

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۲۵

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

ماشین تورینگ جهانی

The Turing machines we have studied so far have been special-purpose computers, capable of executing a single algorithm. Just as a modern computer is a stored-program computer, which can execute any program stored in its memory, so a “universal” Turing machine, also anticipated by Alan Turing in a 1936 paper, can execute any algorithm, provided it receives an input string that describes the algorithm and any data it is to process.

ماشین تورینگ جهانی

Definition 7.32 Universal Turing Machines

A *universal* Turing machine is a Turing machine T_u that works as follows. It is assumed to receive an input string of the form $e(T)e(z)$, where T is an arbitrary TM, z is a string over the input alphabet of T , and e is an encoding function whose values are strings in $\{0, 1\}^*$. The computation performed by T_u on this input string satisfies these two properties:

1. T_u accepts the string $e(T)e(z)$ if and only if T accepts z .
2. If T accepts z and produces output y , then T_u produces output $e(y)$.

هر ماشین تورینگ را میتوان با یک رشته باینری توصیف کرد.

ماشین تورینگ جهانی

The in-

put to a Turing machine is always a string. If we want to provide an object other than a string as input, we must first represent that object as a string. Strings can easily represent polynomials, graphs, grammars, automata, and any combination of those objects. A Turing machine may be programmed to decode the representation so that it can be interpreted in the way we intend. Our notation for the encoding of an object O into its representation as a string is $\langle O \rangle$.

ماشین تورینگ جهانی

مثال ○

$$A_{\text{TM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w \}.$$

universal Turing machine

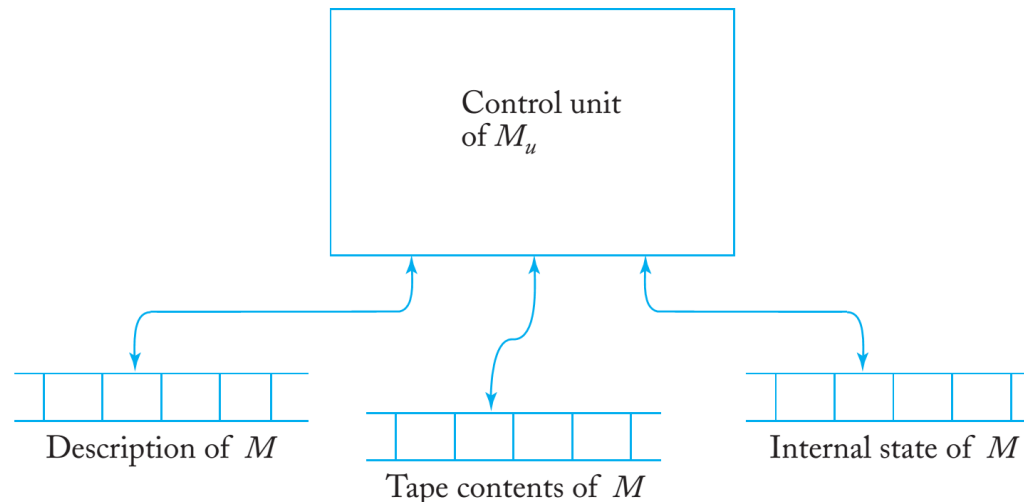
U = “On input $\langle M, w \rangle$, where M is a TM and w is a string:

1. Simulate M on input w .
2. If M ever enters its accept state, *accept*; if M ever enters its reject state, *reject*.”

ماشین تورینگ جهانی

A universal Turing machine M_u then has an input alphabet that includes $\{0, 1\}$ and the structure of a multitape machine, as shown in Figure 10.16.

For any input M and w , tape 1 will keep an encoded definition of M . Tape 2 will contain the tape contents of M , and tape 3 the internal state of M . M_u looks first at the contents of tapes 2 and 3 to determine the configuration of M . It then consults tape 1 to see what M would do in this configuration. Finally, tapes 2 and 3 will be modified to reflect the result of the move.



ماشین تورینگ

- انواع ماشین تورینگ را بررسی کردیم و دیدم با ماشین تورینگ معمولی هم ارزند.
- همچنین دیدم میتوان از ترکیب ماشینهای تورینگ، مسائل پیچیده تری را حل کرد.
- آیا این ماشین تورینگ معمولی قویترین ماشین ماست؟ اینطور به نظر میرسد که نمیتوانیم ماشین قویتری پیدا کنیم؟
- یعنی ماشین تورینگ هر مسئله ای را حل میکند؟ برای آن الگوریتم دارد؟
- میتوان ماشینی متصور بود که مسئله ای را حل کند (الگوریتم داشته باشد) اما ماشین تورینگ قادر به حل آن نباشد؟

الگوریتم

○ الگوریتم چیست؟

Informally speaking, an algorithm is a collection of simple instructions for carrying out some task.

○ آیا تعریف دقیقی است؟

Even though algorithms have had a long history in mathematics, the notion of algorithm itself was not defined precisely until the twentieth century. Before that, mathematicians had an intuitive notion of what algorithms were, and relied upon that notion when using and describing them. But that intuitive notion was insufficient for gaining a deeper understanding of algorithms.

الگوریتم

○ الگوریتم اقلیدسی برای محاسبه بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد نامنفی

gcd (a, b):

```
1 if b==0  
2   return a  
3 else a=b, b=a mod b, goto 1
```

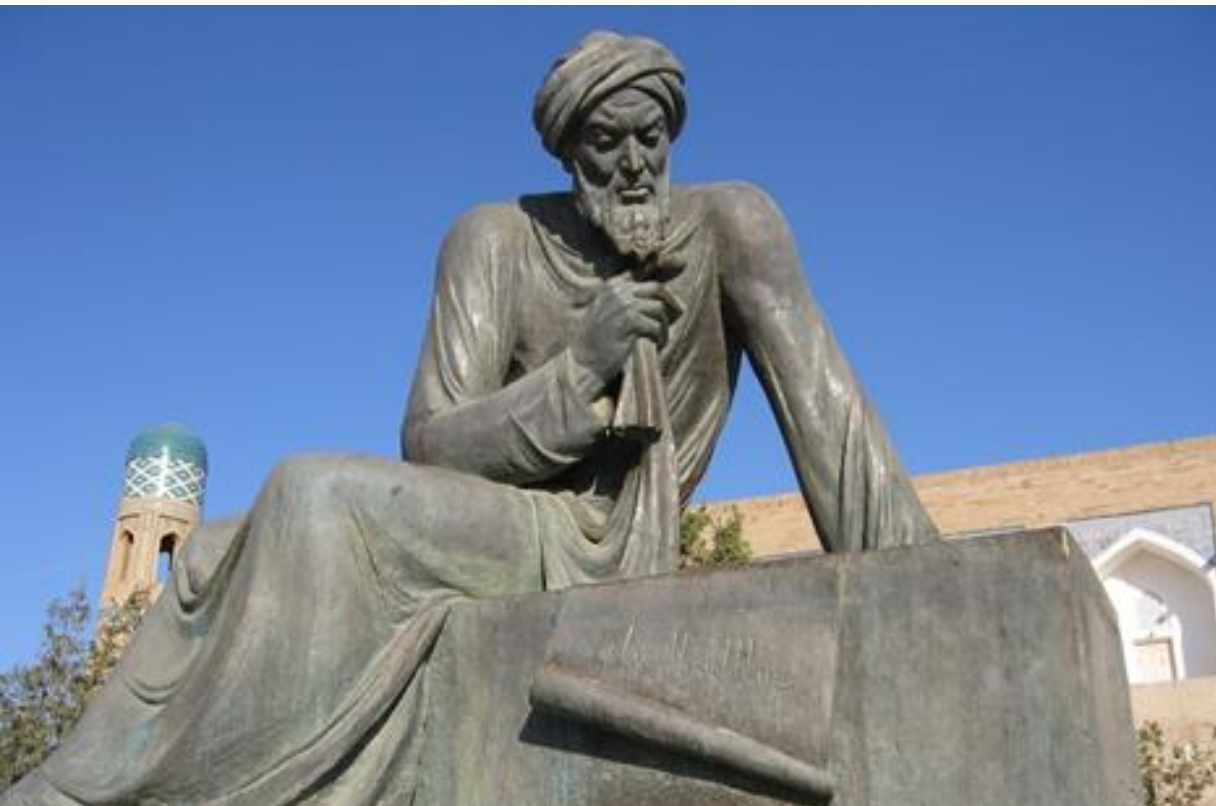
$$\text{gcd}(10,25) = \text{gcd}(25,10) = \text{gcd}(10,5) = \text{gcd}(5,0) = 5$$

الگوریتم

○ ابوجعفر محمد بن موسی خوارزمی (الخوارزمی) در قرن سوم

○ الجبر و المقابله

○ Algorithm



الگوریتم

○ کنگره بین المللی ریاضی در ۱۹۰۰ پاریس: دیوید هیلبرت ۲۳ مسئله ریاضی به عنوان چالشهای قرن پیش رو مطرح کرد.

○ مسئله دهم هیلبرت:

Give a process according to which it can be determined by a finite number of operations that tests whether a polynomial has an integral root.

$$D = \{p \mid p \text{ is a polynomial with an integral root}\}.$$

الگوریتم

○ مسئله دهم هیلبرت:

Give a process according to which it can be determined by a finite number of operations that tests whether a polynomial has an integral root.

- فرض هیلبرت این بود که این مسئله قابل حل است و یک الگوریتم برای آن وجود دارد.
- امروزه میدانیم این مسئله از لحاظ الگوریتمی قابل حل نیست و برای آن الگوریتم نداریم.
- این بدین دلیل است که امروزه تعریف دقیقی از الگوریتم داریم.
- این تعریف دقیق چیست؟

تز چرچ-تورینگ

- سال ۱۹۳۶ دو مقاله متفاوت از آلن تورینگ و آلونسو چرچ
- اولی ماشین تورینگ را معرفی کرد و دومی سیستمی نمادی به نام λ -calculus ...
- ثابت میشود هر دو معادلند.

- تز چرچ-تورینگ (Church-Turing thesis): ارائه تعریف دقیق برای الگوریتم

<i>Intuitive notion of algorithms</i>	equals	<i>Turing machine algorithms</i>
-------------------------------------------	--------	--------------------------------------

- الگوریتم به معنای داشتن ماشین تورینگی که نهایتاً متوقف شود (decider).

تز چرچ-تورینگ

- بیان دیگر تز چرچ-تورینگ: هر محاسبه‌ای در دنیای واقعی را میتوان با ماشین تورینگ انجام داد.
- این یک حدس بر پایه‌ای از شواهد است و اثبات نشده است (همانند قوانین فیزیک نیوتونی).
- به هر حال سالهاست هیچ نقضی برای آن نداریم.
- برای هر مدل محاسباتی بدیلی که بعد از تورینگ معرفی شده است، نشان داده شده است که با ماشین تورینگ هم ارز است....

الگوریتم

○ در واقع مسئله دهم هیلبرت میپرسد آیا مجموعه D تصمیم پذیر است یا خیر؟

$$D = \{p \mid p \text{ is a polynomial with an integral root}\}.$$

○ یک راه حل با فرض تک متغیره بودن چندجمله‌ای

الگوریتم

○ مثالی ساده از حالت خاص:

$$4x^3 - 2x^2 + x - 7.$$

$$D_1 = \{p \mid p \text{ is a polynomial over } x \text{ with an integral root}\}.$$

Here is a TM M_1 that recognizes D_1 :

$M_1 =$ “On input $\langle p \rangle$: where p is a polynomial over the variable x .

1. Evaluate p with x set successively to the values $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$. If at any point the polynomial evaluates to 0 , *accept*.”

If p has an integral root, M_1 eventually will find it and accept. If p does not have an integral root, M_1 will run forever.

But...there is a solution here.

الگوریتم

○ در واقع مسئله دهم هیلبرت میپرسد آیا مجموعه D تصمیم پذیر است یا خیر؟

$$D = \{p \mid p \text{ is a polynomial with an integral root}\}.$$

○ برای حالت کلی

الگوریتم

○ در واقع مسئله دهم هیلبرت میپرسد آیا مجموعه D تصمیم پذیر است یا خیر؟

$$D = \{p \mid p \text{ is a polynomial with an integral root}\}.$$

- پاسخ منفی است.
- سال ۱۹۷۰ نشان داده شد که مسئله دهم هیلبرت الگوریتمی ندارد (حل نشدنی)
- اما میتوانیم نشان دهیم که Turing-recognizable است.

مثال

EXAMPLE 3.23

Let A be the language consisting of all strings representing undirected graphs that are connected. Recall that a graph is *connected* if every node can be reached from every other node by traveling along the edges of the graph. We write

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ is a connected undirected graph}\}.$$

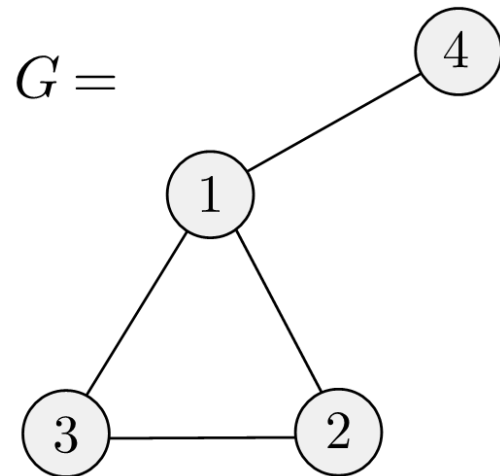
مثال

The following is a high-level description of a TM M that decides A .

$M =$ “On input $\langle G \rangle$, the encoding of a graph G :

1. Select the first node of G and mark it.
2. Repeat the following stage until no new nodes are marked:
3. For each node in G , mark it if it is attached by an edge to a node that is already marked.
4. Scan all the nodes of G to determine whether they all are marked. If they are, *accept*; otherwise, *reject*.”

مثال



$\langle G \rangle =$

$$(1, 2, 3, 4) ((1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4))$$

FIGURE 3.24
A graph G and its encoding $\langle G \rangle$