Correction

1. La série numérique $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 1$.
   Donc $R \leqslant 1$. (*)
   De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   Donc $1 \in \{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
   Donc $R \geqslant 1$. (**)

   D'après (*) et (**), $R = 1$.
2. Se montre en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$.
3. Notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = b_n$.

   Or $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann à termes positifs divergente

   donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ diverge par théorème de comparaison.

   Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge

   . (***)

   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = a_n \leqslant \sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$ car $\forall\, x \in [0, +\infty[$,

   $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. (****)
   D'après (***) et (****), on peut appliquer 2. et on en déduit que $R = 1$.