

باسمه تعالی



نام و نام خانوادگی: \_\_\_\_\_  
شماره دانشجویی: \_\_\_\_\_

مبانی الگوریتم  
امتحان میان ترم - ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۱

• مدت زمان امتحان ۷۵ دقیقه است و ۱۵ دقیقه برای پاک‌نویس کردن در نظر گرفته می‌شود.

سوال ۱ الف) بهترین کران مجانبی بالایی برای توابع زمانی زیر را تعیین کنید (با ذکر دلیل) (۲۰ نمره)

- 1)  $T(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k}$     2)  $T(n) \leq 7T(n/3) + O(n^2)$     3)  $T(n) \leq 5T(n-1) - 6T(n-2)$   
4)  $T(n) \leq 4T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 5^{\log_2 n}$

ب) درستی یا نادرستی عبارت رو به رو را اثبات کنید. (۱۰ نمره)

$$f(n) \notin \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

ج) مقدار نهایی  $r$  را بر حسب  $n$  بدست آورید (با ذکر دلیل) (۱۰ نمره)

```
function magic(n)
1  r := 0
2  for i := 1 to n do
3    for j := 1 to i do
4      for k := j to i + j do
5        r := r + 1
6  return(r)
```

---

**سوال ۲** با استفاده از روش تقسیم و غلبه برای مساله یافتن بزرگترین زیرآرایه (Maximum subarray) درخت بازگشتی (recursion tree) مربوط به حل این مساله به ازای آرایه زیر به عنوان ورودی را رسم نمایید. همچنان توضیح دهید که هر گره درخت متناظر با چه زیر مساله ای هست، در آن بین چه مقادیری ماکزیمم گیری می شود و خروجی آن گره برای گره مادر خود چه مقداری است. (۲۰ نمره)

6	-1	-4	3	7	-9	10	2
---	----	----	---	---	----	----	---

**سوال ۳** فرض کنید دو رشته الفبایی  $X = x_1x_2 \dots x_n$  و  $Y = y_1y_2 \dots y_m$  به طول های به ترتیب  $n$  و  $m$  داده شده است. در این صورت رشته دیگری به طول  $n + m$  یک ابررشته برای رشته های  $X$  و  $Y$  به حساب می آید اگر تمام رشته  $X$  و تمام رشته  $Y$  زیررشته های آن باشند (با همان تعریف زیررشته که در مساله یافتن بزرگترین زیررشته مشترک، LCS، وجود دارد)

مثال: اگر  $X = \text{YES}$  و  $Y = \text{no}$  آنگاه ۱۰ ابررشته به صورت زیر برای آنها وجود دارد:

YESno, YEnSo, YEnoS, YnESo, YnEoS, YnoES, nYESo, nYEOs, nYoES, noYES

(الف) یک رابطه بازگشتی برای شمارش تعداد کل ابررشته هایی که می توان برای رشته های  $X$  و  $Y$  پیدا کرد، به همراه شرایط مرزی لازم برای حل آن بدست آورید (با ذکر دلیل). (۱۵ نمره)

(فرض کنید همه حروف، در هر یک از رشته ها، با هم متفاوت هستند و همچنین دو رشته حرف مشترک با هم ندارند)  
(ب) با توجه به رابطه بازگشتی که در قسمت قبل بدست آورید اثبات کنید که تعداد کل ابررشته ها کران پایینی نمایی به صورت  $\Omega(2^{\min\{n,m\}})$  دارد. (۱۵ نمره)

(ج) حال فرض کنید که یک رشته به نام  $Z$  به طول  $n + m$  داده شده است و هدف آن است که بفهمیم این رشته، یک ابررشته برای رشته های  $X$  و  $Y$  هست یا خیر. برای جواب به این سوال از استراتژی برنامه نویسی پویا استفاده کنید و پیچیدگی الگوریتم خود را محاسبه نمایید. (نوشتن رابطه بازگشتی، شرایط مرزی و شبه کد الزامی است) (۳۰ نمره)