

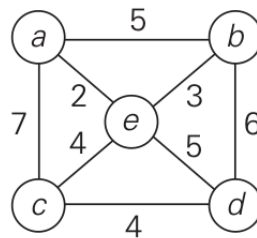


نام و نام خانوادگی: _____
شماره دانشجویی: _____

مبانی الگوریتم
امتحان پایان ترم ترم ۲۵- خرداد ۱۴۰۱

• مدت زمان امتحان ۱۲۰ دقیقه است.

سوال ۱ (۱۸ نمره) گراف زیر را در نظر بگیرید



«درخت پوشای کمینه» برای این گراف را با استفاده از روش Prim و شروع از گره a بدست آورید (توضیح ترتیب انتخاب یال‌ها و رسم درخت حاصل و وزن آن الزامی است)

سوال ۲ (۲۵ نمره) مساله تناظر (matching) دانشجویان پزشکی به بیمارستان‌ها (با تعداد یکسان دانشجویان و بیمارستان‌ها) را در نظر بگیرید. در این سوال گونه ای از این مساله مد نظر است که در آن ممکن است بعضی از دانشجویان (بیمارستان‌ها) در اولویت بندی بیمارستان‌ها (دانشجویان)، رتبه یکسانی را برای تعدادی از بیمارستان‌ها (دانشجویان) در نظر بگیرند (مثلاً دانشجوی X بیمارستان A را در رتبه ۱ لیست اولویت خود قرار می دهد اما برای اولویت دوم فرقی برای وی بین بیمارستانهای B و C وجود ندارد و به همین دلیل به هر دو رتبه ۲ می دهد و نهایتاً بیمارستان D را در آخر لیست، با رتبه ۳، قرار می دهد). اگر این گونه از مساله تناظر را $matching^*$ نامگذاری کنیم، به سوالات زیر پاسخ دهید.
(در هر مورد اگر جواب منفی است مثال نقض ارائه دهید و اگر مثبت است یک الگوریتم که می تواند به ازای هر مساله، تناظر مد نظر را خروجی دهد معرفی کنید. همچنین در الگوریتم های خود می توانید از الگوریتم Gale-Shapley استفاده نمایید.)
الف) آیا برای مسائل $matching^*$ همواره می توان یک تناظر کامل (perfect) و پایدار (stable) پیدا کرد؟
ب) آیا برای مسائل $matching^*$ همواره می توان یک تناظر کامل و پایدار قوی (strong stable) پیدا کرد؟

• تعریف: تناظر M یک تناظر ناپایدار ضعیف است اگر برای زوج هایی مانند (h, s) و (h', s') متعلق به M حداقل یکی از موارد زیر رخ دهد:
(۱) h دانشجوی s' را بر دانشجوی s ترجیح دهد و دانشجوی s' هم بیمارستان h را بر بیمارستان h' ترجیح دهد و یا برای وی تفاوتی نکند.
(۲) s بیمارستان h' را بر بیمارستان h ترجیح دهد و بیمارستان h' هم دانشجوی s را بر دانشجوی s' ترجیح دهد و یا برای وی تفاوتی نکند.

سوال ۳ (۵۵ نمره) در یک عملیات نظامی می بایست تعداد K کشتی که در M جزیره در خلیج فارس قرار دارند به N جزیره در اقیانوس هند انتقال پیدا کنند. تعداد کشتی ها در جزیره i ام خلیج فارس برابر با m_i است ($\sum_{i=1}^M m_i = K$). از طرف دیگر در جزیره j ام اقیانوس هند بیش از n_j کشتی نمی تواند مستقر شود ($\sum_{j=1}^N n_j \geq K$). هدف پیدا کردن این است که از هر یک از جزائر خلیج فارس چه تعداد کشتی باید به هر یک از جزائر اقیانوس هند منتقل شود تا هزینه کل حمل و نقل کمینه شود.

الف) نسخه تصمیم گیری این مساله را بیان کنید.

ب) آیا نسخه تصمیم گیری این مساله یک مساله NP است؟ (اثبات لازم است)

ج) اگر برای حل این مساله (نسخه تصمیم گیری) بتوان مساله معادل SAT پیدا کرد، آیا می توان نتیجه گرفت که این مساله NPC است؟ توضیح دهید.

د) برای حل مساله اولیه (مساله بهینه سازی) مساله معادل ILP پیدا کنید (توضیح الزامی است).

سوال ۴ (۴۵ نمره) یک ماتریس با ابعاد $n \times n$ در نظر بگیرید. هدف پر کردن تمام درایه های این ماتریس با اعداد متمایز $1, 2, \dots, n^2$ به گونه ای است که جمع اعداد هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی با یکدیگر برابر شوند. در این صورت به ماتریس ساخته شده، ماتریس جادویی می گویند. به مثال زیر برای $n = 3$ توجه کنید.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

الف) مقدار حاصل جمع اعداد هر سطر (یا ستون و یا قطر) در ماتریس جادویی بر حسب n از چه رابطه ای بدست می آید؟ (مثلا در مثال بالا این مقدار برابر با ۱۵ است)

ب) برای ساخت یک ماتریس جادویی با ابعاد $n \times n$ ساختار کلی الگوریتم به صورت زیر داده شده است (ماتریس A و عدد n به صورت global تعریف شده اند):

```
void magic_finder(i) {
    if (promising(i)) {
        if (i==n*n-1)
            print_matrix(A);
            return;
        for (j=1; j<=n*n; j++) {
            //your code-part(1)
        }
    }
}

bool promising(i) {
    switch = True;
    // your code-part(2)
    return switch;
}
```

ب-۱) قسمت هایی از شبه کد که نوشتن آنها به عهده شما گذاشته شده است را با عنوان کدهای بخش ۱ و بخش ۲ بنویسید. همچنین شبه کدهای بخش ۲ را بر اساس شرط های مختلف که باید بررسی شوند سازماندهی کنید.

• در شبه کد خود فرض کنید که مقدار حاصل جمع هر سطر، ستون، قطر اصلی و یا فرعی در ماتریس نهایی می بایست برابر با S_n باشد.

• در شبه کد فوق تابع $\text{print}(A)$ برای چاپ ماتریس A استفاده شده است. شما نیز در شبه کد خود می توانید فرض کنید توابعی به نام $\text{dsum}(A, i)$ ، $\text{csum}(A, i)$ ، $\text{rsum}(A, i)$ و $\text{dsum}(A, i)$ وجود دارند که به ترتیب حاصل جمع عنصر i ام را با آن دسته از عناصر $1-i, 0, \dots$ که با المان i ام در یک سطر، یک ستون، و احیاناً بر روی قطر اصلی و قطر فرعی ماتریس A قرار دارند را نتیجه می دهد.

ب-۲) برای اجرای الگوریتم تابع `magic_finder` را با چه آرگومانی باید فراخوانی کرد؟