Correction

On doit faire un raisonnement par analyse–synthèse car on ne sait pas si l'équation proposée admet des solutions développables en série entière.

Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Supposons que S est solution de l'équation différentielle.
Par propriété des séries entières pour tout $x \in \,]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$.
Donc (après calculs) $\forall x \in]-R, R[$, $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1}\right) x^n$.
Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.
Ce qui revient à (à détailler - le corrigé proposé par les concours des INP est un peu succint à mon goût ;-)) : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.

Synthèse : Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n a_1$ et déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. En revenant à la définition, on trouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ est égal à 1.

On peut donc affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.