

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos \sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .