دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تکلیف چهارم درس طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال تحصیلی: بهار ۱۴۰۲

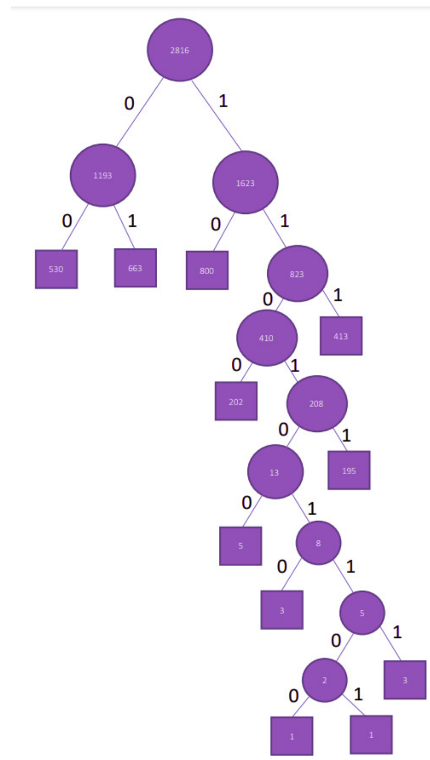
مدرّس: دکتر محمّدرضا حیدرپور

دستیاران آموزشی: مصطفی دریس‌پور - مجید فرهادی - محمّدیاسین کرباسیان - محمّدرضا مزروعی - امیر منصوریان - امیرارسلان یاوری

۱ درخت هافمن

متنی متشکل از حروف الف، د، ر، س، ش، ک، گ، ل، ن، و و ی با تکرار به ترتیب ۵، ۱۹۵، ۳، ۲۰۲، ۱، ۸۰۰، ۱، ۶۶۳، ۳، ۴۱۳ و ۵۳۰ است. با استفاده از درخت هافمن حداقل تعداد بیت لازم برای ذخیره این متن را محاسبه نمایید. (۱۰ نمره)

ش	۱
گ	۱
ر	۳
ن	۳
الف	۵
د	۱۹۵
س	۲۰۲
و	۴۱۳
ی	۵۳۰
ل	۶۶۳
ک	۸۰۰



$$530 \times 2 + 663 \times 2 + 800 \times 2 + 413 \times 3 + 202 \times 4 + 195 \times 5 + 5 \times 6 + 3 \times 7 + 3 \times 8 + 1 \times 9 + 1 \times 9 = 7101$$

۲ توالی غیرتکراری

رشته‌ای از کاراکترها مفروض است. الگوریتمی با رویکرد حریصانه برای تغییر ترتیب کاراکترها به صورتی که هیچ دو کاراکتر متوالی یکسان نباشند (در صورت امکان)، همراه با اثبات بهینگی آن ارائه دهید. (۱۰ نمره)

$$S = acccb \implies Answer = cacbc \ or \ cbcac$$

یک Max Heap بر مبنای تعداد تکرار کاراکترها ایجاد می‌کنیم. عضو بیشینه را خارج کرده، در خروجی قرار داده و یک واحد از تعداد تکرار آن کم می‌کنیم. به طور مشابه عضو بیشینه بعدی را خارج کرده، در خروجی قرار داده و یک واحد از تعداد تکرار آن کم می‌کنیم. در این لحظه اگر تعداد تکرار عضو بیشینه اول بزرگ‌تر از صفر بود، آن را با یک مرحله تاخیر مجدداً به Max Heap اضافه می‌کنیم. این عملیات را تکرار می‌کنیم تا Max Heap خالی شود.

اثبات: فرض کنیم دو کاراکتر یکسان به طول متوالی در خروجی قرار گرفته‌اند. این یعنی کاراکتری که در Max Heap قرار نداشته‌است را از آن خارج کرده‌ایم که تناقض است و بهینگی الگوریتم حریصانه اثبات می‌شود.

۳ سوراخ‌موش

آرایه‌ای از مکان n موش و آرایه دیگری از مکان n سوراخ بر روی یک خط (فضای یک‌بعدی) مفروض است. الگوریتمی با رویکرد حریصانه برای اختصاص هر سوراخ به هر موش به طوری که بیشینه مسافتی که موش‌ها طی می‌کنند کمینه باشد، همراه با اثبات بهینگی آن ارائه دهید. (۱۰ نمره)

$$Mice = [4, -4, 2], Holes = [4, 0, 5] \implies Answer = 4$$

هر دو آرایه را مرتب کرده و به ترتیب سوراخ‌ها را به موش‌ها اختصاص می‌دهیم. بیشینه فاصله سوراخ‌ها و موش‌ها، کمینه بیشینه مسافتی است که موش‌ها طی می‌کنند.

اثبات: فرض کنیم در پاسخ بهینه، بیشینه مسافتی که موش‌ها طی می‌کنند کم‌تر است. در پاسخ ما سوراخ iام به موش iام اختصاص یافته‌است. در عوض در پاسخ بهینه سوراخ jام به موش iام و سوراخ iام به موش kام اختصاص یافته است. با فرض $H[j] > H[i]$ و $M[k] > M[i]$ پنج حالت متصور است:

$$M[i] < M[k] < H[i] < H[j]$$
$$M[i] < H[i] < M[k] < H[j]$$
$$M[i] < H[i] < H[j] < M[k]$$
$$H[i] < M[i] < H[j] < M[k]$$
$$H[i] < H[j] < M[i] < M[k]$$

در تمامی این پنج حالت، $|M[i] - H[i]| \le \max(|M[i] - H[j]|, |M[k] - H[i]|)$ است که با بهتربودن جواب بهینه در تناقض است.

۴ غذاخوری

n نفر و m غذا با شرط $m > n$ به طوری که هر نفر فقط یک غذا می‌گیرد و هر غذا تنها به یک نفر اختصاص دارد مفروض است. هر غذا یک مقدار $s(j)$ که $1 \le j \le m$ است دارد. همچنین هر نفر یک عدد گرسنگی $g(i)$ که $1 \le i \le n$ است دارد که حداقل مقدار غذایی است که با آن سیر می‌شود. الگوریتمی با رویکرد حریصانه برای سیرکردن بیش‌ترین تعداد فرد ممکن به طوری که $g(i) < s(j)$ باشد، همراه با اثبات بهینگی آن ارائه دهید. (۱۵ نمره)

نفرات و غذاها را به ترتیب نزولی مرتب می‌کنیم. اگر بزرگ‌ترین غذا، گرسنه‌ترین فرد را سیر می‌کرد، آن را به او اختصاص می‌دهیم و در غیر این صورت کوچک‌ترین غذا را به او اختصاص می‌دهیم. این عملیات را تکرار می‌کنیم تا همه نفرات بررسی شوند و بیش‌ترین نفرات ممکن سیر شوند.

اثبات: فرض کنیم در پاسخ بهینه یک نفر بیش‌تر سیر شده‌است. در پاسخ ما به فرد i_1ام غذای j_1ام اختصاص داده‌شده است که کافی نیست. در عوض در پاسخ بهینه به این فرد غذای j_2 اختصاص یافته است که کافی است و $s(j_2) > s(j_1)$ است. در پاسخ ما غذای j_2 متعلق به فرد i_2 است و $g(i_2) > g(i_1)$ است. در جواب بهینه باید برای این فرد غذایی پیدا کنیم. غذای این فرد نمی‌تواند کوچک‌تر از j_2 باشد چرا که اگر بتواند این فرد را سیر کند، i_1 را نیز سیر می‌کرد. در نتیجه باید غذایی بزرگ‌تر از j_2 به او اختصاص یافته باشد. با ادامه این روند، برای گرسنه‌ترین فردی که در پاسخ ما سیر شده بود غذایی پیدا نمی‌شود که تناقض است و بهینگی الگوریتم حریصانه اثبات می‌شود.

۵ گراف قرمز و آبی

گرافی وزن‌دار که به هر یال آن یکی از دو رنگ قرمز یا آبی منتسب است مفروض است. با این فرض که می‌بایست رنگ یالی که با آن به هر رأس وارد می‌شویم متفاوت از رنگ یالی باشد که با آن از آن رأس خارج می‌شویم، الگوریتم Dijkstra را برای این گراف تعمیم داده و بهینگی آن را اثبات کنید. (۱۵ نمره)

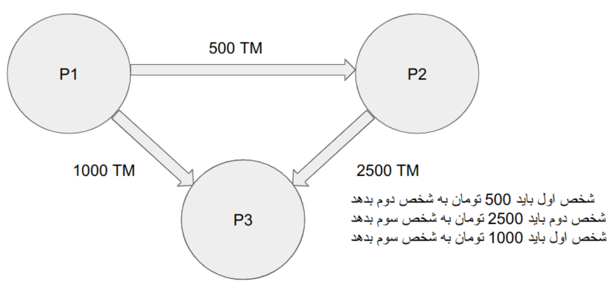
به ازای هر رأس، دو نماینده در الگوریتم Dijkstra در نظر می‌گیریم؛ یکی اینکه با یال قرمز به آن رأس وارد شویم و دیگری اینکه با یال آبی به آن رأس وارد شویم. اگر هر کدام از این مقادیر وجود نداشت، مقدار بی‌نهایت را به جای آن در نظر می‌گیریم. در نهایت در هنگام به‌روزرسانی فاصله‌ها شرط مسئله را لحاظ و تنها رأس‌های واجد شرایط را به رئوس کاندید اضافه می‌کنیم.
اثبات: اثبات الگوریتم Dijkstra برای اثبات بهینگی روش حریصانه قابل تکرار است. همچنین در هنگام به‌روزرسانی فاصله‌ها شرط مسئله ارضا می‌شود.

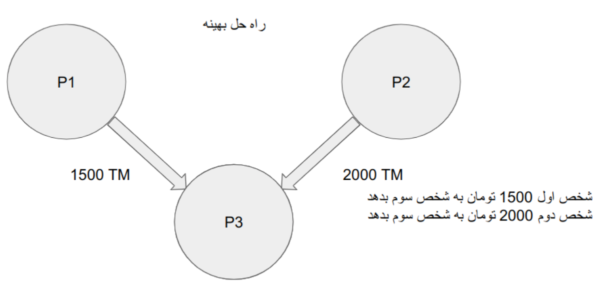
۶ کوئرا

به دو سوال کوئرا پاسخ دهید. (۴۰ نمره)

۷ تراکنش‌های کمینه

تعدادی تراکنش مالی بین چند نفر مفروض است. الگوریتمی با رویکرد حریصانه برای کمینه‌کردن پول جابه‌جاشده بین این نفرات، همراه با اثبات بهینگی آن ارائه دهید. (۲۰ نمره مازاد)





برای هر فرد تفاضل مقدار بستان‌کاری و بده‌کاری را محاسبه می‌کنیم. طبق مقادیر محاسبه‌شده، دو نفری که بیش‌ترین بستان‌کاری و بده‌کاری را دارند پیدا می‌کنیم. اگر بیشترین بستان‌کاری کم‌تر از بیش‌ترین بده‌کاری بود، بستان‌کاری فرد با بیش‌ترین بستان‌کاری

را با بده‌کاری فرد با بیش‌ترین بده‌کاری تسویه می‌کنیم و فرد با بیش‌ترین بستان‌کاری را حذف می‌کنیم. اگر بیشترین بده‌کاری کم‌تر از بیش‌ترین بستان‌کاری بود، بده‌کاری فرد با بیش‌ترین بده‌کاری را با بستان‌کاری فرد با بیش‌ترین بستان‌کاری تسویه می‌کنیم و فرد با بیش‌ترین بده‌کاری را حذف می‌کنیم. در صورت تساوی، حساب هر دو نفر را تسویه و هر دو نفر را حذف می‌کنیم. این عملیات را تکرار می‌کنیم تا فردی باقی نماند.

اثبات: در هر گام از الگوریتم، پولی که جابه‌جا می‌شود برابر تفاضل مقدار بستان‌کاری و بده‌کاری یک فرد است. این مقدار پول جابه‌جاشده نمی‌تواند کم‌تر باشد چرا که در غیر این صورت حساب آن فرد تسویه نمی‌شود. همچنین این مقدار پول جابه‌جاشده نمی‌تواند بیش‌تر باشد چرا که در غیر این صورت آن فرد نیاز به جابه‌جایی دیگری برای تسویه حساب خود است و پول جابه‌جاشده کمینه نخواهد بود.