ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

فصل دهم

گراف

گراف

گراف G از دو مجموعهٔ V و E تشکیل شده است و می‌نویسیم $G=(V,E)$ که $V \neq \phi$ مجموعهٔ رئوس (Vertices) یا گره‌ها (nodes) است و E مجموعهٔ یال‌ها (لبه‌ها Edges) یا کمان‌ها (arcs) می‌باشد. اگر E شامل زوج‌های مرتب $(E \subseteq V \times V)$ باشد آنگاه **گراف جهت‌دار** (digraph) است، و اگر E شامل زوج‌های نامرتب باشد آنگاه **گراف غیرجهت‌دار** (undirected graph) است. زوج مرتب (a,b) نشان‌دهندهٔ یال جهت‌دار $a \longrightarrow b$ می‌باشد و زوج نامرتب $\{a,b\}=ab$ یا $\{b,a\}=ba$ نشان‌دهندهٔ یال غیرجهت‌دار $a \text{ — } b$ می‌باشد که در واقع به صورت $a \rightleftarrows b$ نیز می‌توان در نظر گرفت.

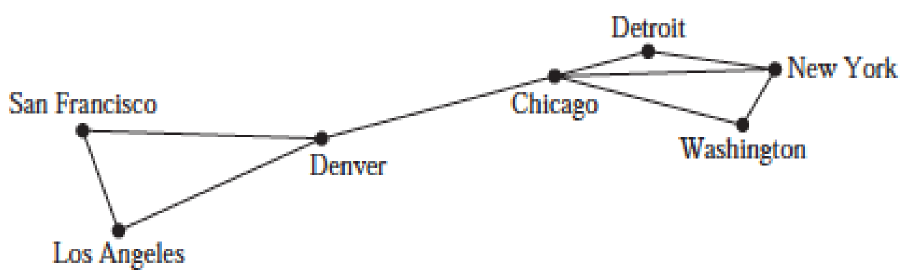
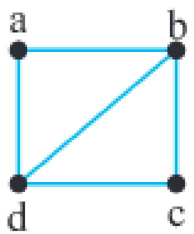


FIGURE 1 **A Computer Network.**

مثال گراف $G=(V,E)$ که $V=\{a,b,c,d\}$ و

$$E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,d\},\{b,d\}\}=\{ab,bc,cd,ad,bd\}$$

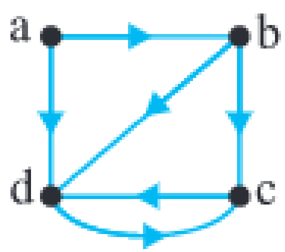
یک گراف غیرجهت‌دار است که می‌توان به شکل ۱ این گراف را رسم کرد و گراف $G=(V,E)$ که $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,c),(a,d),(b,d)\}$ یک گراف جهت‌دار است که به شکل ۲ قابل رسم است: (شکل گراف منحصر به فرد نیست و می‌توان رئوس را در صفحه طور دیگری قرار داد)



شکل (۱)

$$|V|=n=p=۴\ ,\ |E|=e=q=۵$$

$$\deg(a)=\deg(c)=۲\ ,\ \deg(b)=\deg(d)=۳$$



شکل (۲)

$$|V| = n = p = ۴ \;,\; |E| = e = q = ۶$$

$$indeg(a) = id(a) = deg^{-}(a) = ۰,\; id(b) = ۱,\; id(c) = ۲, id(d) = ۳$$

$$outdeg(a) = od(a) = deg^{+}(a) = ۲,\; od(b) = ۲, od(c) = ۱,\; od(d) = ۱$$

• گراف جهتدار (digraph): گراف جهتدار شامل یک مجموعه ناتهی از رئوس V و یک مجموعه یالهای جهتدار E است. هر یال جهتدار با یک زوج مرتب از رئوس نمایش داده میشود.

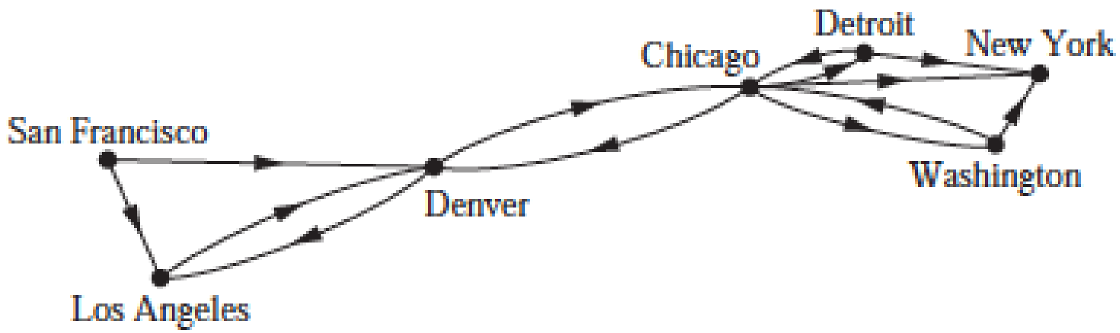
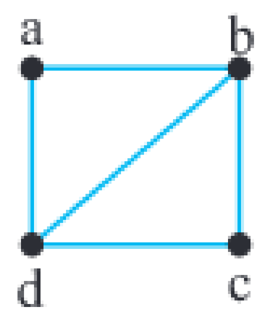


FIGURE 4 A Communications Network with One-Way Communications Links.

تعداد رئوس گراف را مرتبهٔ گراف گویند و با $|V|$ یا n یا p نشان می‌دهند. تعداد یال‌ها را اندازهٔ گراف گویند و با $|E|$ یا e یا q نشان می‌دهند. در گراف غیرجهت‌دار، درجهٔ هر راس برابر است با تعداد یالی که با آن رأس برخورد کرده‌اند که در شکل ۱ نشان داده شده است. حداکثر درجه رئوس را درجه گراف گویند پس گراف شکل ۱ درجه ۳ است.

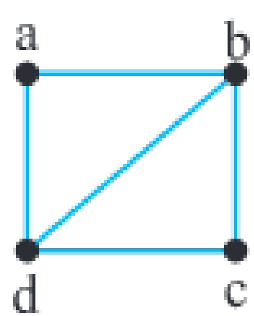


شکل (۱)

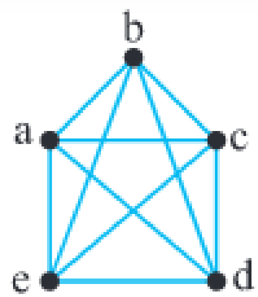
قضیه: در هر گراف غیرجهت‌دار، مجموع درجات همهٔ رئوس، دو برابر تعـداد یـال‌هاسـت یعنـی $\sum_{v\in V} \deg(v) = ۲e$. مثلاً در گراف شکل ۱:

$$\deg(a)+\deg(b)+\deg(c)+\deg(d) = ۲+۳+۲+۳ = ۱۰ = ۲\times ۵ = ۲e$$

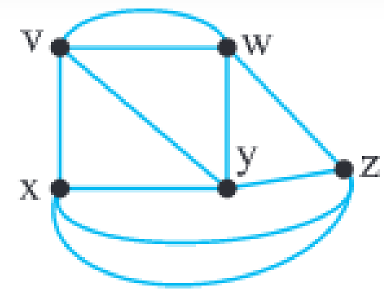
نتیجه: با توجه به این که ۲e زوج است پس جمع درجات رئوس، زوج اسـت در نتیجـه رئوسـی که درجهٔ فرد هستند، حتماً تعدادشان زوج است. مثلاً در گراف شکل ۱ دو رأس b و d درجـهٔ فـرد هستند.



شکل (۱)



شکل (۳)



شکل (۴)

در گراف شکل ۴، دو یال بین v و w وجود دارد (همچنین دو یال بین x و z وجود دارد) که به این یال‌ها، لبه‌های چندگانه (multiedge) گویند و به گرافی که لبهٔ چندگانه دارد، **گراف چندگانه** (multigraph) گویند. به گرافی که لبهٔ چندگانه و طوقه ندارد، **گراف ساده** (simple) گویند. گراف شکل ۳ ساده است.

• گراف ساده: گرافی که در آن یالهای چندگانه (یال های موازی) نداریم و هر یال دو رأس متفاوت را به هم متصل میکند.

• گراف چندگانه: گرافی که شامل یال های چندگانه باشد.

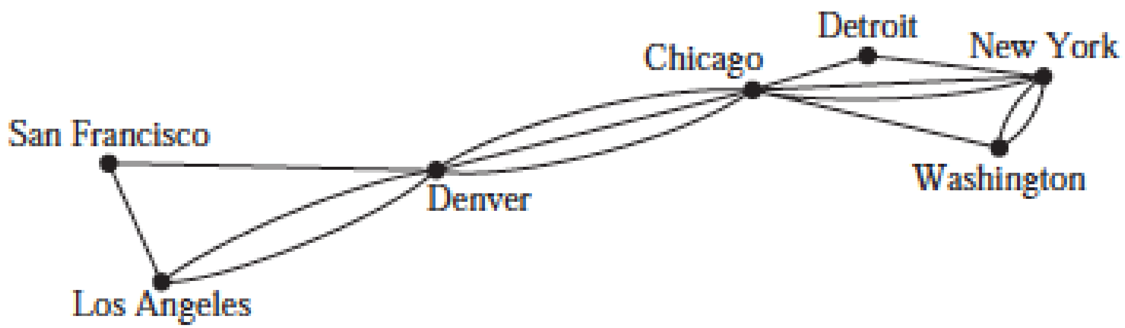


FIGURE 2 **A Computer Network with Multiple Links between Data Centers.**

- طوقه (حلقه): یالی که یک رأس را به خودش وصل میکند.
- به گرافی که شامل طوقه باشد، شبه گراف هم گفته میشود.

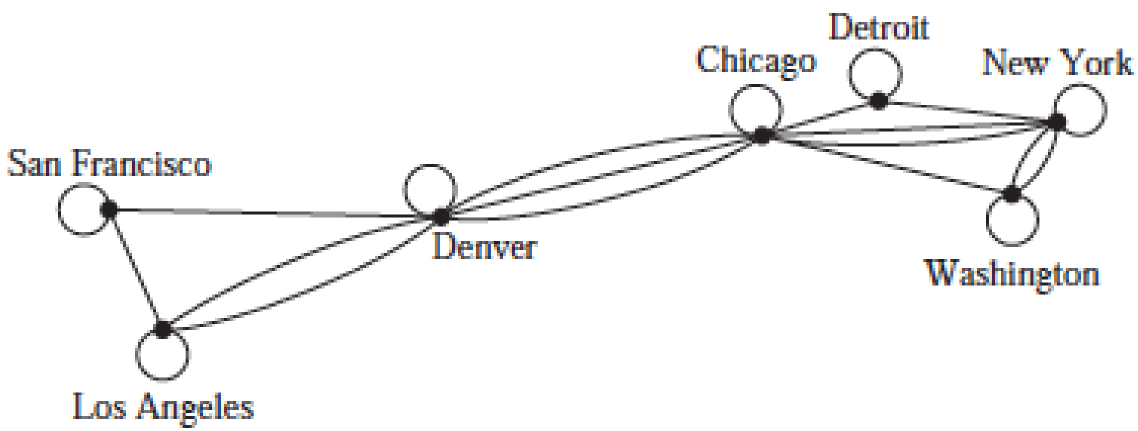
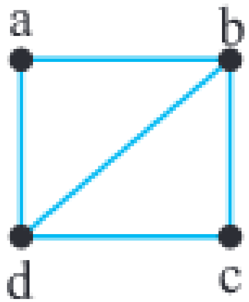


FIGURE 3 **A Computer Network with Diagnostic Links.**

جدول مقابل دسته‌بندی گراف‌ها را از نظر برخی منابع نشان می‌دهد:

نوع	یال‌ها	لبه‌های چندگانه مجاز است؟	طوقه مجاز است؟
گراف ساده	غیرجهت‌دار	خیر	خیر
گراف چندگانه	غیرجهت‌دار	بله	خیر
شبه‌گراف	غیرجهت‌دار	بله	بله
گراف ساده جهت‌دار	جهت‌دار	خیر	خیر
گراف چندگانه جهت‌دار	جهت‌دار	بله	بله
گراف آمیخته (Mixed)	جهت‌دار و غیرجهت‌دار	بله	بله

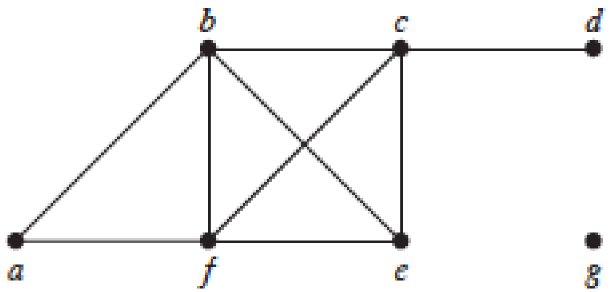
- دو رأس در یک گراف را مجاور (همسایه) گوییم، اگر رئوس انتهایی یک یال باشند.
- مجموعه همه همسایه های رأسی مانند v را همسایگی v مینامیم و آن را با N(v) نشان میدهیم.
- درجه یک رأس در گراف بدون جهت: تعداد یال هایی که مجاور آن رأس هستند و با deg(v) نشان داده میشود.



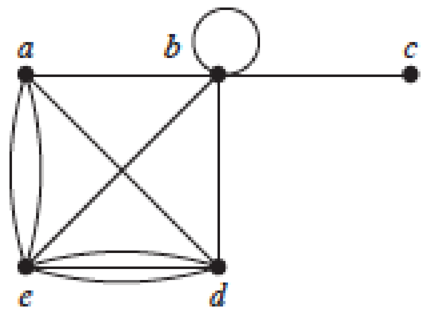
شکل (۱)

N(a)={b,d}
N(b)={a,c,d}

- به رأسی با درجه صفر رأس تنها گفته میشود.
- به گره های درجه یک، برگ گفته میشود.



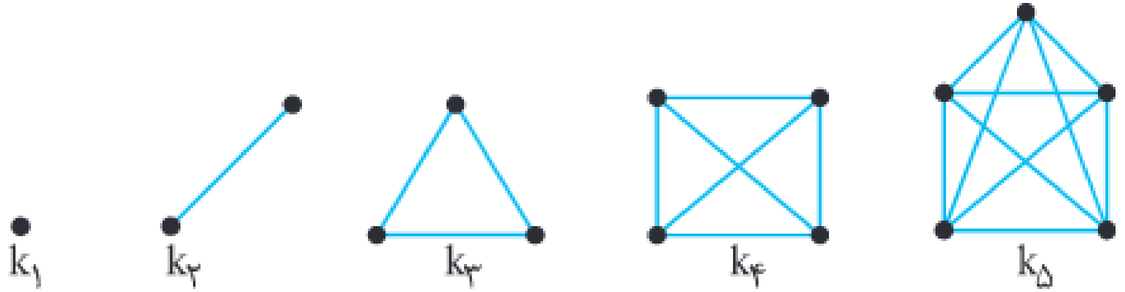
G



H

گراف کامل (complete)، گراف (غیرجهت‌دار) ساده‌ای است که همهٔ رئوس آن مجاور هستند یعنی بین هر دو راس آن دقیقاً یک یال وجود دارد. گراف کامل با n راس را با k_n نشان می‌دهیم.

شکل ۵ گراف‌های k_n، $۱\leq n\leq ۵$ را نشان داده است.



گراف k_n دارای n راس و $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال است ؛

مسیر و دور

فرض کنید x و y رئوسـی از گـراف (جهـت‌دار یـا غیرجهـت‌دار) $G=(V,E)$ باشـند. گشـت $x-y(\text{walk})$ در G دنبالهٔ محدودی از رئوس و یال‌ها به شکل زیر است:

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \ldots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

که از x شروع و به y ختم می‌شود و شامل n تا یال $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ یـا $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ کـه $1 \le i \le n$ می‌باشد. طول این گشت برابر n یعنی تعداد یـال‌هـای گشـت اسـت. (اگـر $n = 0$ یعنـی شامل هیچ یالی نباشد $x = y$ بوده و گشت را بدیهی گویند). اگر $x = y$ و $n > 1$ آنگـاه گشـت را بسته گویند (closed walk) در غیر این صورت گشت باز است. (دقت کنید یک گشـت مـی‌توانـد راس و یال تکراری داشته باشد).

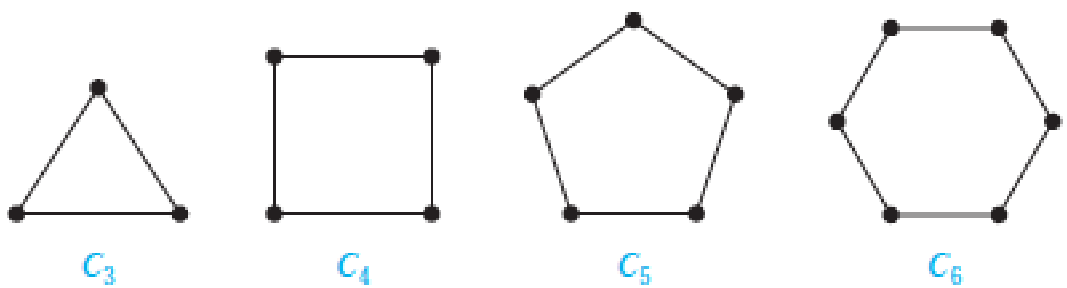
مسیر و دور

اگر هیچ یالی در گشت $x-y$ تکرار نشود، آنگاه گشت را **گـذر** $x-y(\text{trail})$ گویند. گذر بسـته $x-x$ را **مـدار** (circuit) گوینـد. اگـر هـیچ راسـی در گشـت $x-y$ تکرار نشود آنگاه گشت را **مسیر** $x-y(\text{path})$ گویند و اگر $x=y$ مسیر بسته را **سـیکل** (دور cycle) گویند.

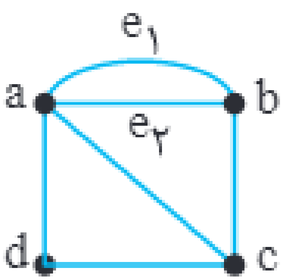
توجه: اگر لبه‌های چندگانه وجود نداشته باشد، نیازی به ذکر یال‌ها نیست و فقـط رئـوس را در دنباله می‌نویسیم.

مسیر و دور

- دور C_n: شامل n رأس $\{v_1, v_2,\ldots,v_n\}$ و یال های $\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{n-1},v_n),(v_n,v_1)\}$ است



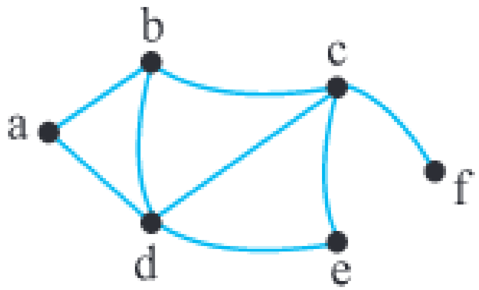
مسیر و دور



مثال در گراف مقابل دنبالهٔ (a,e_1,b,c) مسیر به طول ۲ از a به c (یا c به a) است. دنبالهٔ (a,e_2,b,c,a,d) گذر به طول ۴ از a به d (یا d به a) است.

دنبالهٔ (a,e_2,b,e_2,a) گشت بستهٔ $a-a$ به طول ۲ است و دنبالهٔ (a,e_1,b,c,a) سیکل $a-a$ به طول ۳ است.

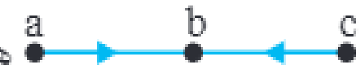
مسیر و دور



مثال در گراف مقابل:

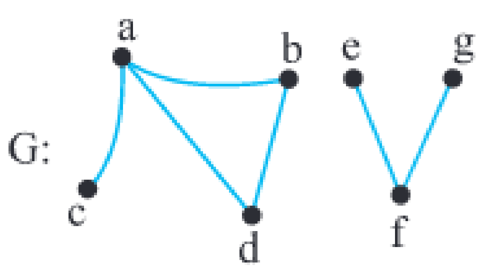
- دنبالهٔ $b \leftarrow d \leftarrow e \leftarrow c \leftarrow d \leftarrow b \leftarrow a$ گشت $a-b$ به طول ۶ است که رئوس b و d و یال $\{b,d\}$ تکرار شده‌اند.
- دنبالهٔ $f \leftarrow c \leftarrow e \leftarrow d \leftarrow c \leftarrow b$ گشت $b-f$ به طول ۵ است که راس c تکرار شده است ولی یالی تکرار نشده است پس این گشت، گذر نیز هست.
- دنبالهٔ $a \leftarrow d \leftarrow e \leftarrow c \leftarrow f$ گشت $f-a$ به طول ۴ است که هیچ راس و یالی تکرار نشده است پس این گشت، گذر و مسیر نیز هست. پس بهتر است بگوییم مسیر $f-a$.
- دنبالهٔ (a,b,d,c,e,d,a) مدار $a-a$ به طول ۶ است ولی سیکل نیست.
- دنبالهٔ (a,b,c,d,a) سیکل $a-a$ به طول ۴ است.

مسیر و دور

تعریف: گراف غیرجهت‌دار G را همبند یا متصل (connected) گوییم اگـر بـین هـر دو راس متفاوت در G مسیری وجود داشته باشد. گراف جهت‌دار در صـورتی متصـل اسـت کـه اگـر جهـت یال‌ها را نادیده بگیریم آنگاه بین هـر دو راس مسـیری وجـود داشـته باشـد مـثلاً گـراف جهـت‌دار 

همبند است دقت کنید از a به c مسیری وجود نـدارد ولـی اگـر جهـت‌هـا را نادیده بگیریم آنگاه بین هر دو راس مسیری وجود دارد. تمام گراف‌هایی که تاکنون دیدیم، همبنـد بودند.

مسیر و دور

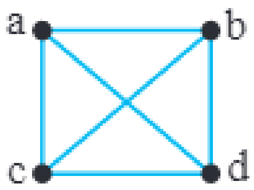


گراف شکل ناهمبند است، مثلاً از a به e هیچ مسیری وجود ندارد.. این گراف دارای ۲ مولفهٔ همبندی است. تعداد مولفه‌های گراف G را با $K(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال در گراف k_4 چندتا مسیر بین دو رأس a و b وجود دارد؟

پاسخ: یک مسیر به طول ۱، دو مسیر به طول ۲ و دو مسیر به طول ۳ وجود دارد پس ۵ تا مسیر از a به b وجود دارد:

$$[a,b],[a,c,b],[a,d,b],[a,c,d,b],[a,d,c,b]$$



مثال در گراف k_n چند تا مسیر بـه طـول m $(1 \le m \le n-1)$ بـین دو راس a و b $(a \neq b)$ وجود دارد؟

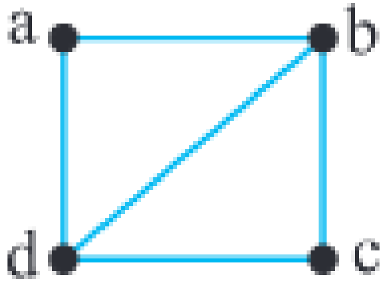
پاسخ: مسیر به طول m شامل $m+1$ راس است که دو راس آن a و b هستند پس بایـد از $n-2$ راس تعداد $m-1$ راس انتخاب شود و ترتیب رئوس نیز اهمیت دارد یعنی رئوس انتخابی اگر جابجا شوند، مسیر عوض می‌شود، بنابراین تعداد مسیر به طول m بـین a و b $(a \neq b)$ در k_n برابـر بـا تعداد جایگشت‌های $m-1$ از $n-2$ می‌باشد:

$$(n-2)_{m-1} = \frac{(n-2)!}{(n-m-1)!}$$

دورو گذر اویلری

تعریف: فرض کنید G گرافی است که راس ایزوله ندارد، گوییم G دارای **مدار اویلری** است اگـر مداری در G وجود داشته باشد که از هر یال دقیقاً یکبار عبور کند. اگـر در G گـذر بـازی وجود داشته باشد که از هر یال دقیقاً یکبار عبور کند، به آن گذر، **گذر اویلری** گوییم.

مثال گراف مقابل دارای گذر اویلری [b,c,d,a,b,d] است ولـی ایـن گـراف مدار اویلری ندارد.



دورو گذر اویلری

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه گراف غیرجهت‌دار دارای مـدار اویلـری باشـد آن اسـت کـه همبند باشد و درجهٔ همهٔ رئوس، زوج باشد.

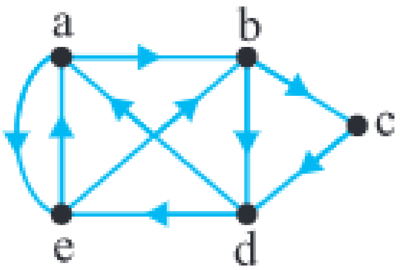
نتیجه: k_n در صورتی مدار اویلری دارد که n فرد باشد زیرا درجـات رئـوس k_n برابـر $n-۱$ است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای انکه گراف غیرجهت‌دار دارای گـذر اویلـری باشـد ان اسـت کـه همبند باشد و فقط دو رأس درجهٔ فرد داشته باشد. راس شروع و پایان گذر اویلـری، رئـوس درجـهٔ فرد هستند.

دورو گذر اویلری

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود مدار اویلری در گراف جهت‌دار آن است که گـراف همبنـد باشد و برای هر راس x، $id(x) = od(x)$ یعنی درجه ورودی هر راس بـا درجـه خروجـی آن برابـر باشد.

به عنوان مثال در گراف جهت دار شکل ۷ درجه ورودی و خروجی هر رأس یکسان است و مدار اویلری دارد:



$[a, b, c, d, e, a, e, b, d, a]$

شکل (۷)

سیکل و مسیر همیلتونی

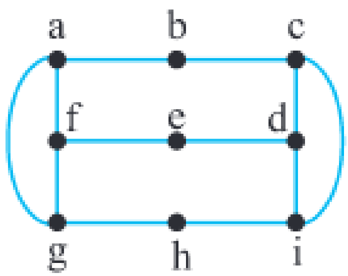
تعریف: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف با $|V|\geq ۳$ باشد، گوییم G دارای **سیکل همیلتنی** است اگر سیکلی در G وجود داشته باشد که همهٔ رئوس را دقیقاً یکبار ملاقات کند. یک **مسیر همیلتونی** مسیری است (و نه سیکل) که همهٔ رئوس را دقیقاً یکبار ملاقات کند.

سیکل و مسیر همیلتونی

واضح است که اگر سیکل همیلتونی وجود داشته باشد آنگاه حتماً مسیر همیلتنی نیز وجود دارد و برای یافتن مسیر همیلتنی کافی است یک یال را از سیکل همیلتنی حذف کنیم. ولی ممکن است گرافی مسیر همیلتنی داشته باشد ولی سیکل همیلتنی نداشته باشد. مثلاً گراف شکل ۸ دارای مسیر همیلتنی است ولی سیکل همیلتنی ندارد.

سیکل و مسیر همیلتونی

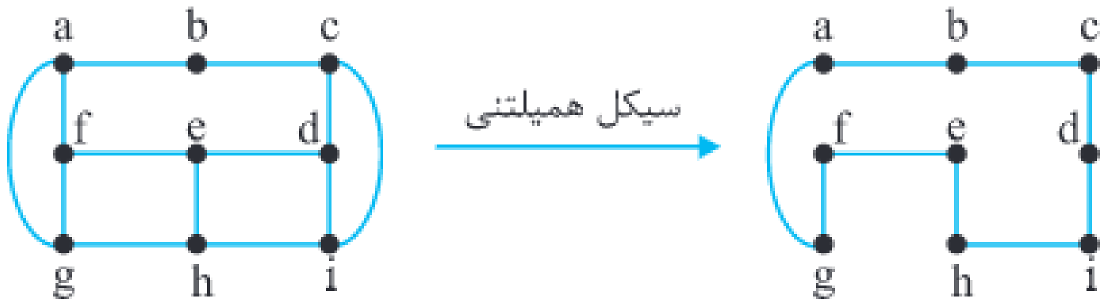
واضح است که اگر سیکل همیلتونی وجود داشته باشد آنگاه حتماً مسـیر همیلتنــی نیـز وجـود دارد و برای یافتن مسیر همیلتنی کافی است یک یال را از سیکل همیلتنی حذف کنیم. ولی ممکن است گرافی مسیر همیلتنی داشته باشد ولی سیکل همیلتنــی نداشـته باشـد. مـثلاً گـراف شـکل ۸ دارای مسیر همیلتنی است ولی سیکل همیلتنی ندارد.



شکل (۸) مسیر همیلتنی [abcdefghi] ولی سیکل همیلتنی ندارد.

سیکل و مسیر همیلتونی

گراف شکل ۹ همیلتنی است (یعنی سیکل همیلتنی دارد) بنابراین مسیر همیلتنی نیز دارد.

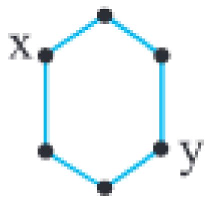


سیکل و مسیر همیلتونی

ظاهراً سیکل (مسیر) همیلتنی با مدار (گذر) اویلری با هم رابطه دارند ولی متاسفانه هیچ رابطه‌ای بین این دو نیست. اویلر می‌خواهد هر یال را دقیقاً یکبار ملاقات کند و همیلتن مایل است هر راس را دقیقاً یکبار ملاقات کند. برخلاف مدار (گذر) اویلری، هیچ قضیه لازم و کافی برای سیکل (مسیر) همیلتنی وجود ندارد. ولی قضیهٔ لازم یا قضیهٔ کافی وجود دارد.

سیکل و مسیر همیلتونی

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ گراف ساده غیرجهت‌دار و $|V|=n\geq ۲$ باشد اگر بـه ازای هـر دو راس x و y $(x\neq y)$ داشته باشیم $\deg(x)+\deg(y)\geq n-۱$ آنگاه G دارای مسـیر همیلتنـی است. توجه کنید عکس این قضیه درست نیست مثلاً گراف



دارای مسیر همیلتنی است ولی $\deg(x)+\deg(y)=۴$ که از $n-۱=۵$ بیشتر یا مساوی نیست.

گراف دو بخشی

- گراف ساده G دوبخشی است، اگر مجموعه رئوس آن را بتوان به دو مجموعه جدا از هم V_1 و V_2 تقسیم کرد بطوریکه هر یال در G یک رأس از مجموعه V_1 را به یک رأس از مجموعه V_2 وصل کند.

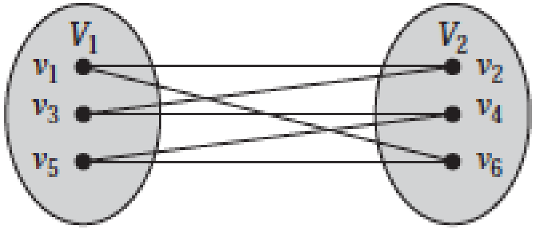
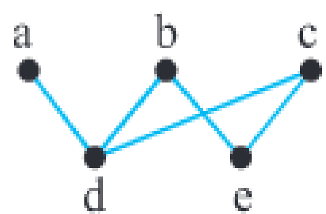


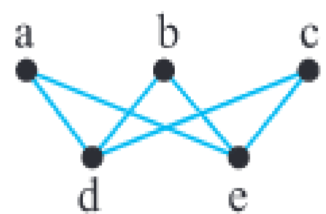
FIGURE 7 **Showing That C_6 Is Bipartite.**

گراف دو بخشی

گراف‌های شکل ۱۲ و ۱۱ گراف دوبخشی هستند که $V_۱ = \{a,b,c\}$ و $V_۲ = \{d,e\}$.
اگر همهٔ رئوس $V_۱$ با همهٔ رئوس $V_۲$ مجاور باشند آنگاه گراف را دوبخشی کامل گویند، بنابراین گراف شکل ۱۱ دوبخشی کامل نیست زیرا راس a با راس e مجاور نیست. گراف شکل ۱۲ دوبخشی کامل است که آن را $k_{۲,۳}$ یا $k_{۳,۲}$ می‌نامیم.



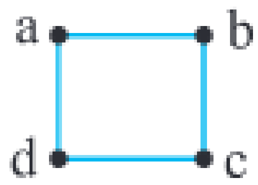
شکل (۱۱)

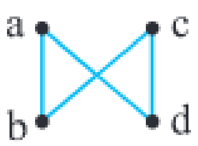


شکل (۱۲)

$k_{۲,۳} = k_{۳,۲}$

گراف دو بخشی

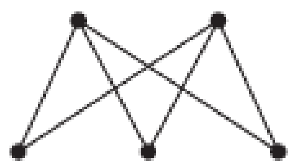
مثال آیا گراف  دوبخشی است؟

پاسخ: می‌توان این گراف را به شکل  کشید و اکنون واضح است که دوبخشی است و

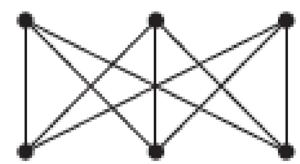
$V_1 = \{a,c\}$ و $V_2 = \{b,d\}$. در ضمن دوبخشی کامل $k_{2,2}$ است.

گراف دو بخشی

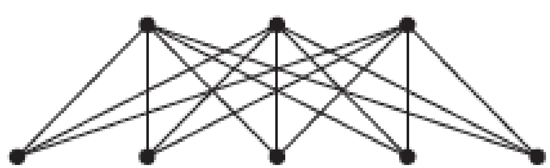
- گراف کامل دو بخشی $K_{m,n}$: گرافی دو بخشی که m رأس در مجموعه اول و n رأس در مجموعه دوم دارد و بین هر دو رأس از دو مجموعه متفاوت دقیقا یک یال وجود دارد.



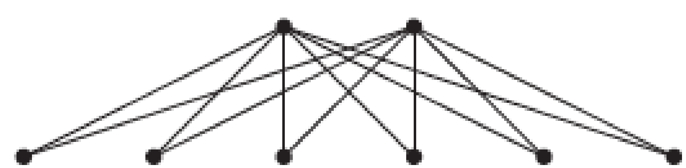
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



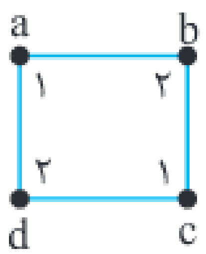
$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

گراف دو بخشی

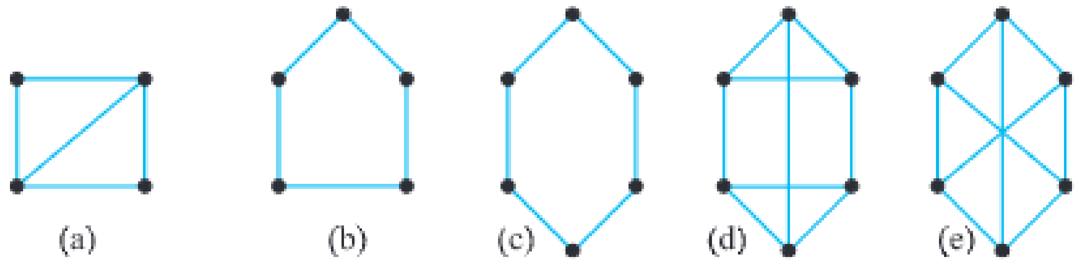
قضیه: یک گراف دوبخشی است اگر و فقط اگر بتوان دو رنگ متفاوت را چنان به رئـوس گـراف تخصیص داد که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشند.



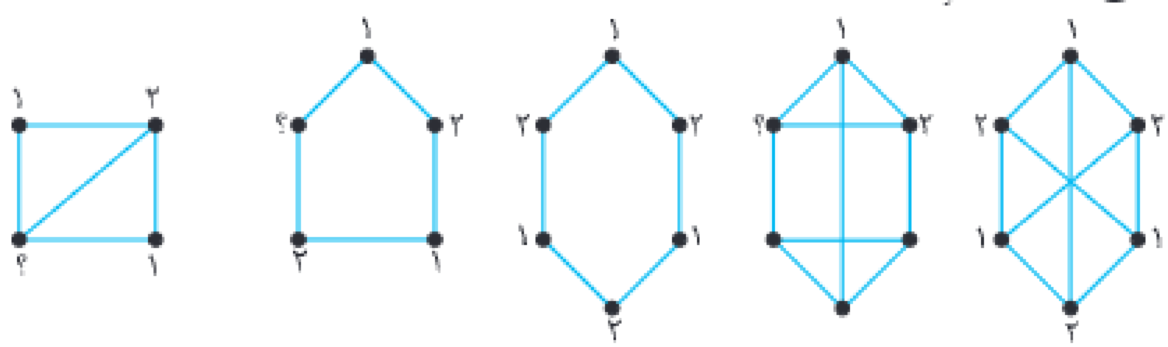
بنابراین در گراف مثال قبل می‌توان به a و c رنگ ۱ و به b و d رنگ ۲ را نسـبت داد:

گراف دو بخشی

مثال کدام یک از گرافهای زیر دوبخشی هستند و اگر دو بخشی هستند آیا دوبخشی کامل هستند؟



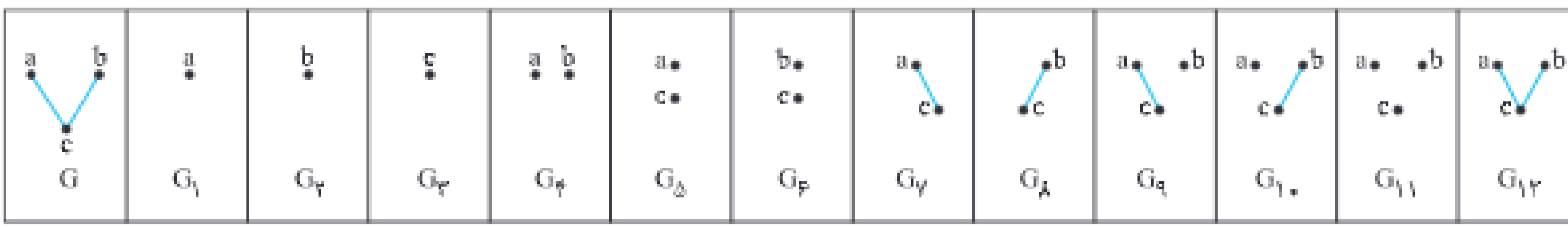
پاسخ: با توجه به قضیهٔ رنگ‌آمیزی، گراف‌های (c) و (e) دوبخشی هستند و با توجه بـه درجـات رئوس، (e) دوبخشی کامل $k_{۳,۳}$ است.



زیرگراف

تعریف: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف (جهت‌دار یا غیرجهت‌دار) است، آنگاه $G_1=(V_1,E_1)$ را **زیرگرافِ** (subgraph) G گویند هرگاه $\phi \neq V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$، به شرطی که هر یال در E_1 رئوسش در V_1 باشند.

مثال تمام زیرگراف‌های گراف G، نشان داده شده‌اند:



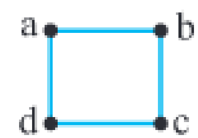
زیرگراف

تعریف: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف (جهت‌دار یا غیرجهت‌دار) است و $G_1=(V_1,E_1)$ زیرگرافِ G است. اگر $V_1=V$ آنگاه G_1 را **زیرگراف پوشای** G (spanning subgraph) گویند. یعنی زیرگراف پوشا، زیرگرافی است که شامل همه رئوس گراف است. در مثال قبل، G_9 و G_{10} و G_{11} و G_{12} زیرگراف‌های پوشای G هستند. گرافی که دارای n راس و e یال است، دارای 2^e زیرگراف پوشاست (چرا؟)

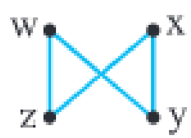
گراف یکریخت

تعریف: گراف‌های سادهٔ $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت (ایزومورفیک) گویند اگر تابع یک به یک و پوشای f از V_1 به V_2 وجود داشته باشد با این خاصیت که به ازای هر دو راس a و b در V_1 اگر a و b در G_1 مجاور باشند آنگاه $f(a)$ و $f(b)$ در G_2 مجاور باشند و برعکس. تابع f را یک ایزومورفیسم (یکریختی) گویند.

به زبان ساده‌تر، دو گراف را یکریخت یا ایزومورف گویند هرگاه بتوان آنها را مثل هم در صفحه رسم کرد. مثلاً گراف



و

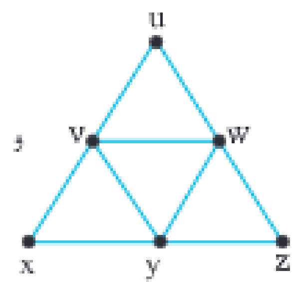


ایزومورف هستند.

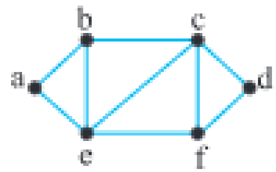
گراف یکریخت

توجه: معمولاً بررسی ایزومورف بودن دو گراف، کار سختی است. دو گراف ایزومورف بایـد همـهٔ خواصشان مثل هم باشد. پس اگر خاصیتی مشاهده کردید که در یک گراف برقرار باشد و در گـراف دیگر برقرار نباشد پس آن دو گراف با هم ایزومورف نیستند.

مثلاً دو گراف



و

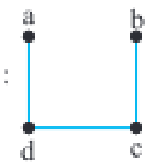


هر دو ۶ راس و ۹ یال دارنـد ولـی ایزومـورف نیستند و چون در گراف اول، ۳ راس درجهٔ ۲ وجود دارد (x,u,z) و در گـراف دوم ۲ راس درجـه ۲ وجود دارد (d,a).

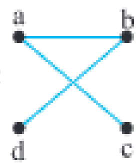
گراف مکمل

تعریف: فرض کنید G گراف سادهٔ n راسی است. مکمل گراف G (با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم)، زیرگرافی از k_n است که شامل همهٔ n راس G می‌باشد و شامل همهٔ یال‌هایی از k_n می‌باشد که در G نیستند. به عبارتی برای یافتن مکمل گراف G، رئوس G را حفظ می‌کنیم و یال‌های G را از یال‌های k_n کم می‌کنیم.

به عنوان مثال، مکمل گراف G :



به شکل $\overline{G}$:



می‌باشد. اگر توجه کنید. در این مثال، G با $\overline{G}$ ایزومورف است که گویند G **خود مکمل** (self complement) است. پس به گرافی خود مکمل گویند که با مکمل خودش ایزومورف باشد.

نمایش گراف

برای نمایش یا پیاده‌سازی گراف سه روش عمده مطرح می‌باشد:

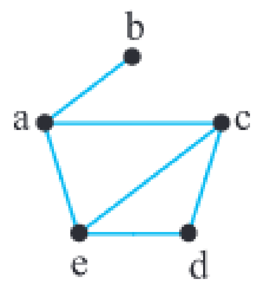
۱- لیست‌های مجاورتی

۲- ماتریس مجاورتی

۳- ماتریس برخورد

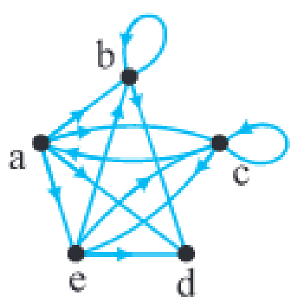
۱- لیست‌های مجاورتی (adjacency lists): برای نمایش گراف‌های بدون لبه‌های چندگانه می‌توان nتا لیست (n تعداد رئوس است) تشکیل داد و در لیست i همه نودهایی را قرار داد که راس i با آنها مجاور است.

نمایش گراف



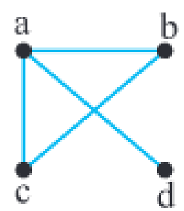
A simple Graph

Vertex	Adjacent Vertices
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d



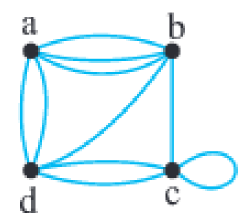
Initial Vertex	Terminal Vertices
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	——
e	b, c, d

۲- ماتریس مجاورتی: یک ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ ij (سطر i ستون j) آن نشان می‌دهد چند یال از راس i به راس j وجود دارد. در شکل‌های زیر چند گراف به همراه ماتریس مجاورتی نمایش داده شده‌اند:



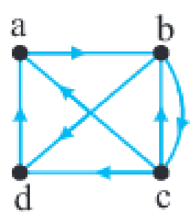
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

(a)



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

نکات

۱- برای گراف بدون یال چندگانه، ماتریس، بولی است یعنی درایه‌ها صفر و یک هستند.

۲- برای گراف بدون طوقه، قطر اصلی، صفر است.

۳- برای گراف غیرجهت‌دار، ماتریس، متقارن است.

۴- برای گراف غیرجهت‌دار بدون طوقه، جمع درجات هر سطر یا ستون برابر درجهٔ راس نظیر آن سطر یا ستون است.

۵- برای گراف جهت‌دار، جمع درایه‌های هر سطر برابر درجهٔ خروجی و جمع درایه‌های هر ستون برابر درجهٔ ورودی راس نظیر است. مثلاً در شکل (c) فوق، جمع درایه‌های سطر c برابر ۳ است که درجهٔ خروجی راس c است و جمع درایه‌های ستون c برابر ۱ است که درجه ورودی c است.

۶- اگر A ماتریس مجاورتی باشد (هر گرافی) آنگاه درایهٔ سطر i ستون j از ماتریس A^k، تعداد گشت به طول k از راس i به راس j را نشان می‌دهد. مثلاً در گراف (c) فوق، اگر ماتریس مجاورتی را A بنامیم آنگاه A^2 و A^4 عبارتند از:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow A^2=A.A=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}\rightarrow A^4=A^2.A^2=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

درایهٔ (b,a) در ماتریس A^2 برابر ۲ است نشان می‌دهد از b بـه a دو تـا گشـت بـه طـول ۲ وجود دارد: $a\rightarrow d\rightarrow b$ و $a\rightarrow c\rightarrow b$.

درایهٔ (c,a) از ماتریس A^4 برابر ۳ است که نشان می‌دهد از c به a، ۳ تا گشـت بـه طـول ۴ وجود دارد:

$$a\rightarrow c\rightarrow b\rightarrow a\rightarrow c \quad \text{و} \quad a\rightarrow d\rightarrow b\rightarrow a\rightarrow c \quad \text{و} \quad a\rightarrow d\rightarrow c\rightarrow b\rightarrow c$$

مسائل کوتاهترین مسیر

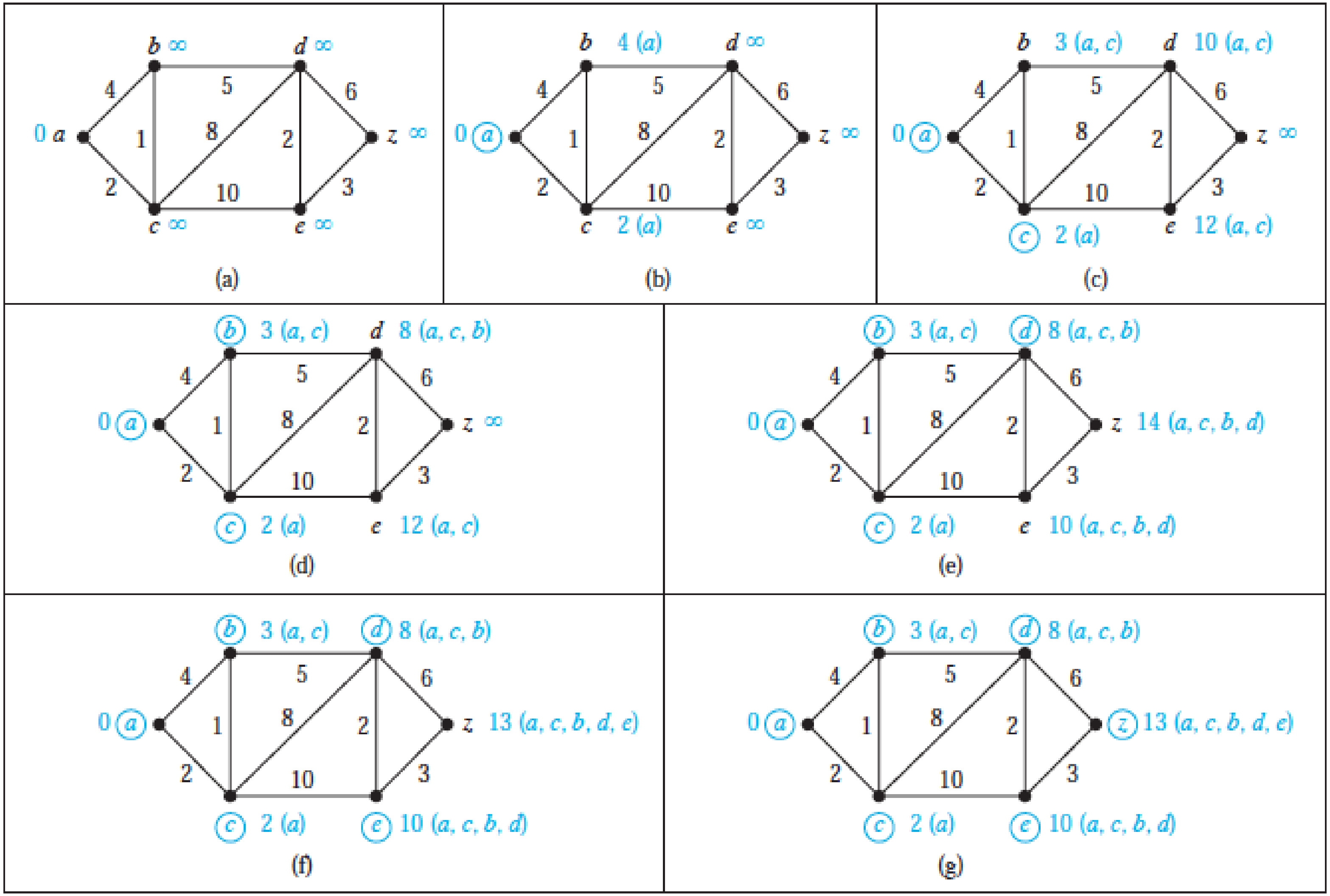
- مسئله ۱: پیدا کردن مسیری با کوتاهترین طول بین دو رأس
  - الگوریتم دیکسترا
- مسئله فروشنده دوره گرد: پیدا کردن دوری با کوتاهترین طول
  - یافتن دور همیلتونی با کمترین طول

الگوریتم دیکسترا

ALGORITHM 1 Dijkstra's Algorithm.

procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
$L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
$u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
$S := S \cup \{u\}$
for all vertices v not in S
if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
{this adds a vertex to S with minimal label and updates the
labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

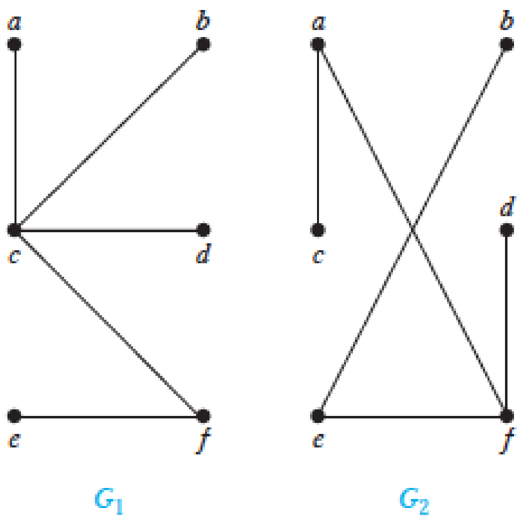
مثال:



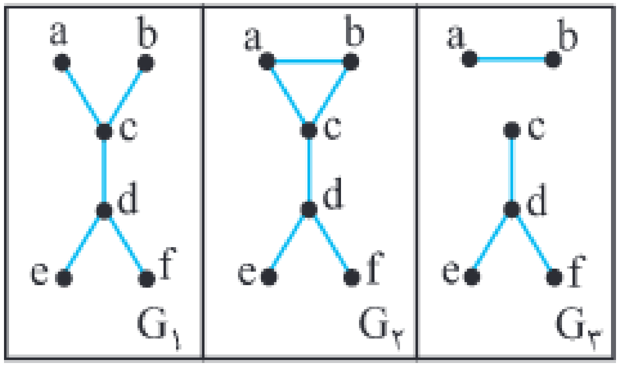
b ∞
d ∞
0 a
z ∞
c ∞
e ∞
(a)
b 4 (a)
d ∞
0 a
z ∞
c 2 (a)
e ∞
(b)
b 3 (a, c)
d 10 (a, c)
0 a
z ∞
c 2 (a)
e 12 (a, c)
(c)
b 3 (a, c)
d 8 (a, c, b)
0 a
z ∞
c 2 (a)
e 12 (a, c)
(d)
b 3 (a, c)
d 8 (a, c, b)
0 a
z 14 (a, c, b, d)
c 2 (a)
e 10 (a, c, b, d)
(e)
b 3 (a, c)
d 8 (a, c, b)
0 a
z 13 (a, c, b, d, e)
c 2 (a)
e 10 (a, c, b, d)
(f)
b 3 (a, c)
d 8 (a, c, b)
0 a
z 13 (a, c, b, d, e)
c 2 (a)
e 10 (a, c, b, d)
(g)

درخت

- درخت: گراف همبند بدون دور (بدون جهت)
- قضیه: یک گراف بدون جهت درخت است اگر و فقط اگر بین هر دو رأس آن یک مسیر یکتا وجود داشته باشد.



درخت

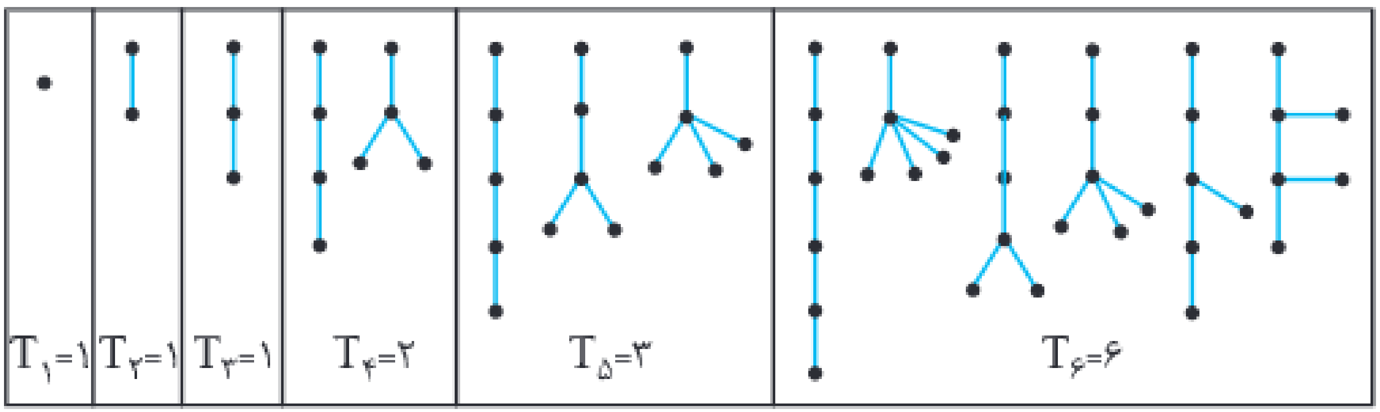


تعریف: گراف همبند فاقد سیکل را **درخت** گویند.
اگر گراف، فاقد سیکل باشد و لزوماً همبند نباشد، به آن **جنگل** (forest) گویند:

G_1 درخت است (می‌توان گفت جنگل نیز هست) G_2 درخت نیست چون سیکل دارد ([abca]) G_3 ناهمبند است پس درخت نیست ولی از دو مولفه که هر یک درخت هستند تشکیل شده است پس G_3 جنگل است. G_1 و G_3 هر دو زیرگراف‌های پوشای G_2 هستند. G_1 را درخت پوشای G_2 گویند. پس درخت پوشا (Spanning tree) زیرگراف پوشایی است که درخت باشد.

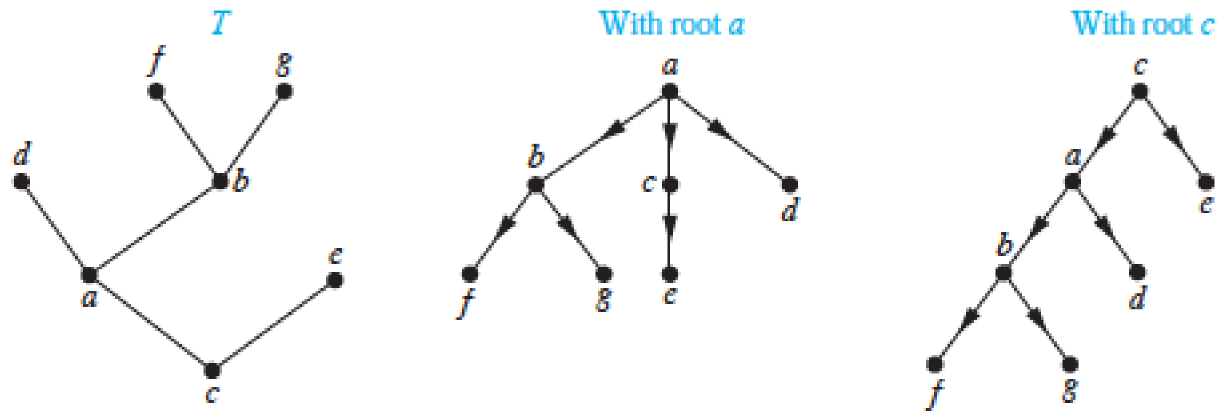
مثال تعداد درخت‌های n راسی غیرایزومورف را T_n می‌نامیم. مطلوبست T_1 و T_2 و ... و T_7. یعنی چند تا درخت غیرایزومورف با ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ راس وجود دارد؟

پاسخ:



درخت ریشه دار

- درخت ریشه دار: درختی که رأسی به عنوان ریشه دارد و یال ها به صورت جهتدار از ریشه دور میشوند.

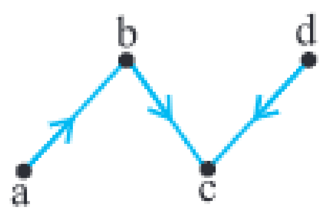


درخت ریشه دار

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ را یک درخت جهت‌دار گویند، اگر بـدون در نظـر گـرفتن جهـت یالها یک درخت باشد. درخت جهت‌دار G را ریشه‌دار گوییم اگر راس منحصر به فردی مثل r باشـد که $\deg^{-}(r)=0$ و برای هر راس دیگر مثل v ، $\deg^{-}(v)=1$، در این صورت r را ریشـه گوینـد. درخت ریشه‌دار را طوری رسم می‌کنیم که ریشه بالا باشد و جهت یالها بـه سـمت پـایین بنـابراین نیازی به رسم جهت یالها نیست.

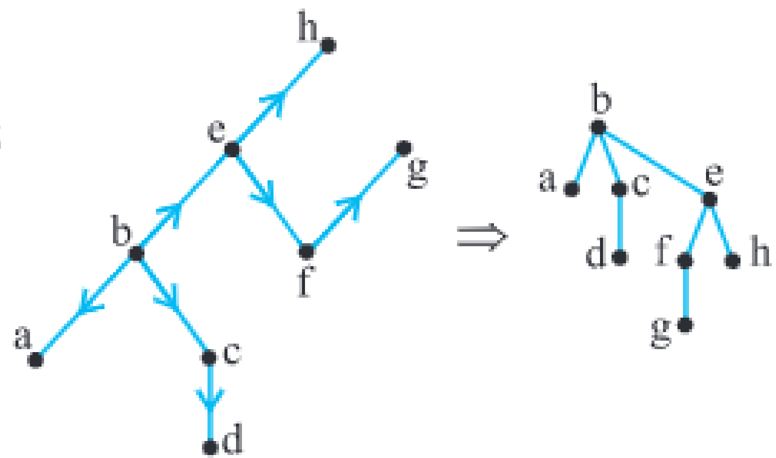
مثال

شکل (a) ریشه‌دار نیست. شکل (b) ریشه‌دار است.



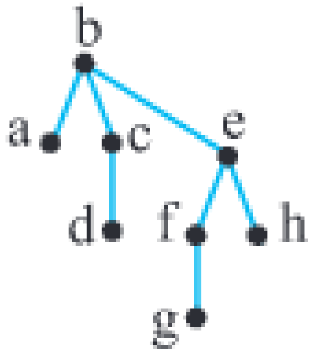
(a)

$deg^{-}(a)=deg^{-}(d)=0$



(b)

$deg^{-}(b)=0$, $deg^{-}(others)=1$



گره خارجی یا برگ (Leaf) : گره‌های با درجه خروجی صفر مثل h,g,d,a

گره داخلی: گره‌های با درجه خروجی مخالف صفر مثل b,c,e,f

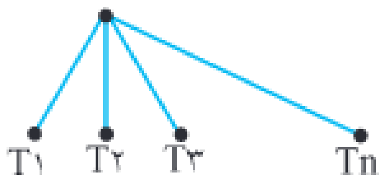
سطح (Level) : طول مسیر ریشه به هر نود. در مثال فوق سطح e,c,a برابر ۱، سطح h,f,d برابر ۲ و سطح g برابر ۳ و سطح ریشه یعنی b برابر صفر است. (در بعضی منابع سطح ریشه ۱ است و سطح فرزندان ریشه یعنی e,c,a برابر ۲ و ...)

ارتفاع (height): ماکزیمم شماره سطح. در مثال فوق ارتفاع درخت ۳ است (در بعضی منابع ۴ است).

گره‌های همزاد یا همنیا یا بردار (sibling) : گره‌های با پدر مشترک مثل e,c,a که پدرشان b است یا f,h که پدرشان e است.

جد یا نیا (ancestor) و زاده یا نواده (descendant) : راس x را نیای راس y گویند اگر مسیری از x به y وجود داشته باشد. در این صورت راس y را زاده یا نواده راس x گویند. در مثال قبل، g زاده f و e و b است و بنابراین f و e و b نیاکان g هستند.

پیمایش درخت‌های ریشه‌دار: دو نوع پیمایش پیش ترتیب (Preorder) و پس ترتیب (Postorder) به شکل زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $T=(V,E)$ درختی ریشه‌دار با ریشه r باشد. اگر T فقط ریشه r را داشته باشد خود r پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب را تشکیل می‌دهد در غیر این صورت اگر r زیر درختهای $T_1, T_2, \ldots, T_n$ را داشته باشد:



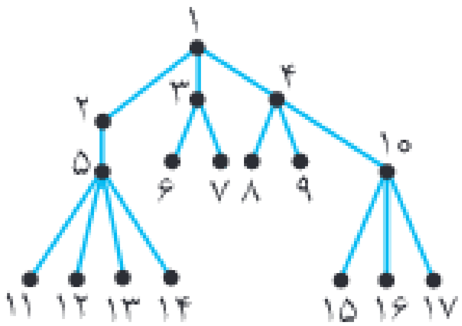
برای پیمایش پیش ترتیب ابتدا r سپس T_1 بعد $T_2, \ldots, T_n$ هر کدام با همین روش پیمایش می‌شوند:

$r\ T_1\ T_2 \ldots T_n$

برای پیمایش پس ترتیب ابتدا T_1 بعد $T_2, \ldots, T_n$ و سپس r . در ضمن $T_1, T_2, \ldots, T_n$ با همین روش پیمایش می‌شوند:

$T_1\ T_2 \ldots T_n\ r$

مثال

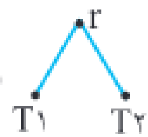


Preorder : ۱, ۲, ۵, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۳, ۶, ۷, ۴, ۸, ۹, ۱۰, ۱۵, ۱۶, ۱۷

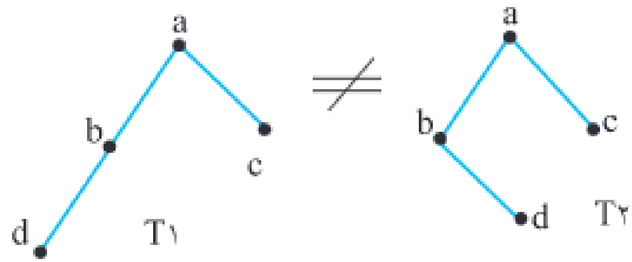
Postorder : ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۵, ۲, ۶, ۷, ۳, ۸, ۹, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۰, ۴, ۱

درخت دودویی(باینری)

درختی که حداکثر تعداد فرزندان گره‌های آن ۲ باشد یعنی درجه خروجی هر گره ۰ یا ۱ یـا ۲ باشد. برای این نوع درخت‌ها پیمایش سومی به نام میان ترتیب (inorder) نیز تعریف می‌شـود کـه ابتدا T_1 و سپس r و بعد T_2 پیمایش می‌شود.



در درختهـای دودویـی، فرزنـد چـپ بـا فرزند راست متفاوت است یعنی دو درخت زیر با هم معادل نیستند.



در درخت T_1، d فرزند چپ b است و در درخت T_2، d فرزند راست b است.

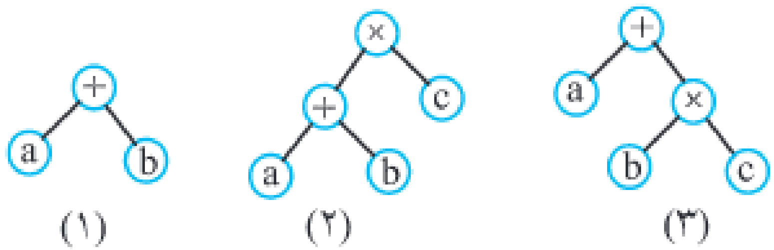
مثال پیمایش‌های پیش، پس و میان ترتیب دو درخت دودویی فوق را بیابید:

$$T_1:\begin{cases}Pre: abdc\\ Post: dbca\\ in: dbac\end{cases}\qquad T_2:\begin{cases}Pre: abdc\\ Post: dbca\\ in: bdac\end{cases}$$

مشاهده می‌شود که چپ و راست بودن فقط برای پیمایش میان ترتیب اهمیت دارد و در پیمایش‌های پس و پیش ترتیب اهمیت ندارد.

نمایش عبارات ریاضی

یکی از کاربردهای درخت‌های دودویی نمایش عبارات ریاضی است. به این صورت که عملگر[1] را ریشه قرار می‌دهیم و عملوندها را فرزندان ریشه:



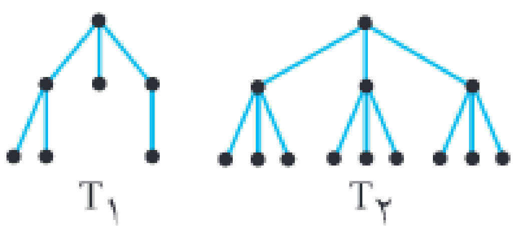
اگر درخت عبارت ریاضی را به صورت Preorder پیمایش کنیم فرم Prefix (لهستانی[2]، پیشوندی) بدست می‌آید و اگر به صورت Postorder پیمایش کنیم فرم Postfix (پسوندی، معکوس لهستانی) بدست می‌آید.

مزیت فرمهای پسوندی و پیشوندی آن است که نیاز به پرانتزگذاری ندارند.

• درخت m تایی (m-ary tree)

یک درخت ریشه‌دار را m تایی گویند اگر هر راس داخلی آن بیش از m فرزند نداشته باشد یعنی درجه خروجی رئوس حداکثر m باشد. درخت m تایی را پر گویند اگر هر راس داخلی دقیقاً m فرزند داشته باشد و برگها هم سطح باشند.

مثال درخت T_1 یک درخت ۳ تایی و T_2 یک درخت ۳ تایی پر به ارتفاع ۲ است:



- درخت مرتب (ordered tree): درختی که ترتیب فرزندان هر نود از چپ به راست مهم است.
- در درخت دودویی هر نود میتواند یک فرزند چپ و یک فرزند راست داشته باشد.

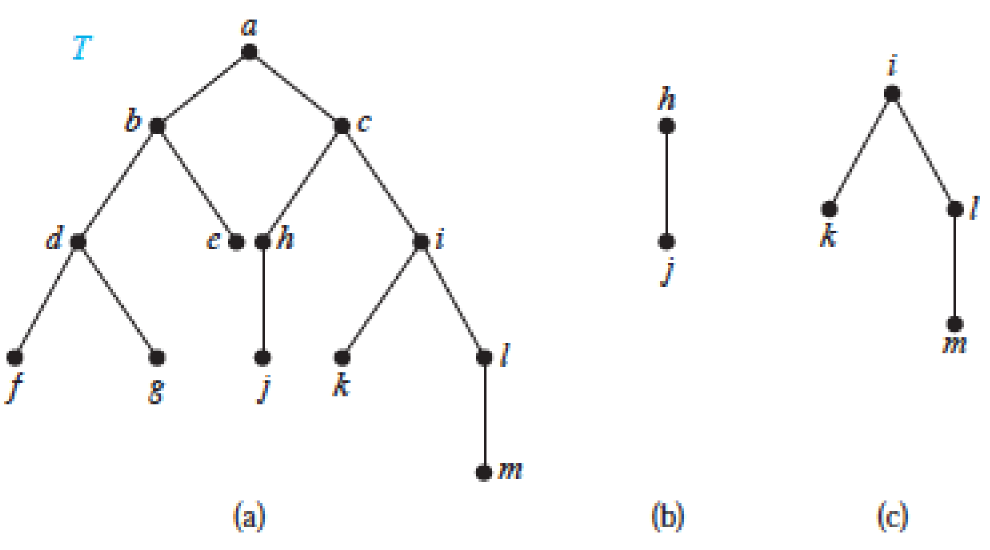


FIGURE 8 A Binary Tree T and Left and Right Subtrees of the Vertex c.

درخت پوشا

• فرض کنید G یک گراف ساده باشد. درخت پوشای G زیرگرافی از G است که درخت است و شامل همه رئوس G است.

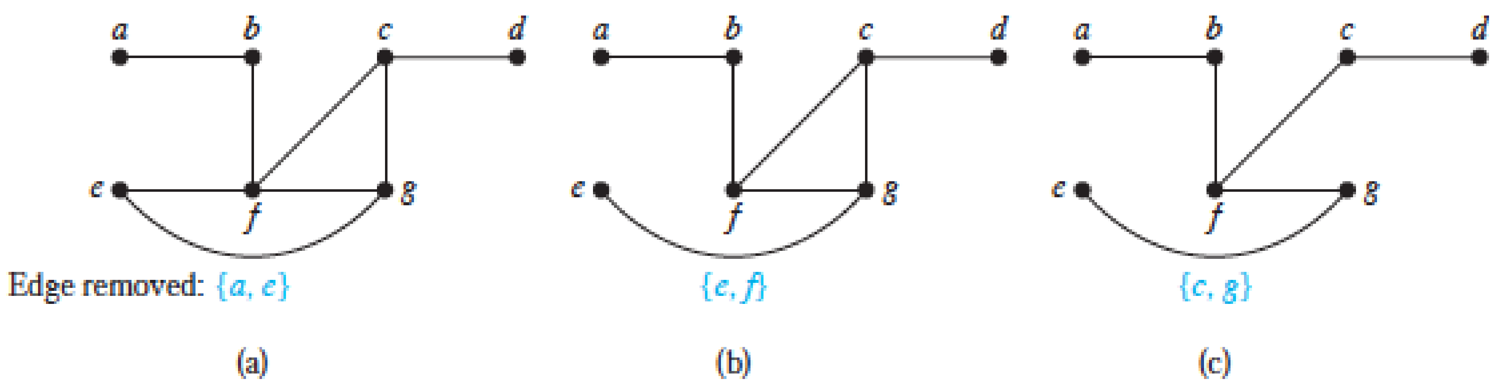


FIGURE 3 Producing a Spanning Tree for *G* by Removing Edges That Form Simple Circuits.

درخت پوشای مینیمم

- درخت پوشای مینیمم در یک گراف وزندار، درخت پوشایی است که مجموع وزن یال هایش کمترین باشد.
  - الگوریتم پرایم
  - الگوریتم کروسکال

الگوریتم پرایم

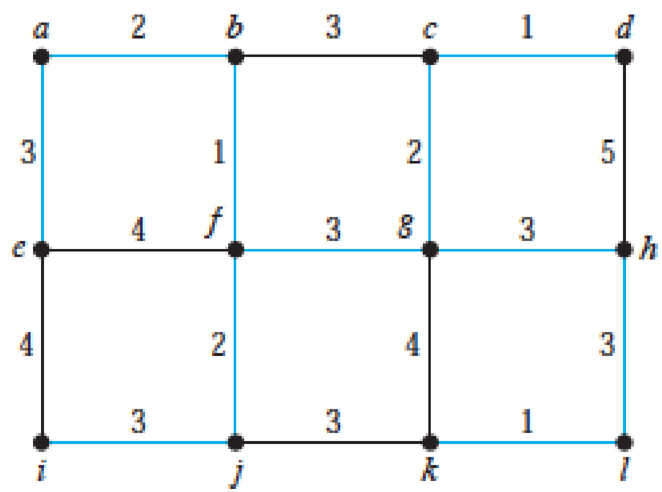
- از یک نود منتخب شروع و در هر زمان یالی با کمترین وزن که از یک رأس منتخب خارج میشود را انتخاب میکند به شرطی که دور ایجاد نشود و رأس انتهایی آن یال به مجموعه رئوس منتخب اضافه میشود..

ALGORITHM 1 Prim's Algorithm.

procedure *Prim*(G: weighted connected undirected graph with n vertices)
T := a minimum-weight edge
for $i := 1$ **to** $n - 2$
    e := an edge of minimum weight incident to a vertex in T and not forming a
        simple circuit in T if added to T
    $T := T$ with e added
return T {T is a minimum spanning tree of G}

الگوریتم پرایم

مثال:



(a)

Choice	Edge	Weight
1	$\{b, f\}$	1
2	$\{a, b\}$	2
3	$\{f, j\}$	2
4	$\{a, e\}$	3
5	$\{i, j\}$	3
6	$\{f, g\}$	3
7	$\{c, g\}$	2
8	$\{c, d\}$	1
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{h, l\}$	3
11	$\{k, l\}$	1
	Total:	24

(b)

FIGURE 4 **A Minimum Spanning Tree Produced Using Prim's Algorithm.**

الگوریتم کروسکال

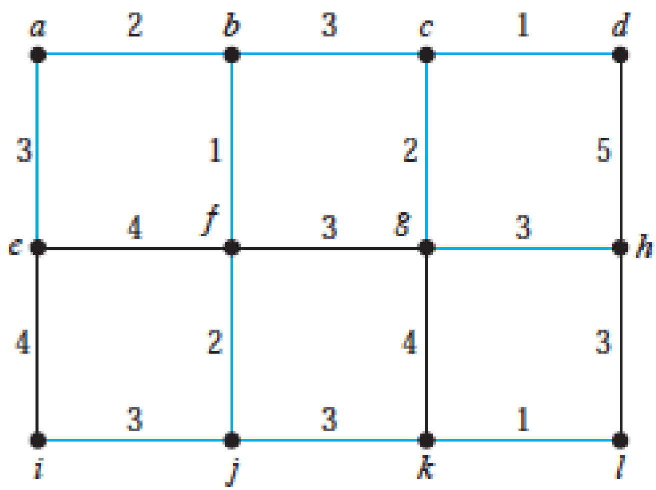
- در هر زمان یالی با کمترین وزن که دور ایجاد نمیکند را انتخاب میکند.

ALGORITHM 2 Kruskal's Algorithm.

procedure *Kruskal*(G: weighted connected undirected graph with n vertices)
T := empty graph
for $i := 1$ **to** $n - 1$
    e := any edge in G with smallest weight that does not form a simple circuit
        when added to T
    $T := T$ with e added
return T {T is a minimum spanning tree of G}

الگوریتم کروسکال

مثال:



(a)

Choice	Edge	Weight
1	$\{c, d\}$	1
2	$\{k, l\}$	1
3	$\{b, f\}$	1
4	$\{c, g\}$	2
5	$\{a, b\}$	2
6	$\{f, j\}$	2
7	$\{b, c\}$	3
8	$\{j, k\}$	3
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{i, j\}$	3
11	$\{a, e\}$	3
	Total:	24

(b)

FIGURE 5 **A Minimum Spanning Tree Produced by Kruskal's Algorithm.**