

بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

از دل نه‌ای گسسته از نو کجا گیریم

گیرندم این بصر را و بر بسکلم نظر را

تکلیف چهارم

دکتر منصوره میرزایی



دانشگاه صنعتی اصفهان

1. با استفاده از استقرا نشان دهید رابطه زیر برای تمام اعداد صحیح بزرگتر از 1 برقرار است

$$\frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n+2)} \geq \frac{1}{2n+2}$$

2. می‌خواهیم کلاسی با n دانشجو را به گروه‌های 4 یا 5 نفره تقسیم کنیم. با استفاده از استقرای قوی نشان دهید برای هر $n \geq 12$ این کار ممکن است.

3. ثابت کنید اگر P_1, P_2, \dots, P_n عدد اول متمایز باشند، دنباله‌ای به طول 2^{n-1} از P_i ها موجود است که در آن حاصل ضرب هیچ تعداد متوالی از جملات دنباله مربع کامل نشود.

4. فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی با از اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم S مجموعه‌ای ویژه است اگر مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از S برابر نباشند. برای هر عدد طبیعی $n \geq 4$ ثابت کنید زیر مجموعه‌ای ویژه با n عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}-1\}$ وجود دارد.

5. $2n$ نفر در یک جمع حضور دارند. ثابت کنید این افراد می‌توانند با یکدیگر دست دهند طوری که هر دو نفر حداکثر یک بار با هم دست دهند و برای هر $i, 1 \leq i \leq n$ ، دو نفر وجود داشته باشند که هر یک دقیقاً با i نفر دیگر دست داده باشند.

6. ثابت کنید مجموع بزرگترین مقسوم‌علیه فرد اعداد $2n, n+2, \dots, n+1$ ، برابر n^2 است.

7. هر خانه از یک جدول $2n \times 2n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است طوری که در هر مربع 2×2 هیچ دو خانه‌ای هم رنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول نیز هم رنگ نیستند.

8. فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام 1, 2, 3 باشد که تعداد زوجی رقم 1 دارند. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید و سپس این رابطه را حل کنید.

9. رابطه صریحی برای روابط بازگشتی زیر بدست آورید:

$$a_1=18, a_2=24, a_n=a_{n-1}+6a_{n-2} \quad a.$$

$$b_1=4, b_2=-20, b_n=2b_{n-1}-b_{n-2}-12n \quad b.$$

$$c_0=4, c_1=2, c_n=c_{n-1}+3c_{n-2} \quad c.$$

10. تعداد اعداد n رقمی که با ارقام 1 تا 5 که اختلاف هر دو رقم مجاور در این اعداد 1 باشد را a_n می‌نامیم، یک رابطه بازگشتی برای a_n بیابید.