Correction

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \left|\dfrac{x^n}{(2n)!}\right|$.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On en déduit que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ converge (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la règle de d'Alembert et donc $R = +\infty$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(t) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

   Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

   (b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
   S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cela prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (si on ne remarque pas que f est la somme d'une série entière la question est autrement plus compliquée !)