ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

فصل ششم

شمارش

مبانی شمارش

- اصل ضرب: اگر انجام فرایندی را بتوان به ۲ کار تقسیم کرد، و n راه برای انجام کار ۱ و همچنین m راه برای انجام کار ۲ داشته باشیم، آنگاه برای انجام آن فرایند n.m راه وجود دارد.

مثال: شرکتی ۲ کارمند دارد با ساختمانی که ۱۲ اتاق دارد. به چند روش مختلف میتوان به هر کارمند یک اتاق داد؟

حل: کارمند اول ۱۲ حالت انتخاب و کارمند دوم ۱۱ حالت انتخاب دارد.

$$12 \times 11 = 132$$

مبانی شمارش

مثال: چند رشته بیتی مختلف از طول ۷ وجود دارد؟

حل: هر بیت ۲ حالت دارد، ۰ یا ۱

$$2^7 = 128$$

مبانی شمارش

مثال: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی

حل: هر عنصر از دامنه به یکی از عناصر هم دامنه باید نگاشت شود. پس برای هر عنصر از دامنه n حالت مختلف وجود دارد.

$$n \times n \times \cdots \times n = n^m$$

مبانی شمارش

مثال: تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی

حل: اگر m>n هیچ تابع یک به یکی وجود ندارد. برای $m \leq n$ داریم:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

مبانی شمارش

مثال: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی:

حل: هر عضو ۲ حالت دارد، یا در زیرمجموعه وجود دارد یا خیر، پس:

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

{1,2,3}

{}   {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3}

مبانی شمارش

تمرین: با در نظر گرفتن ساخت پلاک های اتومبیل که حاوی دو حرف لاتین و سپس چهار رقم است در حالت های زیر تعداد انتخاب های ممکن را بدست آورید:

الف) اگر هیچ حرف و رقمی تکراری نباشد

۷*۸*۹*۱۰*۲۵*۲۶

ب)اگر تکرار حروف و ارقام مجاز باشد

۱۰*۱۰*۱۰*۱۰*۲۶*۲۶

مبانی شمارش

- اصل جمع: اگر کاری بتوان با یکی از n راه مختلف یا یکی از m راه مختلف دیگر انجام داد بطوریکه هیچ یک از n روش با هیچکدام از m روش دیگر یکسان نباشد، در این صورت آن کار را میتوان به m+n روش انجام داد.
- قاعده اصل جمع: دوکار را همزمان با هم نمی توان انجام داد!

مبانی شمارش

مثال: ۳ لیست از پروژه های کامپیوتری وجود دارد بطوریکه در هر ۲ لیست دلخواه هیچ پروژه یکسانی وجود ندارد. لیست ها به ترتیب شامل ۲۳، ۱۵، و ۱۹ پروژه هستند. یک دانشجوی رشته کامپیوتر چند انتخاب مختلف برای انتخاب یک پروژه دارد؟

حل: طبق اصل جمع

$$۲۳+۱۵+۱۹=۵۷$$

مبانی شمارش

مثال: یک مدرس کامپیوتربرای هر یک از زبانهای جاوا، بیسیک، سی، پاسکال و پایتون پنج کتاب مقدماتی دارد. یک دانشجوی علاقمند به یادگیری اولین زبان برنامه نویسی چند انتخاب دارد؟

حل: طبق اصل جمع

۲۵ انتخاب

مبانی شمارش

مثال: هر کاربر در یک سیستم کامپیوتری پسوردی دارد که بین ۶ تا ۸ کاراکتر میتواند داشته باشد. هر کاراکتر میتواند یک حرف بزرگ یا یک رقم باشد. هر پسورد حداقل یک رقم باید داشته باشد. چند پسورد مختلف میتواند وجود داشته باشد؟

مبانی شمارش

حل:

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2{,}176{,}782{,}336 - 308{,}915{,}776 = 1{,}867{,}866{,}560.$$

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78{,}364{,}164{,}096 - 8{,}031{,}810{,}176 = 70{,}332{,}353{,}920$$

$$\begin{aligned} P_8 &= 36^8 - 26^8 = 2{,}821{,}109{,}907{,}456 - 208{,}827{,}064{,}576 \\ &= 2{,}612{,}282{,}842{,}880. \end{aligned}$$

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2{,}684{,}483{,}063{,}360.$$

مبانی شمارش

- اصل تفریق: اگر کاری به m راه یا n راه قابل انجام شدن باشد، آنگاه تعداد راه ها برای انجام این کار برابر است با m+n منهای تعداد روش هایی که در هر دو مشترک است.

مثال:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مبانی شمارش

مثال: تعداد رشته های بیتی از طول ۸ که یا با ۱ شروع شوند یا با ۰۰ خاتمه پیدا کنند چند تاست؟

$$1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^7 = 128 \text{ ways}}$$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^6 = 64 \text{ ways}}\ 0\ \ 0$$

$$1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^5 = 32 \text{ ways}}\ 0\ \ 0$$

$$128 + 64 - 32 = 160.$$

اصل لانه کبوتری

- اگر k+1 شی و k جعبه داشته باشیم و اشیا را در جعبه ها قرار دهیم، آنگاه حداقل یک جعبه وجود دارد که شامل ۲ یا بیشتر از ۲ شی است.

مثال: تابع f از یک مجموعه k+1 عضوی به یک مجموعه k عضوی، یک به یک نیست.

اصل لانه کبوتری تعمیم یافته

- اگر N شی را در k جعبه قرار دهیم، آنگاه حداقل یک جعبه وجود دارد که شامل حداقل $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ شی است.

مثال: بین ۱۰۰ نفر حداقل ۹ نفر در یک ماه به دنیا آمده اند(تمرین).

مثال: بین هر n+1 عدد صحیح مثبت کوچکتر یا مساوی با 2n، عددی وجود دارد که بر دیگری بخشپذیر است(تمرین).

اصل لانه کبوتری تعمیم یافته

- قضیه: هر دنباله ای از n^2+1 عدد حقیقی متمایز شامل زیردنباله ای به طول $n+1$ است که یا صعودی اکید است یا نزولی اکید.
- اثبات(تمرین)

جایگشت ها

- جایگشت: ترتیبی از کنار هم قرار گرفتن اشیای یک مجموعه. اگر تعداد اشیا r باشد، به آن r-permutation گفته میشود (جایگشت های r تایی).
- تعداد جایگشت های r تایی از یک مجموعه n عضوی را با P(n,r) نشان میدهیم.

جایگشت ها

- قضیه: اگر n و r اعداد صحیح مثبت باشند بطوریکه $1 \leq r \leq n$ آنگاه تعداد جایگشت های r تایی در مجموعه ای با n عنصر متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

جایگشت ها

- نتیجه: اگر n و r اعداد صحیح مثبت باشند که $0 \leq r \leq n$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: ۸ دونده در یک مسابقه دو شرکت کرده اند. به چند طریق مختلف مدال های طلا، نقره و برنز میتواند تقسیم شود؟ (هیچ دو نفری امتیاز یکسان ندارند؟)

حل: P(8,3)

جایگشت ها

مثال: تعداد جایگشت های حروف ABCDEFGH که شامل رشته ABC باشد چند تاست؟

حل: !6

مثال: تعداد جایگشت های حروف Computer اگر فقط ۴ تا از حروف بکار رود؟ p(8 ,4)

تعداد کل دنباله های ۱۲ حرفی اگر تکرار حروف مجاز باشد؟

$$8^{12}$$

مثال در یک آسانسور در یک ساختمان ۷ طبقه، ۴ نفر حضور دارند. اگر قرار باشد در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود، این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند پیاده شوند؟

پاسخ: از ۷ طبقه باید ۴ طبقه انتخاب شود و در این ۴ طبقه ۴ نفر پیاده شوند که ترتیب پیاده شدن این افراد مهم است پس جواب جایگشت ۴ شی متمایز از ۷ شی متمایز است:

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=۷\times ۶\times ۵\times ۴=۸۴۰$$

جایگشت اشیای نامتمایز

مثال: تعداد ترتیب های(خطی) چهارحرف واژه BALL برابر است با 12 و نه !4 زیرا: این چهار حرف متمایز نیستند.اگر دو L را با نوشتن L1 و L2 متمایز کنیم، آنگاه !4 جایگشت داریم که در جدول (ب) فهرست شده اند.

به ازای هر ترتیبی که در آن L ها غیرقابل تمیزند،

جفتی از جایگشت های دارای L های متمایز، متناظر می شود

(الف)	(ب)	
$ABLL$	ABL_2L_1	ABL_1L_2
$ALBL$	AL_2BL_1	AL_1BL_2
$ALLB$	AL_2L_1B	AL_1L_2B
$BALL$	BAL_2L_1	BAL_1L_2
$BLAL$	BL_2AL_1	BL_1AL_2
$BLLA$	BL_2L_1A	BL_1L_2A
$LABL$	L_2ABL_1	L_1ABL_2
$LALB$	L_2AL_1B	L_1AL_2B
$LBAL$	L_2BAL_1	L_1BAL_2
$LBLA$	L_2BL_1A	L_1BL_2A
$LLAB$	L_2L_1AB	L_1L_2AB
$LLBA$	L_2L_1BA	L_1L_2BA

پاسخ: اگر دو حرف L با هم متفاوت باشند، تعداد جایگشت $۴!=۲۴$ است ولی چون دو حرف L یکسان هستند، تعداد جایگشت برابر $\frac{۴!}{۲!}=۱۲$ می‌باشد که این ۱۲ جایگشت عبارتند از:

ABLL,ALBL,ALLB,BALL,BLAL,BLLA,LABL,LALB,LBAL,LBLA,LLAB,LLBA

بنابراین در این نوع مسائل باید جایگشت همهٔ اشیاء را شمارش کنید و سپس به جایگشت اشیاء تکراری تقسیم کنید.

جایگشت اشیای نامتمایز

- تعداد جایگشت های n شی که n_1 تای آنها از نوع ۱، n_2 تای آنها از نوع ۲، ...، n_k تای آنها از نوع k هستند، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

مثال با حروف MISSISSIPPI چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان نوشت، در واقع این ۱۱ حرف چند تا جایگشت یا ترتیب متفاوت دارند؟ در چند جایگشت همهٔ Sها کنار هم هستند؟

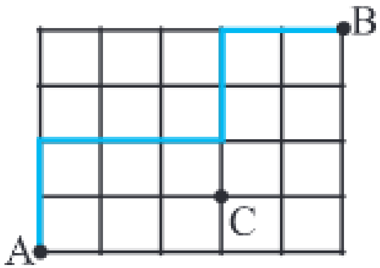
پاسخ: اگر هر ۱۱ حرف متفاوت می‌بودند جواب !۱۱ می‌شد ولی چون حروف تکراری وجود دارد جواب برابر $\frac{۱۱!}{۱!\,۴!\,۴!\,۲!} = ۳۴۶۵۰$ می‌باشد. برای شمارش جایگشت‌هایی که Sها کنار هم هستند، کافی است هر ۴ تا S را یک شی در نظر گرفته به همراه ۷ حرف دیگر، جمعاً ۸ شی وجود دارد که !۸ جایگشت دارد ولی چون ۴ تا حرف I و ۲ تا حرف P تکراری هستند جواب برابر $\frac{۸!}{۴!۲!} = ۸۴۰$ می‌باشد.

مثال: چند رشته مختلف از حروف SUCCESS میتوان ایجاد کرد؟

$$
\begin{aligned}
C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1) &= \frac{7!}{3!\,4!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{2!}{1!\,1!}\cdot\frac{1!}{1!\,0!} \\
&= \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} \\
&= 420\,.
\end{aligned}
$$

مثال الف) در شکل 5×4 مقابل به چند حالت می‌توان از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفت به شرطی که فقط به سمت راست (R) و به سمت بالا (U) مجاز به حرکت باشیم و در هر حرکت فقط یک خانه جابجا شویم؟ یک نمونه از مسیرهای مجاز نشان داده شده است.

ب) چندتا از این مسیرها از C عبور نمی‌کنند؟



پاسخ: الف) هر مسیر از A به B را می‌توان با یک دنبالهٔ ۹ حرفی که شامل ۵ حرف R و ۴ حرف U است نشان داد. مثلاً دنبالهٔ متناظر با مسیر مشخص شده در شکل UURRRUURR می‌باشد. در واقع بین مسیرهای مجاز و رشته‌های ۹ حرفی که شامل ۵ حرف R و ۴ حرف U هستند تناظر یک به یک وجود دارد و تعداد این رشته‌ها برابر $۱۲۶ = \frac{۹!}{۵!۴!}$ می‌باشد.

ب) تعداد مسیرهایی که از C عبور می‌کنند را از کل مسیرها کم می‌کنیم:

$$(A \to B) - (A \to C) \times (C \to B) = \frac{۹!}{۵!۴!} - \frac{۴!}{۳!۱!} \times \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۲۶ - ۴۰ = ۸۶$$

ترکیب

- یک ترکیب r تایی از اعضای یک مجموعه (r-combination) یعنی انتخاب r شی از اعضای مجموعه بطوریکه ترتیب انتخاب اهمیت ندارد.
- تعداد ترکیب های r تایی از یک مجموعه n عضوی را با C(n,r) یا $\binom{n}{r}$ نشان میدهیم.

ترکیب

– **ترکیب بدون تکرار:** n تا شی متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r تا شـی متمـایز $(0 \le r \le n)$ انتخاب کنیم و برای ما ترتیب مهم نیست یعنی نمی‌خواهیم اشیایی کـه انتخـاب کـردیم را بـا هـم جابجا کنیم. یادمان هست تعداد جایگشت r شی متمایز از n شی متمـایز برابـر $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ بود، حال که نمی‌خواهیم r شی که انتخاب شده‌اند را با هم جابجا کنیم باید تعداد جایگشت‌ها را به $r!$ تقسیم کنیم زیرا r شی متمایز دارای $r!$ جایگشت هستند که اکنون بی‌اثـر اسـت پـس تعـداد حالات انتخاب r شی متمایز از بین n شی متمایز برابر است با:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{1}{r!}P(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترکیب

- قضیه: اگر n و r اعداد صحیح مثبت باشند بطوریکه $0 \leq r \leq n$

تعداد ترکیب های r تایی از یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

- نتیجه: اگر n و r اعداد صحیح نامنفی باشند C(n,r) = C(n,n-r)

توجه: درستی تساوی‌های زیر قابل بررسی است:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \;,\; \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \;,\; \binom{n}{r} = 0 \text{ if } 0 \leq n < r$$

ترکیب

مثال: چند رشته بیتی از طول n وجود دارد که شامل r عدد ۱ است؟

حل: $C(n,r)$

مثال **الف)** در یک آزمون ۱۰ سوال وجود دارد. به چند حالت می‌توان بـه ۷ سـوال جـواب داد؟ ترتیب پاسخ دادن به سوالات اهمیتی ندارد.

ب) اگر مجبور باشیم به ۳ سوال از ۵ سوال اول و به ۴ سـوال از ۵ سـوال آخـر پاسـخ دهـیم، چنـد حالت وجود دارد؟

ج) اگر مجبور باشیم به ۷ سوال از ۱۰ سوال پاسخ دهیم طوری که حداقل بـه ۳ سـوال از ۵ سـوال اول پاسخ دهیم، چند حالت وجود دارد؟

پاسخ: الف) باید از ۱۰ سوال تعداد ۷ سـوال انتخـاب شـود کـه $\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$ حالت دارد.

ب) به $\binom{۵}{۳}$ حالت، ۳ سوال از ۵ سوال اول انتخاب می‌کنیم و بـه $\binom{۵}{۴}$ حالـت، ۴ سـوال از ۵ سـوال آخر انتخاب می‌شود پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالات $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}=۵۰$ است.

ج) حداقل به ۳ سوال از ۵ سوال اول باید پاسخ داده شود که حالات مختلف دارد:

۱) به ۳ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۴ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۵۰$$

۲) به ۴ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۳ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳} = ۵۰$$

۳) به ۵ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۲ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲} = ۱۰$$

پس طبق اصل جمع جواب برابر $۵۰ + ۵۰ + ۱۰ = ۱۱۰$ می‌باشد.

جایگشت با تکرار

- قضیه: تعداد جایگشت های r تایی از یک مجموعه n تایی که در آن تکرار مجاز است، برابر است با n^r

مثال: تعداد رشته های از طول r از حروف بزرگ الفبای انگلیسی برابر است با 26^r

ترکیب با تکرار

- قضیه: تعداد ترکیب های r تایی از یک مجموعه n تایی در حالتی که تکرار مجاز است، برابر است با C(n+r-1,r-1)

مثال: تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3=11$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی چند تا است؟

حل: C(13,2)

- قضیه: تعداد راه های توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز بطوریکه برای همه i ها در جعبه i ام n_i شی قرار بگیرد برابر است با

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

ضرایب دو جمله ای

- قضیه دو جمله ای نیوتن:اگر x و y دو متغیر و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

مثال:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j \\ &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4.\end{aligned}$$

ضرایب دو جمله ای

- نتیجه ۱: اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد و$x=1, y=1$ ، آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

- نتیجه ۲: اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

اثبات(تمرین)

ضرایب دو جمله ای

- نتیجه ۳: اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

اثبات(تمرین)

ضرایب دو جمله ای

- قضیه: اگر n و k اعداد صحیح مثبت باشند که $k \geq n$ باشد، آنگاه

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

ضرایب دو جمله ای

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad\binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad\binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\quad\binom{8}{1}\quad\binom{8}{2}\quad\binom{8}{3}\quad\binom{8}{4}\quad\binom{8}{5}\quad\binom{8}{6}\quad\binom{8}{7}\quad\binom{8}{8}$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$1$$
$$1\quad 1$$
$$1\quad 2\quad 1$$
$$1\quad 3\quad 3\quad 1$$
$$1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1$$
$$1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1$$
$$1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1$$
$$1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1$$
$$1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1$$

ضرایب دو جمله ای

- قضیه: اگر m و n و r اعداد صحیح نامنفی باشند، بطوریکه r از m و n بزرگتر نیست، آنگاه

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

- اگر n عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

ضرایب دو جمله ای

- قضیه: اگر n و r اعداد صحیح مثبت باشند که $n \geq r$ باشد، آنگاه

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}.$$

قضیه: در بسط $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ ضریب جملهٔ $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ که $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

اثبات: در واقع عبارت $(x_1+x_2+\ldots x_k)^n$ یعنی:

$$\underbrace{\overbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)}^{\text{پرانتز ۱}}\overbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)}^{\text{پرانتز ۲}}\ldots\overbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)}^{\text{پرانتز } n}}_{n \text{ بار}}$$

حال ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ به این معنی است که این جمله چندبار از ضرب فوق حاصل می‌شود. برای ساخت این جمله باید از n_1 پرانتز، x_1 انتخاب شود که $\binom{n}{n_1}$ حالت دارد حال از $n-n_1$ پرانتز باقی‌مانده باید n_2 بار x_2 انتخاب شود که $\binom{n-n_1}{n_2}$ حالت دارد و به همین ترتیب:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

مثال در عبارت $(a+b+c)^{۷}$ ضریب $a^{۲}b^{۳}c^{۲}$ چند است؟

پاسخ: با توجه به قضیهٔ فوق، ضریب برابر است با:

$$\frac{۷!}{۲!۳!۲!}=۲۱۰$$

مثال در عبارت $(۲a-b+۳c)^{۷}$ ضریب $a^{۲}b^{۳}c^{۲}$ چند است؟

پاسخ: با توجه به اینکه a و b و c خودشان دارای ضریب هستند باید این ضرایب را در فرمول، تأثیر دهیم و جواب برابر است با:

$$\frac{۷!}{۲!۳!۲!}\times(۲)^{۲}(-۱)^{۳}(۳)^{۲}=-۷۵۶۰$$

مثال

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر چند تاست؟ $(x_i \geq ۰)$

$$x_۱^۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$$

پاسخ: در این معادله $x_۱$ می‌تواند ۰ ، ۱ یا ۲ باشد:

$$x_۱ = ۰ \rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹ \Rightarrow \binom{۹ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = ۵۵$$

$$x_۱ = ۱ \rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \Rightarrow \binom{۸ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = ۴۵$$

$$x_۱ = ۲ \rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱ \Rightarrow \binom{۱ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = ۳$$

$$\text{جواب} = ۵۵ + ۴۵ + ۳ = ۱۰۳$$

مثال

با ارقام ۰ تا ۵ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت به شرطی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ: الف) صدگان ۵ انتخاب (۱ تا ۵) و دهگان و یکان ۶ انتخاب (۰ تا ۵):

صدگان		دهگان		یکان	
۵	×	۶	×	۶	= ۱۸۰

ب) صدگان ۵ انتخاب، دهگان ۵ انتخاب (چون رقمی که برای صدگان انتخاب شده برای دهگان مجاز نیست ولی صفر مجاز است) و یکان ۴ انتخاب:

صدگان		دهگان		یکان	
۵	×	۵	×	۴	= ۱۰۰

مثال

با ارقام ۰ تا ۵ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت با این فرض که تکرار ارقام مجاز نیست، به طوری که:

الف) عدد فرد باشد. ب) عدد زوج باشد. ج) عدد مضرب ۵ باشد.

د) بزرگتر از ۳۰۰ باشد. هـ) حداقل شامل یک رقم زوج باشد. و) مضرب ۳ باشد.

پاسخ: الف) رقم یکان می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ باشد یعنی ۳ انتخاب. هر انتخابی که برای یکان انجام شود، رقم صدگان ۴ انتخاب دارد (صفر مجاز نیست) و رقم دهگان نیز ۴ انتخاب دارد:

$$\dfrac{\text{صدگان}}{۴} \times \dfrac{\text{دهگان}}{۴} \times \dfrac{\text{یکان}}{۳} = ۴۸$$

ب) روش اول: رقم یکان می‌تواند ۰ یا ۲ یا ۴ باشد. ولی اگر یکان صفر باشد یا نباشد در انتخاب صدگان تاثیر می‌گذارد، بنابراین دو حالت بررسی می‌کنیم: اعداد زوجی که یکان آنها صفر است و اعداد زوجی که یکان آنها صفر نیست، طبق این دو حالت جواب برابر ۲۰ + ۳۲ = ۵۲ می‌باشد.

$$\frac{\text{صدگان}}{۵} \times \frac{\text{دهگان}}{۴} \times \frac{\text{یکان صفر}}{۱} = ۲۰ \qquad \frac{\text{صدگان}}{۴} \times \frac{\text{دهگان}}{۴} \times \frac{\text{یکان ۲ یا ۴}}{۲} = ۳۲$$

روش دوم: کل اعداد ۳ رقمی بدون تکرار با توجه به مثال قبل، برابر ۱۰۰ می‌باشد که طبق قسمت الف ۴۸ عدد فرد هستندپس ۱۰۰ − ۴۸ = ۵۲ عدد زوج وجود دارد.

ج) دو حالت بررسی می‌کنیم، طبق این دو حالت جواب ۳۶ = ۱۶ + ۲۰ می‌باشد.

۱۶ =

یکان ۵	×	دهگان	×	صدگان
۱		۴		۴

۲۰ =

یکان صفر	×	دهگان	×	صدگان
۱		۴		۵

د) صدگان باید ۳ یا ۴ یا ۵ باشد پس تعداد حالات ۶۰ = ۴ × ۵ × ۳ می‌باشد.

هـ) اعدادی که اصلاً رقم زوج ندارند (شامل ۱، ۳، ۵ هستند) برابر ۶ = ۱ × ۲ × ۳ می‌باشد پس تعداد اعدادی که حداقل یک رقم زوج دارند ۹۴ = ۶ − ۱۰۰ می‌باشد.

و) عددی مضرب ۳ است که مجموع ارقام آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بنابراین تمام ۳ رقم‌هایی که مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است را انتخاب می‌کنیم و با آنها عدد می‌سازیم:

(۱, ۳, ۵), (۱, ۲, ۳), (۲, ۳, ۴), (۳, ۴, ۵)

با هر یک از این دسته‌ها ۶ = !۳ عدد می‌توان ساخت و کلاً ۲۴ = ۶ × ۴ عدد می‌توان ساخت.

مثال

از بین ۴ مرد و ۳ زن می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم. چند طریق وجود دارد اگر:

الف) محدودیتی نباشد.

ب) همگی مرد باشند.

ج) حداقل یک مرد باشد.

د) مردها بیشتر باشند.

هـ) رئیس گروه مرد باشد.

و) شخص a حتماً انتخاب شود.

ز) شخص a انتخاب نشود. (یکی از این ۷ نفر به اسم a است)

پاسخ: الف) از بین ۷ نفر می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۴!\,۳!} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲} = ۳۵$$

ب) باید از بین ۴ مرد ۳ مرد انتخاب کنیم: $\binom{۴}{۳} = ۴$

ج) روش اول:

صفر زن و ۳ مرد + یک زن و ۲ مرد + ۲ زن و یک مرد = حداقل یک مرد

$$=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}=۴\times۳+۶\times۳+۴\times۱=۳۴$$

روش دوم:

همگی زن − کل حالات = حداقل یک مرد $=\binom{۷}{۳}-\binom{۳}{۳}=۳۵-۱=۳۴$

د)

هیچ زن و ۳ مرد + ۱ زن و ۲ مرد = مردها بیشتر $=\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}=۲۲$

هـ)

یک نفر مرد به عنوان رئیس انتخاب می‌کنیم و ۲ نفر باقیمانده را از بین ۶ نفر آدم باقیمانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۲}=۴\times ۱۵=۶۰$$

و) شخص a را انتخاب می‌کنیم که یک حالت دارد و ۲ نفر دیگر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$۱\times\binom{۶}{۲}=۱۵$$

ز) شخص a را نادیده می‌گیریم و ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳}=۲۰$$

مثال

می‌خواهیم ۲ کتاب با موضوعات مختلف از بین ۵ کتاب ریاضی، ۳ کتاب کامپیوتر و ۲ کتاب گرافیک انتخاب کنیم، چند حالت وجود دارد؟ (کتاب‌ها همگی متمایزند)

پاسخ: چون گفته شده ۲ کتاب با موضوعات مختلف پس نباید ۲ کتاب را از یک موضوع انتخاب کرد. بنابراین حالات مختلف وجود دارد که عبارتند از:

(یک گرافیک و یک کامپیوتر) + (یک گرافیک و یک ریاضی) + (یک کامپیوتر و یک ریاضی)

$= ۵ \times ۳ + ۵ \times ۳ + ۳ \times ۲ = ۳۱$

مثال

نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ: روش اول: نامعادله فوق، را می‌توان ۱۱ معادله زیر در نظر گرفت:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \;,\; x_1 + x_2 + x_3 = 1 \;, \ldots ,\; x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

تعداد جواب‌های هر یک از این معادلات را می‌یابیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\binom{0+3-1}{3-1} + \binom{1+3-1}{3-1} + \ldots + \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{12}{2}$$

و طبق مسئله ۵ قسمت d حاصل جمع فوق برابر $\binom{13}{3}$ می‌باشد.

روش دوم: اگر متغیر x_4 را اضافه کنیم، نامعادله تبدیل به معادله می‌شود:

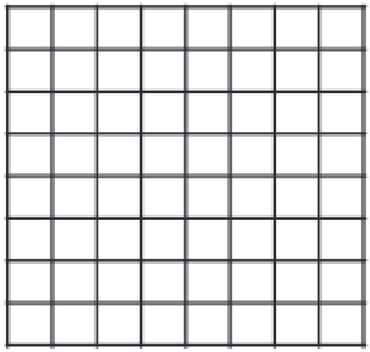
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

و تعداد جواب‌های این معادله $\binom{13}{3} = \binom{10+4-1}{4-1}$ می‌باشد.

مثال

تعداد مربع‌ها و مستطیل‌های صفحه شطرنج (8×8) چند تاست؟

پاسخ: به طور کلی در یک صفحه $n \times n$ تعداد مربع‌ها به شکل زیر محاسبه می‌شود.



1×1 تعداد مربع‌های $= n^2$

2×2 تعداد مربع‌های $= (n-1)^2$

3×3 تعداد مربع‌های $= (n-2)^2$

$\vdots$

$n \times n$ تعداد مربع‌های $= 1^2$

$n \times n$ تعداد مربع‌های صفحه $= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8×8 تعداد مربع‌های صفحه $= \frac{8(8+1)(16+1)}{6} = 204$

برای شمارش تعداد مستطیل‌ها می‌گوییم از برخورد هر دو خط افقی بـا دو خـط عمـودی یـک مستطیل بوجود می‌آید ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی وجود دارد:

$$\text{تعداد مستطیل‌های صفحه شطرنج} = \binom{۹}{۲} \times \binom{۹}{۲}$$

مثال

چند رشته باینری به طول $n \geq 4$ وجود دارد که شامل دقیقاً ۲ نمونه ۱۰ باشد؟ مثلاً بـه ازای $n = 4$ فقط یک رشته ۱۰۱۰ وجود دارد. یا به ازای $n = 5$، ۶ رشته وجود دارد:

۱۰۱۰۱, ۱۰۱۰۰, ۱۰۱۱۰, ۱۰۰۱۰, ۱۱۰۱۰, ۰۱۰۱۰

مکان ۳   مکان ۲   مکان ۱

پاسخ: $\boxed{}$ ۱۰ $\boxed{}$ ۱۰ $\boxed{}$ $n-4$ بیت را باید در مکان‌های ۱ و ۲ و ۳ قـرار دهـیم. در هـر مکان هر تعداد صفر و یک که قرار داده شود ابتدا باید صفرها و سپس یک‌ها چیده شوند، پس فقط تعداد صفر و یک در هر مکان حالت‌های متفاوت ایجاد مـی‌کنـد. اگـر x_i و y_i بـه ترتیـب تعـداد صفرها و یک‌های مکان i $(i = 1,2,3)$ باشد آنگاه:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = n - 4 \Rightarrow \binom{n-4+6-1}{6-1} = \binom{n+1}{5}$$