# ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

# فصل دوم

نظریه توابع و مجموعه ها

# مجموعه ها

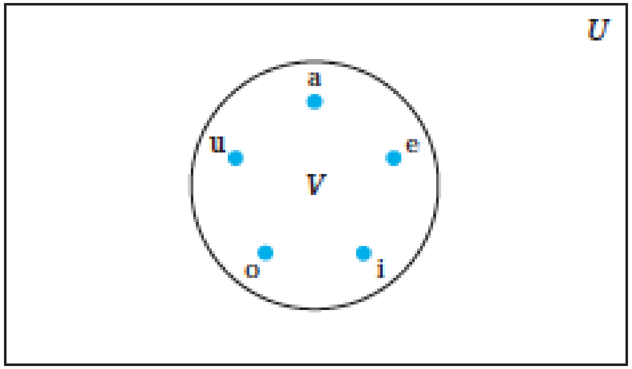
- مجموعه: یک اجتماع بدون ترتیب از اشیایی که به آنها اعضای مجموعه گفته میشود. $a \in A$ یعنی عنصر a عضوی از مجموعه A است، و $a \notin A$ یعنی عنصر a عضوی از مجموعه A نیست.
- برای نشان دادن مجموعه :
  - نوشتن همه اعضای آن: $\{2,4,6,8\}$
  - سازنده مجموعه: $\{x | x \geq -10 \land x \leq 10\}$

# مجموعه ها

- دو مجموعه با هم مساوی هستند اگر اعضای یکسانی داشته باشند.
- مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی گوییم و آن را به صورت {} یا $\emptyset$ نشان میدهیم.

# مجموعه ها

- یکی از راه های نمایش مجموعه ها استفاده از نمودار ون است. مجموعه جهانی **U** که شامل همه عناصر است را با مستطیل نشان میدهیم. داخل این مستطیل مجموعه های دیگر را به صورت دایره یا سایر اشکال هندسی نشان میدهیم.



# مجموعه ها

- مجموعه A زیرمجموعه ای از B است، اگر و فقط اگر هر عضو از A عضوی از B باشد، و آن را به صورت $A \subseteq B$ نشان میدهیم. برای نشان دادن آن باید ثابت کنیم: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- اگر بخواهیم تاکید کنیم که A زیرمجموعه B است ولی با B مساوی نیست، آن را به صورت $A \subset B$ نشان میدهیم. (زیرمجموعه محض) و باید نشان دهیم:

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \land \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

# مجموعه ها

- اگر مجموعه A شامل n عضو متمایز باشد، گوییم اندازه مجموعه A یا کاردینالیتی مجموعه A برابر با n است و آن را با $|A|$ نشان میدهیم.

مثال: فرض کنید A مجموعه حروف الفبای فارسی باشد، پس $|A| = 32$

# مجموعه ها

- مجموعه توانی: مجموعه تمامی زیرمجموعه های یک مجموعه را مجموعه توانی یک مجموعه گویند. P(S)

مثال:

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$$

# مجموعه ها

- حاصلضرب دکارتی دو مجموعه:  فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، حاصلضرب دکارتی A در B را با $A \times B$ نشان میدهیم و برابر است با:

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A \land b \in B\}$$

مثال: اگر {1,2} = A و {a,b,c} = B، $A \times B$ برابر است با:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$$

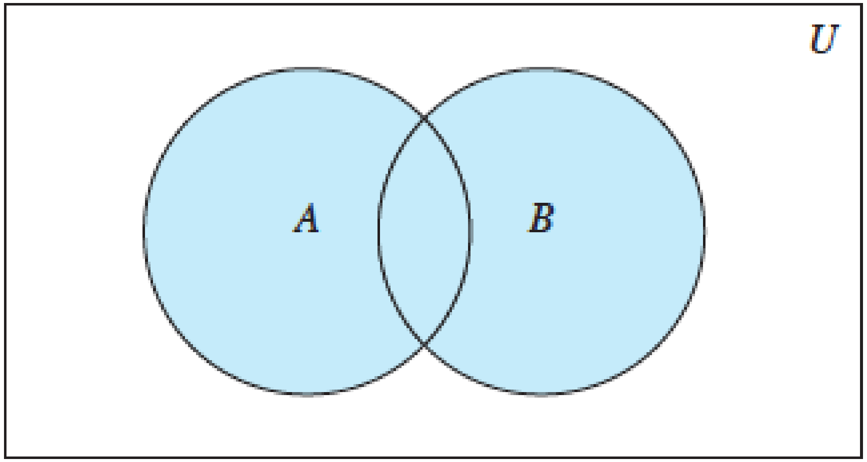
# مجموعه ها

- در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ مگر اینکه A=B یا یکی از آنها Ø باشد.
- اگر $A_1$، $A_2$، … $A_n$، n مجموعه باشند حاصلضرب دکارتی $A_1 \times .. A_n$ به صورت n تایی های مرتب به صورت زیر تعریف میشود:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i\} \ \forall i$$

# عملیات روی مجموعه ها

- فرض کنید A و B، دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ نشان میدهیم و برابر است با همه عناصری که در A یا B قرار دارند. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$

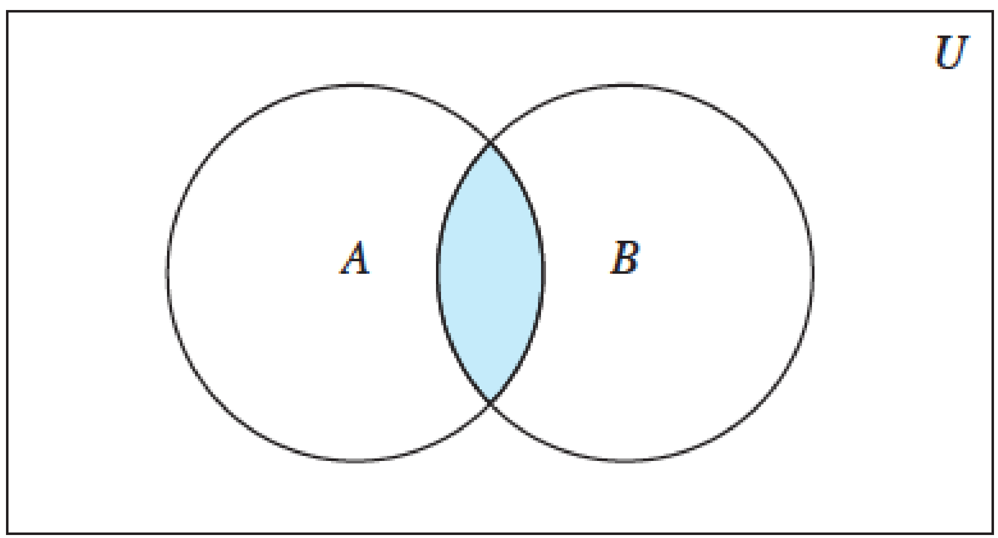



$A \cup B$ is shaded.

# عملیات روی مجموعه ها

- فرض کنید A و B، دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ نشان میدهیم و برابر است با همه عناصری که هم در A و هم در B قرار دارند.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

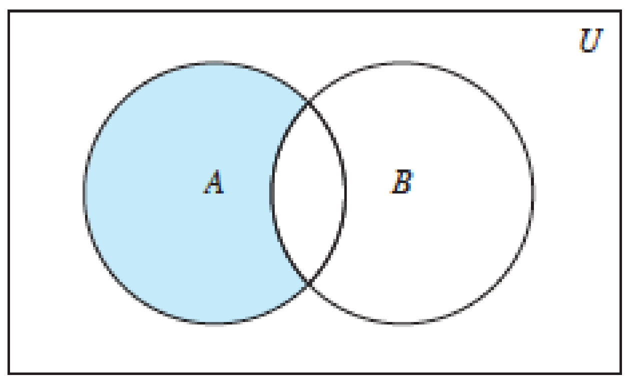



$A \cap B$ is shaded.

# عملیات روی مجموعه ها

- فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. مجموعه A – B شامل عناصری از A است که در B قرار ندارند.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

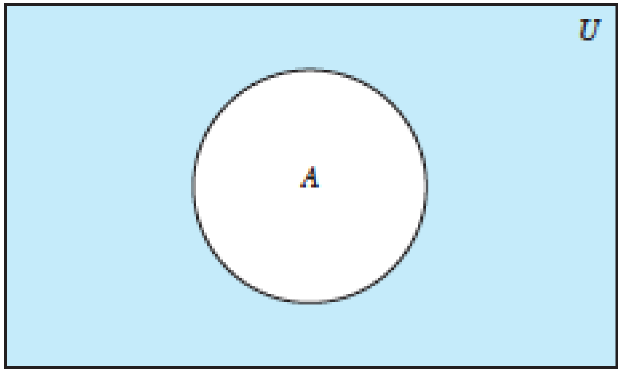



$A - B$ is shaded.

# عملیات روی مجموعه ها

- فرض کنید U مجموعه جهانی باشد و A یک مجموعه باشد. متمم مجموعه A را با $\bar{A}$ نشان میدهیم و شامل همه عناصری از مجموعه جهانی است که در A قرار ندارند، یعنی U – A

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$




$\overline{A}$ is shaded.

# عملیات روی مجموعه ها

مثال: ثابت کنید $A - B = A \cap \bar{B}$

مثال: ثابت کنید $A - B = A \cap \bar{B}$

حل:

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A \land x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in A \land x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap \bar{B}$$

$$x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A \land x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in A \land x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in A - B$$

# مجموعه های مساوی

| *Identity* | *Name* |
| --- | --- |
| $A \cap U = A$<br>$A \cup \emptyset = A$ | Identity laws |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ | Domination laws |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Idempotent laws |
| $\overline{(\overline{A})} = A$ | Complementation law |
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | Commutative laws |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Associative laws |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Distributive laws |
| $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$<br>$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | De Morgan's laws |
| $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | Absorption laws |
| $A \cup \overline{A} = U$<br>$A \cap \overline{A} = \emptyset$ | Complement laws |

# مجموعه های مساوی

مثال: ثابت کنید $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

# مجموعه های مساوی

مثال: ثابت کنید $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

حل:

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}
$$

# مجموعه های مساوی

مثال: برای مجموعه های A و B و C، عبارت زیر را ثابت کنید.

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

# مجموعه های مساوی

مثال: برای مجموعه های A و B و C، عبارت زیر را ثابت کنید.

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

حل:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}
\end{aligned}$$

# مجموعه های مساوی

مثال: عبارت زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

$$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \bar{B}}$$

# مجموعه های مساوی

مثال: عبارت زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

$$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \bar{B}}$$

حل:

$$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \bar{B}} = (A \cup B) \cap C \cap B$$

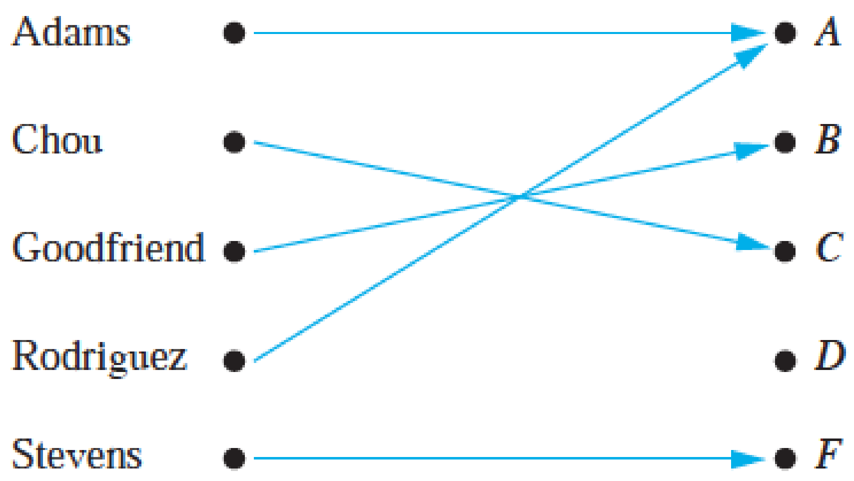
$$= (A \cup B) \cap B \cap C$$

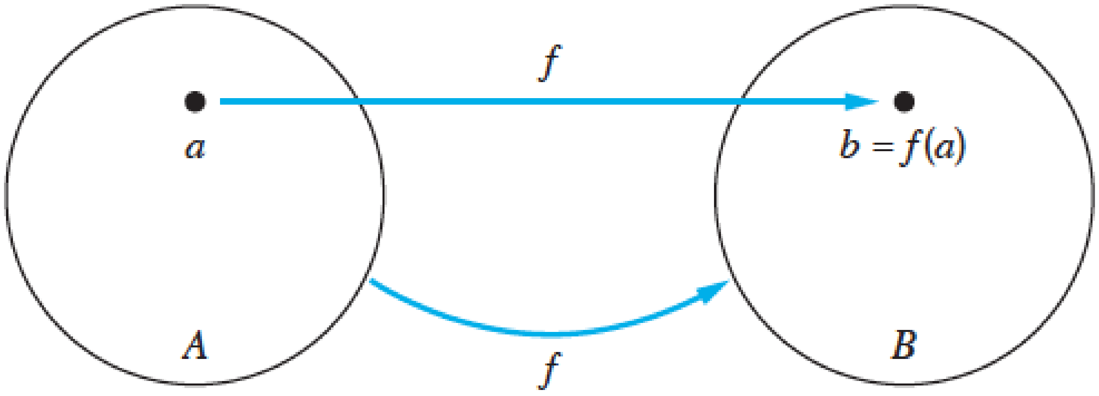
$$= B \cap C$$

# تابع (function)

- فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B، به این صورت تعریف میشود که به هر عضو A دقیقا یک عضو B تخصیص می یابد، و آن را به صورت $f: A \to B$ نشان میدهیم.
- به مجموعه A دامنه (Domain)، به مجموعه B حوزه (codomain) گفته میشود.
- مجموعه همه عناصری که به عضوی از دامنه نگاشت شده اند را برد تابع (range) گوییم.

# تابع



# تابع

مثال: فرض کنید تابع $f: Z \to Z$ به صورت $f(x) = x^2$ تعریف شده باشد.

دامنه: مجموعه همه اعداد صحیح

حوزه: مجموعه همه اعداد صحیح

برد: مجموعه همه اعداد صحیحی که مربع کامل هستند.

# تابع

- فرض کنید f تابعی از A به B باشد، و S زیر مجموعه ای از A باشد.

در این صورت f(S) به صورت زیر تعریف میشود:

$$f(S) = \{f(s) | s \in S\}$$

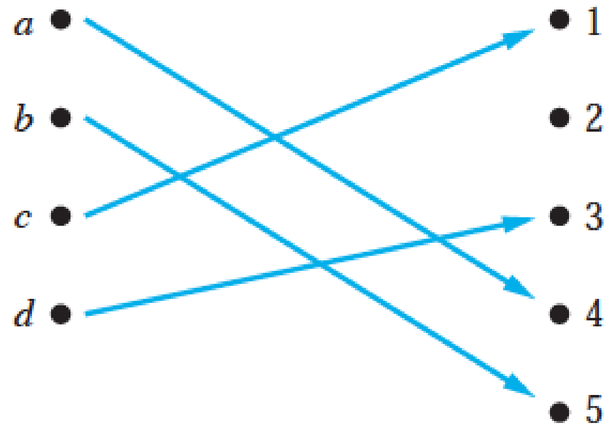
# تابع یک به یک (injective)

- تابع f را یک به یک گوییم اگر و تنها اگر

$$\forall a \forall b (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$$

- تابع f یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall a \forall b (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$$



# تابع یک به یک

مثال) یک به یک بودن تابع $f(x) = x^2$ را روی اعداد حقیقی بررسی کنید.

حل) یک به یک نیست، زیرا

$$f(1) = f(-1) = 1$$

# تابع صعودی و نزولی ( increasing , decreasing)

- تابع f را صعودی گوییم اگر

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$$

- تابع f را نزولی گوییم اگر

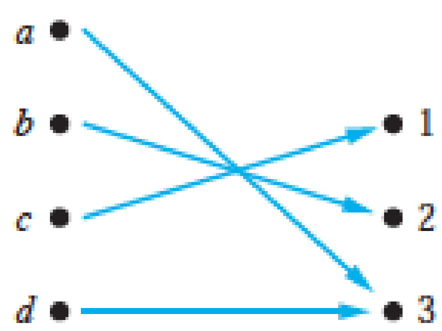
$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \geq f(y))$$

- در دو تعریف بالا حالت اکید وقتی اتفاق می افتد که تساوی نداشته باشیم.

# تابع پوشا (surjection)

- تابع f از A به B را پوشا گوییم، اگر و فقط اگر برای هر $b \in B$ عضو $a \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $f(a) = b$

به عبارت دیگر $\forall y \in B \exists x \in A(f(x) = y)$



# تابع پوشا

مثال: آیا تابع $f(x) = x^2$ در مجموعه اعداد حقیقی پوشا است؟

حل) خیر.

در مجموعه اعداد حقیقی $f(x) = -1$ جواب ندارد.

# تابع یک به یک پوشا (bijection)

- تابع f را یک به یک پوشا گوییم، اگر هم یک به یک باشد و هم پوشا

مثال: تابع $f(x) = x$ روی مجموعه اعداد حقیقی یک تابع یک به یک پوشا است.

Suppose that $f : A \to B$.

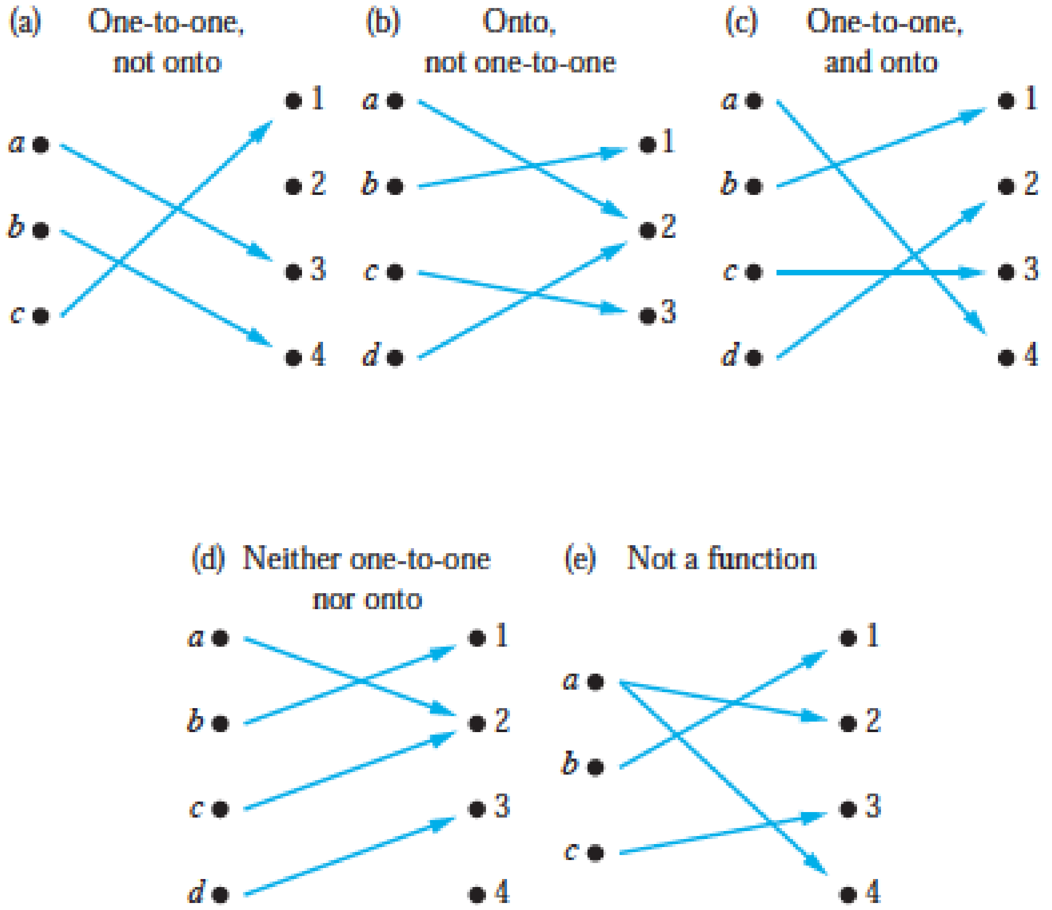
*To show that $f$ is injective* Show that if $f(x) = f(y)$ for arbitrary $x, y \in A$ with $x \neq y$, then $x = y$.

*To show that $f$ is not injective* Find particular elements $x, y \in A$ such that $x \neq y$ and $f(x) = f(y)$.

*To show that $f$ is surjective* Consider an arbitrary element $y \in B$ and find an element $x \in A$ such that $f(x) = y$.

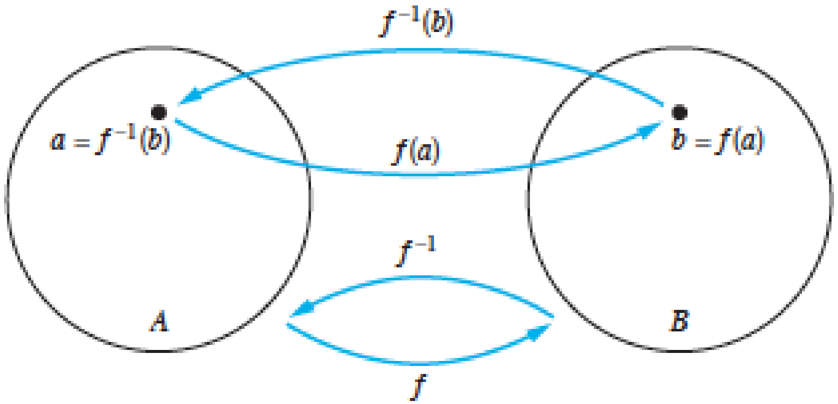
*To show that $f$ is not surjective* Find a particular $y \in B$ such that $f(x) \neq y$ for all $x \in A$.

# تابع یک به یک پوشا



# تابع وارون

- اگر $f$ یک تابع یک به یک پوشا از مجموعه $A$ به $B$ باشد، تابع معکوس $f$ که آن را با $f^{-1}$ نشان میدهیم، تابعی است که به هر $b \in B$ یک عنصر یکتای $a \in A$ را تخصیص میدهد بطوریکه $f(a) = b$، و بنابراین $f^{-1}(b) = a$



# تابع وارون

مثال) آیا تابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x) = x^2$ وارون دارد؟

حل) چون این تابع یک تابع دوسویه (یک به یک پوشا) است، بنابراین وارون دارد.

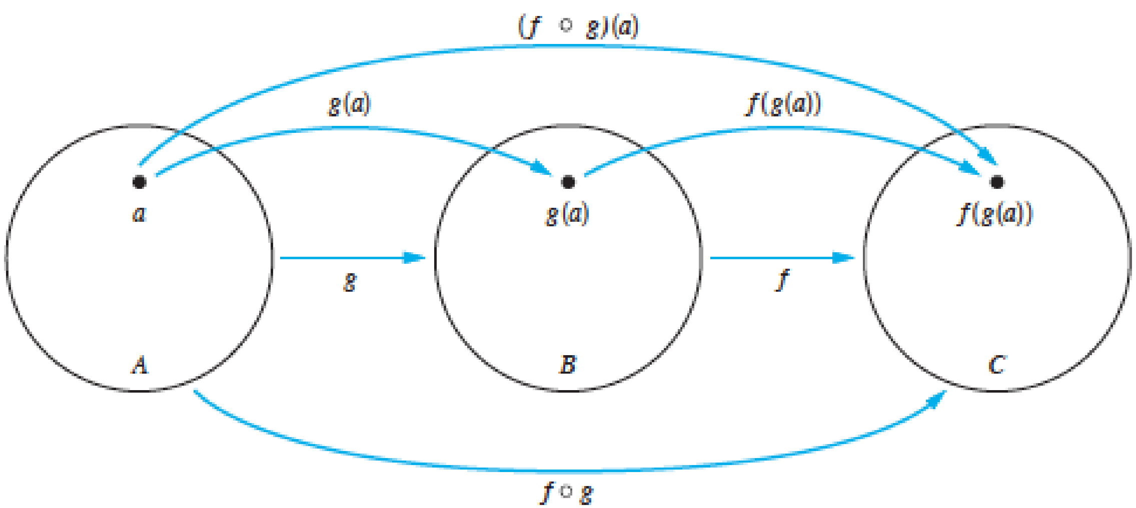
$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

# ترکیب توابع

• فرض کنید g تابعی از A به B و f تابعی از B به C باشد. ترکیب دو تابع f و g برای هر $a \in A$ که آن را به صورت $fog$ نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف میشود:

$$(fog)(a) = f(g(a))$$



# ترکیب توابع

مثال) فرض کنید $f(x) = 3x$ و $g(x) = x^2 + 1$ و $h(x) = x - 1$ ، مطلوبست *fog*، *gof*، *foh* و *go*(*foh*).

$$fog = 3x^2 + 3$$

$$gof = 9x^2 + 1$$

$$foh = 3x - 3$$

$$go(foh) = 9(x-1)^2 + 1$$

# ترکیب توابع

**مثال ۲.** فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b,c\}$ و $C=\{w,x,y,z\}$. همچنین $f:A\to B$ و $g:B\to C$ با $f=\{(1,a)(2,a)(3,b)(4,c)\}$ و $g=\{(a,x)(b,y)(c,z)\}$ آنگاه:

# ترکیب توابع

**مثال ۲.** فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{a,b,c\}$ و $C = \{w,x,y,z\}$. همچنین $f:A \to B$ و $g:B \to C$ با $f = \{(۱,a)\ (۲,a)\ (۳,b)\ (۴,c)\}$ و $g = \{(a,x)\ (b,y)\ (c,z)\}$ آنگاه:

$$gof = \{(۱,x)\ (۲,x)\ (۳,y)\ (۴,z)\}$$

$$(gof)\ (۱) = g\,(f\,(۱)) = g(a) = x$$

$$(gof)\ (۲) = g\,(f\,(۲)) = g(a) = x$$

$$(gof)\ (۳) = g\,(f\,(۳)) = g(b) = y$$

$$(gof)\ (۴) = g\,(f\,(۴)) = g(c) = z$$

# دنباله

- دنباله یک ساختار گسسته است که برای نمایش یک لیست مرتب بکار میرود.
- بطور دقیقتر میتوان گفت دنباله تابعی است از زیرمجموعه ای از اعداد طبیعی به یک مجموعه S. برای نشان دادن تصویر عدد n (جمله n ام دنباله) از $a_n$ استفاده میکنیم. دنباله را به صورت $\{a_n\}$ نشان میدهیم.

مثال: دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_n = \frac{1}{n}$، جملات به صورت ...,1,1/2,1/3 هستند.

# دنباله

- تصاعد هندسی دنباله ای است به شکل

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

که $a$ جمله اول و $r$ نسبت تصاعد است و هر دو عدد حقیقی هستند.

مثال: دنباله $a_n = 6.(\frac{1}{3})^n$ به صورت زیر است:

$$6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$$

# دنباله

- یک تصاعد حسابی دنباله ای به شکل

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

است که a جمله اول و d قدر نسبت تصاعد نام دارد و هر دو حقیقی هستند.

مثال: دنباله $\{s_n\}$ با $s_n = -1 + 4n$ به صورت زیر است:

-1, 3, 7, 11, …

# دنباله

- یک رابطه بازگشتی برای دنباله $\{a_n\}$ رابطه ای است که $a_n$ بر حسب یک یا چند جمله قبلی در دنباله بیان میشود.
- شرایط اولیه در یک دنباله بازگشتی، جملاتی را مشخص میکند که قبل از محاسبه جمله اول باید مشخص باشند.

مثال: دنباله فیبوناچی

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, f_0 = 0, f_1 = 1$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ….

# دنباله

مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

$$a_1 = 2$$

حل:

# دنباله

حل: روش ۱:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2 + 3 \\
a_3 &= (2 + 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 2 \\
a_4 &= (2 + 2 \cdot 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \cdot (n - 2)) + 3 = 2 + 3(n - 1).
\end{aligned}
$$

روش ۲:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3 \\
&= (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 3 \cdot 2 \\
&= (a_{n-3} + 3) + 3 \cdot 2 = a_{n-3} + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
&= a_2 + 3(n - 2) = (a_1 + 3) + 3(n - 2) = 2 + 3(n - 1).
\end{aligned}
$$

# دنباله

فرض کنید میخواهیم مجموع جملات m ام تا n ام یک دنباله را حساب کنیم. برای اینکار از نماد زیر استفاده میکنیم:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j\,, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j\,, \qquad \text{or} \qquad \textstyle\sum_{m \le j \le n} a_j$$

# مجموع ها

- قضیه: اگر a و r اعداد حقیقی باشند، و $r \neq 0$. در این صورت:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{if } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{if } r = 1. \end{cases}$$

# مجموع ها

**TABLE 2** Some Useful Summation Formulae.

| *Sum* | *Closed Form* |
|---|---|
| $\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$ | $\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^2$ | $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^3$ | $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ |
| $\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x\rvert < 1$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x\rvert < 1$ | $\frac{1}{(1-x)^2}$ |

# مجموع ها

مثال: فرض کنید x یک عدد حقیقی باشد که $|x|<1$. مجموع زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

# مجموع ها

حل)

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

# کاردینالیتی مجموعه ها

- مجموعه های A و B کاردینالیتی یکسان دارند، اگر و فقط اگر یک نگاشت یک به یک پوشا از A به B وجود داشته باشد.
- اگر یک تابع یک به یک از A به B وجود داشته باشد، آنوقت داریم: $|A| \leq |B|$، و اگر علاوه بر این بدانیم که A و B کاردینالیتی یکسانی ندارند، آنگاه $|A| < |B|$

# کاردینالیتی مجموعه ها

- مجموعه های نامتناهی را به دو مجموعه تقسیم میکنیم.
  - مجموعه هایی که کاردینالیتی یکسان با مجموعه اعداد طبیعی دارند.
  - مجموعه های با کاردینالیتی متفاوت با مجموعه اعداد طبیعی

# کاردینالیتی مجموعه ها

- مجموعه ای که متناهی باشد یا کاردینالیتی برابر با مجموعه اعداد طبیعی داشته باشد، شمارا نامیده میشود، و مجموعه ای که شمارا نباشد، ناشمارا است.

# کاردینالیتی مجموعه ها

مثال: نشان دهید مجموعه اعداد فرد مثبت یک مجموعه شمارا است.

حل:

میتوان یک تابع یک به یک پوشا بین اعداد فرد و مجموعه اعداد طبیعی پیدا کرد.

$$f(n) = 2n - 1$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | ... |

# کاردینالیتی مجموعه ها

مثال: مجموعه اعداد حقیقی ناشماراست.

- قضیه: اگر A و B مجموعه های شمارا باشند، آنگاه $A \cup B$ شمارا است.

# کاردینالیتی مجموعه ها

- یک تابع را محاسبه پذیر گوییم اگر یک برنامه کامپیوتری وجود داشته باشد بطوریکه مقادیر تابع را پیدا کند. اگر تابعی محاسبه پذیر نباشد، به آن محاسبه ناپذیر گوییم.
- میتوان ثابت کرد که توابع محاسبه ناپذیر وجود دارند.

# ماتریس ها

- ماتریس یک آرایه مستطیلی با m سطر و n ستون است. اگر تعداد سطرها و ستون ها با هم برابر باشد، به آن آرایه مربعی گوییم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# ماتریس ها

- مجموع دو ماتریس m در n یک ماتریس m در n است که در آن هر درایه برابر با مجموع درایه های متناظر است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

# ماتریس ها

- اگر A یک ماتریس m در k و B یک ماتریس k در n باشد، حاصلضرب دو ماتریس A در B که آن را با AB نشان میدهیم، یک ماتریس m در n است که در آن درایه ij ام آن برابر با مجموع حاصلضرب درایه های متناظر در سطر i ام A در ستون j ام B است.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

# ماتریس ها

ضرب ماتریس ها

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

# ماتریس ها

- ماتریس همانی از مرتبه n، یک ماتریس مربعی n×n است که درایه های قطر اصلی ۱ و بقیه صفر هستند.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{A}^r = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{r\ \text{times}}.$$

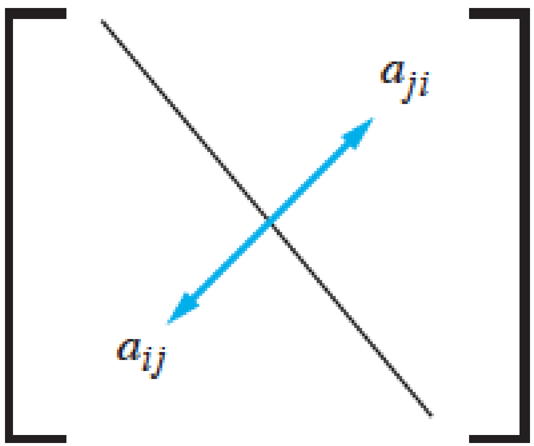
# ماتریس ها

- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ترانهاده ماتریس A که آن را با $A^t$ نشان میدهیم، یک ماتریس $n \times m$ است که از جابجایی سطرها و ستون های A بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

# ماتریس ها

- ماتریس A را متقارن گوییم، اگر $A = A^t$.




$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# ماتریس ها

- ماتریسی که همه درایه های آن صفر و یک باشند را ماتریس صفر و یک گوییم. روی چنین ماتریس هایی میتوان عملیات منطقی را تعریف کرد.
  - و منطقی (AND): درایه به درایه دو ماتریس با هم AND میشوند.
  - یا منطقی (OR): درایه به درایه دو ماتریس با هم OR میشوند.
  - ضرب بولین ($\odot$) :مانند حاصلضرب ماتریس ها به صورت زیر تعریف میشود.

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

# ماتریس ها

- اگر A یک ماتریس مربعی باشد، r امین توان بولین A به صورت زیر تعریف میشود:

$$\mathbf{A}^{[r]} = \underbrace{\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \cdots \odot \mathbf{A}}_{r \text{ times}}.$$

- توان صفر بولین ماتریس همانی تعریف میباشد.

# ماتریس ها

مثال:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{[2]} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{A}^{[3]} = \mathbf{A}^{[2]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{[4]} = \mathbf{A}^{[3]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{A}^{[5]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$