Correction

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
   Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :$R = \sup\{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

2. (a) Notons R le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ et soit $z \in \mathbb{C}$.
   Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left|\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}\right|$.
   Pour $z = 0$, $\sum u_n$ converge.
   Pour $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|z|^2}{4}$.
   D'après la règle de d'Alembert,
   Pour $|z| < 2$, la série numérique $\sum u_n$ converge absolument.
   Pour $|z| > 2$, la série numérique diverge grossièrement.
   On en déduit que $\boxed{R = 2}$

   (b) Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^{(-1)^n}$.
   On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1 (revenir par exemple à la définition). Donc $R \geqslant 1$. (*)
   De même, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{1}{n}| \leqslant |a_n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n} z^n$ vaut 1 (revenir par exemple à la définition). Donc $R \leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $\boxed{R = 1}$

   (c) Notons R le rayon de convergence de $\sum \cos n z^n$et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos n$.
   On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |1|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1. Donc $R \geqslant 1$. (*)
   Pour $z = 1$, la série $\sum \cos n z^n = \sum \cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc $R \leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $\boxed{R = 1}$