Correction

1. Soit $r \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^n r^n = (er)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad er < 1 \text{ ie } r < 1/e \\ 1 & \text{si} \quad er = 1 \text{ ie } r = 1/e \\ +\infty & \text{si} \quad er > 1 \text{ ie } r > 1/e \end{cases}$

   Donc $\{r \geq 0 \,/\, (e^n r^n) \text{ est bornée}\} = [0, \frac{1}{e}]$. D'où $\boxed{R = \dfrac{1}{e}}$

2. Soit $r \geq 0$, $\dfrac{r^n}{1+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{r^n}{\sqrt{n}}$. Donc :

   - Si $r > 1$, $\dfrac{r^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ par croissance comparée et donc $\dfrac{r^n}{1+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
   - Si $r \leq 1$, $0 \leq \dfrac{r^n}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc par théorème des gendarmes $\dfrac{r^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\dfrac{r^n}{1+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   Ainsi, $\left\{r \geq 0 \,/\, \left(\dfrac{r^n}{1+\sqrt{n}}\right) \text{ est bornée}\right\} = [0,1]$ et donc $\boxed{R = 1}$

3. Soit $r \geq 0$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n3^n} r^n\right| = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n$. Donc :

   - Si $\dfrac{r}{3} > 1$ ie $r > 3$, par croissance comparée : $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Si $\dfrac{r}{3} \leq 1$ ie $r \leq 3$, $0 \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Ainsi, $\left\{r \geq 0 \,/\, \left(\dfrac{(-1)^n}{n3^n} r^n\right) \text{ est bornée}\right\} = [0,3]$ et donc $\boxed{R = 3}$

4. Soit $r \geq 0$, $\dfrac{r^n}{n^{3n}} = \left(\dfrac{r}{n^3}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{r}{n^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Donc $\left\{r \geq 0 \,/\, \left(\dfrac{r^n}{n^{3n}}\right) \text{ est bornée}\right\} = [0,+\infty[$ et donc $\boxed{R = +\infty}$