Séries numériques (séance n°4)

Séance à distance (pour les absents), TD1

Ce qui est abordé pendant la séance

- Nature de séries à termes positifs (les outils à votre disposition : séries géométriques, télescopiques, divergence grossière, critère de majoration/minoration, critère sur les équivalents, critères de Riemann et règle de d'Alembert).

1 On démarre les exercices du TD

1. **Faire l'exercice 1** (environ 50 minutes).
   - Jouez le jeu de chercher l'exercice sans aller regarder la correction.
   - Vous trouverez ici des indications si vous êtes bloqués. [Indications]
   - Vous trouverez ici les réponses pour vérifier que vous avez le bon résultat. [Réponses]
   - Vérifiez votre travail à l'aide de la correction. [Correction]
2. **Faire la question 1 de l'exercice 2** (environ 40 minutes).
   - Jouez le jeu de chercher l'exercice sans aller regarder la correction.
   - Vous trouverez ici des indications si vous êtes bloqués. [Indications]
   - Vérifiez votre travail à l'aide de la correction. [Correction]

2 Pour la prochaine fois

Finir l'exercice 2.

Indications pour l'exercice de TD n°1 [Retour au travail à faire]

Réponses aux questions de l'exercice de TD n°1 [Retour au travail à faire]

1. La série diverge.
2. La série diverge.
3. La série converge.
4. La série diverge.
5. La série converge.
6. La série converge.
7. La série converge.

Correction de l'exercice de TD n°1 [Retour au travail à faire]

Indications pour la question 1 de l'exercice de TD n°2 [Retour au travail à faire]

1. (a) Ici il ne faut pas utiliser le fait que la série est télescopique car on ne connait pas la nature de la suite $(\ln(w_n))$. On va justement se servir dans la question qui suit du fait que la série est télescopique pour en déduire la nature de la suite $(\ln(w_n))$.
   Ici, on va donc exprimer $\ln w_{n+1} - \ln w_n$ en fonction de n à l'aide de la relation de récurrence fournie, puis on effectuera un développement asymptotique de l'expression à un terme pour avoir un équivalent (ou alors on utilisera les grands O pour éviter d'avoir à pousser le DL trop loin, plus précisément montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).
   Après avoir réinjecté la relation de récurrence vérifiée par u_n, utiliser les propriétés du logarithme puis factoriser à l'intérieur de chaque logarithme par le terme prépondérant. Enchainer avec un DL.

   (b) Déduire la nature de la série de terme général $\ln w_{n+1} - \ln w_n$ la nature de la suite $(\ln(w_n))$ et enchaîner pour obtenir le résultat (on rappelle qu'on a le droit de composer des limites mais pas des équivalents).

   (c) Critères sur les équivalents pour les séries à termes positifs + séries de Riemann.

Correction de la question 1 de l'exercice de TD n°2 [Retour au travail à faire]

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\ln w_{n+1} - \ln w_n &= \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{b-a}u_{n+1}}{n^{b-a}u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{b-a}(n+a)}{n^{b-a}(n+b)}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\frac{n+a}{n+b}\right) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+a) - \ln(n+b) \\
&= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-a}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc $\boxed{\sum \ln w_{n+1} - \ln w_n \text{ converge (absolument)}}$

(b) $\sum \ln w_{n+1} - \ln w_n$ est une série télescopique qui est donc de même nature que la suite $(\ln(w_n))$. On en déduit donc, d'après la question précédente, que la suite $(\ln(w_n))$ converge. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell \underset{not}{=} L$. Puisque $L > 0$, $L \neq 0$ et donc $w_n = n^{b-a}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L$.

Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{b-a}}}$

(c) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{b-a}}$ et $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ est une série **à termes positifs** donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ et $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ sont de même nature. Or, $\sum \frac{1}{n^{b-a}}$ est une série de Riemann, donc $\sum \frac{L}{n^{b-a}}$ converge si et seulement si $b-a > 1$.

Finalement, $\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1}$