Séries numériques (séance n°5)

Séance à distance, TD2

Ce qui est abordé pendant la séance

- Nature de séries à termes positifs (les outils à votre disposition : séries géométriques, télescopiques, divergence grossière, critère de majoration/minoration, critère sur les équivalents, critères de Riemann et règle de d'Alembert).
- Nature de séries changeant de signe (les outils à votre disposition : convergence absolue, théorème spécial des séries alternées et développement asymptotique à deux termes).

1 Correction de la question 2 de l'exercice 2

Correction

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\ln w_{n+1} - \ln w_n &= \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{b-a}u_{n+1}}{n^{b-a}u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{b-a}(n+a)}{n^{b-a}(n+b)}\right)\\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\frac{n+a}{n+b}\right) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+a) - \ln(n+b)\\
&= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-a}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc $\boxed{\sum \ln w_{n+1} - \ln w_n \text{ converge (absolument)}}$

(b) $\sum \ln w_{n+1} - \ln w_n$ est une série télescopique qui est donc de même nature que la suite $(\ln(w_n))$. On en déduit donc, d'après la question précédente, que la suite $(\ln(w_n))$ converge. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell \underset{not}{=} L$. Puisque $L > 0$, $L \neq 0$ et donc $w_n = n^{b-a}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L$.

Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{b-a}}}$

(c) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{b-a}}$ et $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ est une série **à termes positifs** donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ et $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ sont de même nature. Or, $\sum \frac{1}{n^{b-a}}$ est une série de Riemann, donc $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ converge si et seulement si $b-a > 1$.

Finalement, $\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a > 1}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} ku_k - \sum_{k=0}^{n} ku_{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k = 0 \times u_0 - nu_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))u_k = -nu_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k \quad (\star)
\end{aligned}$$

Or, $nu_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{nL}{(n+1)^{b-a-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n^{b-a-1}}$ et puisque $b-a-1>0$ (comme la série $\sum u_n$ converge, d'après la question 1.c $b-a>1$) $\dfrac{L}{n^{b-a-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit donc que $nu_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, $\sum_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque $n\to+\infty$ puisque $\sum u_n$ converge. Aini, d'après $(\star)$, $\sum_{k=0}^{n} v_k$ admet une limite finie lorsque $n\to+\infty$. Autrement dit $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

(b) En faisant tendre $n\to+\infty$ dans $(\star)$ et d'après ce qui précède : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \underbrace{v_0}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ d'où le résultat.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= n(u_n-u_{n+1}) = nu_n - n\frac{n+a}{n+b}u_n = \frac{n(n+b)-n(n+a)}{n+b}u_n = b\frac{n}{n+b}u_n - a\frac{n}{n+b}u_n \\ &= b\frac{n+a}{n+b}u_n - \frac{ab}{n+b}u_n - a\frac{n}{n+b}u_n = bu_{n+1} - a\frac{n+b}{n+b}u_n = bu_{n+1}-au_n \end{aligned}$$

(d) D'après 2.b et 2.c et puisque les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \underset{2.b}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \underset{2.c}{=} b\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1} - a\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = b\sum_{n=2}^{+\infty} u_n - a\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_0 &= b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_0 - u_1\right) - a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_0\right) \\ &= (a-b)u_0 - bu_1 + (b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(a-b+1)u_0 - bu_1}{1-b+a} \underset{bu_1=au_0}{=} \frac{b-1}{b-a-1}u_0}$$

2 On continue les exercices du TD

1. **Faire l'exercice 3** (environ 60 minutes).
   - ◇ Jouez le jeu de chercher l'exercice sans aller regarder la correction.
   - ◇ Vous trouverez ici des indications si vous êtes bloqués. [Indications]
   - ◇ Vous trouverez ici les réponses pour vérifier que vous avez le bon résultat. [Réponses]
   - ◇ Vérifiez votre travail à l'aide de la correction. [Correction]
2. **Faire l'exercice 4** (environ 20 minutes).
   - ◇ Jouez le jeu de chercher l'exercice sans aller regarder la correction.
   - ◇ Vous trouverez ici des indications si vous êtes bloqués. [Indications]
   - ◇ Vérifiez votre travail à l'aide de la correction. [Correction]
3. **Faire l'exercice 5** (environ 30 minutes).
   - ◇ Jouez le jeu de chercher l'exercice sans aller regarder la correction.
   - ◇ Vous trouverez ici des indications si vous êtes bloqués. [Indications]
   - ◇ Vérifiez votre travail à l'aide de la correction. [Correction]

3 Pour la prochaine fois

Finir l'exercice 5 (c'est normal si vous n'avez pas eu le temps de le faire pendant la séance).

Indications pour l'exercice de TD n°3 [Retour au travail à faire]

1. Effectuer un développement asymptotique à un terme avec des $O(\ldots)$. Les ingrédients : on sépare le logarithme en deux, on factorise par les termes prépondérants dans chaque logarithme puis on enchaîne avec un développement asymptotique en utilisant des $O(\ldots)$.
2. C'est du type un truc qui dépend de n à la puissance un truc qui dépend de n. On passe donc en notation exponentielle et on fait un DL dans le but d'obtenir un équivalent (bien pousser le DL suffisamment loin pour avoir dans l'exponentielle un $o(1)$ ce qui permettra d'obtenir un équivalent de l'exponentielle).
   Au passage un petit truc bien utile : $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Le théorème spécial des séries alternées fonctionne tout seul.
4. Effectuer un développement asymptotique à un terme avec des $O(\ldots)$. Sinon on peut aussi utiliser le théorème spécial des séries alternées en justifiant correctement les choses (mais du coup en terme de rédaction c'est moins efficace que le développement asymptotique).
5. Effectuer un développement asymptotique à deux termes (regarder les exemples traités en cours).

Réponses aux questions de l'exercice de TD n°3 [Retour au travail à faire]

1. $\ln \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Il ne reste plus qu'à conclure proprement.
2. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)}$. Il ne reste plus qu'à passer à l'équivalent proprement, puis à reconnaitre un terme géométrique.
3. RAS.
4. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
5. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

Correction de l'exercice de TD n°3 [Retour au travail à faire]

1. Soit $n \geq 1$,

$$\ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge **absolument** on en déduit que $\boxed{\sum \ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \text{ converge (absolument)}}$

2. Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} &= e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)} \\ &= e^{-n+\frac{1}{2}} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(e^{-1}\right)^n e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Or, $\left(e^{-1}\right)^n e^{-\frac{1}{2}}$ est le terme général d'une série à termes **positifs** convergente, et $\sum \left(e^{-1}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $e^{-1} \in]-1,1[$.

Donc, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \text{ converge}}$

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est une suite décroissante et de limite nulle. Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ converge}}$

4. Soit $n \geq 0$,

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. De plus $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge (absolument) car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right) \text{ converge}}$

5. Soit $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

- ◇ $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ étant décroissante et de limite nulle, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
- ◇ $-\frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{3/2}}$. Or, $\sum -\frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série à termes négatifs convergente (car $3/2 > 1$) donc, par théorème de comparaison, $\sum -\frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge.

On en déduit que $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} \text{ converge}}$

Indications pour la question 1 de l'exercice de TD n°4 [Retour au travail à faire]

Reconnaître un terme géométrique et un terme télescopique. Conclure grâce aux théorèmes du cours qui permettent de déterminer la nature d'une série géométrique/télescopique et de calculer leur somme.

Correction de la question 1 de l'exercice de TD n°4 [Retour au travail à faire]

$\sum \frac{e^n}{4^n}$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{e}{4} \in]-1,1[$ et $\sum \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ est une série télescopique qui est donc de même nature que la suite $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$. Or, $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc $\sum \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ converge.

Ainsi, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

On sait, d'après le cours que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n} = \frac{\frac{e}{4}}{1-\frac{e}{4}}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\sqrt{2}$. Donc, par linéarité de la somme de séries convergentes :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n} + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{\frac{e}{4}}{1-\frac{e}{4}} + 1 - \sqrt{2}}$$

Indications pour la question 1 de l'exercice de TD n°4 [Retour au travail à faire]

1. (a) Pour minorer u_n, majorer pour $n \geq 2$, $\ln(n)^\alpha$ (on rappelle qu'on a supposé $\alpha \leq 0$, donc pour majorer $\ln(n)^\alpha$ il faut majorer ou minorer n ?)

   (b) Utiliser le théorème de comparaison série-intégrale (on vérifiera toutes les hypothèses du théorème).

2. L'expression du terme général de la série est-il sympa ? Non ? Alors dans ce cas on calcule un équivalent et ensuite on regardera ce qui a été démontré à la question précédente.

Correction de la question 1 de l'exercice de TD n°4 [Retour au travail à faire]

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 2$, $\ln n \geqslant \ln 2$ donc $(\ln n)^\alpha \leqslant (\ln 2)^\alpha$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^\alpha}\dfrac{1}{n} \geq 0$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.
   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
   Puisque $\displaystyle\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln(X)} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.
   Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.
   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \underbrace{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)}$. Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$.
   Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.
   Or, $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2} \geq 0$ et d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.
   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à **termes positifs**, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.