ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

فصل هشتم

تکنیک های پیشرفته شمارش

رابطه های بازگشتی

- رابطه های بازگشتی به رابطه ای گفته می شود که جمله n ام بر اساس مقادیر جملات قبلی بدست می آید.
- رابطه بازگشتی مرتبه یک: هر جمله فقط به جمله قبلی اش وابسته است.
- رابطه بازگشتی مرتبهk: هر جمله به k جمله قبلی اش وابسته است.
- برای مدل کردن مسائل زیادی بکار میروند.

رابطه بازگشتی مرتبه یک

مثلاً در دنباله‌های زیر همگی $a_n = ۲a_{n-۱}$ می‌باشد یعنی هر جمله دو برابر جملهٔ قبلی است:

۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰, ...

حال اگر تعریف کنیم $a_n = ۲a_{n-۱}$ (یا $a_{n+۱} = ۲a_n$) و $a_۰ = ۱$ فقط یک دنباله (...,۱, ۲, ۴, ۸) حاصل می‌شود.

مثال رابطه بازگشتی $a_n = ۳a_{n-۱}$ و $a_۰ = ۲$ را حل کنید.

پاسخ: منظور از حل رابطهٔ بازگشتی، یافتن یک فرمول غیربازگشتی برای a_n است. یعنی باید برای a_n یک رابطهٔ مستقیم برحسب n بیابیم. در این مثال می‌توان با جایگذاری، $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و ... را یافته و به فرمولی برای a_n برسیم:

$$a_۰ = ۲\,,\ a_۱ = ۳a_۰ = ۳\times۲\,,\ a_۲ = ۳a_۱ = ۳\times۳\times۲ = ۳^۲\times۲, a_۳ = ۳a_۲ = ۳\times۳^۲\times۲ = ۳^۳\times۲,\ldots,$$

$$\boxed{a_n = ۳^n \times ۲ = ۲(۳^n)}$$

نتیجه: به طور کلی، حل رابطهٔ بازگشتی مرتبهٔ اول $a_n = da_{n-۱}$ با شرط اولیهٔ $a_۰ = A$ عبارت است از:

$$\boxed{a_n = A.d^n}$$

مثال ده جملهٔ اول فیبوناچی را بیابید.

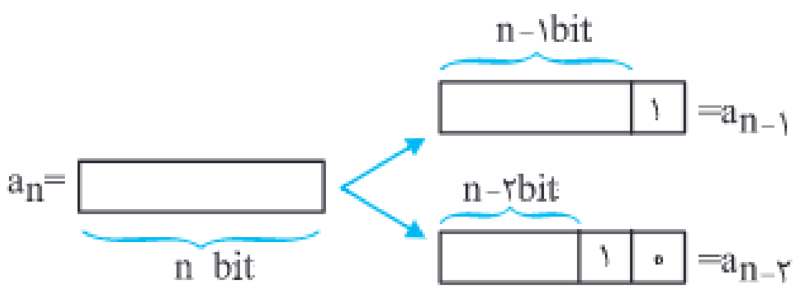
پاسخ: اگر دنباله فیبوناچی $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ باشد می‌دانیم $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ و جملات بعدی هر یک، برابر با جمع دو جملهٔ قبلی هستند یعنی $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. این رابطه، مرتبهٔ ۲ است و دو شرط اولیه $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ دارد پس:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1,\ F_3 = 1+1 = 2,\ F_4 = 2+1 = 3,\ F_5 = 3+2 = 5,\ F_6 = 5+3 = 8,$$

$$F_7 = 8+5 = 13,\ F_8 = 13+8 = 21,\ F_9 = 21+13 = 34$$

مثال: تعداد رشته های بیتی به طول n که شامل هیچ ۰۰ ای نباشد.

می‌خواهیم برای این مسئله، رابطهٔ بازگشتی بیابیم. فرض کنید a_n تعداد رشته‌های باینری به طول n فاقد ۰۰ است. قصد داریم a_n را به a_{n-1} و a_{n-2} ارتباط دهیم. رشته‌های به طول n که فاقد ۰۰ هستند دو حالت دارند: یا بیت آخرشان ۱ است و یا بیت آخرشان ۰ است. اگر بیت آخر ۱ است پس باید $n-1$ بیت دیگر، فاقد ۰۰ باشند که تعداد این رشته‌ها a_{n-1} است. اگر بیت آخر ۰ باشد حتماً باید بیت ماقبل آخر ۱ باشد و $n-2$ بیت دیگر باید فاقد ۰۰ باشند که تعداد این رشته‌ها a_{n-2} است پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.



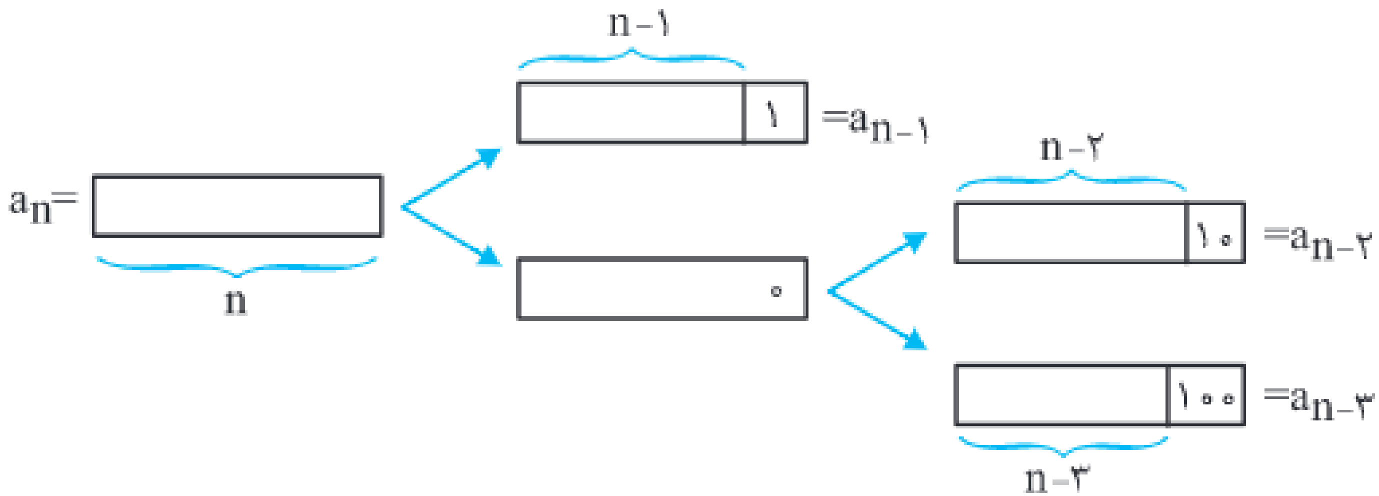
a1 = 2 , $a_2 = 3$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

			Number of bit strings of length n with no two consecutive 0s:
End with a 1:	Any bit string of length $n - 1$ with no two consecutive 0s	1	a_{n-1}
End with a 0:	Any bit string of length $n - 2$ with no two consecutive 0s	1 0	a_{n-2}
		Total:	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

مثال یک رابطهٔ بازگشتی برای تعداد رشته‌های باینری به طول n فاقد ۰۰۰ (سه صفر متوالی بیابید.

پاسخ: فرض کنید a_n تعداد این رشته‌هاست. آخرین بیت این رشته‌ها یا ۱ یا ۰ است. اگر ۱ باشد آنگاه $n-1$ بیت دیگر باید فاقد ۰۰۰ باشند که تعدادشان a_{n-1} است. اگر آخرین بیت برابر ۰ باشد آنگاه نمی‌توان گفت که $n-1$ بیت دیگر باید فاقد ۰۰۰ باشند زیرا اگر ۰۰ قبل از ۰ قرار گیرد آنگاه ۰۰۰ ایجاد می‌شود. پس اگر آخرین بیت ۰ باشد آنگاه بیت ماقبل آخر، می‌تواند ۱ یا ۰ باشد، اگر ۱ باشد آنگاه $n-2$ بیت دیگر باید فاقد ۰۰۰ باشند که تعدادشان a_{n-2} است، و اگر بیت ماقبل آخر ۰ باشد (دو بیت آخر ۰۰ باشند) آنگاه باید قبل از آن ۱ باشد و $n-3$ بیت دیگر، باید فاقد ۰۰۰ باشند که a_{n-3} حالت دارد پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. شروط اولیه عبارتند از:
$a_0 = 1$ (تهی)، $a_1 = 2$ $(1, 0)$، $a_2 = 4$ $(00, 01, 10, 11)$


$a_n =$
n
$n-۱$
۱
$= a_{n-۱}$
۰
$n-۲$
۱۰
$= a_{n-۲}$
۱۰۰
$= a_{n-۳}$
$n-۳$

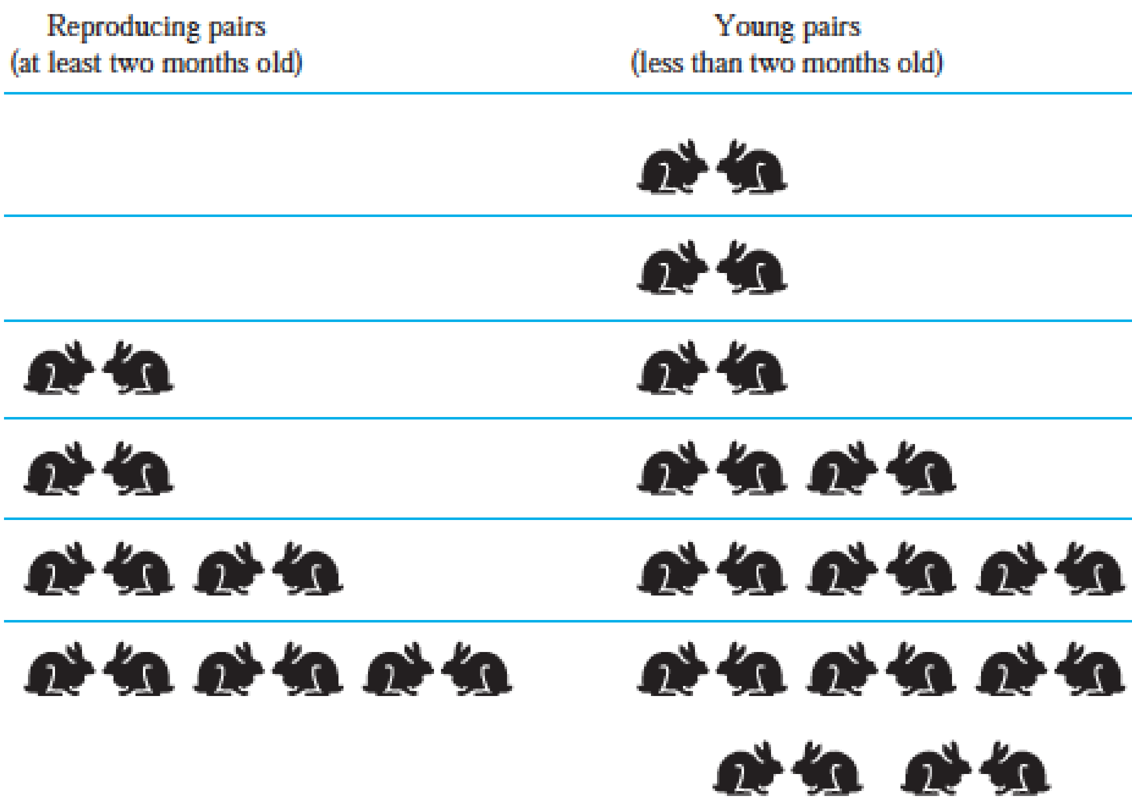
مثال n تا جا برای پارک کردن وجود دارد که سواری‌های یکسان و موتورسیکلت‌های یکسان در آنها پارک می‌کنند. اگر سواری نیاز به ۲ جا و موتورسیکلت نیاز به ۱ جای پارک داشته باشد و قرار باشد همهٔ nتا جای پارک پر شوند، یک رابطهٔ بازگشتی برای تعداد حالات این مسئله بیابید.

پاسخ: فرض کنید a_n تعداد حالات این مسئله باشد. اولین وسیله‌ای که پارک می‌کند یا موتور است که ۱ جا اشغال می‌کند و $n-1$ جای باقی‌مانده a_{n-1} حالت دارند، یا سواری است که ۲ جا اشغال می‌کند و $n-2$ جای باقی‌مانده a_{n-2} حالت دارند. پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. شروط اولیه $a_1 = 1$ (۱ جا فقط موتور می‌تواند پارک کند) و $a_2 = 2$ (۲ جا یا ۲ تا موتور یا یک سواری پارک می‌کنند) البته می‌توان $a_0 = 1$ تعریف کرد و a_2 را به عنوان شرط اولیه معرفی نکرد.

رابطه های بازگشتی

مثال: یک جفت خرگوش جوان در یک جزیره قرار میگیرند. خرگوش ها بعد از ۲ ماهگی هر ماه یک جفت خرگوش به دنیا می آورند. هیچ خرگوشی هم نمی میرد. چند جفت خرگوش بعد از n ماه در جزیره وجود دارد؟

پاسخ: اگر a_n تعداد جفت‌ها در ماه nام باشد انگاه $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$. برای یافتن a_n، گوییم a_{n-1} جفت در ماه $n-1$ام وجود دارند و a_{n-2} جفت که در ماه $n-2$ام هستند هر کدام یک جفت تولید می‌کنند پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. پس $a_2 = 1$ و $a_3 = 2$ و $a_4 = 3$ و $a_5 = 5$ و $a_6 = 8$ و $a_7 = 13$ و $a_8 = 21$ و $a_9 = 34$ و $a_{10} = 55$



Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

مثال فرض کنید هر جفت خرگوش، در سن یک ماهگی، ۲ جفت و در سن ۲ ماهگی و به بعد در هر ماه ۶ جفت تولید کنند. اگر a_n تعداد جفت‌ها در ماه nام باشد، برای a_n رابطه بازگشتی بیابید. فرض کنید در ماه صفرم هیچ خرگوشی نیست.

پاسخ: برای محاسبهٔ a_n باید جفت‌های موجود تا ماه $n-۱$ام را با جفت‌هایی که در ماه nام بدنیا می‌آیند جمع بزنیم. تا ماه $n-۱$ام $a_{n-۱}$ جفت وجود دارند که $a_{n-۲}$ جفت آنها ۶ جفت و $a_{n-۱}-a_{n-۲}$ جفت دیگر ۲ جفت تولید می‌کنند پس:

$$a_n = a_{n-۱} + ۶a_{n-۲} + ۲(a_{n-۱} - a_{n-۲}) = ۳a_{n-۱} + ۴a_{n-۲}$$

$$a_۰ = ۰ \,,\, a_۱ = ۱$$

مثال n تا جا برای پارک کردن وجود دارد که سواری‌های یکسان و موتورسیکلت‌های یکسان در آنها پارک می‌کنند. اگر سواری نیاز به ۲ جا و موتورسیکلت نیاز به ۱ جای پارک داشته باشد و قرار باشد همهٔ nتا جای پارک پر شوند، یک رابطهٔ بازگشتی برای تعداد حالات این مسئله بیابید.

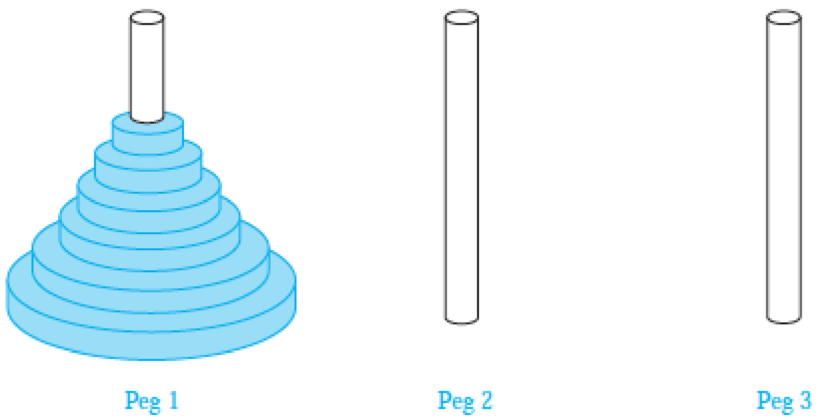
مثال در مثال قبل فرض کنید لزومی ندارد همهٔ nتا جای پارک پر شوند، در این حالت رابطهٔ بازگشتی بیابید.

پاسخ: اولین وسیله اگر موتور پارک کند آنگاه $n-۱$ جای دیگر $a_{n-۱}$ حالت دارند اگر سواری پارک کند آنگاه $n-۲$ جای دیگر $a_{n-۲}$ حالت دارند و اگر اولین جای پارک خالی باشد آنگاه $n-۱$ جای دیگر $a_{n-۱}$ حالت دارند، پس $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$ و $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$ (یک جای پارک یا خالی است یا موتور پارک می‌کند)

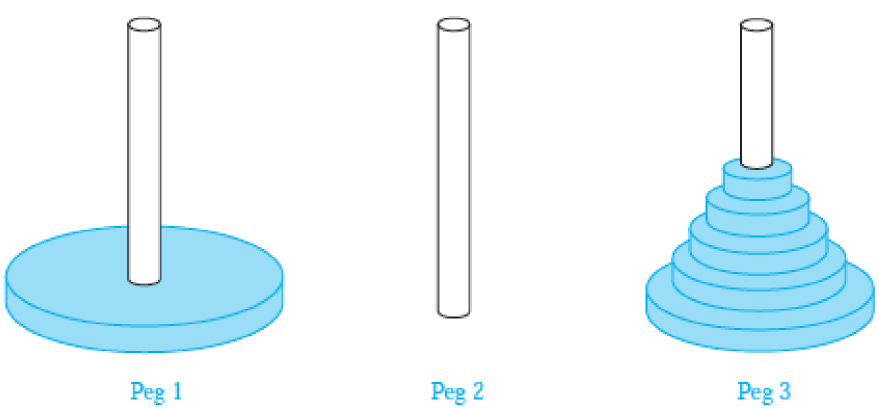
مسئله برج های هانوی:

n دیسک و ۳ میله با شماره های ۱ و ۲ و ۳ داریم. دیسک ها به ترتیب اندازه در میله ۱ قرار دارند. این n دیسک را با کمک میله ۳ میخواهیم به میله ۲ منتقل کنیم، بطوریکه در هر حرکت فقط ۱ دیسک را منتقل میکنیم، و هیچگاه نمیتوانیم دیسک بزرگتر را روی دیسک کوچکتر قرار دهیم. با چند حرکت این کار انجام می پذیرد؟

حل: فرض کنیم H(n) تعداد حرکت‌های لازم جهت انتقال n دیسک به مقصد باشد.
بر اساس توضیحات فوق H(n-1) حرکت برای انتقال n-1 دیسک به میله کمکی،
یک حرکت برای انتقال بزرگترین دیسک به میله مقصد، و باز n-1 حرکت برای
انتقال n-1 دیسک موجود در میله کمکی به میله مقصد نیاز است. پس می‌توان
نوشت:



$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$



ادامه حل:

$$
\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}
$$

حل رابطه بازگشتی

منظـور از حـل، یـافتن فرمـولی بـرای a_n برحسـب n مـی‌باشـد. مـثلاً رابطـه بازگشـتی $a_n = a_{n-1} + n$ با شرط اولیه $a_0 = 0$ را حل می‌کنیم (با روش جایگذاری):

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots = a_0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

رابطه بازگشتی همگن

- یک رابطه بازگشتی همگن خطی از درجه k با ضرایب ثابت، یک رابطه بازگشتی به شکل زیر است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are real numbers, and $c_k \neq 0$.

حل رابطه بازگشتی همگن

- روش پایه برای حل رابطه بازگشتی همگن به این صورت است که به دنبال جوابهایی هستیم که به شکل $a_n = r^n$ هستند.
- میتوان گفت $a_n = r^n$ جواب است اگر و فقط اگر

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

که معادل است با:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

به این معادله، معادله مشخصه گفته میشود.

رابطه بازگشتی همگن درجه ۲

- قضیه: فرض کنید c_1 و c_2 اعداد حقیقی باشند و همچنین معادله $r^2 – c_1r – c_2 = 0$ دو ریشه متمایز r_1 و r_2 داشته باشد. در اینصورت دنباله $\{a_n\}$ جوابی برای رابطه بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ میباشد، اگر و فقط اگر $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید.

a) $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}\ ,\ a_۰ = ۲, a_۱ = ۷$

مشخصه $: r^۲ - r - ۲ = ۰ \Rightarrow r_۱ = -۱\ ,\ r_۲ = ۲$

دو ریشه حقیقی متمایز دارد، شکل جواب در این صورت $a_n = \alpha_۱(-۱)^n + \alpha_۲(۲)^n$ است کـه برای یافتن مجهولات $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ از شروط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_۰ = \alpha_۱(-۱)^۰ + \alpha_۲(۲)^۰ = ۲ \\ a_۱ = \alpha_۱(-۱)^۱ + \alpha_۲(۲)^۱ = ۷ \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_۱ + \alpha_۲ = ۲ \\ -\alpha_۱ + ۲\alpha_۲ = ۷ \end{cases} \quad \alpha_۱ = -۱\ ,\ \alpha_۲ = ۳$$

$$\Rightarrow a_n = -(-۱)^n + ۳(۲)^n = ۳ \times ۲^n - (-۱)^n$$

رابطه بازگشتی همگن درجه ۲

مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید.

b) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad , \; a_0 = 1 \, , \, a_1 = 2$

مشخصه $: r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$

ریشه مضاعف دارد، شکل جواب در این صورت $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)(3)^n$ است که برای یافتن مجهولات α_1 و α_2 از شروط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_0 = (\alpha_1 + 0)(3)^0 = 1 \\ a_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(3) = 2 \end{cases} \quad \alpha_1 = 1 \, , \, \alpha_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_n = (1 - \frac{1}{3} n) 3^n$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی

- رابطه بازگشتی ناهمگن خطی رابطه ای به شکل زیر است که در آن F(n) تابعی است که تابع ثابت ۰ نیست و فقط به n بستگی دارد.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی

ابتدا جواب عمومی $(a_n^{(h)})$ را می‌یابیم که جواب رابطه همگن است (یعنی $F(n)$ را نادیده بگیریم) سپس جواب خصوصی $(a_n^{(p)})$ را می‌یابیم که به $F(n)$ بستگی دارد. جواب نهایی جمع این دو مقدار است یعنی $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$.

روابط بازگشتی ناهمگن خطی

- قضیه: اگر $\{a_n^{(p)}\}$ جواب خاصی از معادله ناهمگن خطی زیر باشد،

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

آنگاه هر جواب به شکل $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ است که $\{a_n^{(h)}\}$ جواب رابطه بازگشتی همگن وابسته زیر است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$