



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تکلیف دوم درس طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال تحصیلی: بهار ۱۴۰۲

مدرس: دکتر محمدرضا حیدرپور

دستیاران آموزشی: مصطفی دریس‌پور - مجید فرهادی - محمّدیاسین

کرباسیان - محمدرضا مزروعی - امیر منصوریان - امیرارسلان یآوری

۱ سکه تقلبی

تعداد زیادی سکه که تعداد آن‌ها توانی از عدد 3 است و یک ترازوی دوکفه‌ای در اختیار داریم که می‌توان هر تعداد سکه را در هر کفه آن قرار داد. در میان این سکه‌ها دقیقاً یک سکه با وزنی متفاوت (کم‌تر یا بیش‌تر) وجود دارد. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن این سکه تقلبی با کم‌ترین تعداد مقایسه ارائه دهید. (۱۰ نمره)

۲ یگانه

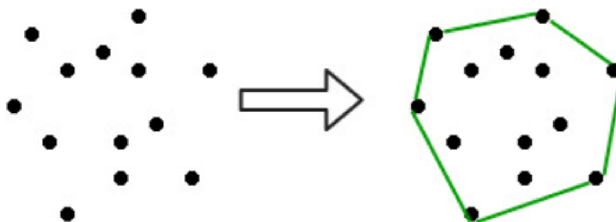
آرایه‌ای به طول فرد که همه عناصر آن به جز یکی، دو بار تکرار شده‌اند مفروض است. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن این عنصر یگانه ارائه دهید. (۱۰ نمره)

$$A = [1, 5, 4, 8, 1, 8, 2, 2, 5]$$

$$Unique = 4$$

۳ تحدب

آرایه‌ای از مختصات تعدادی نقطه در صفحه مفروض است. الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن زیرمجموعه‌ای از این نقاط که یک چندضلعی محدب را تشکیل داده و شامل تمام نقاط دیگر است ارائه دهید. (۱۰ نمره)



۴ میانه

الگوریتمی با رویکرد تقسیم و غلبه برای یافتن میانه ادغام دو آرایه مرتب ارائه دهید. (۱۰ نمره)

$$A = [1, 12, 15, 26, 38]$$

$$B = [2, 13, 17, 30]$$

$$Merge(A, B) = [1, 2, 12, 13, 15, 17, 26, 30, 38]$$

$$Median = 15$$

۵ روابط بازگشتی

رفتار مجانبی توابع زیر را بیابید. (۲۰ نمره)

- $T(1) = 1, T(2) = 2, T(n) = 8T(n-1) - 15T(n-2)$
- $T(1) = 1, T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n^2$
- $T(2) = 1, T(n) = 4T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + 1$
- $T(1) = 1, T(2^n) = 7T(2^{n-1}) + 2^n$

۶ کوئرا

به یکی از سوالات کوئرا پاسخ دهید. (۴۰ نمره)

۷ بهینه‌سازی

آرایه‌ای شامل n عدد صحیح و i و j به عنوان اندیس دو عنصر متفاوت از این آرایه مفروض است. تابع $f(i, j)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(i, j) = g(i, j)^2 + (i - j)^2$$

که در آن تابع $g(i, j)$ از برنامه زیر به دست می‌آید.

```
int g(int i, int j)
{
    int sum = 0;
    int min = (i < j) ? i : j;
    int max = (i > j) ? i : j;
    for (int k = min + 1; k <= max; k++)
    {
        sum += a[k];
    }
    return sum;
}
```

الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ برای محاسبه کمینه مقدار $f(i, j)$ ارائه دهید. (راهنمایی: این مسئله چه ارتباطی با مسئله Closest Pair دارد؟) (۲۰ نمره مازاد)