Correction

1. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum(-1)^n 2^n \sqrt{n} z^{2n}$. On va utiliser le critère de D'Alembert. Soit $z \neq 0$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = |(-1)^n 2^n \sqrt{n} z^{2n}| = 2^n \sqrt{n} |z|^{2n}$. On a $u_n > 0$ et donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{n+1}|z|^2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2|z|^2.$$
Si $2|z|^2 < 1$ (ie si $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$) alors $\sum u_n$ converge d'après le critère de D'Alembert, donc $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Si $2|z|^2 > 1$ (ie si $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$) alors $\sum u_n$ diverge d'après le critère de D'Alembert, donc $R \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Finalement on a donc $\boxed{R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $u_n = |(n!)^2 z^n| = (n!)^2 |z|^n$. On a $u_n > 0$ et donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
(car $z \neq 0$). D'après le critère de D'Alembert la série $\sum u_n$ diverge. Ainsi la série entière $\sum (n!)^2 z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$ et donc $R \leq |z|$ pour tout $z \neq 0$, et donc $\boxed{\text{R=0}}$.
3. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. La suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car convergente) donc par définition du rayon de convergence on a $R \geq 1$. De plus la série $\sum a_n 1^n$ diverge (grossièrement car $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$). Donc $R \leq 1$. Finalement $\boxed{\text{R=1}}$.
4. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq |a_n| \leq 5$, donc R est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum 5z^n$ et inférieur ou égal au rayon de convergence de $\sum z^n$. Donc R est égal au rayon de convergence de $\sum z^n$, donc $\boxed{\text{R=1}}$.