תרגיל בית מספר 4 - מרוכבות

שם	רנן בזינין
ת"ז	206846164
מספר שאלות וסעיפים שהיו להגשה	מפרק 3, שאלות: 2ד ו 3ה 6א 7 מפרק 4, שאלות: 1ב 2א 3ב 5 א ג ה 4ב 9 10 13א
מספרי שאלות וסעיפים שלא הצלחתי לפתור	

ציון תרגיל	
הערות הבודק	

2) עבור $z = x + iy$ מספר מרוכב כלשהו הנמצא בתחום של כל אחת מהפונקציות הבאות f, הציגו את f באופן $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ כאשר u, v הם החלק הממשי והמדומה בהתאמה של f.

א. $f_1(z) = \frac{2iz-3}{z+3i}$ ב. $f_2(z) = iz^3 - 2z^2$ ג. $f_3(z) = e^{z^2-2z}$

ד. $f_4(z) = \frac{1}{z} \cdot sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ה. $f_5(z) = \frac{iz}{z^2+(\bar{z})^2}$ ו. $f_6(z) = \bar{z} \cdot e^{\frac{z+i}{z-i}}$

2ד ו

שאלה 2 ד'

$$f_4(z) = \frac{1}{z} \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

אז נציב: $z = x + yi$

$$f_4(x+yi) = \frac{1}{x+yi} \cdot \sin\left(\frac{1}{x+yi}\right)$$

ראשית נתבונן על הביטוי:

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{1}{(x+yi)} \cdot \frac{(x-yi)}{(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-yi}{x^2+y^2}$$

נסתכל ה ( )sin :

$$\sin\left(\frac{1}{x+yi}\right) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

ונשתמש בביטוי שהוכחנו בכיתה (במפורש יוסי אמר תשתמשו בזה) :

$$\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh(y) + i\sinh(y) \cdot \cos x$$

ולכן אצלנו

$$x = \frac{x}{x^2+y^2}, y = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-yi}{x^2+y^2}\right) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + i\sinh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

כעת יש הפרדה ברורה בין המדומה לממשי. אבל נותר להיפטר באגף ימין בפונקציה: $\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$. אז נאחד:

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + i\sinh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right)$$

הביטוי גדול ואימתני אז אציב פרמטר

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(X+iY)(\ \sin(X)\cdot\cosh(Y)+i\sin h(Y)\cdot\cos(X)\ \ )$$

כעת קל יותר לבדוק

$$\boldsymbol{X}(\mathbf{sin}(\boldsymbol{X})\cdot\mathbf{cosh}(\boldsymbol{Y}))+X(i\sin h(Y)\cdot\cos(X)\ \ )+iY(\sin(X)\cdot\cosh(Y))+\boldsymbol{iY}(\ \ \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y})\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{X})\ \ )$$

מדגיש את החלק הממשי ב$Bold$

$$=\boldsymbol{X}(\mathbf{sin}(\boldsymbol{X})\cdot\mathbf{cosh}(\boldsymbol{Y}))-\boldsymbol{Y}(\ \ \mathbf{sin}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y})\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{X})\ \ )+i\big(Y(\sin(X)\cdot\cosh(Y))+X(\sin h(Y)\cdot\cos(X)\ \ )\big)$$

וזהו.

יש חלק ממשי ויש חלק מדומה...

$$u(x,y)=X(\sin(X)\cdot\cosh(Y))-Y(\ \ \sin h(Y)\cdot\cos(X)\ \ )$$

$$\mathrm{v(x,y)}=Y(\sin(X)\cdot\cosh(Y))+X(\sin h(Y)\cdot\cos(X)\ \ )$$

עכשיו לצערי אצטרך להחזיר את X,Y הגדול:

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\left(\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right)-\frac{-y}{x^2+y^2}\left(\ \ \sin h\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\ \right)$$

$$\mathrm{v(x,y)}=\frac{-y}{x^2+y^2}\left(\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right)+\frac{x}{x^2+y^2}\left(\sin h\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\ \right)$$

כנדרש.!

ו. $f_6(z) = \bar{z} \cdot e^{\frac{z+i}{z-i}}$

$$f_6(z) = \bar{z} \cdot e^{\frac{z+i}{z-i}}$$

אז נציב: $z = x + yi$

$$f_6(z) = (x - yi) \cdot e^{\frac{(x+yi)+i}{x+yi-i}} = (x - yi) \cdot e^{\frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)}}$$

נתמקד בחזקה

$$\frac{x + i(y+1)}{x + i(y-1)} = \frac{\big(x + i(y+1)\big)}{\big(x + i(y-1)\big)} \cdot \frac{\big(x - i(y-1)\big)}{\big(x - i(y-1)\big)} = \frac{x^2 - i(xy - x) + i(yx + x) + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + i(-xy + x + xy + x)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xi}{x^2 + (y-1)^2}$$

כעת יש לנו ביטוי מרוכב נורמלי:

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$f_6(z) = (x - yi) \cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}}$$

נשתמש בחוקי חזרות למרוכבים : $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

ואז:

$$(x - yi) \cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}} = e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^2+(y-1)^2}}}(x - yi)$$

אז למדנו שזה כיאלו הזווית במקרה הזה: $\boldsymbol{e^{i\theta}} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ולכן:

$$e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}\left(\cos\left(\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}\right) + i\sin\left(\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}\right)\right)(x - yi)$$

כעת פשוט.. להפריד ממשי ומדומה אבל מכיוון שיש כמה שלבים אציב $D = x^2 + (y-1)^2$

$$e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\left(\cos\left(\frac{2x}{D}\right) + i\sin\left(\frac{2x}{D}\right)\right)(x - yi)$$

אז:

$$e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\left(\cos\left(\frac{2x}{D}\right) + i\sin\left(\frac{2x}{D}\right)\right)(x - yi)$$

$$= \left(e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right) + e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}} i\sin\left(\frac{2x}{D}\right)\right)(x - yi)$$

המשך בעמוד הבא...

$$= x\left(e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)+e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}isin\left(\frac{2x}{D}\right)\right)-yi\left(e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)+e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}isin\left(\frac{2x}{D}\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)}+xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}isin\left(\frac{2x}{D}\right)-yi\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)-\boldsymbol{yi\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}isin}\left(\frac{2x}{D}\right)$$

עכשיו אסמן את החלק הממשי ב$Bold$

$$= \boldsymbol{xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)+y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)+i\left(xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)-y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)\right)$$

$$D = x^2+(y-1)^2$$

$$= xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)+y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)+i\left(xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)-y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)\right)$$

$$u(x,y) = xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)+y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)$$

$$v(x,y) = xe^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}sin\left(\frac{2x}{D}\right)-y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{D}}\cos\left(\frac{2x}{D}\right)$$

זהו. נחזיר את המכנה D .

$$u(x,y) = x\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}\cos\left(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\right)+y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}sin\left(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\right)$$

$$v(x,y) = x\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}sin\left(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\right)-y\cdot e^{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}\cos\left(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\right)$$

כנדרש.

3ה

ה. $sin\left(\frac{\pi}{6} - i\cdot ln2\right)$

נשתמש בביטוי שהוכחנו בכיתה (במפורש יוסי אמר תשתמשו בזה) :

$$\sin(x+iy) = \sin x\cdot\cosh(y) + i\sin h(y)\cdot\cos x$$

אז $x=\frac{\pi}{6}\ \ ,\ \ y=-\ln 2$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+iy\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cosh(-\ln 2) + i\sin h(-\ln 2)\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

אז $\frac{\pi}{6}r = 30d$ וידוע ש $\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ וידוע ש $\sin(30) = \frac{1}{2}$

נבדוק את היפרבוליות :

$$\sin h(-\ln 2) = \frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2} = \frac{\frac{1}{e^{\ln 2}} - e^{\ln 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}-2}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$\cosh(-\ln 2) = \frac{e^{-\ln 2} + e^{\ln 2}}{2} = \frac{\frac{1}{e^{\ln 2}} + e^{\ln 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = 1\frac{1}{4}$$

נחזור לתרגיל:

$$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cosh(-\ln 2) + i\sin h(-\ln 2)\cdot\cos\frac{\pi}{6} =$$

נסכם את כל מה שמצאנוביינתים:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{4} + i\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

כנדרש..

6א

6) עבור z_1, z_2 מספרים מרוכבים כלשהם הראו שמתקיים:

א. $$cos(z_1+z_2) = cos(z_1)cos(z_2) - sin(z_1)sin(z_2)$$

נתחיל כמובן מאגף שמאל ואז נשתמש בזהות הבאה:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$

נשתמש בחוקי חזקות למרוכבים $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$= \frac{e^{i(z_1)}e^{i(z_2)}+e^{-i(z_1)}e^{-i(z_2)}}{2} =$$

ונזכור גם את נוסחת אוילר $e^{iz} = \cos(z) + isin(z)$ ועבור המינוס $e^{-iz} = \cos(z) - isin(z)$

אז:

$$\frac{\big(\cos(z_1)+isin(z_1)\big)\big(\cos(z_2)+isin(z_2)\big)+\big(\cos(z_1)-isin(z_1)\big)\big(\cos(z_2)-isin(z_2)\big)}{2}$$

נפתח בזהירות סוגריים .. אעשה ראשית עבור אגף שמאל במחובר ואז אגף ימין.

אגף שמאל:

$$\big(\cos(z_1)+isin(z_1)\big)\big(\cos(z_2)+isin(z_2)\big)$$

$$= \cos(z_1)\cos(z_2) \boxed{+\, i\cos(z_1)\sin(z_2)} \boxed{+\, icos(z_2)\sin(z_1)} - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

אגף ימין:

$$\big(\cos(z_1)-isin(z_1)\big)\big(\cos(z_2)-isin(z_2)\big) =$$

$$= \cos(z_1)\cos(z_2) \boxed{-\, i\cos(z_1)\sin(z_2)} \boxed{-\, icos(z_2)\sin(z_1)} - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

כבר כאן קל לראות שהרבה מצטמצם... אסמן אותם..

$$= \frac{2\cos(z_1)\cos(z_2) - 2\sin(z_1)\sin(z_2)}{2} = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

כנדרש!

7) עבור z מספר מרוכב כלשהו חשבו את $\left|e^{1/\bar{z}}\right|$.

נזכור שלמדנו כי עבור מספר ממשי מתקיים $|e^z| = e^{Re(z)}$

אז נתמקד ב-

$$Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) =$$

נסמן כמובן $z = x + yi$

$$Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) =$$

נתמקד במה שבתוך ה$Re(\ \ )$ ואז:

$$\frac{1}{x - yi} = \frac{1}{(x - yi)} \cdot \frac{(x + yi)}{(x + yi)} = \frac{(x + yi)}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

כלומר קל לראות ש:

$$Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ובסך הכל לפי הנוסחה שלמדנו $|e^z| = e^{Re(z)}$:

$$\left|e^{\frac{1}{\bar{z}}}\right| = e^{Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

כנדרש!

מפרק 4, שאלות:

1ב

2א

3ב

6א ג ה

4ב

9

10

13א

שאלה 1ב

הוכיחו

ב. $|cosz|^2 = cos^2x + sinh^2y$

נשתמש בביטוי שיוסי הראה לנו:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cdot \cosh(y) - i(\sin x \cdot \sinh(y))$$

אז נשתמש בזה כאשר $z = x + iy$:

$$\cos(z) = \cos x \cdot \cosh(y) - i(\sin x \cdot \sinh(y))$$

כמו, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|z|^2 = x^2 + y^2$ ולכן בפרט עבור הביטוי הבא:

$$|\cos(z)|^2 = (\cos x \cdot \cosh(y))^2 - i^2\big((\sin x \cdot \sinh(y))\big)^2$$

$$= \cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y$$

נשתמש בזהויות הבאות: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ו- $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$:

לכן:

$$\cos^2 x \cdot (1 + \sinh^2 x) + (1 - \cos^2 x) \cdot \sinh^2 y$$

$$\cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 x + \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y$$

צמצמום ואז:

$$= \cos^2 x + \sinh^2 y$$

כנדרש.

שאלה 2א

2) עבור $z = x + iy$ מספר מרוכב כלשהו הנמצא בתחום של כל אחת מהפונקציות הבאות f, הציגו את f באופן $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ כאשר u, v הם החלק הממשי והמדומה בהתאמה של f.

א. $f_1(z) = tanz$

אז נציב: $z = x + yi$

$$f_1(x+yi) = \tan(x+yi) = \frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)} =$$

וראינו בכיתה כבר ש $\sin(x+yi) = \sin x \cdot \cosh(y) + i\sinh(y) \cdot \cos x$

ועבור $\cos\,(x+yi)$ גם ראינו:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cdot \cosh(y) - i(\sin x \cdot \sinh(y))$$

$$\frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)} = \frac{\sin x \cdot \cosh(y) + i(\sinh(y) \cdot \cos x)}{\cos x \cdot \cosh(y) - i(\sin x \cdot \sinh(y))} =$$

כפול בצמוד

$$= \frac{\sin x \cdot \cosh(y) + i(\sinh(y) \cdot \cos x)}{\cos x \cdot \cosh(y) - i(\sin x \cdot \sinh(y))} \cdot \frac{\cos x \cdot \cosh(y) + i(\sin x \cdot \sinh(y))}{\cos x \cdot \cosh(y) + i(\sin x \cdot \sinh(y))}$$

$$= \frac{\big(\sin x \cdot \cosh(y) + i(\sinh(y) \cdot \cos x)\big)\big(\cos x \cdot \cosh(y) + i(\sin x \cdot \sinh(y))\big)}{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y}$$

נתמקד במונה לסידור:

$$\big(\sin x \cdot \cosh(y) + i(\sinh(y) \cdot \cos x)\big)\big(\cos x \cdot \cosh(y) + i(\sin x \cdot \sinh(y))\big) =$$

$$= \boldsymbol{\sin x \cdot \cosh(y) \cdot \cos x \cdot \cosh(y)} + i \sin x \cdot \cosh(y) \sin x \cdot \sinh(y) +$$

$$i\sinh(y) \cdot \cos x \cos x \cdot \cosh(y) - \boldsymbol{\sinh(y) \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \sinh(y)}$$

אסדר ממשי ליד מדומה:

$$= \boldsymbol{(\sin x \cdot \cosh(y) \cdot \cos x \cdot \cosh(y) - \sinh(y) \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \sinh(y))}$$

$$+i(\sinh(y) \cdot \cos x \cos x \cdot \cosh(y) + \sin x \cdot \cosh(y) \sin x \cdot \sinh(y))$$

סידור נוסף:

$$= (\cosh^2 y \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - \sinh^2 y \cdot \sin(x) \cdot \cos(x))$$

$$+i(\cos^2 x \cdot \sinh(y) \cdot \cosh(y) + \sin^2 x \cdot \sinh(y) \cdot \cosh\,(y))$$

כעת ניתן לראות שאפשר להוציא גורם משותף מהממשי ומהמדומה:

$$= \big(\sin(x) \cdot \cos(x)\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y)\big)$$

$$+i\big(\sinh(y) \cdot \cosh(y)\,(\cos^2 x + \sin^2 x)\big)$$

המשך עמוד הבא...

כעת קל לראות ש $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ כמו כן גם $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

ולכן מה שנותר זה:

$$= (\sin(x) \cdot \cos(x)) + i(\sinh(y) \cdot \cosh(y))$$

סך הכל עם המכנה והמונה יש לנו:

$$= \frac{(\sin(x) \cdot \cos(x)) + i(\sinh(y) \cdot \cosh(y))}{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y}$$

כעת קל להפריד בין המדומה לממשי ולהוציא את $u(x,y)$ ואת $v(x,y)$:

$$u(x,y) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y}$$

$$v(x,y) = \frac{(\sinh(y) \cdot \cosh(y))}{\cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y}$$

כנדרש.

3ב

3) פתרו את המשוואות הבאות

ב. $tanz = i$

סעיף ב'

$$\tan z = i$$

נפשט את

$$\tan z = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} =?$$

אז אנחנו יודעים כי

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

נפשט

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \div \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

כלומר המשוואה :

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = i$$

$$\Downarrow$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = -e^{iz} - e^{-iz}$$

$$2e^{iz} = 0$$

כלומר

$$2 \cdot \big(\cos(z) + isin(z)\big) = 0$$

אין פתרונות .. קל יותר להסביר את זה עם e^{iz} .. פונקציה זאת תמיד בעל אורך חיובי.

כלומר מתקיים $e^{iz} = 0 \Leftrightarrow |e^{iz}| = 0$ אבל $|e^{iz}| \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ ולכן לא ייתכן לכל $z \in \mathbb{C}$ ש $e^{iz} = 0$

שאלה 4ב

$$\lim_{z\to 0}\frac{(z+i)^2+1}{z}$$ ב.

נשים לב שמדובר בהרכבה , חיבור ומונה של פונקציות רציפות ולכן נוכל בסוף לעשות $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

במכנה נדרוש ש $z \neq 0$

אז נפשט את הביטוי ראשית:

$$\frac{(z+i)^2+1}{z} = \frac{z^2+2iz-1+1}{z} = \frac{z(z+2i)}{z} \overset{z\neq 0}{=} z+2i$$

לכן נוכל להשתמש בזה $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\lim_{z\to 0}(z+2i) = (0+2i) = 2i$$

כנדרש

שאלה 5 א' ג' ה'

5) הראו שהגבולות הבאים לא קיימים

א. $\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$ ב. $\lim_{z\to 0}\frac{\sin\bar{z}}{z}$ ג. $\lim_{z\to 0}\frac{Re(z^2)}{|z|^2}$

ד. $\lim_{z\to 0}\left|\frac{\sin z}{z^2}\right|^2$ ה. $\lim_{z\to 0}\frac{Im(z^2)}{z^2}$

סעיף א'

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

אז נעשה 2 מסלולים.

מסלול 1 :

$$z=x$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 \overset{z=x}{=} \lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^2=(1)^2=1$$

מסלול 2 לאורך $y=x$. כלומר $z=x+ix$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 \overset{y=x}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x(1-i)}{x(1+i)}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=$$

נפשט את הביטוי שבתוך החזקה 2:

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)}{(1+i)}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

נחזור לגבול:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=(-i)^2=-1$$

כנדרש.

מצאנו 2 מסלולים עם גבולות שונים ולכן לא קיים גבול.

סעיף ג'

ג. $\lim_{z\to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2} =$$

ראשית נפשט את הביטוי:

$$\frac{Re(z^2)}{|z|^2} =$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

ולכן

$$Re(z^2) = x^2 - y^2$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

אז בסך הכל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

אז מסלול 1: $y = 0$ ו $x \to 0$ ואז:

$$\lim_{(x)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

מסלול 2, נבחר $x = 0$ ו $y \to 0$ ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{+y^2} = -1$$

מצאנו 2 גבולות שונים למסלולים שונים ולכן הגבול לא קיים.

סעיף ה'

ה. $$\lim_{z\to 0}\frac{Im(z^2)}{z^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{Im(z^2)}{z^2}$$

אז בסעיף קודם כבר עשינו פישוט דומה:

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

ולכן

$Im(z^2) = 2xy$

$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

$$\lim_{z\to 0}\frac{Im(z^2)}{z^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{(x^2-y^2)+2ixy}$$

מסלול 1:

$y = 0$ ו $x \to 0$ ואז:

$$\lim_{(x)\to(0)}\frac{0}{x^2} = 0$$

מסלול 2:

$y = x$ ואז $x \to 0$

$$\lim_{(x)\to(0)}\frac{2x^2}{2ix^2} = \lim_{(x)\to(0)}\ \frac{1}{i} = -i$$

$$0 \neq -i$$

מצאנו 2 גבולות שונים למסלולים שונים ולכן הגבול לא קיים.

9) תהיה $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, הראו שגם $Re\left[f\left(\overline{z^2}\right)\right]$ רציפה.

שאלה 9

$$Re\left[f\left(\overline{(z^2)}\right)\right]$$

נסמן $x + iy$

שלב 1:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

שלב 2:

$$\overline{z^2} = (x^2 - y^2) - 2ixy$$

שלב 3:

ואז מפעילים את f $\left(f\left(\overline{(z^2)}\right) \right)$

שלב 4: מפעילים Re

בסך הכל מדובר בהרכות של פונקציות רציפות ולכן בהכרח גם $Re\left[f\left(\overline{(z^2)}\right)\right]$ רציפה.

פירוט :

שלב 1 – פולינום - אפשר לסמן $h(z)$

שלב 2 – טענה שיוסי הציג - אפשר לסמן $g(z)$

שלב 3 – f נתון שרציפה

שלב 4 - Re טענה שיוסי הציג – אפשר לסמן $k(z)$

ואז מה שקורה בעצם:

$$k \circ f \circ g \circ h(z)$$

הרכבה של רציפות.. כנדרש..

שאלה 10

10) תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה שאינה ריקה, ותהי $f: G \to \mathbb{C}$ פונקציה.

הוכיחו כי f רציפה ב–G אם ורק אם הפונקציות $Im(f), Re(f)$ רציפות ב–G.

צ"ל להוכיח כי f רציפה ב G $\Leftrightarrow$ הפונקציות $Re(f)$, $Im(f)$ רציפות ב-G .

רעיונית נשמע הגיוני כי הרי כל פונקציה f היא חיבור של $f(x+iy) = u(x+iy) + i \cdot v(x+iy)$

אז נוכיח ב-2 הכיוונים:

כיוון 1:

נניח כי הפונקציות $Re(f)$, $Im(f)$ רציפות ב-G ונוכיח כי f רציפה ב-G

נסמן את $f(z)$ כך , נסמן $z = x + iy$

$$f(x+iy) = u(x+iy) + i \cdot v(x+iy)$$

למעשה נשים לב שמדובר בחיבור של פונקציות רציפות (רציפות מטענה שיוסי הראה).

$$f(z) = Re\big(f(z)\big) + i \cdot Im\big(f(z)\big)$$

כיוון 2:

נניח כי f רציפה ב-G ונוכיח כי הפונקציות $Re(f)$, $Im(f)$ רציפות ב-G .

נסמן

$$f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$$

ע"פ הגדרה פונקציה היא רציפה בנקודה z_0 אם

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ולכן עבור z_0 כלשהי ב-G עלינו להראות כי

$$\begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} Im\big(f(z)\big) = Im\big(f(z_0)\big) \\ \lim\limits_{z \to z_0} Re\big(f(z)\big) = Re\big(f(z_0)\big) \end{cases}$$

כמו כן בכיתה ראינו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$|Re(z)| \le |z| \ \wedge |Im(z)| \le |z|$$

נתמקד בחלק הממשי. נשים לב כי

$$|u(z) - u(z_0)| = \big|Re\big(f(z)\big) - Re\big(f(z_0)\big)\big| = \big|Re\big(f(z) - f(z_0)\big)\big| \le |f(z) - f(z_0)|$$

אבל נשתמש בכך שידוע ש f רציפה ולכן בהכרח לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ המקיים $|z - z_0| < \delta$ אז $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ומהטרנזיטיביות מתקיים

$$|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon$$

כלומר $\lim\limits_{z \to z_0} Re\big(f(z)\big) = Re\big(f(z_0)\big)$

כנדרש. באופן זהה, סימטרי . בהחלט רק להחליף את Re ב Im נוכיח כי גם $\lim\limits_{z \to z_0} Im\big(f(z)\big) = Im\big(f(z_0)\big)$

בסך הכל הוכחנו את 2 הכיוונים כנדרש.

13) חשבו בעזרת כללי הגזירה את הנגזרות הבאות:

א. $f(z)=\frac{z(2+iz^2)^3}{5i-2z}$ בנקודה $1-i$.

$$f(z)=\frac{z(2+iz^2)^3}{5i-2z}$$

שאלה 13 א

נשתמש בטענה הזאת מהכיתה:

1. אם f גזירה בנקודה z_0 אז f רציפה בנקודה z_0
2. אריתמטיקה של נגזרות:
   יהיו f,g פונקציות גזירות בנקודה z_0 אז:
   $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$ (1)
   $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ (2)
   $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ (3)

אז לפי אריתמטיקה של נגזרות נגזור לפי נגזרת של מנה ואז מכפלה וחיבור/חיסור

$$\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'g-hg'}{g^2}$$

אז:

נמצא את

$$h'(z)=(2+iz^2)^3+z\cdot\left(\left(\mathbf{2}+\boldsymbol{iz^2}\right)^{\mathbf{3}}\right)'$$

$$\left(\left(\mathbf{2}+\boldsymbol{iz^2}\right)^{\mathbf{3}}\right)'=3(2+iz^2)^2\cdot(2iz)=6iz(2+iz^2)^2$$

ולכן

$$h'(z)=(2+iz^2)^3+z\cdot 6iz(2+iz^2)^2$$

נוציא גורם משותף $(2+iz^2)^2$

$$=(2+iz^2)^2\left((2+iz^2)+6iz^2\right)=(2+iz^2)^2(2+7iz^2)$$

והמכנה:

$$g'(z)=-2$$

$$\mathrm{g}^2=(5i-2z)^2$$

אז לסדר:

$$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g - hg'}{g^2}$$

$$h = z(2+iz^2)^3$$

$$g = (5i - 2z)$$

$$h' = (2+iz^2)^2(2+7iz^2)$$

$$g' = -2$$

אז סך הכל:

$$h'g - hg' = (2+iz^2)^2(2+7iz^2)(5i-2z) + z(2+iz^2)^3$$

אז סך הכל המנה:

$$\frac{(2+iz^2)^2(2+7iz^2)(5i-2z) + 2z(2+iz^2)^3}{(5i-2z)^2}$$

אפשר לפשט עוד את המונה . להוציא גורם משותף

$$= \frac{(2+iz^2)^2\left(\boldsymbol{(2+7iz^2)(5i-2z)+2z(2+iz^2)}\right)}{(5i-2z)^2}$$

נטפל במונה , רק באגף ימין:

$$\left((2+7iz^2)(5i-2z)+2z(2+iz^2)\right) =$$

$$= 10i - 4z + 35i^2z^2 - 14iz^3 = 10i - 4z - 35z^2 - 14iz^3 + 4z + 2iz^3$$

$$= 10i - 35z^2 - 12iz^3$$

אז סך הכל:

$$\frac{(2+iz^2)^2(10i - 35z^2 - 12iz^3)}{(5i-2z)^2}$$

$$f(z) = \frac{z(2+iz^2)^3}{5i-2z}$$

אז

$$f'(z) = \frac{(2+iz^2)^2(10i - 35z^2 - 12iz^3)}{(5i-2z)^2}$$

נציב את הנקודה הרצויה:

$$f'(1-i)$$

$$= \frac{(2+i(1-i)^2)^2(10i - 35(1-i)^2 - 12i(1-i)^3)}{\left(5i - 2(1-i)\right)^2}$$

נחשב בצד:

$(1-i)^2 = -2i$

$(1-i)^3 = (1-i)(1-i)^2 = -2-2i$

אז:

$$\frac{(2+2)^2\big(10i - 35(-2i) - 12i(-2-2i)\big)}{(5i-2+2i)^2} =$$

$$\frac{16(10i+70i+24i-24)}{(7i-2)^2} = \frac{16(104i-24)}{-45-28i} =$$

$$= \frac{-384+1664i}{-45-28i}$$

נצטרך להיפטר מהמכנה:

$$= \frac{-384+1664i}{-45-28i} \cdot \frac{(-45+28i)}{(-45+28i)}$$

$$= \frac{384 \cdot (45) + (-384) \cdot 28i - i1664 \cdot (-45) - 1664 \cdot 28}{45^2 + 28^2}$$

$$= \frac{17280 - i(10752) - i(74880) - 46592}{45^2 + 28^2}$$

$$= \frac{-29312 - i \cdot 85632}{2809}$$

זהו:

$$= \frac{-29312}{2809} + \frac{-i \cdot 85632}{2809}$$

כנדרש.