ریاضیات گسسته

دکتر منصوره میرزایی

فصل نهم

رابطه ها

رابطه

تعریف : زوج مرتبِ (a_1, a_2) از دو مولفه تشکیل شده است که a_1 مؤلفه اول و a_2 مولفهٔ دوم است. ترتیب مولفه‌ها مهم است. به طور کلی **nتایی مرتبِ** $(a_1, a_2, ..., a_n)$ از n مولفه تشکیل شده است که a_1 مولفه اول، a_2 مولفهٔ دوم و ... و a_n مولفهٔ nام است.

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) فقط و فقط در صورتی مساوی هستند که $a = c$ و $b = d$. به طور کلی $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ اگر و فقط اگر $a_i = b_i$ برای $i = 1, 2, ..., n$.

تعریف : حاصلضرب دکارتی (کارتزین) دو مجموعهٔ A و B که به شکل $A\times B$ مـی‌نویسـیم عبارت است از همهٔ زوج‌های مرتب (a,b) که $a\in A$ و $b\in B$ یعنی:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

به طور کلی حاصلضرب دکارتی n مجموعهٔ $A_۱,A_۲,\ldots,A_n$ عبارت است از:

$$A_۱\times A_۲\times\ldots\times A_n=\{(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)\mid a_۱\in A_۱,a_۲\in A_۲,\ldots,a_n\in A_n\}$$

مثال اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{a,b,c\}$ مطلوب است $A\times B$ و $B\times A$.

پاسخ:

$$A\times B=\{(۱,a),(۱,b),(۱,c),(۲,a),(۲,b),(۲,c)\}$$

$$B\times A=\{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(b,۲),(c,۱),(c,۲)\}$$

نتایج:

۱- تعداد اعضای (زوج‌های) $A\times B$ با تعداد اعضای $B\times A$ برابر است و برابر بـا تعـداد اعضـای A ضرب در تعداد اعضای B است:

$$|A\times B|=|B\times A|=|A|.|B|$$

۲- ضرب دکارتی خاصیت جابجایی ندارد یعنی در حالت کلی، $A\times B\neq B\times A$. ولی اگر $A=B$ یا $A=\phi$ یا $B=\phi$ آنگاه $A\times B=B\times A$ و برعکس.

۳- اگر $A\times B=\phi$ آنگاه $A=\phi$ یا $B=\phi$ و برعکس.

۴- عبارات $A\times B\times C$ و $(A\times B)\times C$ و $A\times(B\times C)$ یکسان نیستند. اولـی شـامل سـه تـایی مرتب‌های (a,b,c) است، دومی شامل زوج‌های مرتب $((a,b),c)$ است و سومی شامل زوج‌هـای مرتب $(a,(b,c))$ است.

مثال فرض کنید $A=\{۱,۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{۲,۳,۴,۵\}$ مطلوبست $(A\times B)\bigcap(B\times A)$ و $A\times(B\bigcap C)$ و $(A\times B)\bigcap(A\times C)$.

$$A\times B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

$$B\times A=\{(۱,۱),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۵),(۳,۱),(۳,۵)\}$$

$$A\times C=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵)\}$$

$$B\bigcap C=\{۲,۳\}$$

$$A\times(B\bigcap C)=\{(۱,۲),(۱,۳),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

$$(A\times B)\bigcap(A\times C)=\{(۱,۲),(۱,۳),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

$$(A\times B)\bigcap(B\times A)=\{(۱,۱)\}$$

مثال اگر $A=\{۱,۲\}$ چند رابطه روی A قابل تعریف است؟

پاسخ: با توجه به اینکه $A^۲=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$ ، هر زیرمجموعه از $A^۲$ یک رابطـه از A به A (روی A) است و چون $|A^۲|=۴$ پس $۲^۴=۱۶$ رابطه قابل تعریف است کـه ایـن ۱۶ رابطـه عبارتند از:

$$R_۱=\{\}\ ,\ R_۲=\{(۱,۱)\}\ ,\ R_۳=\{(۲,۲)\}\ ,\ R_۴=\{(۱,۲)\}\ ,\ R_۵=\{(۲,۱)\}\ ,\ R_۶=\{(۱,۱),(۱,۲)\}$$

$$R_۷=\{(۱,۱),(۲,۱)\}\ ,\ R_۸=\{(۱,۱),(۲,۲)\}\ ,\ R_۹=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\ ,\ R_{۱۰}=\{(۱,۲),(۲,۲)\},$$

$$R_۹=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\ ,\ R_{۱۰}=\{(۱,۲),(۲,۲)\}\ ,\ R_{۱۱}=\{(۲,۱),(۲,۲)\}\ ,\ R_{۱۲}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}\ ,$$

$$R_{۱۳}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲)\}\ ,\ R_{۱۴}=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲)\}\ ,\ R_{۱۵}=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}\ ,$$

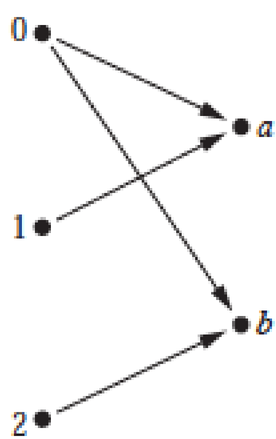
$$R_{۱۶}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}.$$

نتیجه: تعداد روابط از A به B برابر تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ یعنی $۲^{|A||B|}$ است و تعـداد روابط روی A برابر تعداد زیرمجموعه‌های $A^۲$ یعنی $۲^{|A|^۲}$ است.

رابطه

مثال: فرض کنید A={0,1,2} و B={a,b}، آنوقت مجموعه زیر یک رابطه از A به B است.

R = {(0,a) , (0,b) , (1,a) , (2,b)}



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

رابطه

مثال: فرض کنید A={1,2,3,4} و رابطه R روی A به صورت زیر تعریف شده باشد، R={(a,b)|a divides b}

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

خواص رابطه ها

- رابطه بازتابی (reflexive): رابطه R روی A بازتابی است اگر

$$\forall a \in A\,, (a, a) \in R$$

مثال: کدامیک بازتابی است؟

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\},$$
$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$
$$R_6 = \{(3, 4)\}.$$

خواص رابطه ها

- رابطه متقارن (symmetric): رابطه R روی A متقارن است اگر

$$\forall a,b:\ \ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

- رابطه پادمتقارن (antisymmetric): رابطه R روی A پادمتقارن است اگر

$$\forall a,b:\ \ [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R] \rightarrow (a = b)$$

پاد تقارنی (antisymmetric): رابطه R پاد متقارن است هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ آنگاه $a = b$. به عبارتی اگر $(a,b) \in R$ و $a \neq b$ آنگاه $(b,a) \notin R$.

خواص رابطه ها

مثال: کدامیک متقارن و کدامیک پادمتقارن است؟

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$
$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},$$
$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},$$
$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},$$
$$R_6 = \{(3,4)\}.$$

خواص رابطه ها

- رابطه متعدی (transitive): رابطه R روی A متعدی است اگر

$$\forall a, b, c : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \to (a, c) \in R$$

مثال: کدامیک متعدی است؟

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\},$$
$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\},$$
$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$
$$R_6 = \{(3, 4)\}.$$

مثال روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳\}$ روابطی با کمترین تعداد زوج بنویسید که فقط یکی از خواص بازتاب، تقارن، پادتقارن یا تعدی را دارا باشد.

پاسخ: a) فقط بازتابی: برای بازتاب، زوج‌های $(۳,۳)$ و $(۲,۲)$ و $(۱,۱)$ لازم هستند. برای از بین بردن خاصیت پادتقارنی نیاز به دو زوج مثل $(۱,۲)(۲,۱)$ است و برای از بین بردن تقارنی و تعدی کافی است زوج $(۱,۳)$ اضافه شود. پس رابطهٔ $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳)\}$ فقط بازتابی است و سایر خواص را ندارد.

b) فقط تقارنی: رابطهٔ $\{(۱,۲)(۲,۱)\}$ فقط متقارن است و سایر خواص را ندارد.

c) فقط پادتقارنی: رابطهٔ $\{(۱,۲)\{۲,۳)\}$ فقط پادتقارنی است و سایر خواص را ندارد.

d) فقط متعدی: برای از بین بردن پادتقارن دو زوج مثل $(۱,۲)(۲,۱)$ نیاز داریم. حال برای ایجاد تعدی زوج‌های $(۱,۱)(۲,۲)$ نیاز هستند. برای از بین بردن تقارنی نیاز به زوجی مثل $(۱,۳)$ است که بخاطر ایجاد تعدی باید زوج $(۲,۳)$ نیز اضافه شود (بخاطر وجود $(۱,۳)(۲,۱)$) پس رابطهٔ $\{(۱,۲)(۲,۱)(۱,۱)(۲,۲)(۱,۳)(۲,۳)\}$ فقط متعدی است.

توجه: دو خاصیتِ دیگر نیز برای روابط تعریف می‌شود: خاصیت **ضدبازتابی** (irreflexive) و خاصیت **آسیمتریک** (asymmetric). رابطهٔ R روی مجموعهٔ A ضدبازتاب است هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $(a,a) \notin R$. به عبارتی هیچ یک از زوج‌های به شکل (a,a) نباید در رابطه باشند. توجه کنید یک رابطه می‌تواند نه بازتاب باشد و نه ضدبازتاب. مثلاً روی $A = \{۱,۲\}$ رابطهٔ $R = \{(۱,۱),(۱,۲)\}$ بازتاب نیست چون $(۲,۲) \notin R$ و ضدبازتاب نیست چون $(۱,۱) \in R$.

رابطهٔ R را آسیمتریک گویند هرگاه اگر $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \notin R$. در واقع رابطه‌ای که پادمتقارن و ضدبازتاب است آنگاه آسیمتریک است.

عملیات روی روابط

از آنجایی که روابط، مجموعه هستند، می‌توان عملیات مجموعه‌ها را روی روابط انجام داد. فرض کنید R و S روابطی از A به B هستند: یعنی $R,S \subseteq A \times B$ آنگاه:

$$R \bigcup S = \{(a,b) \mid (a,b) \in R \vee (a,b) \in S\}$$

$$R \bigcap S = \{(a,b) \mid (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S\}$$

$$R - S = \{(a,b) \mid (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S\}$$

$$R \Delta S = R \oplus S = (R \bigcup S) - (R \bigcap S)$$

$$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \in A \times B \ , \ (a,b) \notin R\} = A \times B - R$$

$$R^{-۱} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$$

$\overline{R}$ را مکمل R و $R^{-۱}$ را معکوس R گوییم.

مثال روابط $R=\{(۱,۱),(۱,۲)\}$ و $S=\{(۲,۲),(۱,۲)\}$ روی $A=\{۱,۲\}$ تعریف شده‌اند. آنگاه:

$R\bigcup S=\{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲)\}$	$(R\bigcap S)^{-۱}=\{(۲,۱)\}$
$R\bigcap S=\{(۱,۲)\}$	$S^{-۱}=\{(۲,۲),(۲,۱)\}$
$R-S=\{(۱,۱)\}$	$R^{-۱}\bigcap S^{-۱}=\{(۲,۱)\}$
$R\Delta S=\{(۱,۱),(۲,۲)\}$	$\overline{(R\bigcup S)}=A^{۲}-(R\bigcup S)=\{(۲,۱)\}$
$\overline{R}=A^{۲}-R=\{(۲,۲),(۲,۱)\}$	$\overline{S}=\{(۱,۱),(۲,۱)\}$
$R^{-۱}=\{(۱,۱),(۲,۱)\}$	$\overline{R}\bigcap\overline{S}=\{(۲,۱)\}$

مثال فرض کنید R رابطهٔ کوچکتر، و S رابطهٔ بزرگتر روی اعداد حقیقی باشند. یعنی $R=\{(x,y)\mid x<y\}$ و $S=\{(x,y)\mid x>y\}$ آنگاه:

$$R\cup S=\{(x,y)\mid x<y \text{ or } x>y\}=\{(x,y)\mid x\neq y\}$$

$$R\cap S=\{(x,y)\mid x<y \text{ and } x>y\}=\{\}$$

$$R-S=R$$

$$R\Delta S=(R\cup S)-(R\cap S)=R\cup S$$

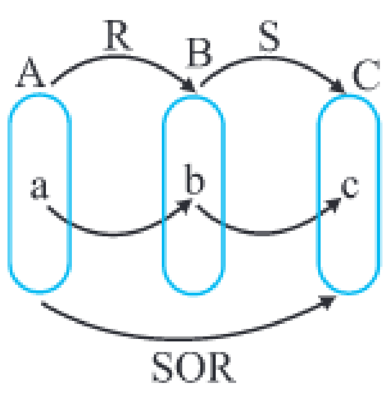
$$\overline{R}=\{(x,y)\mid x\geq y\}$$

$$R^{-۱}=\{(x,y)\mid x>y\}$$

ترکیب روابط

- فرض کنید R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد، ترکیب رابطه R و S که آن را به صورت SoR نشان میدهیم شامل همه زوج مرتب های (a,c) است که

$$SoR = \{(a,c)|a \in A, c \in C,$$
$$\exists b \in B\colon\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$$



ترکیب روابط

مثال: ترکیب دو رابطه R و S را بدست آورید.

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$
$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

حل:

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

ترکیب روابط

مثال فرض کنید $A=B=C=\{1,2,3,4\}$ و روابط $R=\{(1,1)(2,1)(3,2)(3,4)(4,3)\}$ و $S=\{(1,2)(1,3)(3,4)(4,1)\}$ روی A تعریف شده‌اند آنگاه برای تشکیل SOR داریم:

$(1,1)\in R\ ,\ (1,2)\in S\ \Rightarrow\ (1,2)\in SOR$

$(1,1)\in R\ ,\ (1,3)\in S\ \Rightarrow\ (1,3)\in SOR$

$(2,1)\in R\ ,\ (1,2)\in S\ \Rightarrow\ (2,2)\in SOR$

$(2,1)\in R\ ,\ (1,3)\in S\ \Rightarrow\ (2,3)\in SOR$

$(3,4)\in R\ ,\ (4,1)\in S\ \Rightarrow\ (3,1)\in SOR$

$(4,3)\in R\ ,\ (3,4)\in S\ \Rightarrow\ (4,4)\in SOR$

پس $SOR=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(4,4)\}$.

ترکیب روابط

به همین ترتیب ROS و ROR (که با $R^{۲}$ نشان می‌دهیم) و $S^{۲} = SOS$ عبارتند از:

$$ROS = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۳,۳),(۴,۱)\}$$

$$ROR = R^{۲} = \{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۲),(۴,۴)\}$$

$$SOS = S^{۲} = \{(۱,۴),(۳,۱),(۴,۲),(۴,۳)\}$$

توجه: تعریف ترکیب روابط در برخی منابع برعکس آن چیزی است که گفته شد. یعنی در مثال قبل SOR و ROS با هم جابجا می‌شوند:

$$(a,c) \in SOR \Leftrightarrow \exists b \in B : (a,b) \in S, (b,c) \in R$$

قضیه: اگر روابط S و R به درستی تعریف شده باشند آنگاه $(SOR)^{-۱} = R^{-۱}OS^{-۱}$.

ترکیب روابط

- تعریف: فرض کنید R رابطه ای روی مجموعه A باشد. در این صورت R^n به صورت باز گشتی به صورت زیر تعریف میشود:

$$R^1 = R \qquad \text{and} \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

ترکیب روابط

مثال: برای رابطه زیر توان های آن را بدست آورید.

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}.$$

حل:

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

$$R^3 = R^2 \circ R, R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}.$$

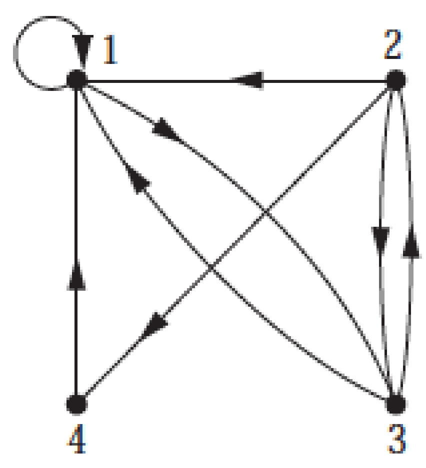
$$R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}.$$

$$R^n = R^3 \quad \text{for } n = 5, 6, 7, \ldots.$$

نمایش رابطه ها (گراف جهتدار)

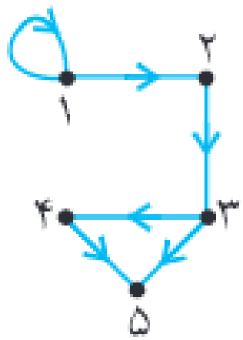
- نمایش رابطه با استفاده از گراف جهتدار: به ازای هر عنصر از مجموعه یک راس در نظر میگیریم، و به ازای هر زوج مرتب (a,b) در R یک یال جهتدار از راس a به راس b وصل میکنیم.

مثال: $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$



نمایش رابطه ها (گراف جهتدار)

مثــال اگــر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $R = \{(۱,۱)\ (۱,۲)\ (۲,۳)\ (۳,۵)\ (۳,۴)\ (۴,۵)\}$
رابطه‌ای روی A باشد آنگاه گراف R به شکل مقابل است:



اگر بخواهیم $R^۲ = (ROR)$ را از روی گراف بنویسیم کافیست اگر از a به b مسیر به طـول ۲ وجود داشت آنگاه (a,b) را در $R^۲$ بنویسیم (طول مسیر تعداد یالهای مسیر است):

$R^۲ = \{(۱,۱)\ (۱,۲)\ (۱,۳)\ (۲,۵)\ (۲,۴)\ (۳,۵)\}$

دقت کنید طوقه را می‌توان هر تعداد بار که مایل بودید طی کنید.

نمایش رابطه ها (گراف جهتدار)

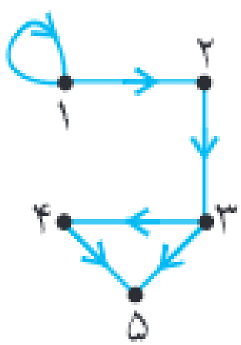
به همین ترتیب $R^{۳}$ $(ROR^{۲}=R^{۲}OR)$ شامل زوج‌هایی مثل (a,b) است که از a به b مسیر به طول ۳ وجود دارد:

$$R^{۳}=\{(۱,۱)\ (۱,۲)\ (۱,۳)\ (۱,۴)\ (۱,۵)\ (۲,۵)\}$$

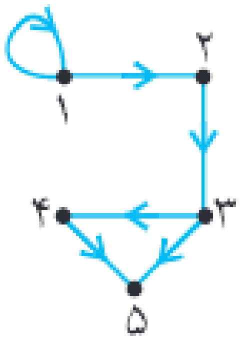
به همین ترتیب R^{n} $(ROR^{n-۱}=R^{n-۱}OR)$ شامل زوجهایی مثل (a,b) است که از a به b مسیر به طول n وجود دارد.

رابطه R^{∞} (R^{+}) رابطه وجود مسیر نامیده می‌شود و $(a,b)\in R^{\infty}$ اگر و فقط اگر از a به b حداقل یک مسیر باشد به هر طولی (بجز طول صفر) پس:

$$R^{\infty}=R\cup R^{۲}\cup R^{۳}\cup\ldots\cup R^{n}$$



نمایش رابطه ها (گراف جهتدار)



$R^{\infty} = \{(۱,۱)\ (۱,۲)\ (۱,۳)\ (۱,۴)\ (۱,۵)\ (۲,۳)\ (۲,۴)\ (۲,۵)\ (۳,۴)\ (۳,۵)\ (۴,۵)\}$

رابطه R^* رابطه دسترس‌پذیری نامیده می‌شود و $(a,b) \in R^*$ اگر $(a,b) \in R^{\infty}$ یا $a = b$.

در این مثال:

$R^* = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۳,۴)(۳,۵)(۴,۵)\}$

درواقع $R^* = R^{\infty} \cup \Delta$.

تشخیص خواص روابط از روی گراف

۱- بازتاب: رابطه، بازتاب است اگر و فقط اگر همه رئوس، طوقه داشته باشند.

۲- ضدبازتاب: رابطه، ضدبازتاب است اگر و فقط اگر هیچ راسی طوقه نداشته باشد.

۳- تقارن: رابطه، متقارن است اگر و فقط اگر همه یالها دو طرفه باشند یعنی اگر از a به b یال هست از b به a نیز یال باشد و برعکس.

۴- پاد متقارن: رابطه پاد متقارن است اگر بجز طوقه‌ها، هیچ یالی دو طرفه نباشد.

۵- آسیمتریک: رابطه آسیمتریک است اگر طوقه وجود نداشته باشد و هیچ یالی دوطرفه نباشد.

۶- تعدی: رابطه متعدی است اگر از a به b و از b به c یال باشد از a به c نیز یال باشد.

گراف مثال قبل فقط خاصیت پاد تقارن دارد.

بستارها(Closusers)

۱) **بستار بازتاب:** کوچکترین رابطه شامل رابطه R که خاصیت بازتاب داشته باشد.

۲) **بستار متقارن:** کوچکترین رابطه شامل رابطه R که خاصیت تقارن داشته باشد.

۳) **بستار تعدی:** کوچکترین رابطه شامل رابطه R که خاصیت تعدی داشته باشد.

بستارها(Closusers)

مثال اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و رابطه R روی A تعریف شود:

$$R=\{(۱,۱)\ (۲,۳)\ (۳,۱)\ (۱,۴)\ (۴,۱)\}$$

آنگاه:

بستار بازتاب رابطه R $=\{(۱,۱)\ \underline{(۲,۲)}\ \underline{(۳,۳)}\ \underline{(۴,۴)}\ (۲,۳)\ (۳,۱)\ (۱,۴)\ (۴,۱)\}$

درواقع زوجهای (a,a) که در R نبود را به R اضافه کردیم. یعنی بستار بازتاب رابطه R رابطه $R\cup\Delta$ می‌باشد.

بستار متقارن رابطه R $=\{(۱,۱)\ (۲,۳)\ \underline{(۳,۲)}\ (۳,۱)\ \underline{(۱,۳)}\ (۱,۴)\ (۴,۱)\}$

در واقع اگر زوج (a,b) در R هست و (b,a) نیست کافیست (b,a) را در R قرار دهیم.
یعنی بستار متقارن رابطه R ، رابطه $R\cup R^{-1}$ است.

بستارها(Closusers)

بستار متعدی رابطه R = $\{(۱,۱)\ (۲,۳)\ (۳,۱)\ (۱,۴)\ (۴,۱)\ \underline{(۲,۱)}\ \underline{(۳,۴)}\ \underline{(۴,۴)}\ \ \underline{(۲,۴)}\}$

زوج‌های (۳,۱) و (۲,۳) در R هستند پس باید (۲,۱) را اضافه کنیم یعنی باید زوجهای موجود در $R^۲$ را به R اضافه کنیم با انجام این عمل زوجی مثل (۳,۴) اضافه می‌شود (بخاطر (۱,۴) (۳,۱)) و این زوج با زوج (۲,۳) ایجاب می‌کند که (۲,۴) را نیز اضافه کنیم که (۲,۴) درواقع عضو $R^۳$ است یعنی باید زوجهای $R^۳$ را نیز اضافه کنیم. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که بستار متعدی رابطه R همان R^∞ است.

نمایش رابطه ها (ماتریس)

- رابطه بین مجموعه های متناهی را میتوان با ماتریس ۰و۱ نشان داد.
- اگر R رابطه ای از A به B باشد، میتوان رابطه R را با ماتریس M نشان داد:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 \text{ if } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

نمایش رابطه ها (ماتریس)

مثال اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{a,b\}$ و $R\subseteq A\times B$ و $R=\{(۱,a)\,(۱,b)\,(۲,b)\,(۳,a)\}$

آنگاه ماتریس رابطه R برابر است با:

$$M_R=\begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس روابط را ماتریس بولی $(۰-۱)$ گویند.

نمایش رابطه ها (ماتریس)

مثال: فرض کنید A={1,2,3} و B={1,2} و رابطه R از A به B به صورت رابطه بزرگتر بودن تعریف شده باشد، $aRb \Leftrightarrow a > b$. رابطه R را به صورت ماتریس نمایش دهید.

حل:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

عملیات ماتریس بولی

۱– join (اجتماع): اگر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ دو ماتریس بـولی باشـند آنگـاه join دو ماتریس A و B که $A\vee B$ یا $A\bigcup B$ می‌نویسیم برابر ماتریس $C=[c_{ij}]_{n\times m}$ است کـه بـه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij}=\begin{cases}۱ & \text{if } (a_{ij}=۱ \text{ or } b_{ij}=۱)\\ ۰ & \text{else}\end{cases}$$

درواقع عمل join همان عمل اجتماع روی روابط است.

عملیات ماتریس بولی

۲– عمل meet (اشتراک): به صورت $A \wedge B$ یا $A \cap B$ نوشته می‌شود و معادل اشتراک روابط است.

$$C = A \wedge B = [C_{ij}]_{n\times m}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{if } (a_{ij} = ۱ \text{ and } b_{ij} = ۱) \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A \wedge B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

عملیات ماتریس بولی

۳- عمل ضرب بولی: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times p}$ آنگاه ضرب بـولی A در B بـه صـورت $C=A.B=A\Theta B=A\times B=[c_{ij}]_{n\times p}$ می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij}=\begin{cases} ۱ & \text{if } a_{ik} \text{ and } b_{kj}=۱\ ,\ \exists k:۱\le k\le p \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۴\times ۳} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۴}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۴\times ۴} \quad , \quad B\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

عملیات ماتریس بولی

توجه: اگر ماتریس رابطه R برابر M_R و ماتریس رابطه S برابر M_S آنگاه:

$$M_{ROS} = M_S \times M_R \quad , \quad M_{SOR} = M_R \times M_S$$

توجه: در برخی منابع دو تعریف فوق جابجا تعریف می‌شوند یعنی

$$M_{ROS} = M_R \times M_S \quad , \quad M_{SOR} = M_S \times M_R$$

عملیات ماتریس بولی

مثال: دو رابطه R و S به صورت زیر تعریف شده اند. ماتریس مربوط به SoR را پیدا کنید.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حل:

$$\mathbf{M}_{S\circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

عملیات ماتریس بولی

۴- عمل مقایسه مـاتریس: گـوییم مـاتریس A ضـعیف‌تـر از B اسـت و می‌نویسیم $A \ll B$ یا $A \leq B$ هرگاه درایـه‌هـای A از درایـه‌هـای نظیرشان در B کمتر یا مساوی باشند این عمل معادل $\subseteq$ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not\ll \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

عملیات ماتریس بولی

- اجتماع و اشتراک روابط را میتوان با استفاده از عملیات بولین تعیین کرد.

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}.$$

عملیات ماتریس بولی

مثال: اجتماع و اشتراک روابط زیر را بیابید.

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

حل:

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

خواص رابطه ها از روی ماتریس

- بازتابی : همه عناصر قطر اصلی ۱ هستند.

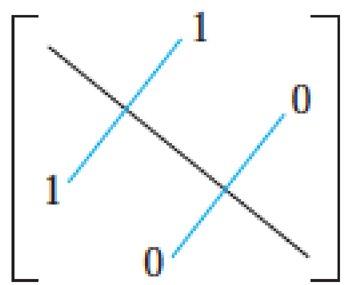
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $|A|=n$ و ماتریس رابطه $n\times n$. یعنی روابط روی A تعریف شده‌اند.

بازتاب: باید تمام درایه‌های قطر اصلی ماتریس برابر یک باشد. به عبارتی اگر I_n ماتریس همانی $n\times n$ باشد باید: $M_R >> I_n$ $(\Delta \subseteq R)$

خواص رابطه ها از روی ماتریس

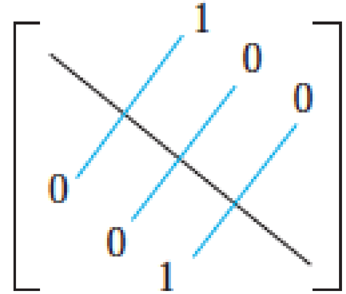
- متقارن : ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن است.



تقارن: باید ماتریس متقارن باشد به عبارتی $(R = R^{-1})$ $M = M^t$. یعنی ماتریس بـا ترانهـاده خود برابر باشد.

خواص رابطه ها از روی ماتریس

- پادمتقارن: برای عناصر غیر از قطر اصلی، اگر $m_{ij} = 1$ آنگاه $m_{ji} = 0$،



پاد تقارن: اگر درایه $m_{ij} = ۱$ و $i \neq j$ آنگاه درایه $m_{ji} = ۰$ باید باشد. به عبارتی

$M_R \wedge M_R^t \ll I_n \qquad (R \cap R^{-1} \subseteq \Delta)$

خواص رابطه ها از روی ماتریس

مثال: رابطه R با ماتریس زیر تعریف شده است، خواص آنرا بررسی کنید.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

رابطه هم ارزی

تعریف: رابطه‌ای که ۳ خاصیت بازتاب، تقارن و تعدی داشته باشد را رابطهٔ **هم‌ارزی** (equivalence) گویند.

- رابطه موازی بودن روی خطوط صفحه هم ارزی است زیرا هر خط با خودش موازی است (بازتاب). اگر خط L_1 با L_2 موازی باشد، L_2 نیز با L_1 موازی است و برعکس (تقارن).
  اگر L_1 با L_2 و L_2 با L_3 موازی باشد آنگاه L_1 با L_3 موازی است (تعدی).
- رابطه هم کلاس بودن بین دانش‌آموزان یک مدرسه، هم ارزی است.
- رابطه هم استان بودن روی مجموعه انسانهای یک کشور، هم ارزی است. و ...

افراز

تعریف: زیرمجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ از مجموعه A را یک **افراز** (partition) برای مجموعه A گویند هرگاه ۳ شرط زیر برقرار باشد:

۱) اجتماع همه زیرمجموعه‌ها برابر A باشد:

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$$

۲) هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد:

$$\underset{i=۱,\ldots,n}{A_i} \neq \phi$$

۳) هیچ دو زیرمجموعه‌ای با هم اشتراک نداشته باشند:

$$\underset{\substack{i,j=۱,۲,\ldots,n \\ i\neq j}}{A_i \cap A_j = \phi}$$

توجه: اگر شرط ۳ برقرار نباشد، به آن پوشش (Cover) می‌گویند.

افراز

مثال تمام افرازهای $A = \{۱,۲,۳\}$ را بنویسید.

پاسخ:

$P_{۱} = [\{۱\},\{۲\},\{۳\}]$

$P_{۲} = [\{۱,۲\} , \{۳\}]$

$P_{۳} = [\{۱,۳\} , \{۲\}]$

$P_{۴} = [\{۲,۳\} ,\{۱\}]$

$P_{۵} = [\{۱,۲,۳\}]$

دقت کنید پوشش‌هایی مثل $[\{۲,۳\} , \{۱,۲\}]$ افراز نیستند چون کلاسها با هم نباید اشتراک داشته باشند.

افراز

می‌توان به ازای هر افراز یک رابطه هم ارزی نوشت. کافیست در هر افراز کلاسها را در هم ضرب دکارتی کنیم یعنی $(a,b) \in R$ اگر و فقط اگر a و b در یک کلاس باشند.

به عنوان مثال روابط هم ارزی معادل با افرازهای مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳\}$ عبارتند از:

افراز : $P_۱ = [\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}] \Rightarrow$ رابطه هم‌ارزی : $R_۱ = \{(۱,۱)\ (۲,۲)\ (۳,۳)\}$

$P_۲ = [\{۱,۲\}, \{۳\}] \Rightarrow R_۲ = \{(۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)(۲,۲)(۳,۳)\}$

$P_۳ = [\{۱,۳\}, \{۲\}] \Rightarrow R_۳ = \{(۱,۱)(۱,۳)(۳,۱)(۳,۳)(۲,۲)\}$

$P_۴ = [\{۲,۳\}, \{۱\}] \Rightarrow R_۴ = \{(۲,۲)(۲,۳)(۳,۲)(۳,۳)(۱,۱)\}$

$P_۵ = [\{۱,۲,۳\}] \Rightarrow R_۵ = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۱,۲)(۲,۱)(۱,۳)(۳,۱)(۲,۳)(۳,۲)\}$