Exercice 4 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{3/2}\dfrac{x}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par critère de Riemann, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

   Ainsi $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \dfrac{n^2+x^2-2x^2}{(n^2+x^2)^2} = \dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$.

   On a les variations suivantes :

x	0		n		$+\infty$
Signe de $u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de u_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2n}$	$\searrow$	0

   Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |u_n(x)| = \dfrac{1}{2n}$.

   Comme la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ est une série de Riemann divergente, $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $a > 0$, on a

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,a]$, $|u_n(x)| = \dfrac{x}{n^2+x^2} \leq \dfrac{a}{n^2}$.

   Puisque $\sum \dfrac{a}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), on en déduit que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$.