنیم و ۲ تا عدد ۸ اضافه کنیم.

استقرای قوی(کامل)

- قانون استقرای قوی: برای اینکه ثابت کنیم p(n) برای همه n های صحیح مثبت، درست است (که p(n) یک تابع گزاره ای است) دو گام زیر باید انجام شود:
  - گام پایه: مشخص میکنیم که p(1) درست است.
  - گام استقرا: نشان میدهیم که برای همه k های صحیح مثبت گزاره شرطی $p(1) \wedge p(2) \ldots \wedge p(k) \to p(k+1)$ درست است.

استقرای قوی(کامل)

تفاوت اصلی در این استقرا تنها در قسمت «گام استقرا» است. در این روش به جای فرض درستی $P(k)$، فرض می‌کنیم تمام عبارت‌های $P(۱)$ تا $P(k)$ درست هستند و با استفاده از آنها درستی $P(k+۱)$ را نتیجه می‌گیریم.

برای اثبات درستی استقرای قوی همانند قبل، می‌دانیم $P(۱)$ درست است. درستی $P(۲)$ از $P(۱)$ نتیجه می‌شود. چون این دو عبارت صحیح هستند، $P(۳)$ نیز درست خواهد بود و به همین ترتیب برای هر عددی $P(n)$ ثابت می‌شود.

پس از کمی تامل می‌توان دریافت که هر استقرای ساده را می‌توان بصورت استقرای قوی نیز بیان کرد و بدین ترتیب فرض‌های بیشتری برای حل مسئله خواهیم داشت. در نتیجه بعضا در اثبات‌ها، استقرا را همان استقرای قوی در نظر می‌گیرند.

استقرای قوی

مثال: نشان دهید اگر n عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد، میتوان آن را به صورت حاصلضربی از اعداد اول نوشت.

حل: گام پایه: p(2) درست است. (۲ عدد اول است.)

گام استقرا: فرض کنیم p(j) برای همه $2 \le j \le k$ برقرار است.

برای p(k+1) دو حالت وجود دارد. اگر k+1 اول باشد که مسئله حل شده است. در غیر اینصورت k+1=ab که a و b هر دو کمتر یا مساوی k هستند. بنابراین طبق فرض استقرا هر دو به صورت حاصلضرب اعداد اول هستند.

استقرای قوی

تمرین: ثابت کنید برای هر $n > 1$ تساوی زیر درست است:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{m}$$

k یک عدد فرد و m یک عدد زوج است

استقرای قوی

- اصل خوش ترتیبی: هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح نامنفی دارای کوچکترین عنصر است.
- اگر اصل خوش ترتیبی به عنوان یک قضیه در نظر گرفته شود، میتوان آن را با استقرا ثابت کرد(تمرین).

تابع بازگشتی

- برای تعریف تابع به شکل بازگشتی روی دامنه اعداد صحیح نامنفی به صورت زیر عمل میکنیم:
  - مشخص کردن مقدار تابع در صفر
  - مشخص کردن قانونی برای یافتن مقدار تابع در یک عدد صحیح بر حسب مقدار تابع در اعداد صحیح کوچکتر

تابع بازگشتی

مثال:

$$f(0) = 3,$$
$$f(n+1) = 2f(n) + 3.$$

تابع بازگشتی

مثال: اعداد فیبوناچی

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

تابع بازگشتی

پاسخ: اگر دنباله فیبوناچی $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ باشد می‌دانیم $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ و جملات بعدی هر یک، برابر با جمع دو جملهٔ قبلی هستند یعنی $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. این رابطه، مرتبهٔ ۲ است و دو شرط اولیه $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ دارد پس:

$F_2 = F_1 + F_0 = 1$, $F_3 = 1+1 = 2$, $F_4 = 2+1 = 3$, $F_5 = 3+2 = 5$, $F_6 = 5+3 = 8$,

$F_7 = 8+5 = 13$, $F_8 = 13+8 = 21$, $F_9 = 21+13 = 34$

تابع بازگشتی و استقرا

- یکی از روش های حل روابط بازگشتی، این است که ابتدا فرم کلی جواب را حدس بزنیم سپس با کمک استقرا مقادیر ثابت را پیدا کنیم و نشان دهیم که جوابمان درست است.
- شرط: حدس زدن فرم جواب!