Correction

1. On peut déjà remarquer que $\mathcal{D}_f =]-1,2[$ donc si f est développable en série entière le rayon de convergence R de son développement en série entière vérifiera $R \leq 1$ (en effet f coïncidera avec son développement en série entière sur $]-R,R[$ qui doit être inclus dans $\mathcal{D}_f$.
   Soit $x \in]-1,2[$, $f(x) = \ln(1+x) - \ln(2-x) = \ln(1+x) - \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.
   Or :
   - $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.
   - $x \mapsto \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ est développable en série entière sur $]-2,2[$ (on doit avoir $\frac{x}{2} \in]-1,1[$) et $\forall x \in]-2,2[$ $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}$.

   Donc, par addition de fonctions développables en séries entières, f est développable en série entière sur $]-1,1[$ (le plus petit des deux domaines de convergences des développements en série entière) et :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n}\right)\frac{x^n}{n}}$$

   Au passage le rayon de convergence du développement en série entière de f est $R = \min(1,2) = 1$ car $1 \neq 2$ (propriété du rayon de convergence de la somme de deux séries entières).

2. Puisque $x \mapsto \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos^4(x)$ l'est également sur $\mathbb{R}$ par produit.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$.
   En utilisant le développement en série entière de cos on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^4(x) &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{3}{8}\\ &= \boxed{1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}+2^{2n+2}}{8(2n)!}x^{2n}}\end{aligned}$$