

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۳

مجتبی خلیلی  
دانشکده برق و کامپیوتر  
دانشگاه صنعتی اصفهان

# الفبا

○ الفبای  $\Sigma$  یک مجموعه **متناهی غیرتهی** از سمبل‌هاست.

○ مثال:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\}$$

$$\Sigma_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, x, y, z\}$$

# رشته

○ به هر دنباله متناهی از سمبل‌های الفبا، یک رشته روی الفبا گوئیم.

○ مثال:

$$\Sigma_1 = \{0, 1\} \longrightarrow 01011$$

# رشته

○ به هر دنباله متناهی از سمبل‌های الفبا، یک رشته روی الفبا گوئیم.

○  $\Sigma^*$  نشان‌دهنده مجموعه همه رشته‌ها روی  $\Sigma$  است.

○  $\Sigma^+$  نشان‌دهنده مجموعه همه رشته‌های غیرتهی روی  $\Sigma$  است.

# مثال

○  $\{a, b\}^*$ : مجموعه رشته‌های متناهی بر روی  $a, b$

- شامل رشته تهی  $\epsilon$
- شامل  $a, aa, aaa$
- شامل  $b, bb, bbb$
- شامل  $ab, ababab, aaaaaaabb$
- شامل دنباله‌های نامتناهی نیست
- تعداد نامتناهی عضو

# عملگرها (رشته)

$$x = bab, \quad y = abbaab$$

Operation	Name	Example
$ x $	Length	$ x  = 3$
$xy$	Concatenation	$xy = bababbaab$
$x^n$	Repetition	$x^3 = babbabbab, x^0 = \lambda$
$x^*$	Kleene Star	$x^* = \{\lambda, bab, babbab, \dots\}$
$x^R$	Reversal	$y^R = baabba$

# زبان

- یک زبان صوری (روی الفبای  $\Sigma$ )، یک زیرمجموعه از  $\Sigma^*$  است.
- زبان‌ها مسائل با جواب بله/خیر را که در نظر خواهیم گرفت نشان می‌دهند.
- مثال: زبان  $L_1$  = همه رشته‌های شامل زیررشته  $bo$   
 $\Sigma_1 = \{a, b, \dots, z\}$

boss, body, fibo are in  $L_1$

$$L_1 = \{x \in \Sigma_1^* \mid x \text{ contains the substring "bo"}\}$$

# مثال

$$\Sigma_2 = \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$L_2 = \{x \in \Sigma_2^* \mid x \text{ is dividable by } 3\}$$



# مثال

$$\Sigma_3 = \{a, b\}$$

$$L_3 = \{w \in \Sigma_2^* \mid |w| = 3\}$$

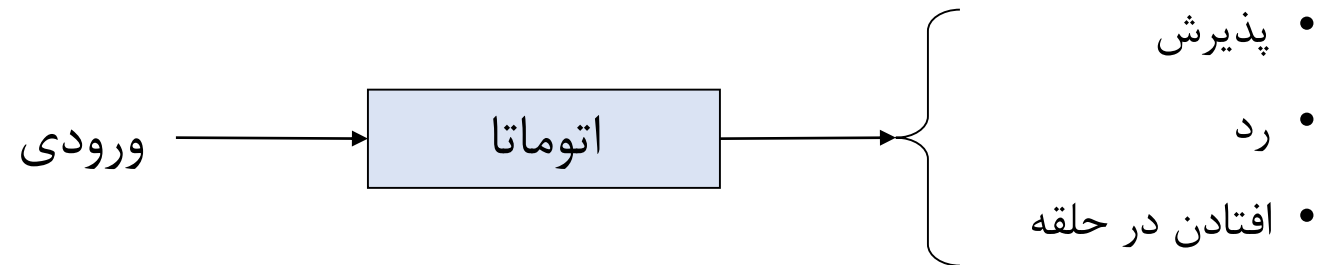
$$L_3 = \{aaa, aab, aba, baa, bba, bab, abb, bbb\}$$

# عملگرهای روی زبان

○ A و B دو زبان صوری

- Complement:  $\overline{A} = \{w \mid w \notin A\}$
- Union:  $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ or } w \in B\}$
- Intersection:  $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ and } w \in B\}$
- Reverse:  $A^R = \{w_1 \dots w_k \mid w_k \dots w_1 \in A\}$
- Concatenation:  $A \circ B = \{vw \mid v \in A \text{ and } w \in B\}$
- Star:  $A^* = \{w_1 \dots w_k \mid k \geq 0 \text{ and each } w_i \in A\}$   
 $= \{\epsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \cup AAAA \cup \dots$

# تشخیص زبان



○ مجموعه همه رشته‌هایی که به پذیرش منتهی می‌شوند، **زبانی** است که ماشین تشخیص می‌دهد.

# مسائلی که در نظر میگیریم

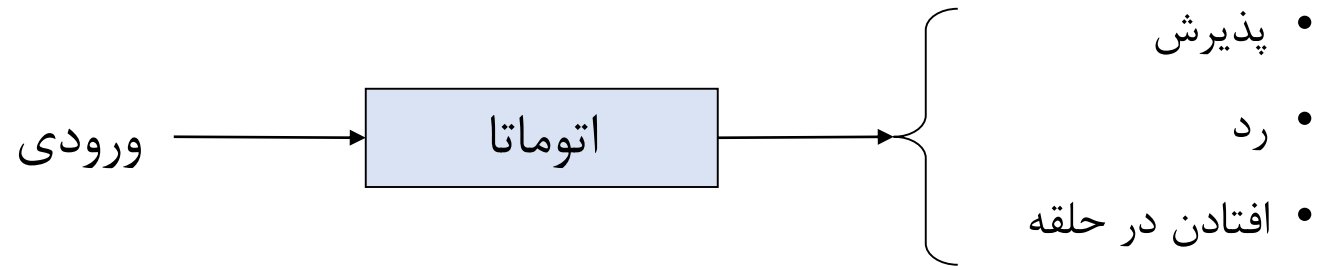
○ مسائلی که در این درس در نظر میگیریم اغلب از نوع **تصمیم** هستند (جواب بله/خیر):

- آیا دو عدد  $a$  و  $b$  برابرند؟

- آیا مقدار  $x$  در مجموعه  $S$  قرار دارد؟

○ مسائل دیگری نیز هستند، مانند «پیدا کنید» ها که ما کمتر به آنها میپردازیم.

# مقدمه‌ای بر اتوماتا

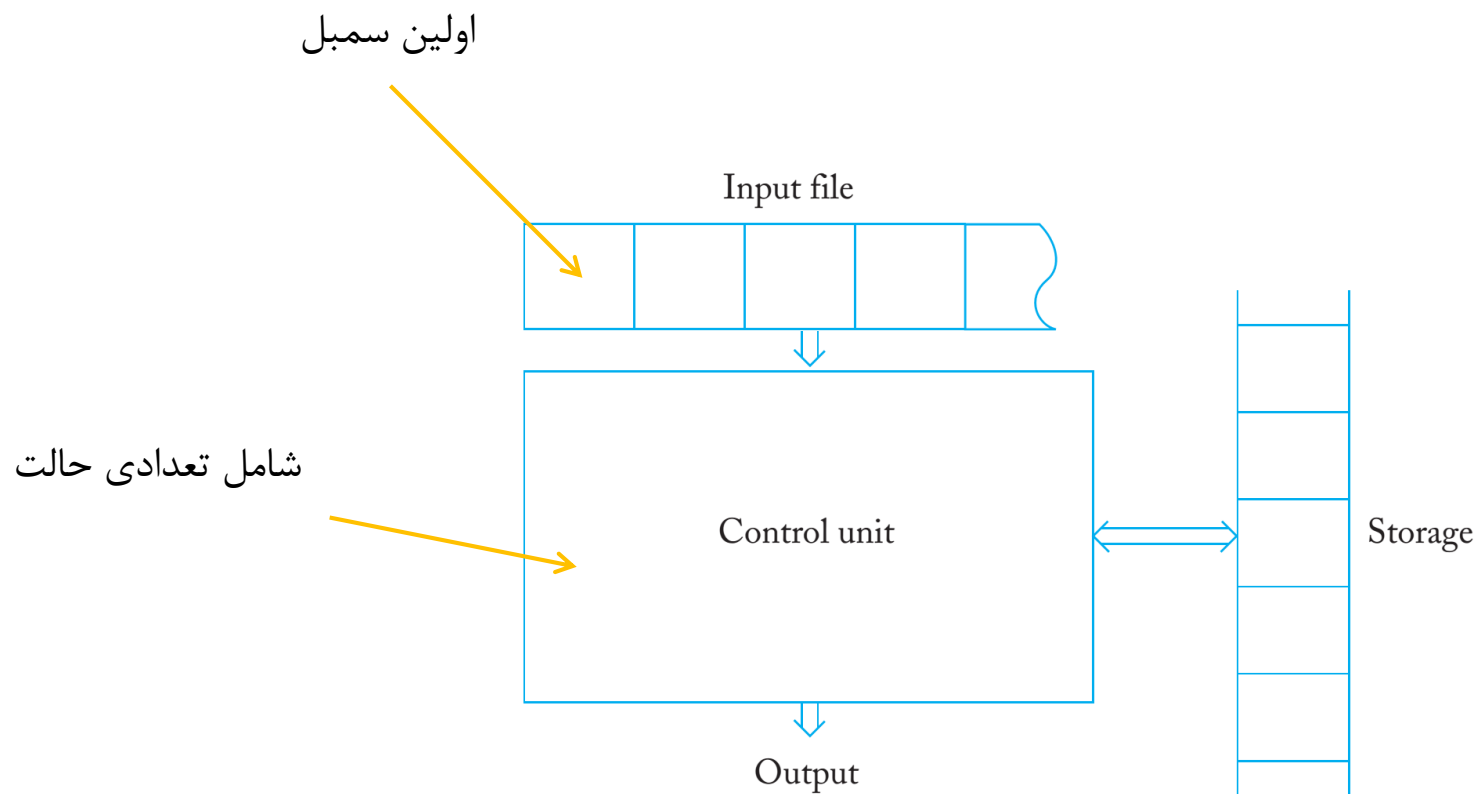


○ ما می‌خواهیم از ساده‌ترین فرمول‌بندی ریاضی برای محاسبه شروع کنیم؛ پس:

- برای جعبه ماشین یک مدل ساده در نظر می‌گیریم.
- تلاش می‌کنیم زبانی را که تشخیص می‌دهد مشخص کنیم.
- زبان‌هایی که این مدل ساده قادر به تشخیصشان نیست را تعیین کنیم.
- ماشینمان را قوی‌تر کنیم تا این محدودیت را برطرف کنیم.

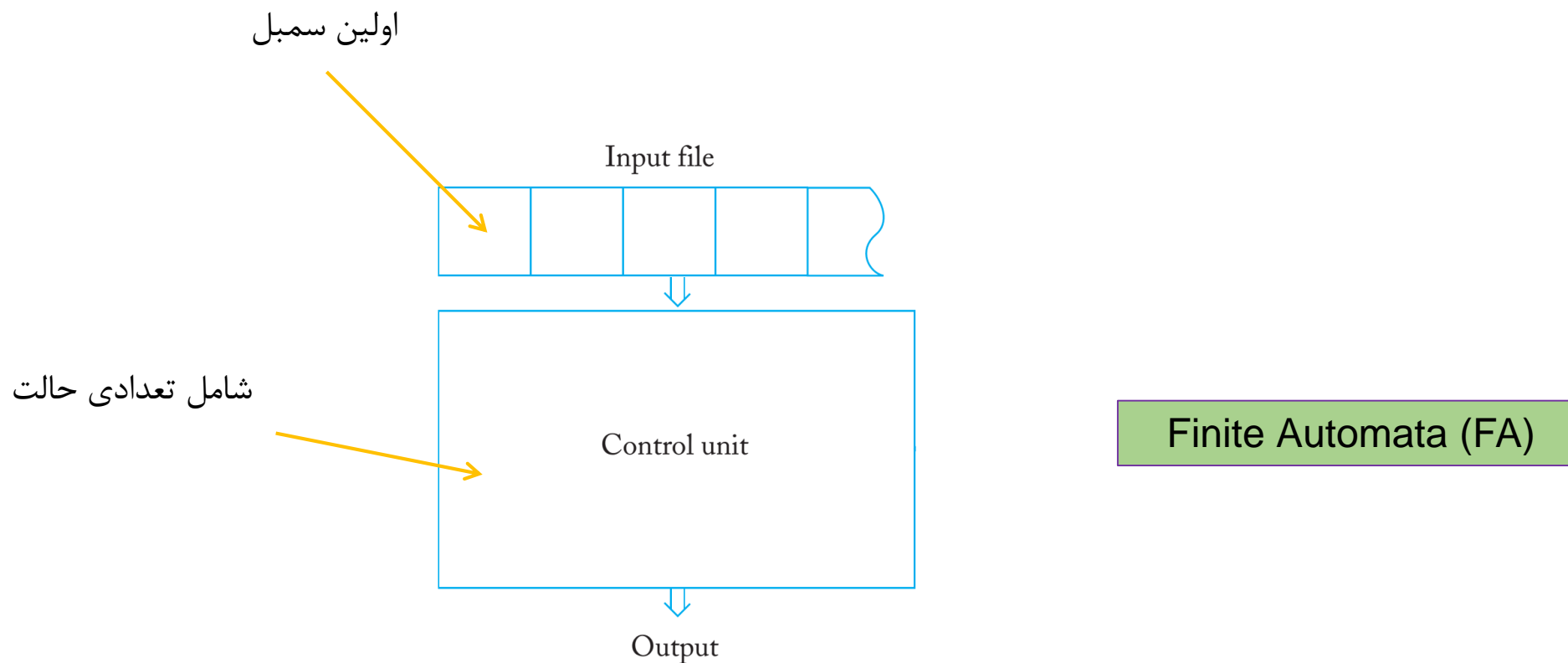
# مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ یک اتوموتن، یک مدل انتزاعی از یک کامپیوتر دیجیتال است.



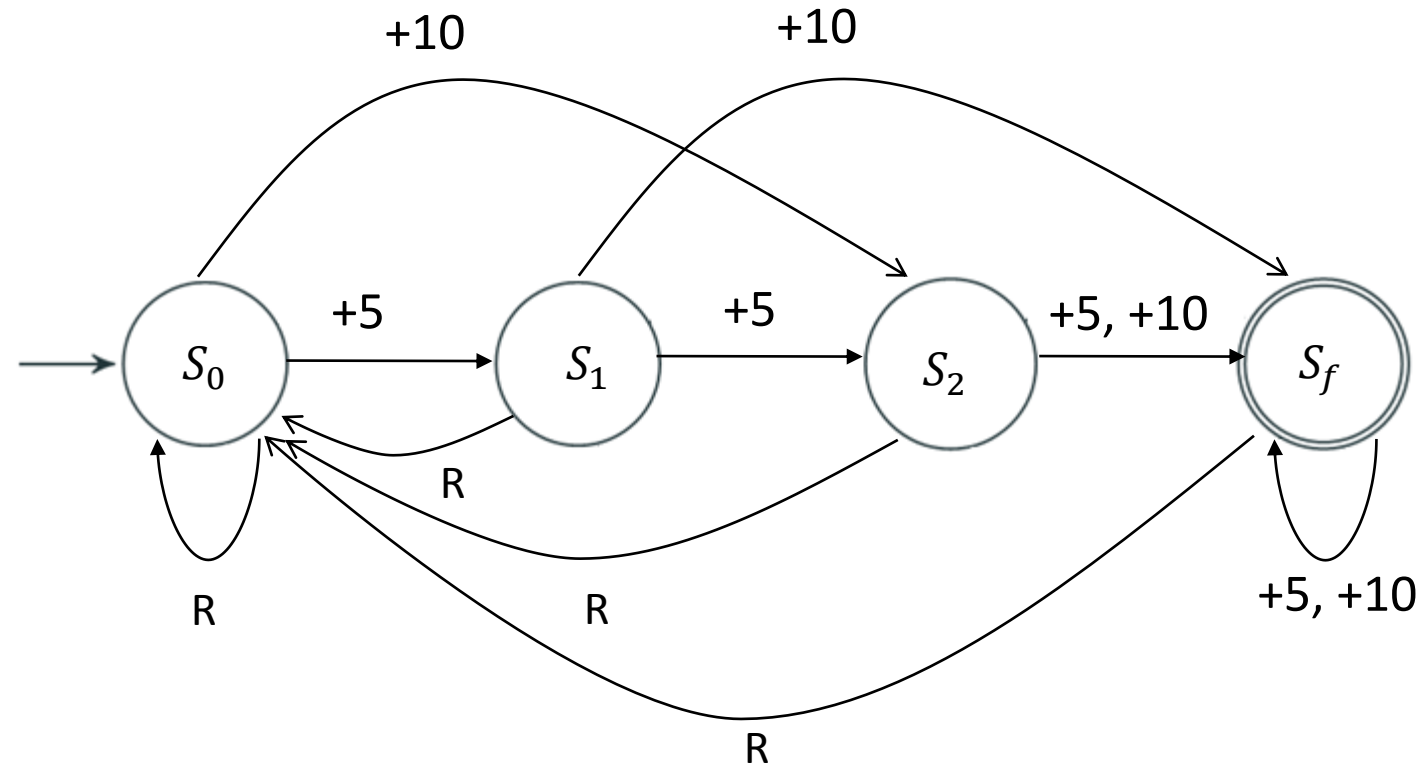
# مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ یک اتوموتن، یک مدل انتزاعی از یک کامپیوتر دیجیتال است.



# مقدمه‌ای بر اتوماتا

○ مثال زیر را در نظر بگیرید:





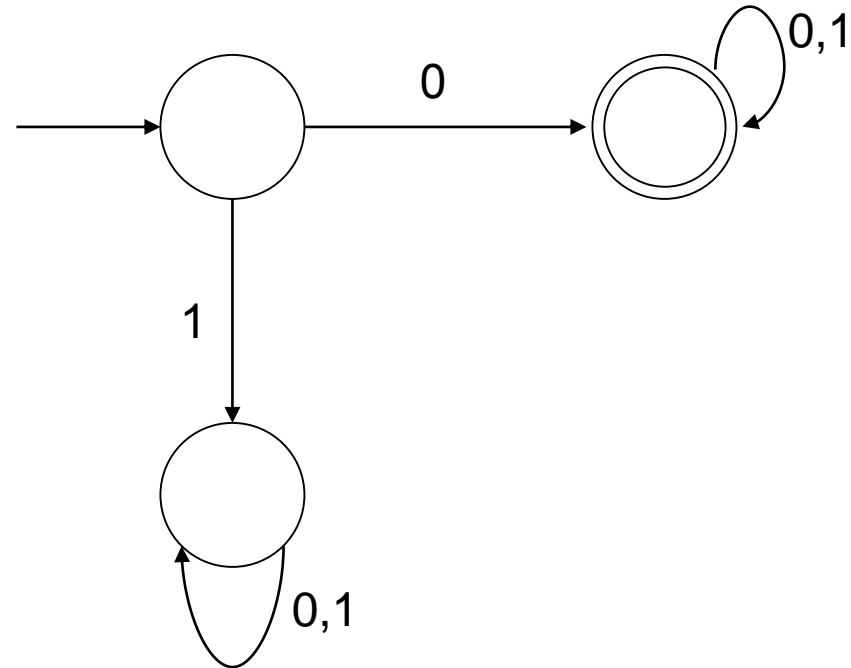
# اتوماتای متناهی

- یک مدل ساده از محاسبات
- شامل چندین حالت و ورودی‌ها به صورت رشته
  - تعداد حالت‌ها متناهی
- خواندن ورودی سمبل به سمبل از چپ به راست و بروز کردن حالت بر اساس ورودی
- در نهایت این اتوماتا با بله یا خیر جواب دهد (بپذیرد یا خیر).
- آیا به همه سوالات جواب می‌دهد؟
- دو روش برای توصیف آن: دیاگرام حالت یا به صورت صوری

# اتوماتای متناهی

○ دیاگرام حالت (مثال):

الفبا  $\Sigma = \{0,1\}$

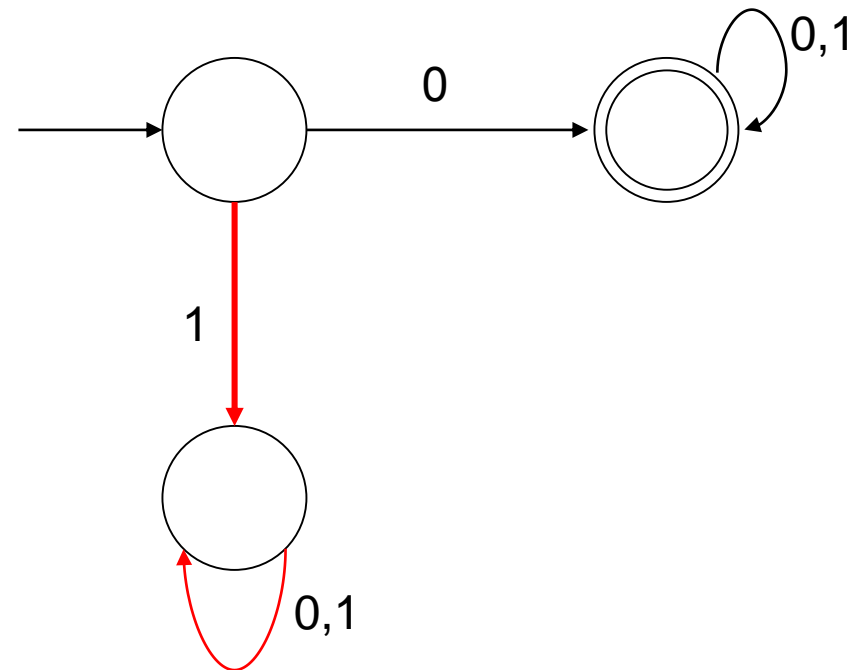


# اتوماتای متناهی

○ دیاگرام حالت (مثال):

الفبا  $\Sigma = \{0,1\}$

ورودی 10111

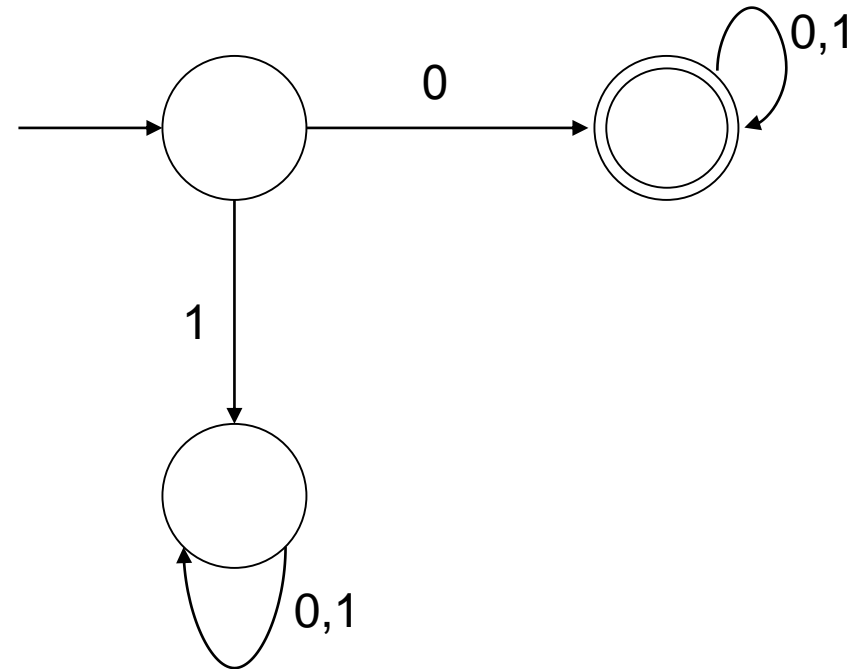


# اتوماتای متناهی

○ دیاگرام حالت (مثال):

الفبا  $\Sigma = \{0,1\}$

ورودی 011001

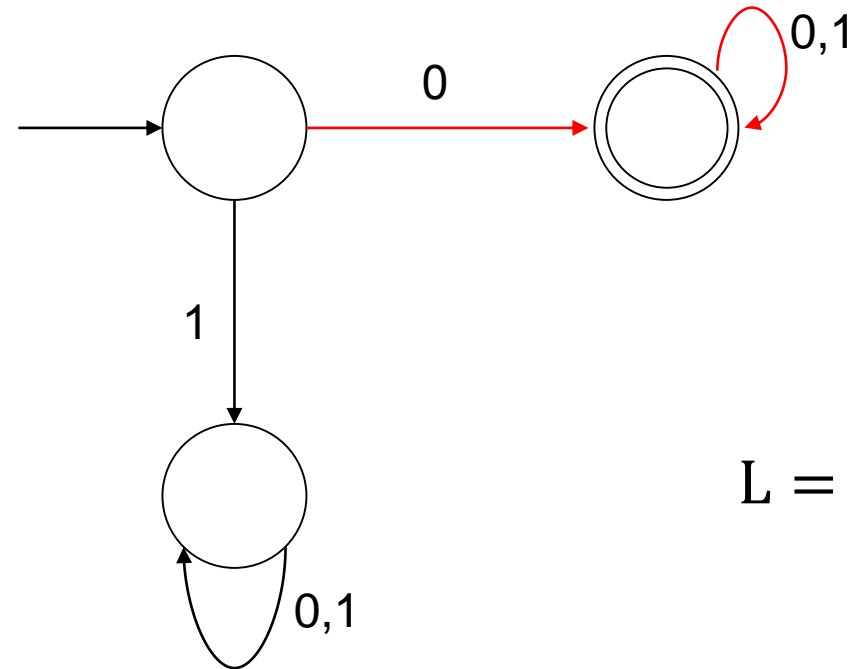


# اتوماتای متناهی

○ دیاگرام حالت (مثال):

الفبا  $\Sigma = \{0,1\}$

ورودی 011001



$$L = \{x \in \Sigma^* \mid x_1 = 0\}$$

# تعریف صوری اتوماتای متناهی معین (DFA)

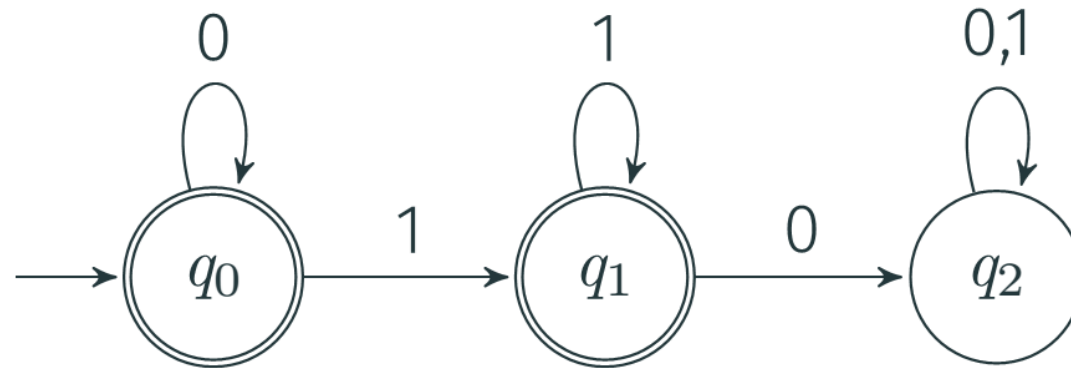
## DEFINITION 1.5

A *finite automaton* is a 5-tuple  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , where

1.  $Q$  is a finite set called the *states*,
2.  $\Sigma$  is a finite set called the *alphabet*,
3.  $\delta: Q \times \Sigma \longrightarrow Q$  is the *transition function*,<sup>1</sup>
4.  $q_0 \in Q$  is the *start state*, and
5.  $F \subseteq Q$  is the *set of accept states*.<sup>2</sup>

# اتوماتای متناهی معین (DFA)

○ مثال زیر را در نظر بگیرید:



	$\delta$ ورودی	
	0	1
حالات		
$q_0$	$q_0$	$q_1$
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_2$	$q_2$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$q_0$$

$$F = \{q_0, q_1\}$$

• الفبا:

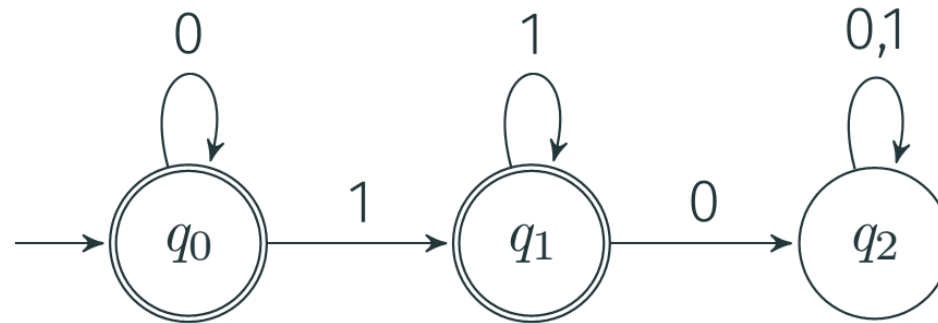
• حالتها:

• حالت اولیه:

• حالت‌های پذیرش:

# زبان یک DFA

○ گوییم DFA یک رشته  $x$  را می‌پذیرد اگر با شروع از حالت اولیه و خواندن  $x$  از چپ به راست، نهایتاً در یک حالت پایانی قرار گیرد.

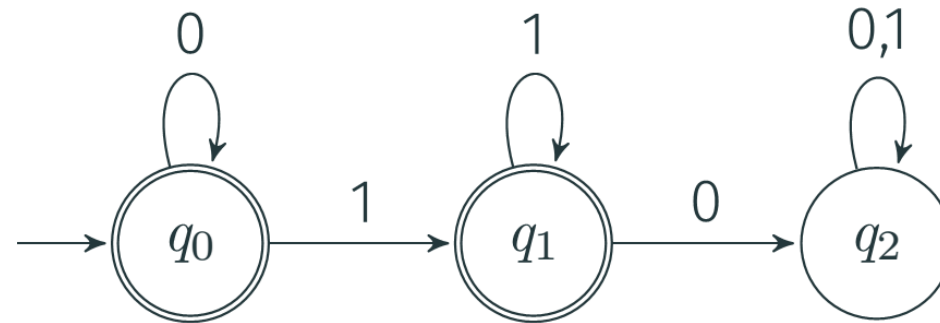


این DFA رشته‌های 0 و 011 را می‌پذیرد اما 10 و 0101 را نمی‌پذیرد.



# زبان یک DFA

○ زبان یک DFA، مجموعه همه رشته‌هایی است که توسط آن DFA پذیرفته می‌شود.



این DFA رشته‌های 0 و 011 را می‌پذیرد اما 10 و 0101 را نمی‌پذیرد.

رشته‌های 0 و 011 در زبان این DFA هستند اما 10 و 0101 نه.

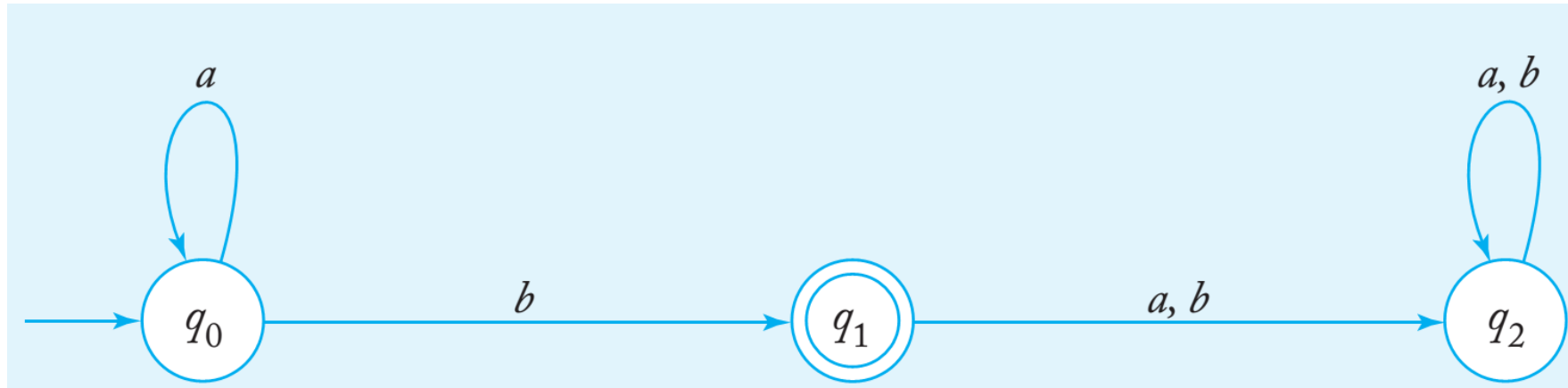
# زبان یک DFA

○ فرض کنید  $M$  یک DFA است. زبانی را که توسط  $M$  تشخیص داده می‌شود به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is accepted by } M\}$$

# مثال

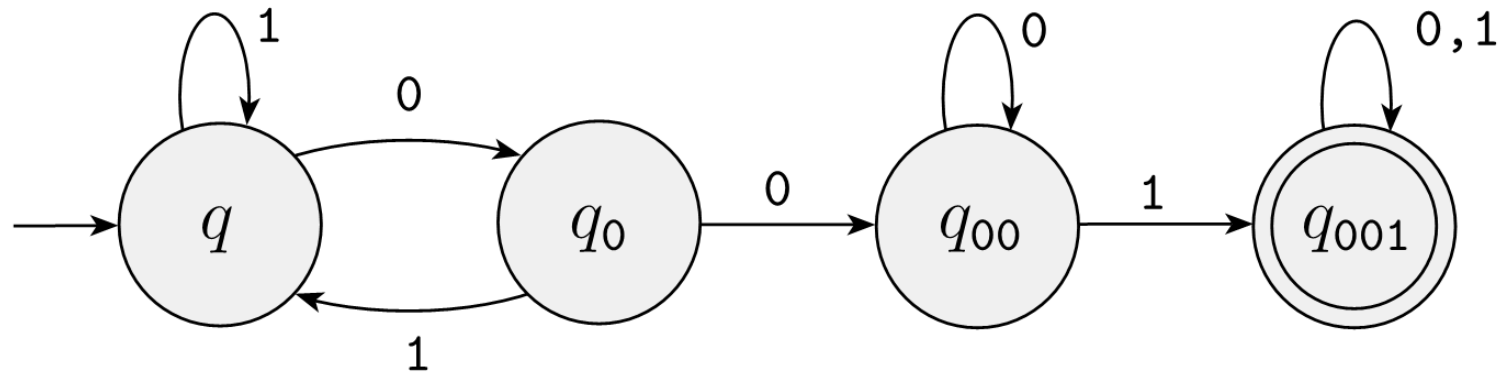
○ زبان DFA زیر را بیابید (الفبا شامل  $a$  و  $b$ ).



$$L = \{a^n b : n \geq 0\}.$$

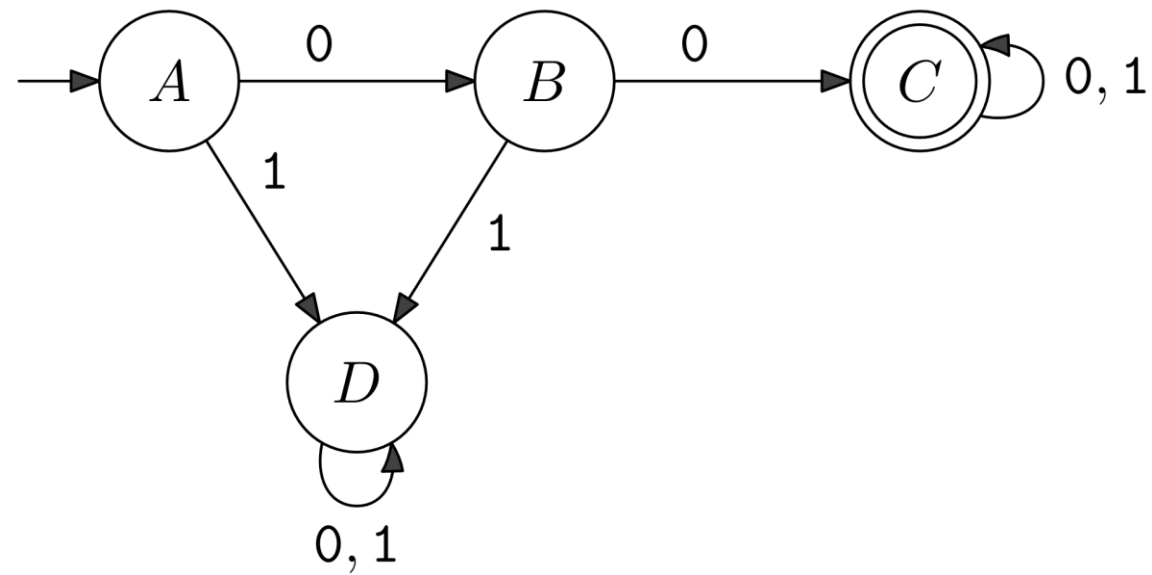
# مثال

یک DFA بسازید که فقط رشته‌هایی که شامل زیررشته 001 هستند را قبول کند (الفبای باینری).



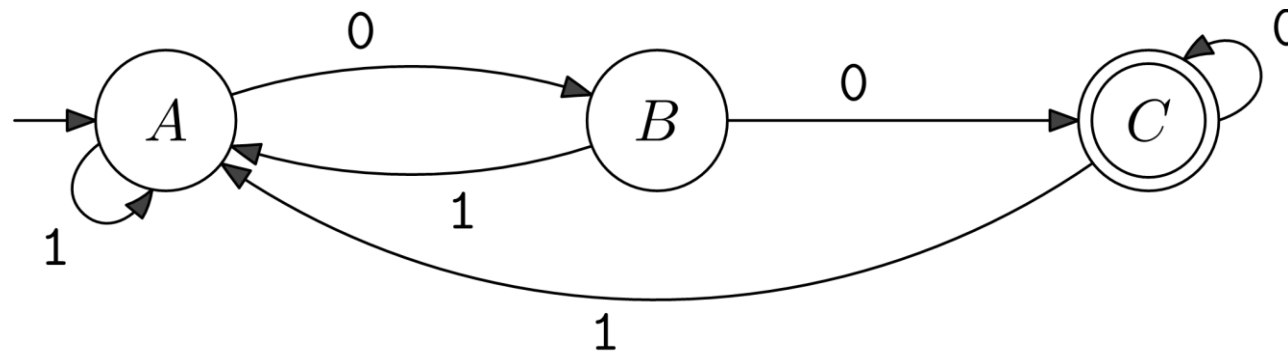
# مثال

یک DFA بسازید که فقط رشته‌هایی که با 00 شروع می‌شوند را قبول کند (الفبای باینری).



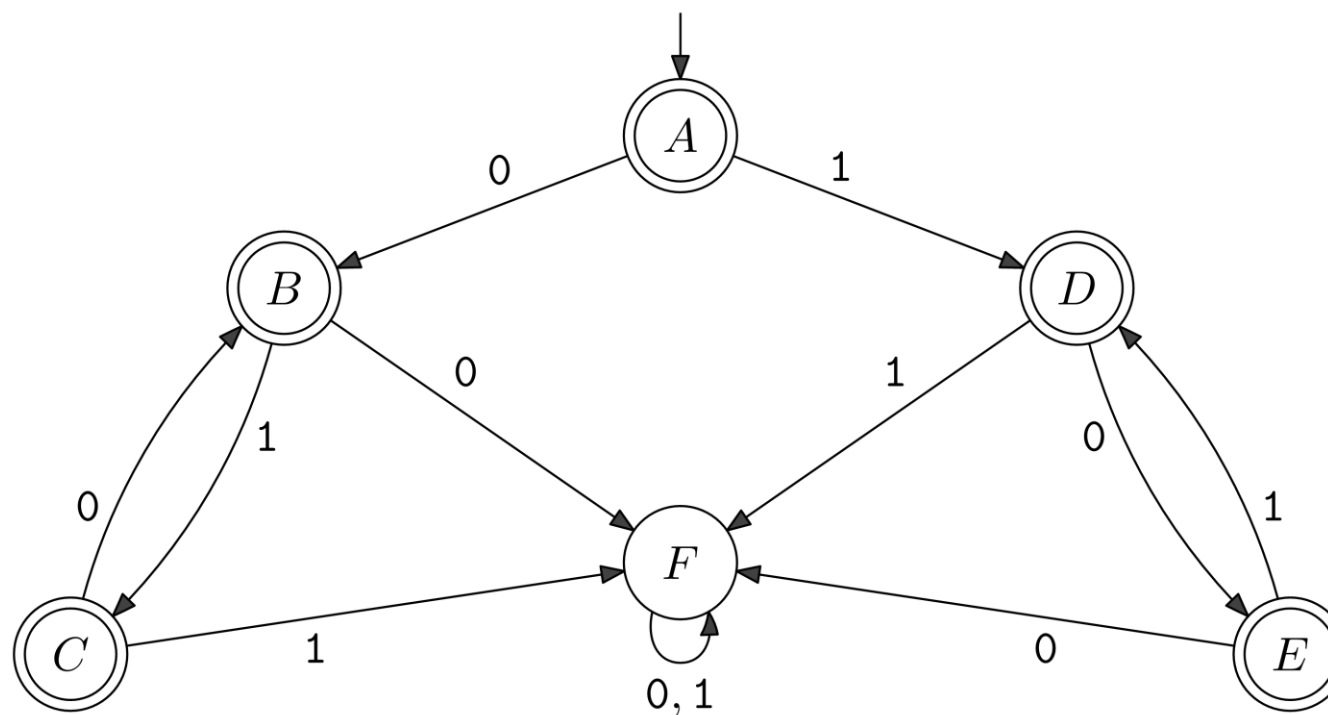
# مثال

یک DFA بسازید که فقط رشته‌هایی که با 00 خاتمه می‌یابند را قبول کند (الفبای باینری).



# مثال

یک DFA بسازید که فقط رشته‌هایی که یک در میان 0 و 1 هستند را قبول کند (الفبای باینری).



# مثال

○ یک DFA بسازید که فقط رشته‌هایی که یک در میان 0 و 1 هستند را قبول کند (الفبای باینری).

