بسم الله الرحمن الرحیم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۲۷

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

تصمیم‌ناپذیری

- تاکنون ماشین تورینگ را به عنوان مدلی برای یک کامپیوتر (محاسبه کننده) عام بیان کرده‌ایم و همچنین مفهوم الگوریتم را به طور دقیق معرفی کرده‌ایم (تز چرچ-تورینگ).

- مسائل تصمیم‌پذیری دیدیم.

- برای چه مسائلی الگوریتم نداریم؟
- آیا صرفا برخی مسائل تئوری هستند؟

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

- زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a } \mathsf{TM} \text{ and } M \text{ accepts } w\}.$$

Note that this machine loops on input $\langle M, w\rangle$ if M loops on w, which is why this machine does not decide A_{TM}. If the algorithm had some way to determine that M was not halting on w, it could *reject* in this case. However, an algorithm has no way to make this determination, as we shall see.

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

- زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

THEOREM 4.11

A_{TM} is undecidable.

سوال

- به ترتیب کدام بزرگترند؟

$N = \{1,2,3,\ldots\}$

$E = \{2,4,6,\ldots\}$

$Q = \{\frac{n}{m} \ , n, m \in N\}$

R

مجموعه‌های نامتناهی

The proof of the undecidability of A_{TM} uses a technique called *diagonalization*, discovered by mathematician Georg Cantor in 1873. Cantor was concerned with the problem of measuring the sizes of infinite sets. If we have two infinite sets, how can we tell whether one is larger than the other or whether they are of the same size? For finite sets, of course, answering these questions is easy. We simply count the elements in a finite set, and the resulting number is its size. But if we try to count the elements of an infinite set, we will never finish! So we can't use the counting method to determine the relative sizes of infinite sets.

مجموعه‌های نامتناهی

For example, take the set of even integers and the set of all strings over $\{0,1\}$. Both sets are infinite and thus larger than any finite set, but is one of the two larger than the other? How can we compare their relative size?

مجموعه‌های نامتناهی

Cantor proposed a rather nice solution to this problem. He observed that two finite sets have the same size if the elements of one set can be paired with the elements of the other set. This method compares the sizes without resorting to counting. We can extend this idea to infinite sets. Here it is more precisely.

مجموعه‌های نامتناهی

DEFINITION 4.12

Assume that we have sets A and B and a function f from A to B. Say that f is ***one-to-one*** if it never maps two different elements to the same place—that is, if $f(a) \neq f(b)$ whenever $a \neq b$. Say that f is ***onto*** if it hits every element of B—that is, if for every $b \in B$ there is an $a \in A$ such that $f(a) = b$. Say that A and B are the ***same size*** if there is a one-to-one, onto function $f\colon A \longrightarrow B$. A function that is both one-to-one and onto is called a ***correspondence***. In a correspondence, every element of A maps to a unique element of B and each element of B has a unique element of A mapping to it. A correspondence is simply a way of pairing the elements of A with the elements of B.

مجموعه‌های نامتناهی

EXAMPLE 4.13

Let $\mathcal{N}$ be the set of natural numbers $\{1, 2, 3, \ldots\}$ and let $\mathcal{E}$ be the set of even natural numbers $\{2, 4, 6, \ldots\}$.

Mapping: f(n)=2n

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

مجموعه‌های شمارا

DEFINITION 4.14

A set A is ***countable*** if either it is finite or it has the same size as $\mathcal{N}$.

مجموعه‌های شمارا

- یک مثال دیگر: شمارا یا ناشمارا؟

$$\mathcal{Q} = \{\frac{m}{n} | \, m, n \in \mathcal{N}\}$$

مجموعه‌های شمارا

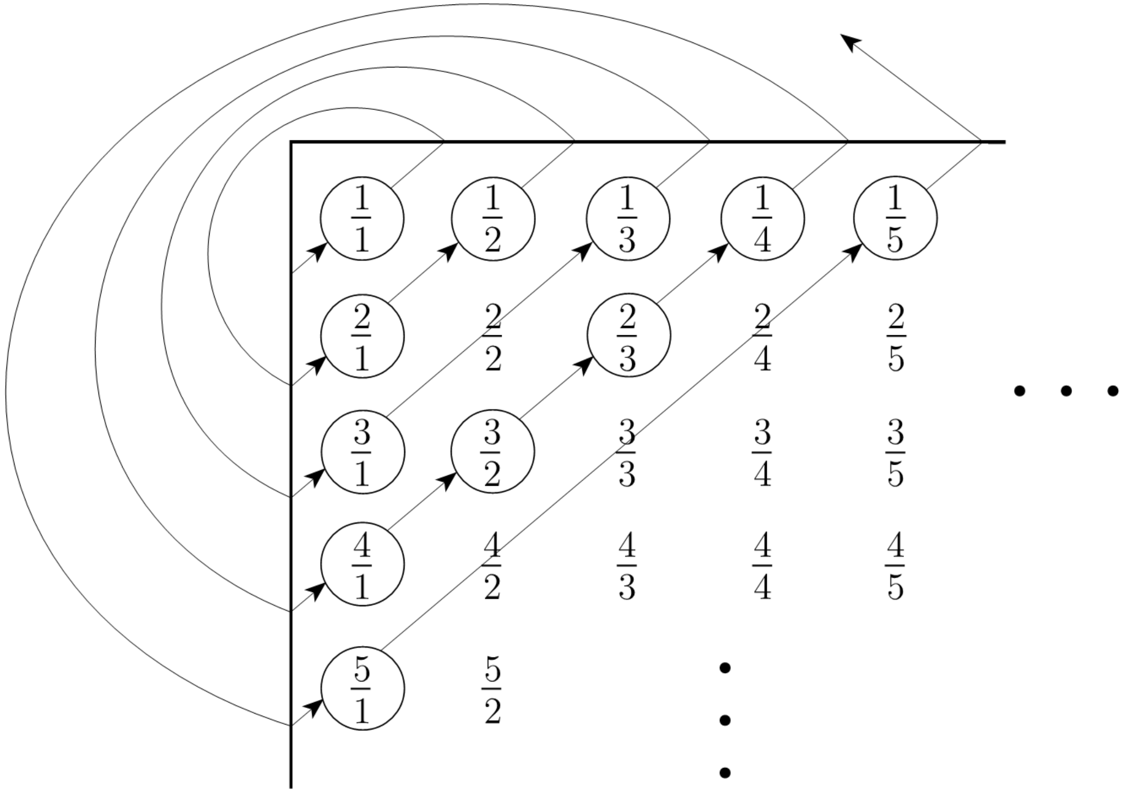


FIGURE 4.16
A correspondence of $\mathcal{N}$ and $\mathcal{Q}$

مجموعه‌های شمارا

- مثالی از مجموعه ناشمارا

THEOREM 4.17

$\mathcal{R}$ is uncountable.

مجموعه‌های ناشمارا

- مثالی از مجموعه ناشمارا

PROOF In order to show that $\mathcal{R}$ is uncountable, we show that no correspondence exists between $\mathcal{N}$ and $\mathcal{R}$. The proof is by contradiction. Suppose that a correspondence f existed between $\mathcal{N}$ and $\mathcal{R}$. Our job is to show that f fails to work as it should. For it to be a correspondence, f must pair all the members of $\mathcal{N}$ with all the members of $\mathcal{R}$. But we will find an x in $\mathcal{R}$ that is not paired with anything in $\mathcal{N}$, which will be our contradiction.

مجموعه‌های ناشمارا

- فرض وجود f به صورت زیر:

n	$f(n)$
1	3.14159...
2	55.55555...
3	0.12345...
4	0.50000...
$\vdots$	$\vdots$

مجموعه‌های ناشمارا

- ساخت x

n	$f(n)$
1	$3.\underline{1}4159\ldots$
2	$55.5\underline{5}555\ldots$
3	$0.12\underline{3}45\ldots$
4	$0.500\underline{0}0\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

$$x = 0.4641\ \ldots$$

زبان‌هایی که RE نیستند

- کاربرد در نظریه محاسبات:

  - مجموعه ماشین های تورینگ (نامتناهی) شماراست.
  - مجموعه همه زبانها ناشماراست.
  - هر ماشین تورینگ فقط یک زبان را تشخیص میدهد.
  - پس زبانهایی وجود دارند که توسط هیچ ماشین تورینگی تشخیص داده نمیشوند.
  - پس برخی زبانها RE نیستند.

زبان‌هایی که RE نیستند

- مجموعه ماشین های تورینگ (نامتناهی) شماراست.

PROOF To show that the set of all Turing machines is countable, we first observe that the set of all strings Σ^* is countable for any alphabet Σ. With only finitely many strings of each length, we may form a list of Σ^* by writing down all strings of length 0, length 1, length 2, and so on.

The set of all Turing machines is countable because each Turing machine M has an encoding into a string $\langle M \rangle$. If we simply omit those strings that are not legal encodings of Turing machines, we can obtain a list of all Turing machines.

$$\Sigma^* = \{ \ \varepsilon, \quad 0, \quad 1, \quad 00, \quad 01, \quad 10, \quad 11, \quad 000, 001, \quad \cdots \ \} \ ;$$

زبان‌هایی که RE نیستند

- کاربرد در نظریه محاسبات:

  - مجموعه ماشین های تورینگ (نامتناهی) شماراست.
  - مجموعه همه زبانها ناشماراست.
  - هر ماشین تورینگ فقط یک زبان را تشخیص میدهد.
  - پس زبانهایی وجود دارند که توسط هیچ ماشین تورینگی تشخیص داده نمیشوند.
  - پس برخی زبانها RE نیستند.

زبان‌هایی که RE نیستند

- مجموعه همه زبانها روی الفبای Σ ناشماراست.
  - مجموعه همه رشته‌های باینری نامتناهی ناشماراست.
    - فرض شمارا بودن و وجود تابع f
    - ساخت مثال نقض (diagonalization)

n	f(n)					
1	1	0	0	0	0	. . .
2	1	1	0	0	0	. . .
3	1	1	0	1	0	. . .
4	1	1	0	0	1	. . .
					$\ddots$	

زبان‌هایی که RE نیستند

- مجموعه همه زبانها روی الفبای Σ ناشماراست.
  - مجموعه همه رشته‌های باینری نامتناهی ناشماراست.
  - اکنون برای هر زبان A یک دنباله نامتناهی یکتا به صورت زیر تعریف میکنیم (با فرض $\Sigma^* = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$)

The ith bit of that sequence is a 1 if $s_i \in A$ and is a 0 if $s_i \notin A$, which is called the ***characteristic sequence*** of A. For example, if A were the language of all strings starting with a 0 over the alphabet {0,1}, its characteristic sequence χ_A would be

$$\begin{array}{rcccccccccccl}
\Sigma^* = \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, & 001, & \cdots & \} & ; \\
A = \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 001, & \cdots & \} & ; \\
\chi_A = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & & .
\end{array}$$

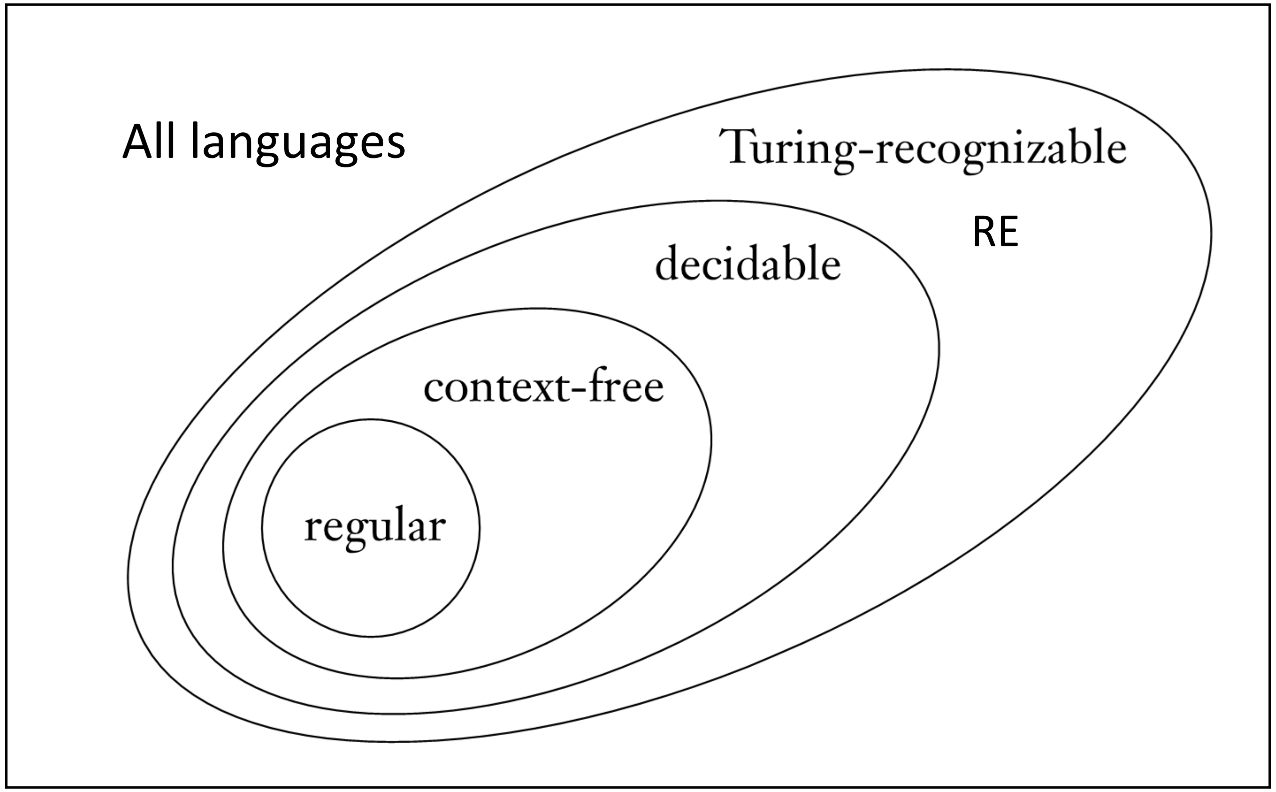
زبان‌هایی که RE نیستند

- مجموعه همه زبانها روی الفبای Σ ناشماراست.
  - مجموعه همه رشته‌های باینری نامتناهی ناشماراست.
  - هر دنباله مشخصه یک زبان منحصر به فرد را تعریف میکند.
  - بنابراین ...

○ نتیجه: ناشمارا زبان وجود دارند که RE نیستند (پس تصمیم پذیر نیز نیستند).

زبان‌های تشخیص‌پذیر / ناپذیر

IUT-ECE



زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

- زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

- میدانیم RE یا تورینگ-تشخیص‌پذیر هست. زیرا:

U = "On input $\langle M, w\rangle$, where M is a TM and w is a string:
1. Simulate M on input w.
2. If M ever enters its accept state, *accept*; if M ever enters its reject state, *reject*."

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

- زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

THEOREM 4.11 ....

A_{TM} is undecidable.

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

- اثبات: با تناقض
  - فرض کنید TM H زبان فوق را decide میکند:

$$H\big(\langle M, w\rangle\big) = \begin{cases} \mathit{accept} & \text{if } M \text{ accepts } w \\ \mathit{reject} & \text{if } M \text{ does not accept } w. \end{cases}$$

  - با استفاده از H، یک TM D میسازیم که

$D =$ "On input $\langle M\rangle$, where M is a TM:

1. Run H on input $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.
2. Output the opposite of what H outputs. That is, if H accepts, *reject*; and if H rejects, *accept*."

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

IUT-ECE

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle |\ M \text{ is a } \mathsf{TM} \text{ and } M \text{ accepts } w\}.$$

- اثبات: با تناقض
  - فرض کنید TM H زبان فوق را decide میکند:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} accept & \text{if } M \text{ accepts } w \\ reject & \text{if } M \text{ does not accept } w. \end{cases}$$

  - با استفاده از H، یک TM D میسازیم که

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} accept & \text{if } M \text{ does not accept } \langle M\rangle \\ reject & \text{if } M \text{ accepts } \langle M\rangle. \end{cases}$$

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle |\ M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

- اثبات: با تناقض
  - اکنون D را بر روی خودش اجرا کنید:

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} accept & \text{if } D \text{ does not accept } \langle D\rangle \\ reject & \text{if } D \text{ accepts } \langle D\rangle. \end{cases}$$

No matter what D does, it is forced to do the opposite, which is obviously a contradiction. Thus, neither TM D nor TM H can exist.

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}.$$

- اثبات: با تناقض

- H accepts $\langle M, w\rangle$ exactly when M accepts w.
- D rejects $\langle M\rangle$ exactly when M accepts $\langle M\rangle$.
- D rejects $\langle D\rangle$ exactly when D accepts $\langle D\rangle$.

- قطری‌سازی چگونه رخ داد؟

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*accept*		*accept*		
M_2	*accept*	*accept*	*accept*	*accept*	
M_3					$\cdots$
M_4	*accept*	*accept*			
$\vdots$		$\vdots$			

FIGURE 4.19
Entry i, j is *accept* if M_i accepts $\langle M_j \rangle$

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*accept*	*reject*	*accept*	*reject*	
M_2	*accept*	*accept*	*accept*	*accept*	$\cdots$
M_3	*reject*	*reject*	*reject*	*reject*	
M_4	*accept*	*accept*	*reject*	*reject*	
$\vdots$			$\vdots$		

FIGURE 4.20
Entry i, j is the value of H on input $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$

زبان‌های تصمیم‌ناپذیر

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle D \rangle$	$\cdots$
M_1	$\underline{accept}$	$reject$	$accept$	$reject$		$accept$	
M_2	$accept$	$\underline{accept}$	$accept$	$accept$	$\cdots$	$accept$	$\cdots$
M_3	$reject$	$reject$	$\underline{reject}$	$reject$		$reject$	
M_4	$accept$	$accept$	$reject$	$\underline{reject}$		$accept$	
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		
D	$reject$	$reject$	$accept$	$accept$		$\underline{\ ?\ }$	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

FIGURE 4.21
If D is in the figure, a contradiction occurs at "?"

زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر

- زبان A_{TM} تصمیم‌ناپذیر اما تورینگ-تشخیص‌پذیر بود.

- گفتیم ناشمارا زبان تورینگ-تشخیص ناپذیر داریم.
- مثال؟

زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر

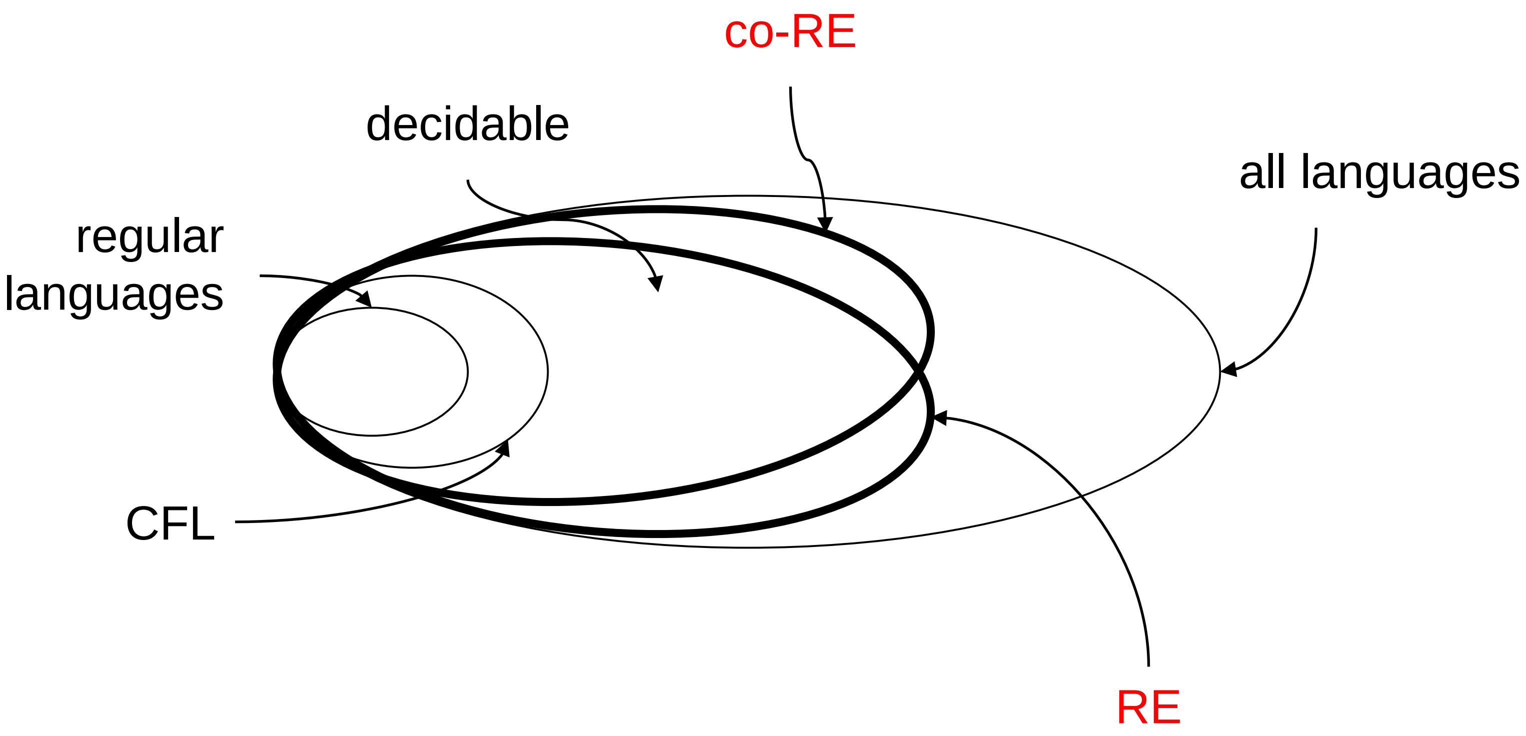
$$\overline{A_{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a } TM \text{ that does not accept } w\}$$

THEOREM 4.22

A language is decidable iff it is Turing-recognizable and co-Turing-recognizable.

We say that a language is *co-Turing-recognizable* if it is the complement of a Turing-recognizable language.

زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر



زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر

THEOREM 4.22

A language is decidable iff it is Turing-recognizable and co-Turing-recognizable.

- اثبات: طرف اول

PROOF We have two directions to prove. First, if A is decidable, we can easily see that both A and its complement $\overline{A}$ are Turing-recognizable. Any decidable language is Turing-recognizable, and the complement of a decidable language also is decidable.

زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر

THEOREM 4.22

A language is decidable iff it is Turing-recognizable and co-Turing-recognizable.

- اثبات: طرف دوم: ساخت ماشین M برای تصمیم درباره زبان A

$M =$ "On input w:
1. Run both M_1 and M_2 on input w in parallel.
2. If M_1 accepts, *accept*; if M_2 accepts, *reject*."

we let M_1 be the recognizer for A and M_2 be the recognizer for $\overline{A}$.

زبان‌های تورینگ-تشخیص‌ناپذیر

- نتیجه: زبان زیر تورینگ تشخیص‌ناپذیر است.

$$\overline{A_{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a } TM \text{ that does not accept } w\}$$

PROOF We know that A_{TM} is Turing-recognizable. If $\overline{A_{\mathsf{TM}}}$ also were Turing-recognizable, A_{TM} would be decidable. Theorem 4.11 tells us that A_{TM} is not decidable, so $\overline{A_{\mathsf{TM}}}$ must not be Turing-recognizable.