دانشکده برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی اصفهان

پاسخنامه تمرین سری پنجم

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

پاییز ۱۴۰۲

استاد درس: دکتر مجتبی خلیلی

دستیاران آموزشی: پردیس یاوری – دیبا میرشفیعی – متین رضایی

سوال اول

اثبات کنید زبان:

A. {A و B دو ماشین متناهی قطعی هستند و $L(A) = L(B)$: ⟨A,B⟩} تصمیم پذیر است.

با استفاده از زبان A و B زبان C را می‌سازیم به طوریکه:

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

اگر $L(C) = \emptyset$ آنگاه $L(A) = L(B)$

مسئله را به {A یک ماشین متناهی قطعی است و $L(A) = \emptyset$: ⟨A⟩} کاهش می‌دهیم. حال برای آن یک ماشین تصمیم گیرنده T وجود دارد. ماشین f را می‌سازیم طوریکه با دریافت دو ماشین A و B : (۱ ماشین dfa c را به طوریکه $L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$ بسازد. حال با T تصمیم میگیریم که زبان c تهی است یا خیر. اگر T ورودی c را بپذیرد ماشین F ورودی A,B قبول می‌کند و اگر رد کند F نیز ورودی را رد خواهد کرد.

B. {M یک ماشین تورینگ است که اگر w را بپذیرد، w^R را نیز می‌پذیرد.|⟨M⟩} تصمیم‌ناپذیر است.

میدانیم به ازای ماشین تورینگ M و رشته w زبان تصمیم‌پذیر زیر را داریم:

A_{TM} = {M یک ماشین تورینگ است که رشته w را می‌پذیرد: ⟨M,W⟩}

فرض می‌کنیم ماشین تورینگ y زبان ما را می‌پذیرد. حال با استفاده از آن میخواهیم ماشین تورینگ S را میسازیم که A_{TM} را تصمیم میگیرد.

ابتدا ماشین را اینگونه تعریف می‌کنیم که اگر به شکل aa^*bb^* باشد که مورد قبول است. در غیر این صورت به ازای تمام جملات موجود این بررسی توسط ماشین صورت میگیرد اگر M قبول کرد پس accept می‌شود و در غیر این صورت reject می‌شود.

سپس Y را رو آن اجرا می‌کنیم. چون میدانیم s یک ماشین تصمیم‌پذیر است، پس y نیز تصمیم پذیر خواهد بود و چون A_{TM} تصمیم ناپذیر است به تناقض میرسیم و مسئله ما نیز تصمیم‌ناپذیر خواهد بود.

C. {M یک ماشین تورینگ است که ورودی‌ای داریم که روی مراحل کمتر از |⟨M⟩| متوقف می‌شود.|⟨M⟩} تصمیم‌پذیر است.

ماشین تورینگ S را میسازیم که زبان ما را تصمیم میگیرد. به ازای هر ورودی، s را اجرا میکنیم روی جملاتی که طولشان بین ۰ و |⟨M⟩| است. حال داریم:

اگر حداقل یکی از ورودی‌ها accept شد، به حالت accept می‌رویم و در غیر این صورت، reject می‌شود. دقت شود که نیازی نیست روی ورودی های بیشتر از اندازه m بررسی انجام دهیم. بنابراین استیت های ما متنهای خواهد بود.

D. {M یک ماشین تورینگ است که حداقل دو جمله با طول متفاوت می‌پذیرد.|⟨M⟩} تصمیم‌ناپذیر است.

مسئله را به زبان زیر کاهش می‌دهیم:

{M یک ماشین تورینگ است که رشته w را می‌پذیرد: ⟨M,W⟩} = A_{TM}

قرار است روی تمام جملات این ماشین بررسی صورت پذیرد، اگر متوقت نشود یعنی دو طول متفاوت نیابد و halt نشود نمیتوانیم تصمیم بگیریم پس تصمیم‌پذیر نیست.

سوال دوم

فرض کنید که L_1 و L_2 دو زبان تصمیم ناپذیر باشند. پاسخ خود را به هر یک از سوالات زیر بیان و ثابت کنید.

- آیا ممکن است که $L_1 - L_2$ منظم باشد؟

بله - اگر دو زبان با هم برابر باشند ($L_2=L_1$)، پس تفاضلشان برابر تهی و در نتیجه منظم است.

- آیا ممکن است که $L_1 \cup L_2$ تصمیم پذیر باشد؟

بله – اگر یکی از زبان‌ها نقیض دیگری باشد، آنگاه تصمیم پذیر خواهد بود.

سوال سوم

۱. سه مسئله تصمیم گیری PROBLEM1 ، PROBLEM2 و PROBLEM3 را در نظر بگیرید. که PROBLEM1 قابل تصمیم‌پذیر و PROBLEM2 تصمیم‌ناپذیر است. تصمیم‌پذیری PROBLEM3 در هر کدام از شرایط زیر چگونه است؟ توضیح کنید.

a. اگر PROBLEM2 قابل کاهش به PROBLEM3 باشد.

b. اگر PROBLEM3 قابل کاهش به مکمل PROBLEM2 باشد.

c. اگر PROBLEM3 قابل کاهش به PROBLEM2 باشد.

d. اگر PROBLEM1 قابل کاهش به PROBLEM3 باشد.

اگر $A \leq_p B$ و B قابل تصمیم گیری باشد، A نیز قابل تصمیم گیری است.

این به این دلیل است که اگر الگوریتم خاصی برای حل B وجود داشته باشد و بتوانیم A را نیز به B کاهش دهیم، می توانیم جواب A را نیز داشته باشیم. از این رو A قابل تصمیم گیری است.

با این حال عکس آن درست نیست، یعنی گزاره "اگر $A \leq_p B$ و A قابل تصمیم گیری باشد در این صورت B نیز قابل تصمیم گیری است" زیرا A می تواند الگوریتمی برای حل صحیح خود داشته باشد اما ممکن است B اینگونه نباشد.

اگر $A \leq_p B$ و A غیر قابل تصمیم گیری باشد، B نیز غیر قابل تصمیم گیری است.

این به این دلیل است که اگر A غیرقابل تصمیم‌گیری باشد، حتی زمانی که بتوان آن را به B کاهش داد که B را منعکس می‌کند، نمی‌تواند الگوریتمی ارائه کند که با آن بتوانیم B و بنابراین A را حل کنیم.

بنابراین مسئله تصمیم گیری B نیز غیر قابل تصمیم گیری است.

با این حال عکس این مورد در اینجا نیز صادق نیست، یعنی اگر $A \leq_p B$ و B غیرقابل تصمیم گیری باشند، A نیز غیرقابل تصمیم گیری است زیرا ممکن است الگوریتمی برای A وجود داشته باشد که بتواند راه حلی برای A ارائه دهد.

به کمک توضیحات بالا فقط در مورد a با قطعیت میتوان نتیجه گرفت که p3 تصمیم ناپذیر است و b,c,d هیچ نتیجه ای برای p3 به ما نمیدهند.

۲. در مورد مسائل تصمیم‌گیری زیر، وضعیت تصمیم‌پذیری را بیان کنید.

a. آیا یک ماشین حالت یک رشته معین را می پذیرد؟

یک ماشین حالت در هر حالت به پایان می‌رسد پس میتوان گفت تصمیم‌پذیر است.

b. آیا یک CFG تعداد بی نهایت رشته تولید می کند؟

تصمیم پذیر است. چون ممکن است در گرامر آن قانونی وجود داشته باشد بدین صورت که متغیر خودش را نتیجه بدهد: $X \rightarrow \alpha X \beta$

سوال چهارم

آیا مبهم بودن یا نبودن یک گرامر CFG، تصمیم‌پذیر است؟ توضیح دهید.

خیر – از آنجا که بررسی گرامر cfg داری ابهام ممکن است به اتمام نرسد و بی‌نهایت مشتق برای یک جمله باید بررسی شود، این مورد امکان پذیر نیست.

سوال پنجم

از تئوری رایس استفاده کنید و تصمیم ناپذیر بودن هر یک از زبان های زیر را ثابت کنید.

A. $INFINITE_{TM} = \{M | M\ is\ a\ TM\ and\ L(M)\ is\ an\ infinite\ language\}$

$INFINITE_{TM}$ یک زبان توصیفات TM است. دو شرط قضیه رایس را برآورده می کند. اول، این است که بی اهمیت است زیرا برخی از TM ها زبان های بی نهایت دارند و برخی دیگر ندارند. دوم اینکه فقط به زبان بستگی دارد. اگر دو ماشین تورینگ زبان یکسانی را تشخیص دهند، در این صورت یا هر دو باید توضیحاتی به صورت بی‌نهایت داشته باشند یا هیچکدام این‌ها را ندارند. در نتیجه، قضیه رایس نشان می‌دهد که $INFINITE_{TM}$ غیرقابل تصمیم‌گیری است.

B. $ALL_{TM} = \{M | M\ is\ a\ TM\ and\ L(M) = \Sigma^*\}$

ALL_{TM} زبان توصیف TM است. دو شرط قضیه رایس را برآورده می کند. اولاً، بی‌اهمیت است زیرا برخی از TM ها همه رشته های ممکن الفبا را می پذیرند و برخی دیگر نمی پذیرند. دوم اینکه فقط به زبان بستگی دارد. اگر دو TM زبان یکسانی را تشخیص می‌دهند، یا هر دو باید توضیحاتی به ALL داشته باشند یا هیچکدام این‌ها را ندارند. بنابراین، قضیه رایس نشان می‌دهد که ALLTM غیرقابل تصمیم‌گیری است.