



دانشکده برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی اصفهان

پاسخنامه تمرین سری چهارم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

پاییز ۱۴۰۲

استاد درس: دکتر مجتبی خلیلی

دستیاران آموزشی: پردیس یآوری - دیبا میرشفیعی - متین رضایی

سوال اول

برای هریک از زبان‌های زیر نشان دهید آیا مستقل از متن است یا خیر. (اگر هست $NPDA$ آنرا رسم کنید).

$$A. L_1 = \{w: n_a(w) < n_b(w) < n_c(w)\}$$

این زبان مستقل از متن نیست. فرض می‌کنیم این زبان مستقل از متن باشد، پس لم تزریق برای آن برقرار است. به ازای m داده شده رشته $w = a^m b^{m+1} c^{m+2}$ را در نظر می‌گیریم. حال چند حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. زیر رشته vxy فقط شامل نمادهای a باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i > 1$

۲. زیر رشته vxy فقط شامل نمادهای b یا c باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$

۳. زیر رشته vxy شامل نمادهای a و b باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i > 1$

۴. زیر رشته vxy شامل نمادهای b و c باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$

$$B. L_2 = a^i b^j c^{ij}: i, j \geq 0$$

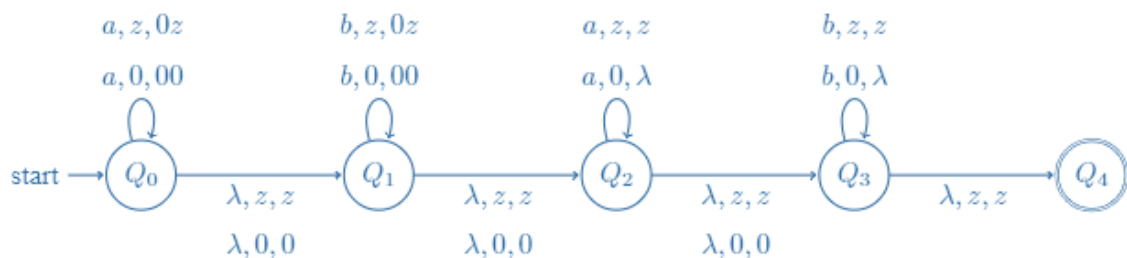
این زبان مستقل از متن نیست. فرض می‌کنیم این زبان مستقل از متن باشد، پس لم تزریق برای آن برقرار است. به ازای m داده‌شده، رشته $w = a^m b^m c^{m^2}$ را در نظر می‌گیریم. حال چند حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. زیررشته vxy فقط شامل نمادهای a یا b یا c باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$.

۲. زیررشته vxy شامل نمادهای a و b باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$.

۳. زیررشته vxy شامل نمادهای b و c باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$. در هر سه حالتی که به وجود می‌آید، تعداد نمادهای c مضرب m نخواهد بود.

$$C. L_3 = a^i b^j a^k b^l: i + j \leq k + l$$



$$D. L_4 = a^i b^j a^k b^l : i \leq k, j \leq l$$

این زبان مستقل از متن نیست. فرض می‌کنیم این زبان مستقل از متن باشد، پس لم تزریق برای آن برقرار است. به ازای m داده شده رشته $w = a^m b^m a^m b^m$ را در نظر می‌گیریم. حال چند حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. زیر رشته xy از نیمه اول رشته انتخاب شود. در این صورت قرار می‌دهیم $i > 1$

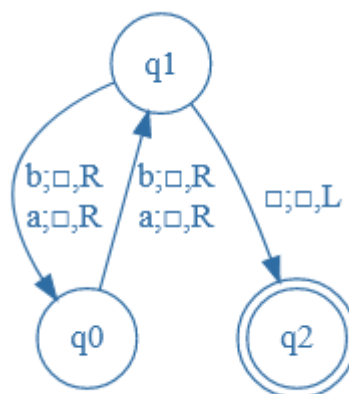
۲. زیر رشته xy از نیمه دوم رشته انتخاب شود. در این صورت قرار می‌دهیم $i = 0$

۳. زیر رشته xy شامل بخشی از نیمه اولی و بخشی از نیمه دوم رشته باشد. در این صورت به ازای $i = 0$ شرط اول و به ازای $i > 1$ شرط دوم نقض می‌شود.

سوال دوم

برای هر یک از زبانهای زیر یک ماشین تورینگ طراحی کنید.

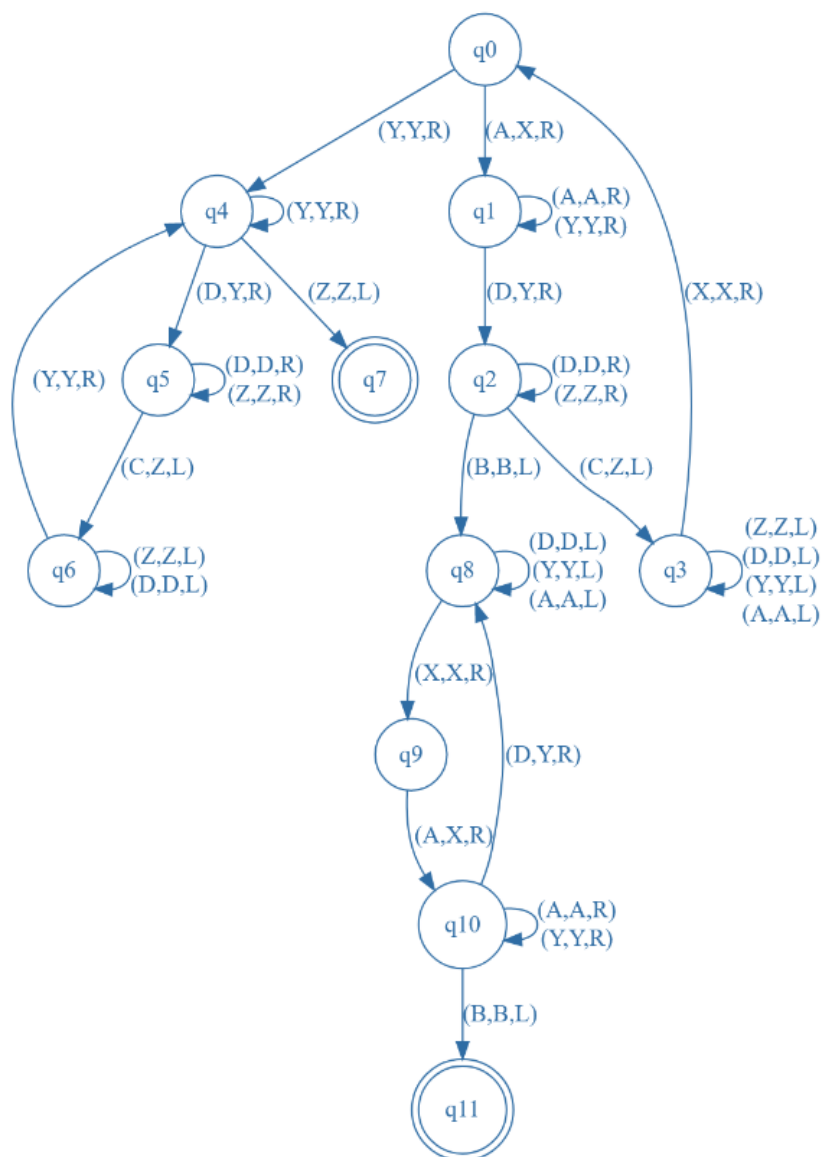
$$A. L_1 = \{w : |w| \text{ فرد است.}\}$$



$$B. L_2 = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\} \text{ (به صورت الگوریتم به زبان توصیف سطح بالا فارسی)}$$

هر حرف a را با نماد A جایگزین کرده و سپس حرکت می‌کنیم تا به دو حرف b متوالی برسیم و آنها را با BB جایگزین می‌کنیم. سپس به عقب باز می‌گردیم تا به اولین a بعد از A برسیم و این روند را تا زمانی که b یا a باقی نماند انجام می‌دهیم و سپس تمامی حروف A و B را حذف می‌کنیم تا چیزی جز نماد نانوشته در نوار باقی نماند. اگر این رشته در زبان نباشد، در یک حالت غیر پایانی متوقف خواهد شد.

$$C. L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k \text{ or } i > j > k\}$$



سوال سوم

ماشین تورینگ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_f)$ را در نظر بگیرید که:

$$Q = \{q_0, q_1, q_f\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad \Gamma = \{0, 1, \square\}, \quad \delta =$$

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R), \quad \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R), \quad \delta(q_0, \square) = (q_1, \square, L)$$

$$\delta(q_1, 0) = (q_f, 1, R), \quad \delta(q_1, 1) = (q_1, 0, L), \quad \delta(q_1, \square) = (q_f, \square, L)$$

A. خروجی این ماشین روی ورودی ۱۰۰۱۱ چیست؟

۱۰۱۰۰

B. تابعی که این ماشین محاسبه می‌کند چیست؟

اگر ورودی 1^n باشد، خروجی 10^{n-1} خواهد بود.

اگر ورودی تهی باشد تهی خروجی است.

در غیر این دو صورت، ورودی + ۱

سوال چهارم

صحیح و غلط بودن جملات زیر را با دلیل مشخص کنید.

A. همه زبان‌هایی که به وسیله اتوماتای کراندار خطی پذیرفته میشوند، اتوماتای پشته‌ای هم دارند.

هر زبان پذیرفته شده بوسیله یک اتومات پشته‌ای بوسیله یک اتومات کراندار خطی هم پذیرفته می‌شود، اما زبان‌هایی وجود دارند که بوسیله اتوماتای کراندار خطی پذیرفته میشوند اما هیچ اتوماتای پشته‌ای به ازای آن وجود ندارد. پس ماشین کراندار، خطی قویتر از ماشین پشته‌ای است.

B . نامعین بودن ماشین تورینگ به قدرت آن اضافه میکند.

یک ماشین تورینگ نامعین به هیچ وجه قدرتمندتر از نوع معین خود نیست. در واقع نامعین بودن به قدرت ماشین تورینگ اضافه نمی کند.

C . ماشین کراندار خطی قوی تر از ماشین پشته ای است.

هر زبان پذیرفته شده بوسیله یک اتومات پشته‌ای بوسیله یک اتومات کراندار خطی هم پذیرفته میشود، اما زبان هایی وجود دارند که بوسیله اتوماتای کراندار خطی پذیرفته میشوند اما هیچ اتوماتای پشته ای به ازای آن وجود ندارد. پس ماشین کراندار، خطی قویتر از ماشین پشته ای است.

D . آیا زبان $L = \{x^i y^j z^{j+2} w^k v^{i+k} : i, j, k \geq 0\}$ توسط LBA پذیرفته میشود؟

زبان L را میتوان به صورت $x^i y^j z^j z^2 w^k v^k v^i$ که زبانی مستقل از متن معین است. بنابراین توسط $DPDA$ قابل پذیرش است در نتیجه توسط LBA که از PDA قویتر است نیز قابل پذیرش است.

سوال پنجم

یک ماشین تورینگ با نوار بی نهایت دو برابر شبیه ماشین تورینگ معمولی است، اما نوار آن در سمت چپ و همچنین به سمت راست بی نهایت است. نوار ابتدا با جاهای خالی پر می شود به جز قسمتی که حاوی ورودی است. محاسبات به طور معمول تعریف می شود با این تفاوت که اول نوار هنگام حرکت به سمت چپ هرگز با انتهای نوار روبرو نمی شود. نشان دهید که این نوع ماشین تورینگ کلاس زبان های قابل تشخیص تورینگ را می شناسد.

یک TM با نوار بی نهایت دو برابر می تواند یک TM معمولی را شبیه سازی کند. ابتدا انتهای سمت چپ ورودی را مشخص می کند تا هد از آن انتها خارج نشود. برای شبیه سازی نوار بینهایت TM توسط یک TM معمولی، نحوه شبیه سازی آن را با یک TM ۲ نواری نشان می دهیم که قبلاً نشان داده شده بود که از نظر قدرت معادل یک TM معمولی است. نوار اول TM ۲ نواره با رشته ورودی نوشته می شود و نوار دوم خالی است. نوار TM با نوار بینهایت دو برابر را در سلول شروع رشته ورودی به دو قسمت برش می دهیم. بخشی با رشته ورودی و تمام فضاهای خالی سمت راست آن در اولین نوار TM ۲ نواری ظاهر می شود. قسمت سمت چپ رشته ورودی به ترتیب معکوس در نوار دوم ظاهر می شود.