



MASTER 1 PHYSIQUE
PARCOURS RECHERCHE FONDAMENTALE

Projet

De l'application logistique à la théorie du chaos

ROLLO Valentin
valentin.rollo@etu.univ-grenoble-alpes.fr

ZIMNIAK Nathan
nathan.zimniak@etu.univ-grenoble-alpes.fr

PHYSIQUE NUMÉRIQUE

Mai 2021

Table des matières

1	Introduction	1
2	Application logistique	1
2.1	Généralités	1
2.2	Points stables de la suite logistique	1
2.3	Diagramme de bifurcation	4
3	Apparition du chaos	6
3.1	Ensemble de Mandelbrot	6
3.2	Ensembles de Julia	10
4	Conclusion	11
5	Bibliographie	12

1 Introduction

L'objectif de ce projet est d'étudier l'application logistique. Cette suite permet de modéliser de nombreux phénomènes physiques, biologiques et même économiques, mais sa modélisation la plus connue reste l'évolution d'une population. D'apparence simple, elle génère en réalité un comportement chaotique, notamment à travers l'apparition de fractales. Il s'agit donc de modéliser l'application logistique, son diagramme de bifurcation et les différentes fractales qui lui sont associées (l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia).

2 Application logistique

2.1 Généralités

L'application logistique est définie par une relation de récurrence très simple :

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) = \phi(x_n)$$

Le paramètre μ , réel et positif, est appelé taux de croissance.

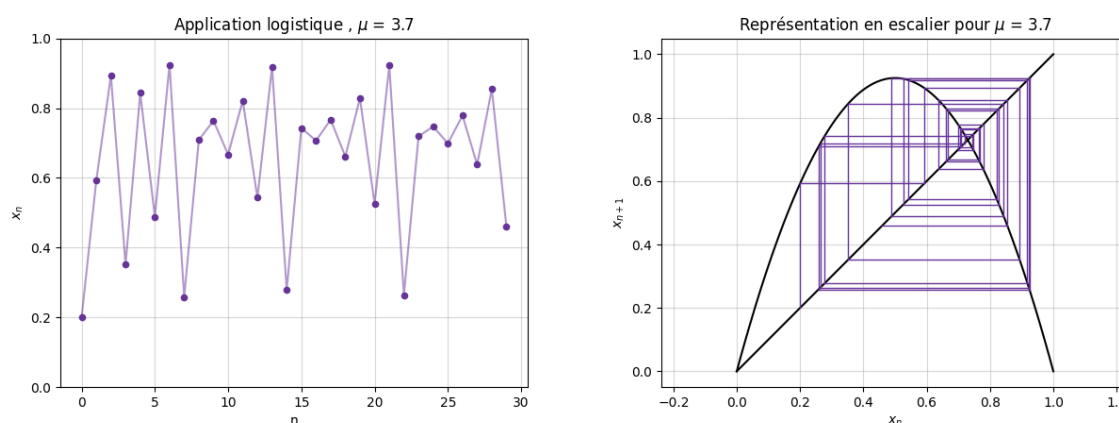


FIGURE 1 – Les 30 premières valeurs de l'application logistique pour $\mu = 3.7$ et $x_0 = 0.2$ ainsi que sa représentation en escalier

2.2 Points stables de la suite logistique

Il est possible d'étudier la suite logistique en fonction de μ .

On rappelle que $\phi(x) = \mu x(1 - x)$

On a, $\phi'(x) = \mu(1 - 2x)$

La recherche de points fixes se fait par la résolution de $\phi(x) = x$

On en déduit alors deux points fixes : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$

De plus,

$$\begin{cases} \phi'(0) = \mu \\ \phi'(1 - \frac{1}{\mu}) = 2 - \mu \end{cases}$$

— Si $0 < \mu < 1$:

On a x_1^* stable et x_2^* instable

Ainsi, on a convergence vers l'origine pour toutes conditions initiales x_0 dans $[0;1]$ (**figure 2**).

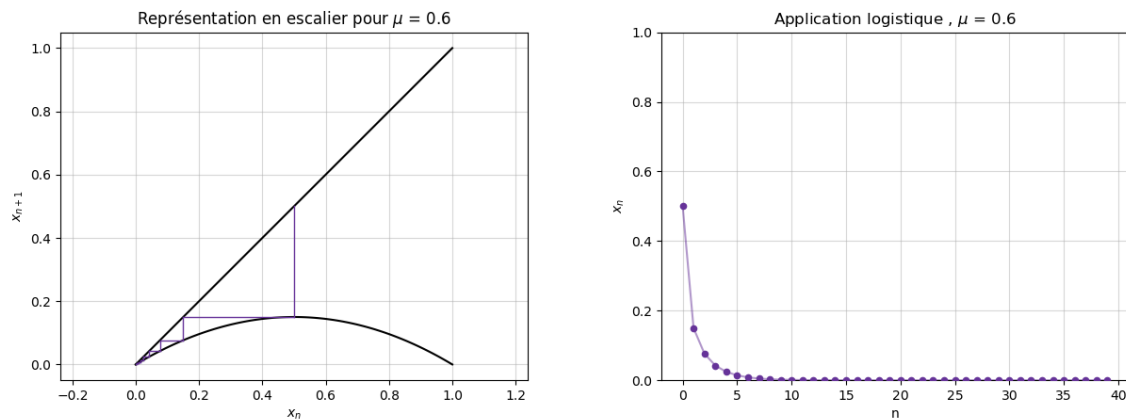


FIGURE 2 – Représentation en escalier de la suite logistique pour $\mu = 0.6$ et $x_0 = 0.5$. On observe la convergence vers l'origine.

On peut alors d'ores et déjà restreindre x_0 à l'intervalle $[0;1]$ car pour $x_0 > 1$ l'ensemble attracteur de ϕ est $\mathcal{A} = \{-\infty\}$.

— Si $1 < \mu < 3$:

On a x_1^* instable et x_2^* stable.

Ainsi, on a convergence vers le point $1 - \frac{1}{\mu}$ pour toutes conditions initiales x_0 dans $[0;1]$ (**figure 3**).

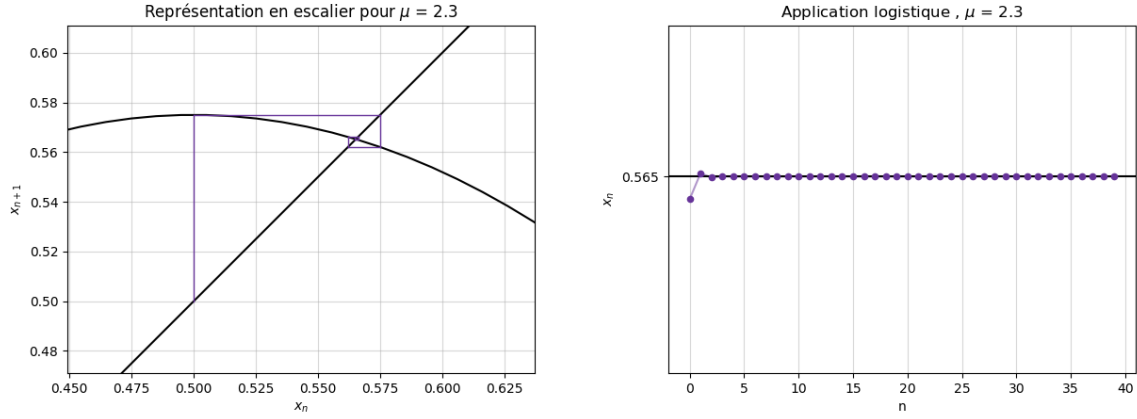


FIGURE 3 – Représentation en escalier de la suite logistique pour $\mu = 2.3$ et $x_0 = 0.5$. On observe la convergence vers $1 - \frac{1}{\mu}$.

De plus, on remarque alors que pour $\mu > 3$ on a deux points instables. Il existe un cycle stable de période 2 : $\mathcal{A} = \{p, q\}$

Cependant, si le cycle stable est de période 2, alors p et q sont des points fixes de l'application $\phi \circ \phi$.

D'autre part, on peut résoudre $\phi^2(x) = \phi \circ \phi(x) = x$

On en déduit,

$$x\mu^2(x - (1 - \frac{1}{\mu}))(-\mu x^2 + (1 + \mu)x - \frac{\mu + 1}{\mu}) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2\mu}((1 + \mu) + \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(\mu + 1)}) \\ q = \frac{1}{2\mu}((1 + \mu) - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(\mu + 1)}) \end{cases}$$

Etude de la stabilité pour $\mu > 3$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{d}{dx}(\phi \circ \phi(x))|_p \\ &= \mu^2(1 - 2p)(1 - 2q) \\ &= 4 + 2\mu - \mu^2 \end{aligned}$$

D'autre part, $\{p, q\}$ est stable pour $|\lambda| < 1$

— $\lambda = 1$:
On a donc,

$$4 + 2\mu - \mu^2 = 1$$

Soit,

$$\begin{cases} \mu_+ = 3 \\ \mu_- = -1 \end{cases}$$

$\{p, q\}$ est stable pour $\mu > 3$

— $\lambda = -1$:

$$4 + 2\mu - \mu^2 = -1$$

Soit,

$$\begin{cases} \mu_+ = 1 + \sqrt{6} \\ \mu_- = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$\{p, q\}$ est stable pour $\mu < 1 + \sqrt{6}$

Finalement, le cycle $\{p, q\}$ est stable pour $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$

2.3 Diagramme de bifurcation

L'application logistique possède différentes limites en fonction de la valeur du taux de croissance. Par exemple, il est possible de remarquer que lorsque le taux de croissance est égal à 2.8, 3.2, 3.5 alors l'application logistique converge vers respectivement 1, 2, 4 limites :

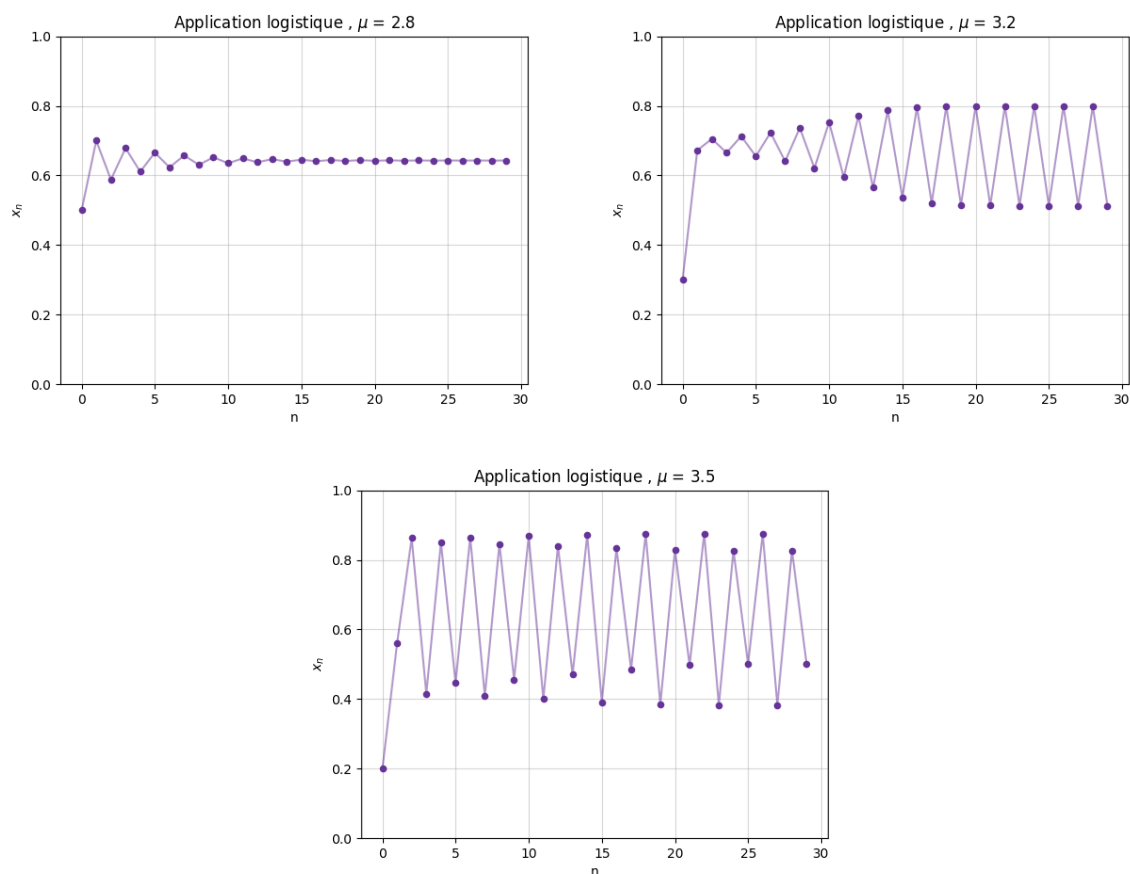


FIGURE 4 – Application logistique pour $\mu = 2.8$, $\mu = 3.2$ et $\mu = 3.5$

De plus, on remarque que pour $\mu = 3.2$ on a bien un cycle stable de période 2. Et, comme montré précédemment, pour $\mu > 1 + \sqrt{6}$ (ici 3.5), ce cycle stable de période 2 disparaît pour laisser place à un cycle stable de période 4.

Ces différentes limites peuvent toutes être représentées sur un graphique, appelé diagramme de bifurcation. Le diagramme de bifurcation est donc le graphique représentant les points vers lesquels l'application logistique converge en fonction du taux de croissance :

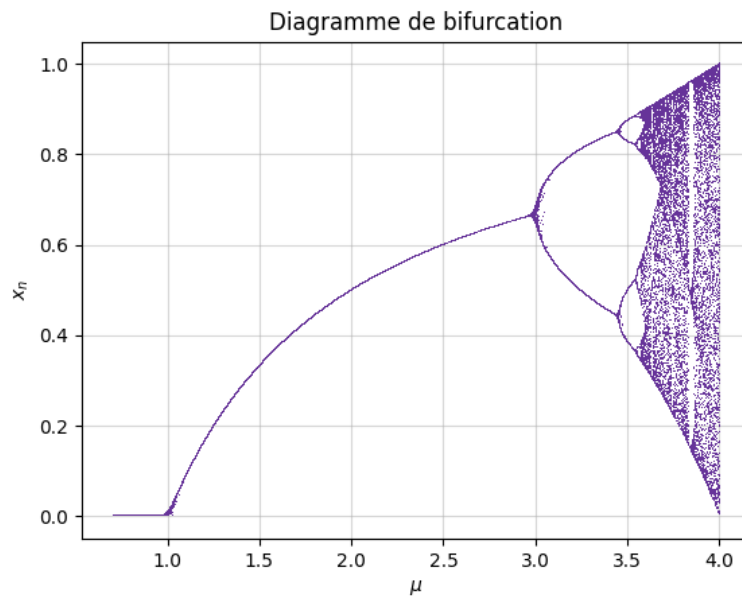


FIGURE 5 – Diagramme de bifurcation de la suite logistique

3 Apparition du chaos

3.1 Ensemble de Mandelbrot

Le diagramme de bifurcation est une figure qui se répète à toutes les échelles (c'est l'invariance d'échelle). Cette particularité, appelée propriété d'autosimilarité, est caractéristique des figures fractales. Ici, cette propriété se remarque très facilement en zoomant sur la partie du diagramme contenant la première bifurcation :

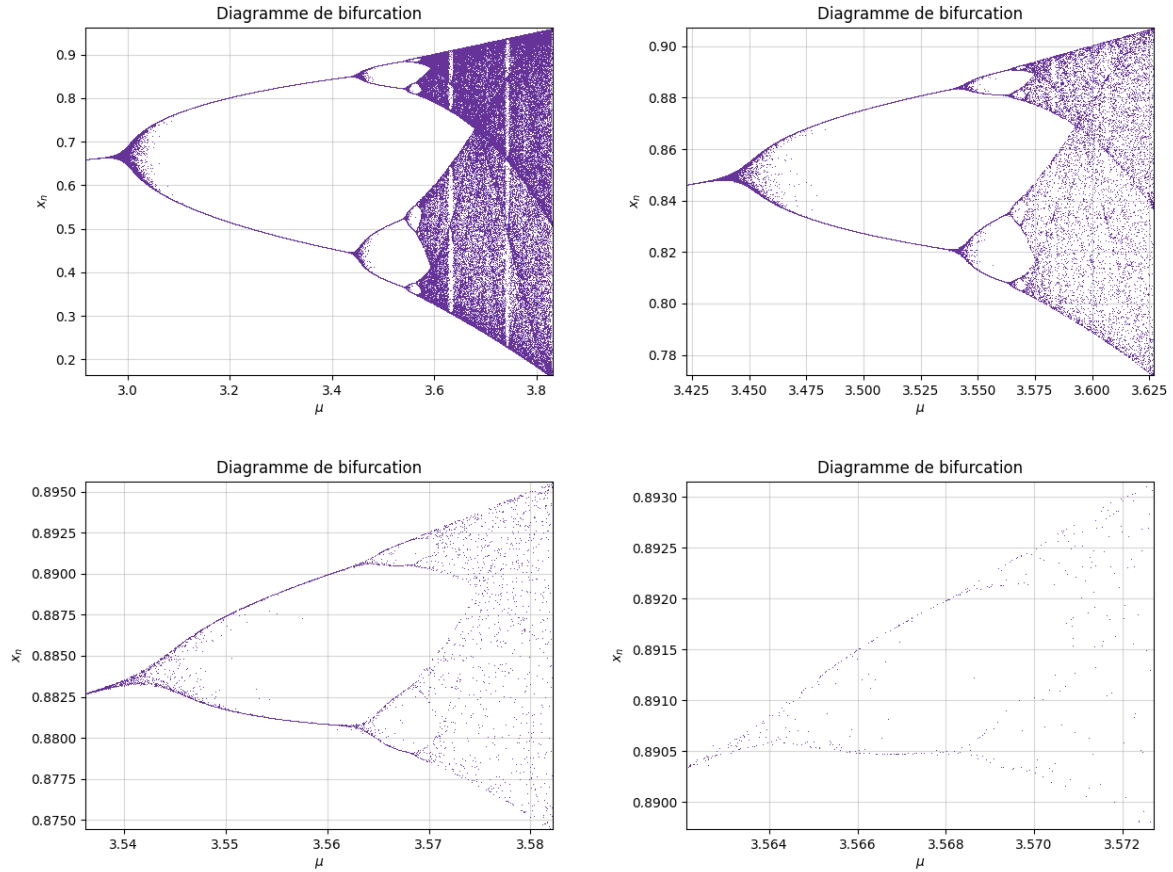


FIGURE 6 – Mise en évidence de la nature fractale du diagramme de bifurcation. En théorie il ne devrait y avoir aucune différence entre les quatre zooms. Cependant, la simulation numérique ne permet pas de générer un nombre infini de points : c'est donc pour cette raison que plus le diagramme est zoomé, moins il y a de points.

Les figures fractales apparaissent de façon récurrente dans l'étude des systèmes chaotiques. La suite logistique peut donc facilement mener au chaos. Pour faire apparaître explicitement l'équation de cette fractale, il faut transformer l'expression de l'application logistique :

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

En faisant le changement de variable $x_n = -\frac{z_n}{\mu} + \frac{1}{2}$, l'équation devient :

$$z_{n+1} = z_n^2 + \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

Enfin, l'expression finale de la fractale est obtenue en posant $c = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Cette fractale est sans doute la plus connue d'entre toutes. Elle est appelée ensemble de Mandelbrot :

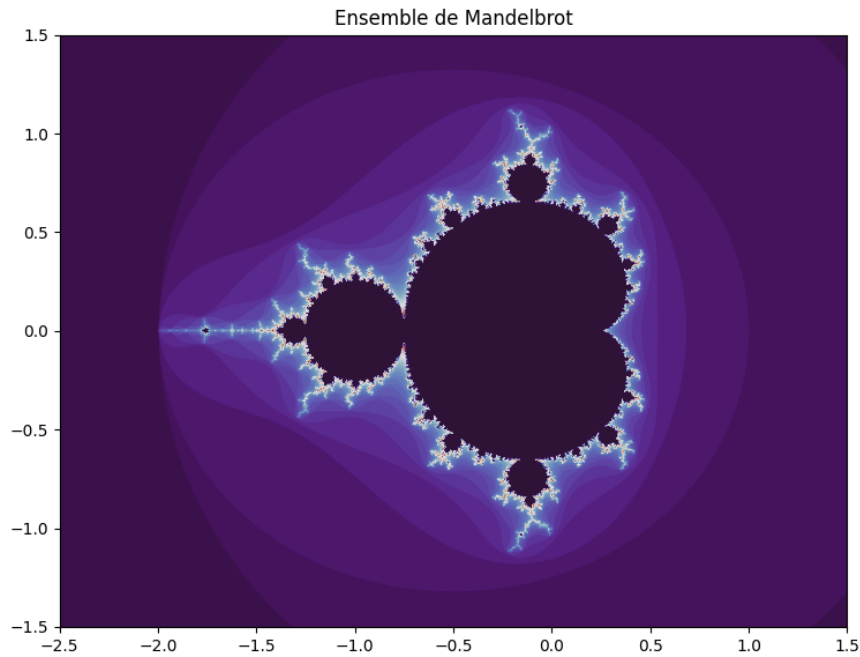


FIGURE 7 – Ensemble de Mandelbrot

Elle représente la durée de divergence des points du plan complexe c par application de la suite $z_{n+1} = z_n^2 + c$, avec comme condition initiale $z_0 = 0$. Plus le point est clair plus sa durée de divergence est grande. Ainsi, tous les points noirs convergent tandis que tous les autres points divergent, plus ou moins rapidement selon leur couleur.

La correspondance graphique entre le diagramme de bifurcation et l'ensemble de Mandelbrot n'est pas triviale. Il est néanmoins possible de remarquer quelques similarités entre les deux représentations :

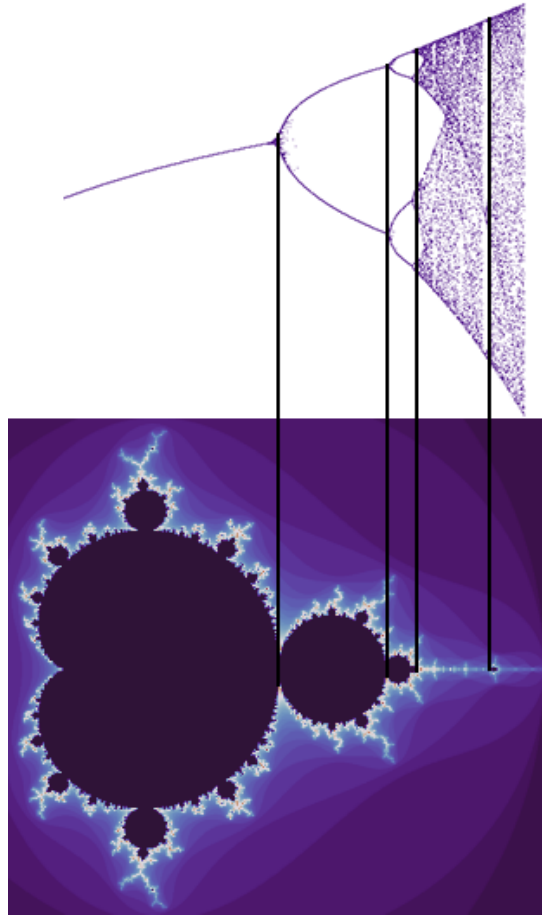


FIGURE 8 – Correspondance entre le diagramme de bifurcation et l'ensemble de Mandelbrot

Mais la correspondance est encore plus flagrante si une nouvelle dimension est ajoutée à la représentation graphique :



FIGURE 9 – Représentation 3D de l'ensemble de Mandelbrot par **J. Hyman** pour la vidéo *"This equation will change how you see the world"* de Veritasium.

Remarque : Nous conseillons vivement au lecteur de regarder l'animation [ici](#).

3.2 Ensembles de Julia

Il est possible de pousser l'étude de la suite logistique et de l'ensemble de Mandelbrot encore plus loin. Maintenant, il ne s'agit plus de s'intéresser à la durée de divergence des points du plan complexe c mais directement des points du plan complexe z_n avec une valeur de $c = a + ib$ fixée. En d'autres termes, il s'agit de choisir un point c de l'ensemble de Mandelbrot et de représenter la durée de divergence des points du plan complexe z_n par application de la suite $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Les ensembles obtenus sont appelés ensembles de Julia :

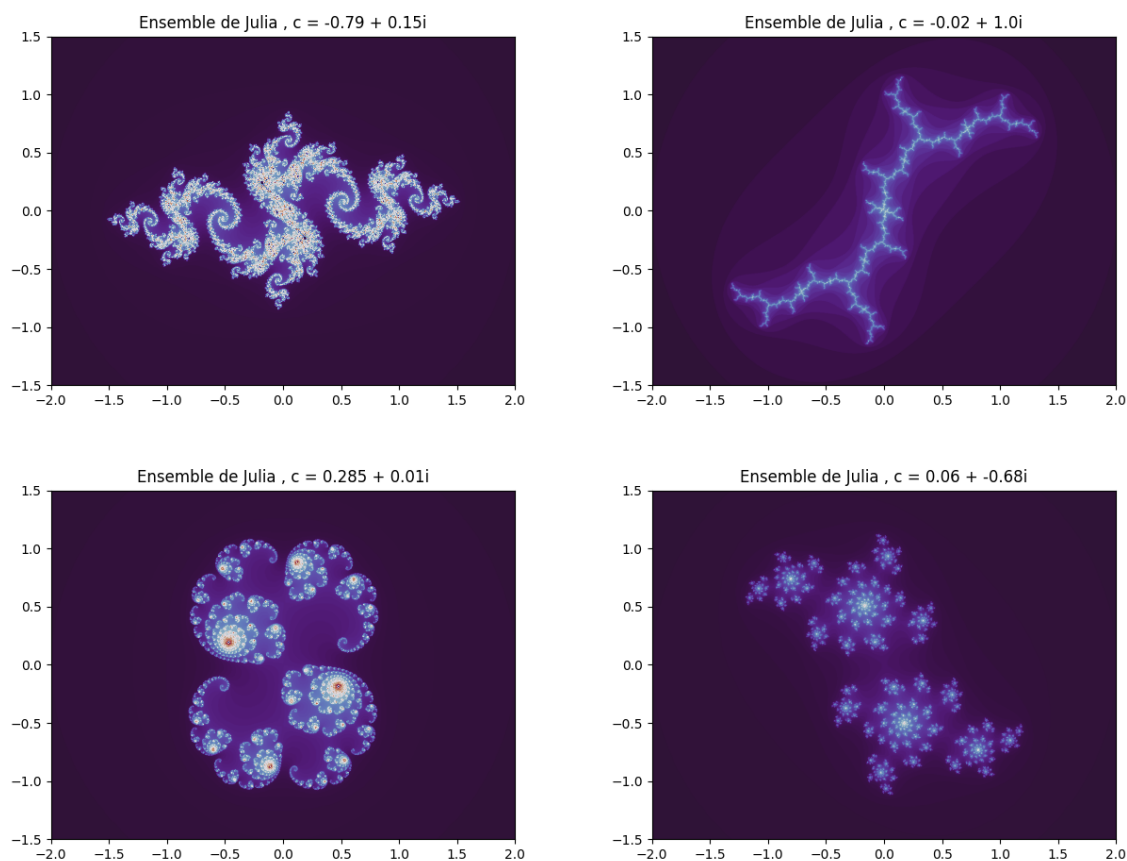


FIGURE 10 – Quelques ensembles de Julia

Comme énoncé précédemment, chaque point c est un point de l'ensemble de Mandelbrot : l'ensemble de Mandelbrot est donc une carte de tous les ensembles de Julia possibles (il y en a évidemment une infinité, mais voici un exemple de positions de quelques ensembles de Julia) :

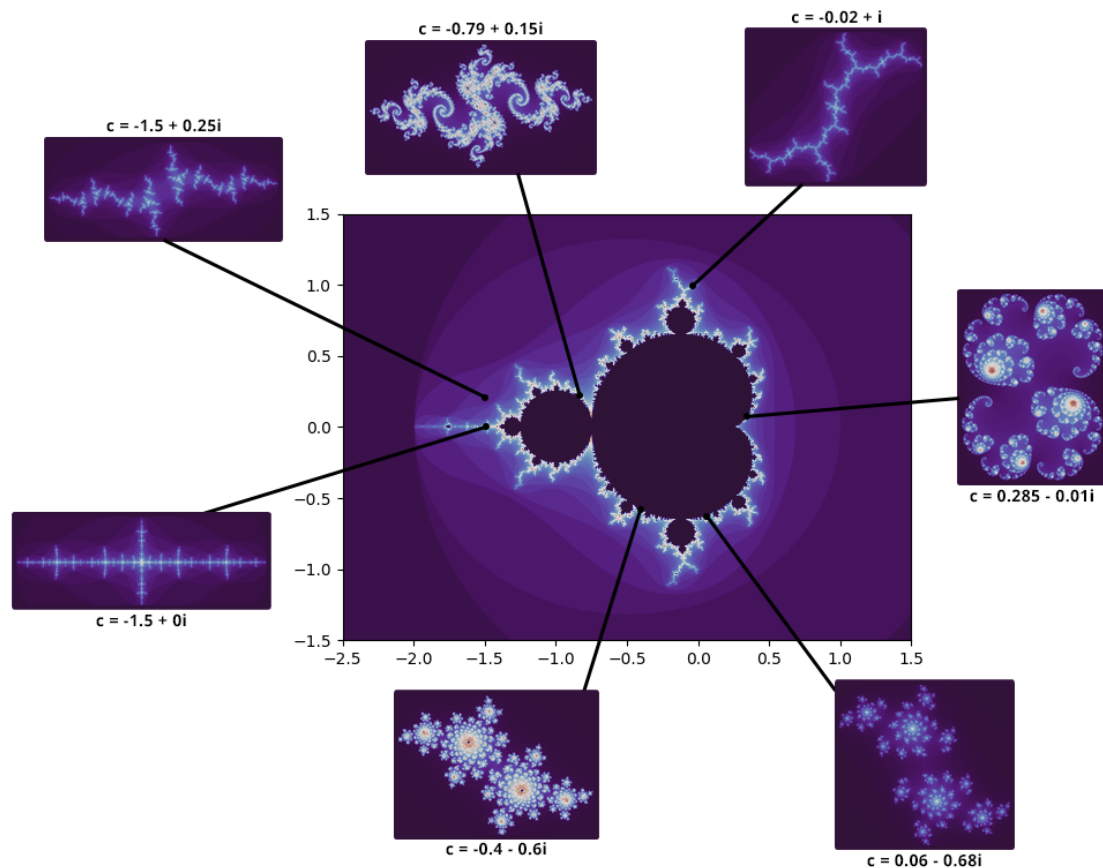


FIGURE 11 – Carte de quelques ensembles de Julia

4 Conclusion

La suite logistique modélise des systèmes qui peuvent donc devenir chaotiques et qui cachent une réalité mathématique complexe (fractales, ensemble de Mandelbrot et ensembles de Julia . . .). En réalité, de nombreux systèmes, d'apparence simples, font émerger à un moment ou un autre un comportement chaotique : fourmi de Langton, double pendule, attracteur de Lorentz . . . L'étude du chaos est donc primordiale puisqu'elle permet une meilleure compréhension de nombreux systèmes naturels et/ou physiques. Pour ce projet, il aurait été possible d'approfondir l'étude de la partie chaos car l'ensemble de Mandelbrot et de Julia regorgent de curiosités mathématiques. Cependant l'étude aurait été plus abstraite, éloignée de la réalité physique que nous avons souhaité étudier.

Enfin, le programme final aurait pu être optimisé afin de réduire le temps d'exécution car ici, le temps de calcul est en moyenne de 25 secondes. Bien entendu ce temps dépend de la performance de l'ordinateur.

5 Bibliographie

- F. Faure. "*Cours systèmes dynamiques, chaos et applications*". 2018.
- D. Muller (Veritasium). "*This equation will change how you see the world*". 2020.
- J. Cottanceau (El Jj). "*Deux (deux ?) minutes pour Mandelbrot*". 2015.
- O. Ushakova. "*Introduction à l'étude dynamique des polynômes complexes*". 2015.
- A. Chéritat. "*Une balade parmi les ensembles de Julia*". 2016.