بسم الله الرحمن الرحیم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

جلسه ۱۸

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

اتوماتای پشته‌ای

- تاکنون با اتوماتای متناهی آشنا شده‌ایم (متناظر با زبان منظم).
- همانطور که بیان کردیم بسیاری از زبان‌ها نیاز به حافظه نامحدود دارند. مانند زبان زیر که یک CFL است:

$$\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

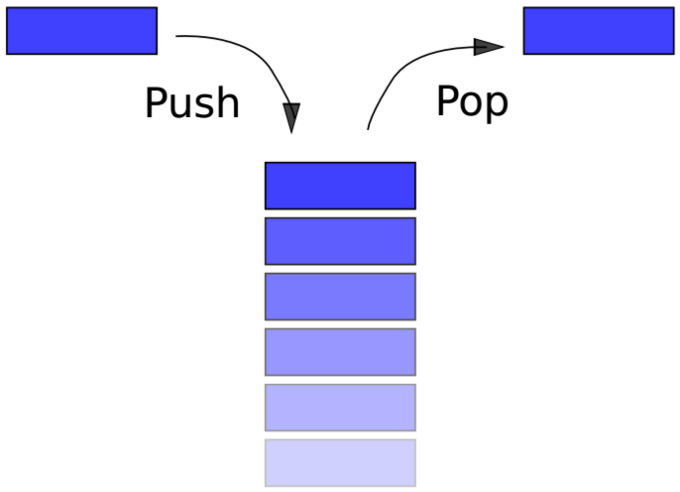
- اکنون قصد داریم اتوموتنی معرفی کنیم که CFL را تشخیص دهد.
- بنابراین به همان NFA یک stack با حافظه نامحدود اضافه میکنیم.

اتوماتای پشته‌ای

Pushdown automata are equivalent in power to context-free grammars. This equivalence is useful because it gives us two options for proving that a language is context free. We can give either a context-free grammar generating it or a pushdown automaton recognizing it. Certain languages are more easily described in terms of generators, whereas others are more easily described by recognizers.

اتوماتای پشته‌ای

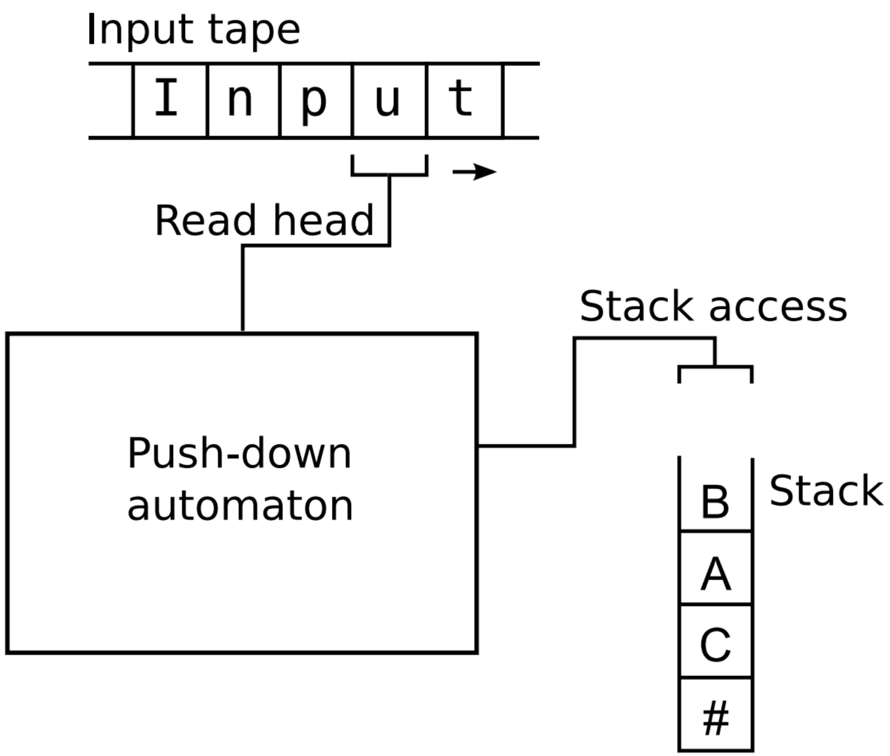
- پشته از اصل LIFO پیروی کرده و دو عملگر اصلی push و pop دارد.



اتوماتای پشته‌ای

IUT-ECE

- در هر گام، معمولا یک سمبل از ورودی و یک سمبل از پشته خوانده می‌شود، سپس ضمن بروزرسانی حالت اتوماتا، معمولا یک سمبل هم در پشته نوشته می‌شود یا بروز می‌شود یا .



اتوماتای پشته‌ای

- قصد داریم مانند FA، برای PDA نیز دیاگرام رسم کنیم.

- برای همین منظور، هر فلش شامل یک سه تایی است: سمبل ورودی، سمبل پاپ شده/ سمبل پوش شده.

- مثال:

0x/1

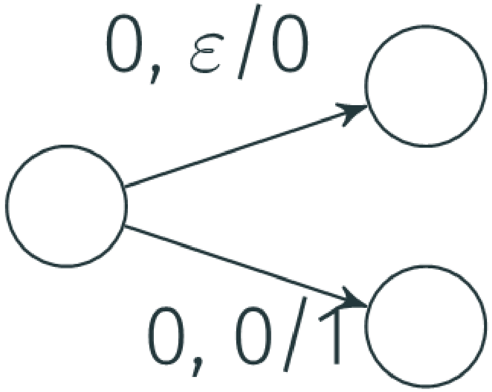
readSymbol , poppedSymbol / pushedSymbol

اتوماتای پشته‌ای

- از سمبل Δ یا $ برای نشان دادن انتهای رشته ورودی یا pop کردن از یک پشته خالی استفاده میکنیم.
- از ε برای نشان دادن نخواندن هیچ سمبلی از ورودی یا pop/push نکردن از پشته استفاده میکنیم.

اتوماتای پشته‌ای

- یک PDA، نامعین است و میتواند چند گزینه برای حرکت داشته باشد (ممکن است برخی شاخه‌ها بمیرند و تنها کافی است یکی پس از اتمام خواندن رشته ورودی به حالت پذیرش برسد):

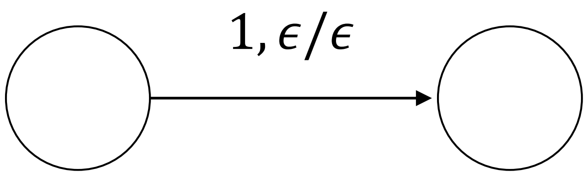


اتوماتای پشته‌ای

- برای یک پشته:

الفبای ورودی: $0,1$

الفبای پشته: y, x

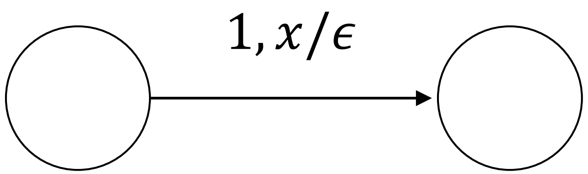


اتوماتای پشته‌ای

- برای یک پشته:

الفبای ورودی: $0,1$

الفبای پشته: y, x

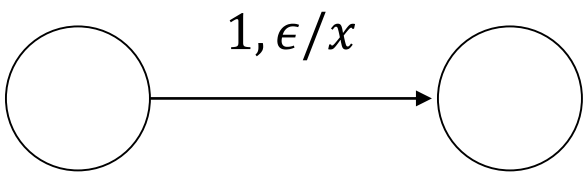


اتوماتای پشته‌ای

- برای یک پشته:

الفبای ورودی: $0,1$

الفبای پشته: y, x

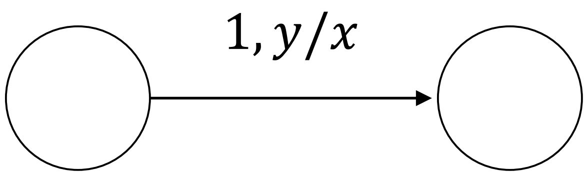


اتوماتای پشته‌ای

- برای یک پشته:

الفبای ورودی: $0,1$

الفبای پشته: y, x

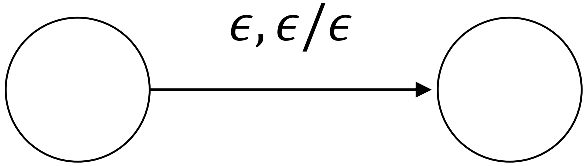


اتوماتای پشته‌ای

- برای یک پشته:

الفبای ورودی: $0,1$

الفبای پشته: y, x

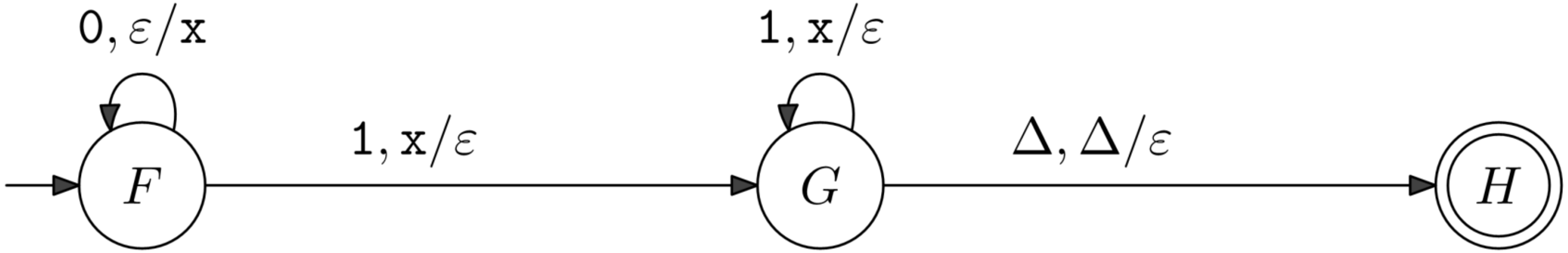


مثال

$$\{0^n 1^n \mid n > 0\}$$

الفبای ورودی: $0,1,(\Delta)$

الفبای پشته: $\mathrm{x}, (\Delta)$

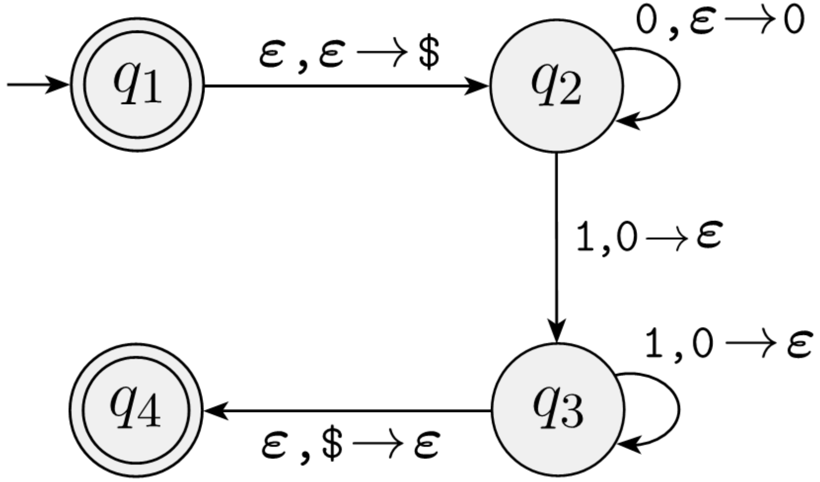


مثال

$$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

الفبای ورودی: $0,1$

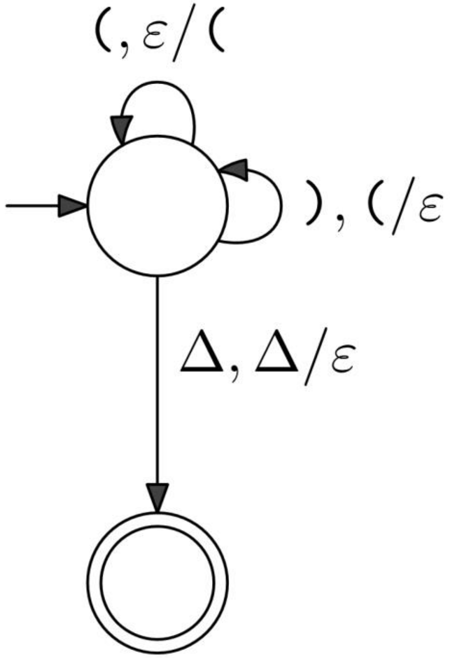
الفبای پشته: $0, \$$



مثال

$$\{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ is in a balaned form}\}$$

$$S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$$



تعریف فرمال اتوماتای پشته‌ای

- اضافه کردن سمبل برای پشته:

input alphabet Σ and a stack alphabet Γ.

$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ and $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$.

تعریف فرمال اتوماتای پشته‌ای

DEFINITION 2.13

A ***pushdown automaton*** is a 6-tuple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, where Q, Σ, Γ, and F are all finite sets, and

1. Q is the set of states,
2. Σ is the input alphabet,
3. Γ is the stack alphabet,
4. $\delta\colon Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ is the transition function,
5. $q_0 \in Q$ is the start state, and
6. $F \subseteq Q$ is the set of accept states.

مفهوم پذیرش در PDA

A pushdown automaton $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computes as follows. It accepts input w if w can be written as $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, where each $w_i \in \Sigma_\varepsilon$ and sequences of states $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ and strings $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ exist that satisfy the following three conditions. The strings s_i represent the sequence of stack contents that M has on the accepting branch of the computation.

1. $r_0 = q_0$ and $s_0 = \boldsymbol{\varepsilon}$. This condition signifies that M starts out properly, in the start state and with an empty stack.

2. For $i = 0, \ldots, m-1$, we have $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, where $s_i = at$ and $s_{i+1} = bt$ for some $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ and $t \in \Gamma^*$. This condition states that M moves properly according to the state, stack, and next input symbol.

3. $r_m \in F$. This condition states that an accept state occurs at the input end.

EXAMPLE 2.14

The following is the formal description of the PDA (page 112) that recognizes the language $\{0^n 1^n | \, n \geq 0\}$. Let M_1 be $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$, where

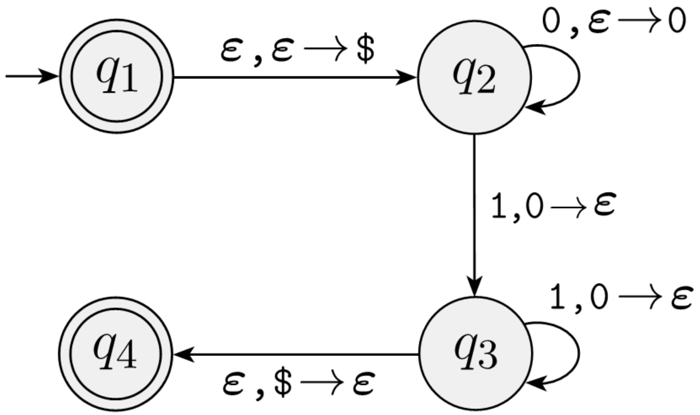
$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0,1\},$$

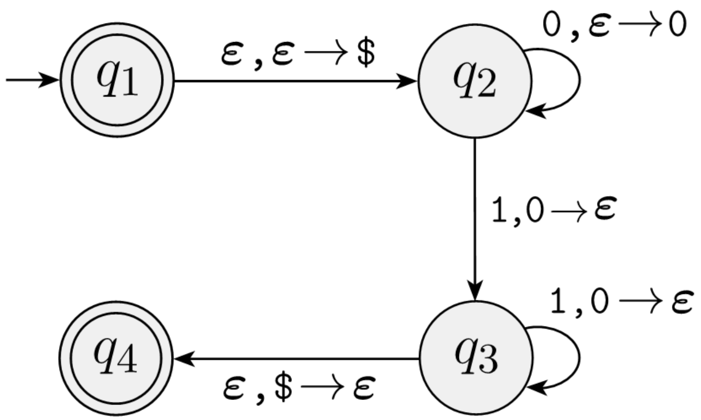
$$\Gamma = \{0, \$\},$$

$F = \{q_1, q_4\}$, and

δ is given by the following table, wherein blank entries signify $\emptyset$.



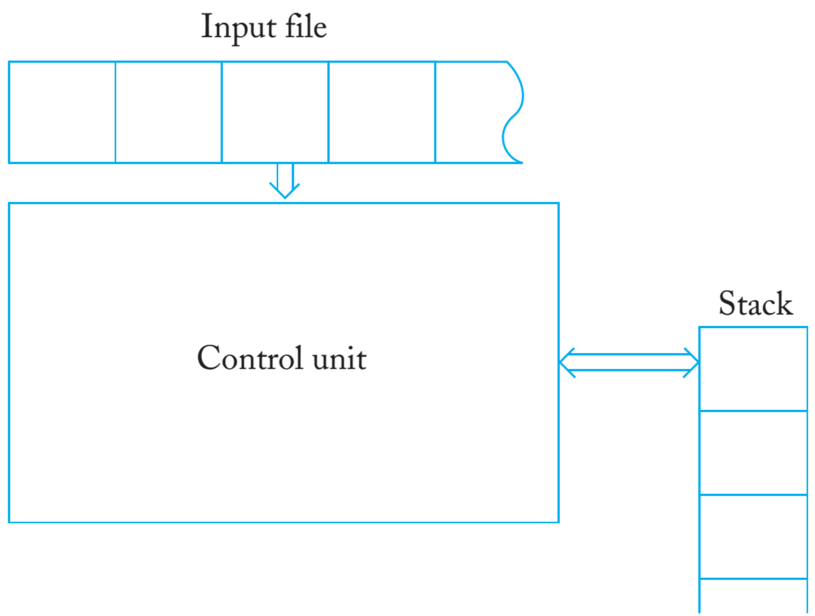
$$\delta : Q \times \Sigma_{\varepsilon} \times \Gamma_{\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_{\varepsilon}).$$



$$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, \$)\}$$

Input:	0			1			ε		
Stack:	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									

تعریف (Linz)



$$(q, w, u),$$

where q is the state of the control unit, w is the unread part of the input string, and u is the stack contents (with the leftmost symbol indicating the top of the stack), is called an **instantaneous description** of a pushdown automaton.

تعریف (Linz)

A move from one instantaneous description to another will be denoted by the symbol $\vdash$; thus

$$(q_1, aw, bx) \vdash (q_2, w, yx)$$

is possible if and only if

$$(q_2, y) \in \delta(q_1, a, b).$$

Moves involving an arbitrary number of steps will be denoted by $\overset{*}{\vdash}$. The expression

$$(q_1, w_1, x_1) \overset{*}{\vdash} (q_2, w_2, x_2)$$

indicates a possible configuration change over a number of steps.[1]

تعریف (Linz)

DEFINITION 7.2

Let $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$ be a nondeterministic pushdown automaton. The language accepted by M is the set

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* : (q_0, w, z) \overset{*}{\vdash}_M (p, \lambda, u), p \in F, u \in \Gamma^* \right\}.$$

In words, the language accepted by M is the set of all strings that can put M into a final state at the end of the string. The final stack content u is irrelevant to this definition of acceptance.

$z \in \Gamma$ is the **stack start symbol**,

مثال

IUT-ECE

EXAMPLE 2.18

In this example we give a PDA M_3 recognizing the language $\{ww^{\mathcal{R}} | w \in \{0,1\}^*\}$. Recall that $w^{\mathcal{R}}$ means w written backwards. The informal description and state diagram of the PDA follow.