بسمه تعالی

طراحی سیستم‌های دیجیتال یک

استاد: دکتر کریمی

پاسخ تمرین سری دوم

دانشکده برق و کامپیوتر

۱. متمم توابع زیر را به صورت جمع مین‌ترم ها بنویسید.

$f1(x,y,z) = M0.M2.M5$

x	y	z	Minterm		Maxterm	
0	0	0	$x'.y'.z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'.y'.z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'.y.z'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'.y.z$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$x.y'.z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$x.y'.z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	$x.y.z'$	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	$x.y.z$	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

نکته سوال: اگر تابع f به صورت ضرب ماکسترم‌ها بیان شده باشد تابع f' به صورت جمع همان مینترم‌ها قابل بیان است.

تابع $f1$ به صورت ضرب ماکسترم‌های $0,2,5$ بیان شده است. دقت کنید این تابع به ازای این ماکسترم‌ها مقدار صفر را دارد پس تابع $f1'$ به ازای این ماکسترم‌ها مقدار 1 را دارا خواهد بود درنتیجه به ازای مینترم‌های $0,2,5$ نیز مقدار یک را خواهد داشت و به شکل جمع این مینترم‌ها نمایش داده می‌شود.

$$f1'(x,y,z) = m0 + m2 + m5$$

$$f2(x,y,z,w) = \prod(0,2,4,11,14)$$

با توجه به توضیحات سوال قبل

$$f2'(x,y,z,w) = m0 + m2 + m4 + m11 + m14$$

$$f3(x,y,z) = \sum(1,4,5,6,7)$$

چون تابع به ازای مینترم‌های $1,4,5,6,7$ مقدار یک را داراست پس مکمل این تابع به ازای این مینترم‌ها مقدار صفر را دارد و به ازای مینترم‌های $0,2,3$ مقدار یک را میگیرد.

$$f3'(x,y,z) = m0 + m2 + m3$$

$$f4(x,y,z,w) = \sum(0,3,5,9,12,13)$$

باتوجه به توضیحات سوال قبل:

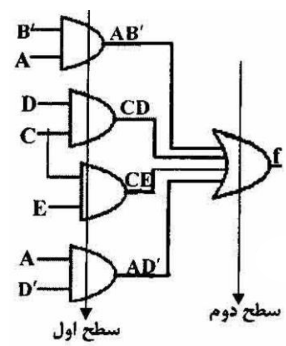
$$f4'(x,y,z,w) = m1 + m2 + m4 + m6 + m7 + m8 + m11 + m14 + m15$$

۲. توابع زیر را ساده کرده و نمودار منطقی آن‌ها را با حداقل تعداد سطح پیاده‌سازی رسم نمایید.

a. $f1 = AB' + C(D+E) + AD'$

برای اینکه یک تابع با کمترین سطح گیت پیاده شود لازم است آن را از فرم غیر استاندارد خارج کرده و به فرم استاندارد pos یا sop ببریم. دقت کنید نیازی نیست که تابع کاملا به شکل جمع مینترم‌ها درآید و همین که به شکل جمع چند عبارت ضرب شده درآید کافی است.

$$f1 = AB' + CD + CE + AD'$$



$b.\ f2 = \overline{ABC} + \overline{AB}C + \bar{A}B\bar{C} + A\overline{BC} + AB\bar{C}$

$$F = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C} + (\bar{A}+\bar{B})C + \bar{A}B\bar{C} + A(\bar{B}+\bar{C}) + A\bar{B}C$$

($\because\ \overline{ABC} = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ and $\overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}$ by using Demorgan's Law)

$$= \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{A}C+\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}+A\bar{C}+A\bar{B}C$$

$$= \bar{A}+\bar{A}C+\bar{B}+\bar{B}C+\bar{C}+A\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}+A\bar{B}C$$

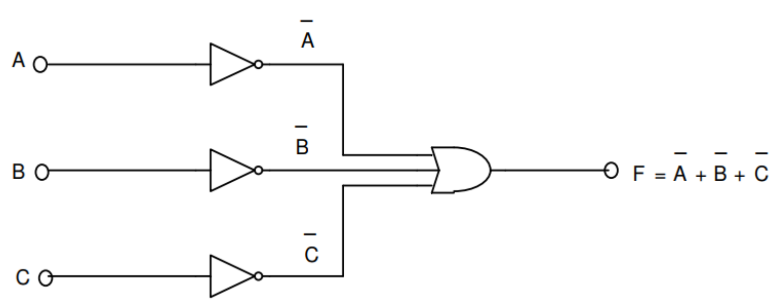
$$= \bar{A}(1+C)+\bar{B}(1+C)+\bar{C}(1+A)+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}+A\bar{B}C$$

$$= \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}+A\bar{B}C \quad \{\because (1+C)=1 \text{ and } (1+A)=1\}$$

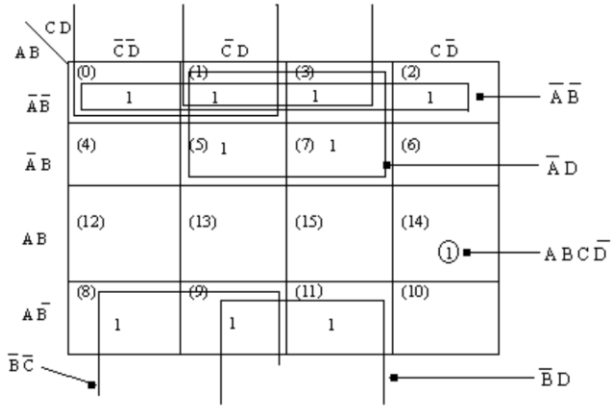
$$= (\bar{A}+A\bar{B})+\bar{B}(1+AC)+\bar{C}(1+\bar{A}B)$$

$$= (\bar{A}+\bar{B})+\bar{B}+\bar{C} \quad \{\because (\bar{A}+A\bar{B}) = (\bar{A}+\bar{B});\ (1+AC)=1 \text{ and } (1+\bar{A}B)=1\}$$

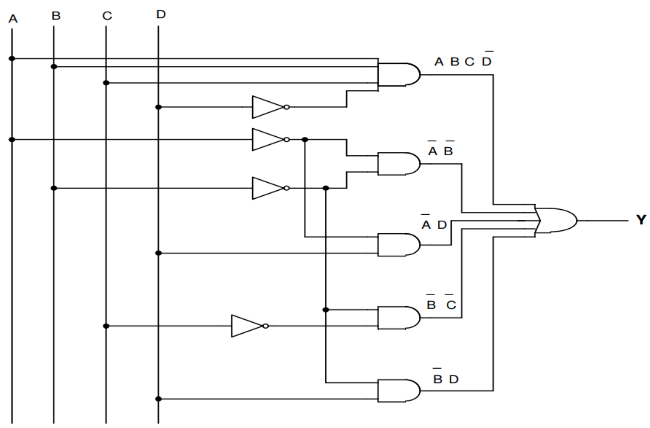
$$F = (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) \quad (\because \bar{B}+\bar{B}=\bar{B})$$



$c. Y(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,3,5,7,8,9,11,14)$ (به کمک جدول کارنو)



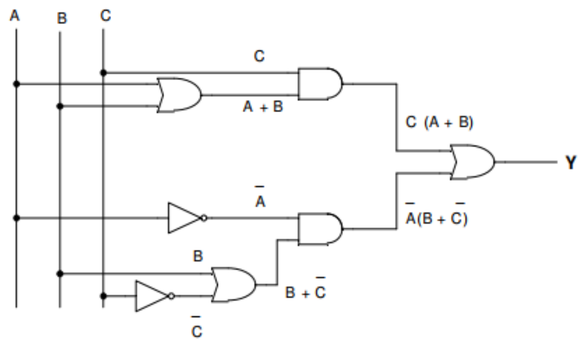
$$Y(A,B,C,D) = ABC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}D$$



۳. عبارت داده شده را به شکل (SOP) ساده کنید و مدار منطقی آن را رسم کنید.

$$Y = (A + B)(A + \overline{AB})C + \bar{A}(B + \bar{C}) + \bar{A}B + ABC$$

$$Y = (A + B)(A + \overline{AB})C + \overline{A}(B + \overline{C}) + \overline{A}B + ABC$$
$$=(A + B)(A + \overline{AB})C + \overline{A}(B + \overline{C}) + \overline{A}B + ABC$$
$$=(A + B)(A + \overline{A} + \overline{B})C + \overline{A}(B + \overline{C}) + \overline{A}B + ABC$$
$$=(A + B)(1 + \overline{B})C + \overline{A}(B + \overline{C}) + \overline{A}B + ABC \text{ (Because } A + \overline{A} = 1)$$
$$= (A + B)(C + \overline{B}C) + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + ABC$$
$$= (A + B)(C + \overline{B}C) + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + ABC$$
$$=AC + A\overline{B}C + BC + B\overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + ABC$$
$$= AC + AC(\overline{B} + B) + BC + 0 + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B \text{ (Because } B\overline{B} = 0)$$
$$= AC + AC + BC + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} \text{ (Because } \overline{B} + B = 1)$$
$$= AC + BC + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} \text{ (Because } AC + AC = AC)$$
$$= C(A + B) + \overline{A}(B + \overline{C})$$



۴. یک مدار ترکیبی دارای ۳ ورودی A، B، C و خروجی F است. F برای ورودی‌های زیر true(درست) است.

A نادرست باشد و B درست باشد.

A نادرست باشد و C درست باشد

A,B,C نادرست باشند.

A,B,C درست باشند.

(i) جدول صحت را برای F بنویسید. از قرارداد True=1 و False = 0 استفاده کنید.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(ii) عبارت ساده شده F را به شکل SOP بنویسید.

A/BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

F = A’+BC

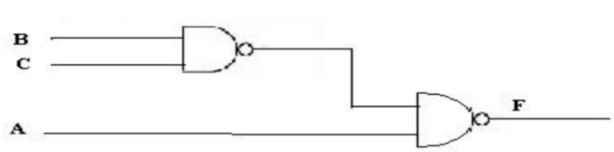
(iii) عبارت ساده شده F را به شکل POS بنویسید.

مکمل تابع F در نقاط AB’ و ABC’ مقدار یک را میگیرد.

F’=AB’+AC’ ➔ F’’ = (A’+B).(A’+C) = F

(iv) مدار منطقی را با استفاده از کمترین تعداد NAND دو ورودی رسم کنید.

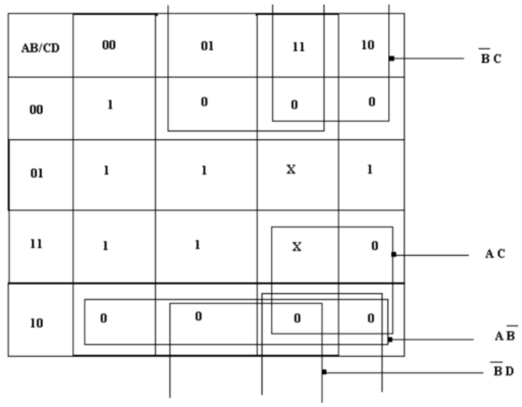
$F'' = \overline{\overline{A' + BC}}$ ➔ $F'' = \overline{A.\overline{(BC)}}$



۵. توابع زیررا پس از ساده سازی با استفاده از نقشه کارنو، فقط با استفاده از گیت‌های خواسته شده رسم کنید.

دقت کنید به منظور ساده سازی نمایش گیت های نات با nor یا nand پیاده نشده اند.

$a. F\ (A, B, C, D)\ =\ \prod M\ (1,2,3,8,9,10,11,14) \cdot\ d\ (\ 7,15\ )$ (فقط NOR)

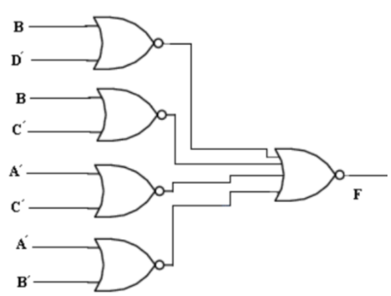


در اینجا چون تابع به شکل ضرب ماکسترم‌هاست، میتوان ماکسترم‌ها را ساده سازی کرد. در این نقاط تابع مقدار صفر دارد. پس مکمل تابع مقدار یک دارد. پس F’=B’D+B’C+AC+AB’ با مکمل گیری مقدار خود تابع F به دست می آید.

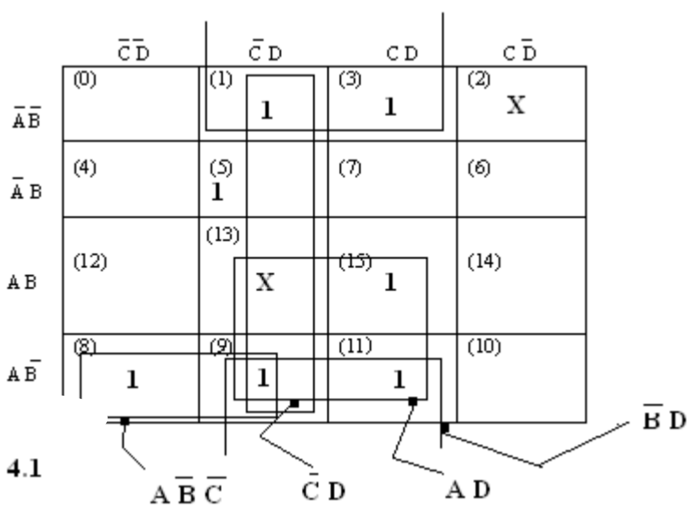
$$F=(B'D+B'C+AC+AB')' = [(B'D)'(B'C)'(AC)'(AB')'] = (B+D')(B+C')(A'+C')(A'+B)$$

همچنین مکمل مکمل یک تابع برابر خود تابع است.

$$F=[(B+D')'+(B+C')'+(A'+C')'+(A'+B)']'$$



$b. F(A, B, C, D)\ =\ \sum m\ (1,3,5,8,9,11,15)\ +\ d(2,13)$ (یک بار فقط NOR – یک بار فقط NAND)



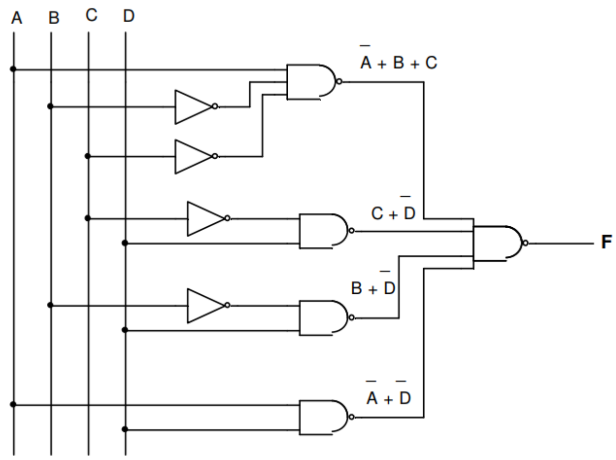
le 4.1

بنابراین تابع ساده شده در فرم SOP برابر است با:

$$F = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{C}D + \overline{B}D + AD$$

برای پیاده سازی با $nand$ از فرم SOP کمک میگیریم میدانیم مکمل مکمل F برابر خود F است:

$$\overline{F}' = \overline{\overline{(A\bar{B}\bar{C})}\;\overline{(\bar{C}\,D)}\;\overline{(\bar{B}D)}\;\overline{(AD)}}$$

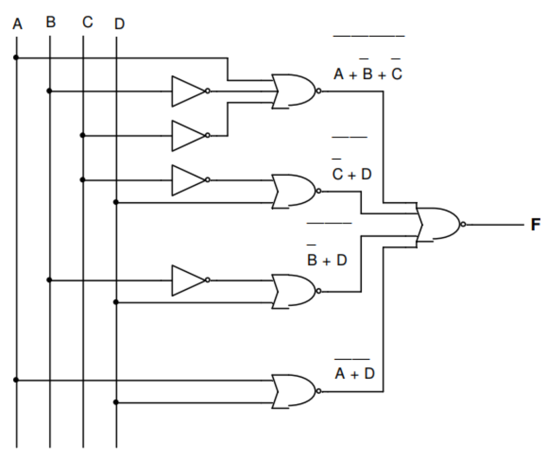


همچنین تابع ساده شده در فرم POS برابر است با:

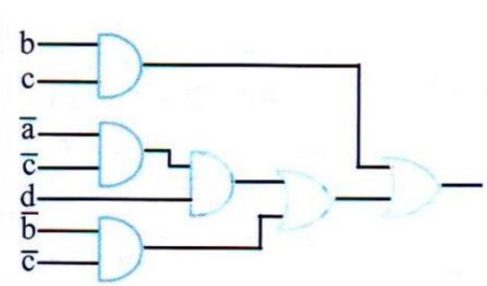
$$F = (A + \overline{B} + \overline{C})\,(\overline{C} + D)\,(\overline{B} + D)\,(A + D)$$

برای پیاده سازی با nor از فرم POS کمک میگیریم میدانیم مکمل مکمل F برابر خود F است:

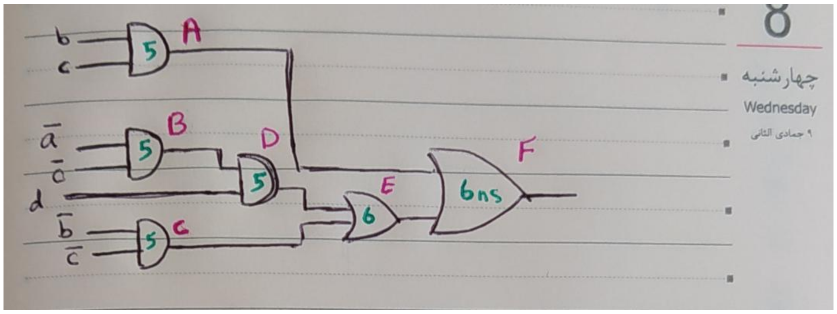
$$\overline{F}' = \overline{\overline{(A + \bar{B} + \bar{C})} + \overline{(\bar{C} + D)} + \overline{(\bar{B} + D)} + \overline{(A + D)}}$$

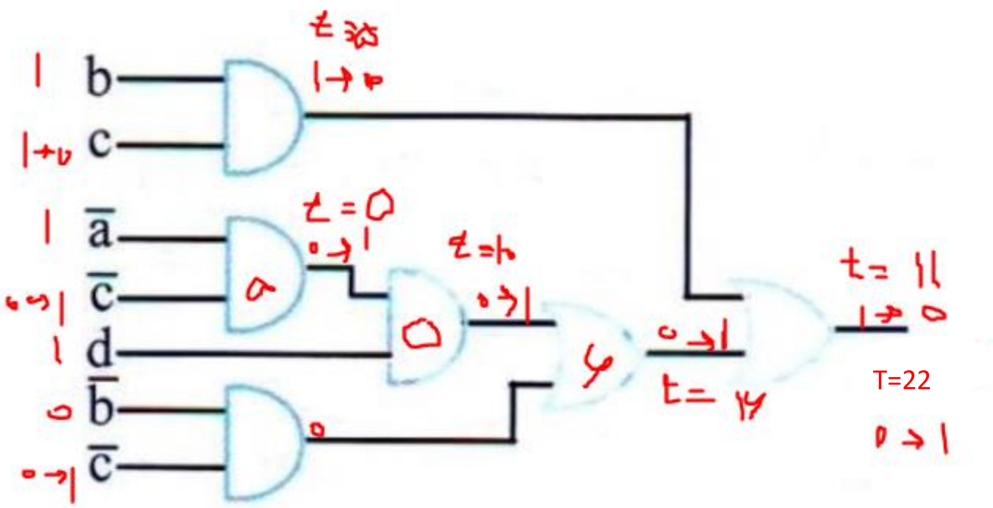


۶. در مدار نشان داده شده هرگاه abcd از ۰۱۱۱ به ۰۱۰۱ تغییر کند، یک پالس کوتاه ناخواسته در خروجی اتفاق می افتد. نوع(مثبت یا منفی؟) و مدت این پالس چیست؟ (تاخیر ANDها ۵نانوثانیه، ORها ۶نانوثانیه و تاخیر NOTها صفر است.



ترسیم نمودار زمانی گیت ها و دنبال کردن تغییرات، یکی از بهترین روش ها برای حل این نوع از سوالات است تا میزان خطا را به حداقل برساند. اما در این سوال به خصوص راه حل ساده تری نیز وجود دارد و آن دقت به تاخیر گیت ها و تاثیر آن ها در مدت زمان مشخص، روی خروجی گیت نهایی، است.



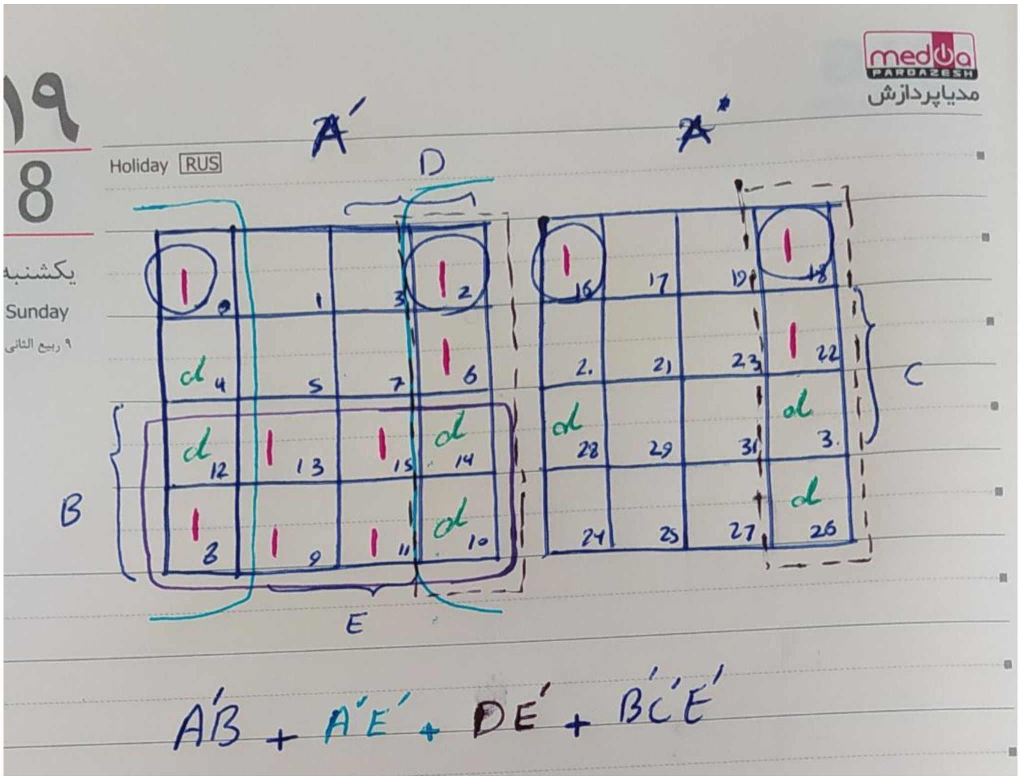


حالت اولیه مدار، کمک می‌کند که موقعیت قبلی پالس زمانی را تا لحظه ورود پالس جدید رصد کنیم. برای تعیین مقادیر، نیازی به درنظر گرفتن تاخیرها نیست زیرا در این مرحله تنها جواب نهایی مدنظر است. اما ورودی دوم تعیین کننده تغییرات در بازه زمانی های متفاوت(وابسته به تاخیر گیت ها) می باشد.

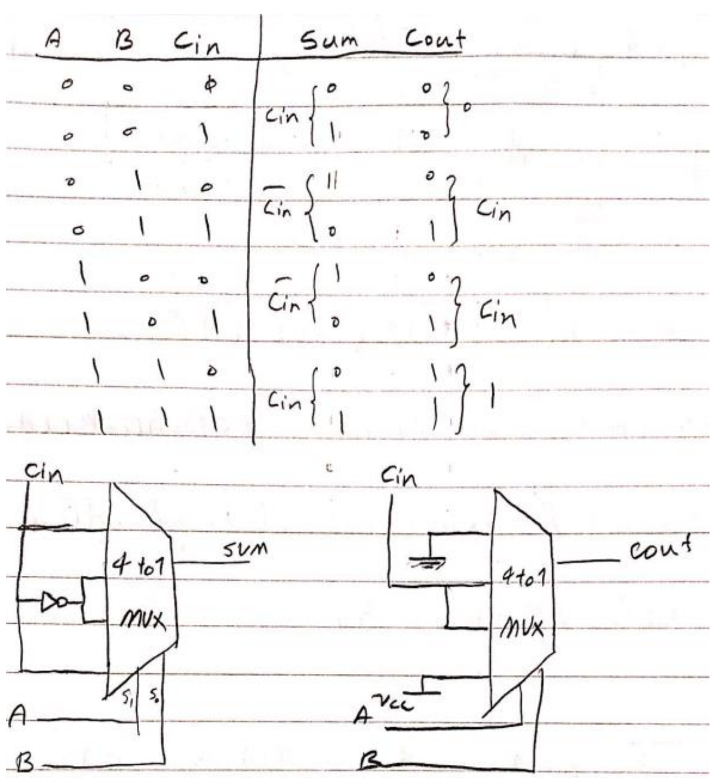
با توجه به نام گذاری گیت ها در تصویر، گیت F که گیت آخر است ۶نانو ثانیه تاخیر دارد و پالس خروجی آن ۱ است. یکی از ورودی های این گیت، خروجی گیت A است که باتوجه به تاخیرش، از زمان ورود پالس، ۵نانوثانیه بعد، از ۱ به ۰ تغییر وضعیت می‌دهد. ورودی دوم گیت F ترکیب گیت های B, C, D و E است که مجموع تاخیر آن‌ها ۱۶ نانوثانیه می‌شود. پس باتوجه به شرایط، پس از ۱۱ نانوثانیه (۵نانوثانیه تاخیر گیت A و ۶نانوثانیه تاخیر گیت F)، پالس از ۱ به ۰ تغییر وضعیت می‌دهد و پس از 22 نانوثانیه پالس از ۰ به ۱ تغییر میکند. در نتیجه به شکل کلی 10 نانوثانیه پالس ما صفر میشود و پالس منفی است.

۷. ساده ترین صورت تابع مقابل کدام است؟

$$f(A,B,C,D,E)=\sum m\,(0,2,6,8,9,11,13,15,16,18,22)+d(4,10,12,14,26,28,30)$$

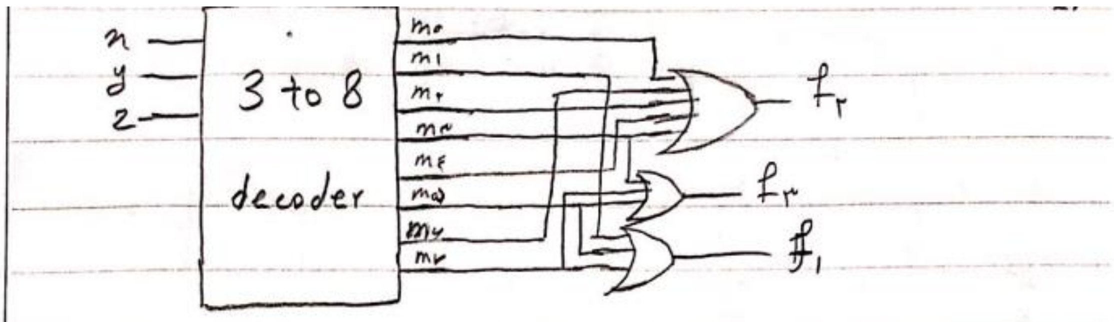


۸. با استفاده از دو $Mux\ 4\times 1$ یک full adder بسازید.



۹. با استفاده از یک دیکودر و گیت های خارجی دلخواه ، مدار ترکیبی طراحی کنید که سه تابع زیر را تولید کند.

$f_1 = (\bar{y} + x)z \qquad f_2 = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + y\bar{z} \qquad f_3 = (x + y)z$



$f_1 = (x+x')y'z + x(y+y')z = xy'z + x'y'z + xyz + xy'z =$

$\sum m(1,5,7)$

$f_2 = (x+x')y'z' + xy(z+z') + (x+x')yz' = xy'z' + x'y'z'$

$+ x'yz + x'yz' + xyz' + x'yz' = \sum m(0,2,3,4,6)$

$f_3 = x(y+y')z + (x+x')yz = xyz + xy'z + xyz + x'yz =$

$\sum m(3,5,7)$

۱۰. با استفاده از تابع ۴ متغیره‌ی زیر یک Mux 8*1 طراحی کنید. (در حقیقت با توجه به نقاطی که تابع مقادیر true یا false می‌گیرد توضیح دهید ورودی های تابع چگونه متصل شوند تا خروجی در مواقع مورد نظر مقدار ۱ یا ۰ بگیرد.)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0,1,3,4,8,9,15)$$

یک تابع چهار متغیره داریم و بنابراین ما به یک مالتی پلکسر با سه خط انتخاب و هشت ورودی نیاز داریم. ما انتخاب می کنیم که متغیرهای B، C،و D به خطوط انتخاب متصل شوند. با توجه به جدول صحت مالتی پلکسر نیمه اول جدول مربوط به A و نیمه دوم مربوط به A' است و میتوان به پیاده سازی مالتی پلکسر دست یافت و در نهایت به مالتی پلکسر نشان داده شده در شکل میرسیم.

جدول صحت یک مالتی پلکسر ۸ به ۱ به شکل زیر است.

Minterm	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
$\bar{A}$	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	1	0	$\bar{A}$	$\bar{A}$	0	0	A