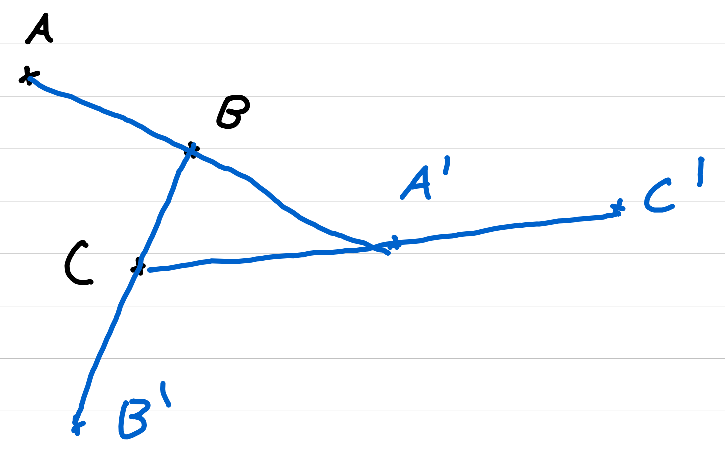
Ex : Saute-Mouton

3 élèves dans le plan :



On itère, dans quelle configuration de départ les suites $(A_n), (B_n), (C_n)$ restent-elles bornées ?

$A = A_0 \qquad A' = A_1$

$B = B_0 \qquad B' = B_1$

$C = C_0 \qquad C' = C_1$

On repère les points par leur affixe complexe

$(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{C}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} b_n = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} \\ c_n = \dfrac{b_n + b_{n+1}}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{c_n + c_{n+1}}{2} \end{cases}$

ie : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2b_n - a_n \\ b_{n+1} = 2c_n - b_n \\ c_{n+1} = 2a_{n+1} - c_n = 4b_n - 2a_n - c_n \end{cases}$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

On a alors : $X_{n+1} = AX_n \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Ainsi $X_n = A^n X_0$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -2 & 0 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 2 & -4 & X+1 \end{vmatrix}$$

$= (X+1)^3 + 8 + 0 - 0 - 8(X+1) - 0$

$= X^3 + 3X^2 + 3X + \cancel{9} - 8X - 8$

$= X^3 + 3X^2 - 5X + 1$

$= (X-1)(X^2 + 4X - 1)$

$r_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$= -2 \pm \sqrt{5}$

$\chi_A = (X-1)(X+2+\sqrt{5})(X+2-\sqrt{5})$

$Sp(A) = \{1 ; -2+\sqrt{5} ; -2-\sqrt{5}\}$

A est diagonalisable

$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad e_2'$ vect propre $-2+\sqrt{5}$

$\qquad\qquad e_3'$ vect propre $-2-\sqrt{5}$

Soit $P = \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1', e_2', e_3')$

$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$

$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5}-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2-\sqrt{5})^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Posons $Y_n = P^{-1}X_n$

$(X_n = PY_n)$

$X_n = PY_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}PY_0$

$= PD^nY_0$

donc $Y_n = D^nY_0$

$Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$Y_n = \begin{pmatrix} \alpha \\ (-2+\sqrt{5})^n\beta \\ (-2-\sqrt{5})^n\gamma \end{pmatrix}$

Pour que Y_n soit borné,

$\gamma = 0$

et dans ce cas, $\boxed{X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\begin{matrix} \\ \| \\ Y_\infty \end{matrix}$

$X_n = PY_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} PY_\infty = X_\infty$

$P = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 1 & \\ 1 & \end{pmatrix}$ donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

$\mapsto$ Les trois points tendent vers le même endroit

2) Soit $d \in [\![1, n-1]\!]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sev de dim $= d$

<u>Cas $d=1$:</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise toutes les droites

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Comme $\mathrm{Vect}(e_k)$ est stable, $\exists \lambda \in K /$

$u(e_k) = \lambda_k e_k$

Soit $x = e_1 + \dots + e_n$

Comme $\mathrm{Vect}(x)$ est stable, $\exists \lambda \in K / u(x) = \lambda x$

ie: $u(e_1) + \dots + u(e_n) = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$

ie: $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base,

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ et $\boxed{u = \lambda \, Id_E}$

<u>Récurrence sur d:</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise les sev de dim $d \leq n-1$

Mq u stabilise les sev de dim $d-1$, $d \geq 2$

Soit $F \subset E$ de dim $d-1$

Soit $(e_1, \dots, e_{d-1})$ base de F

On complète en une famille

$(e_1, \dots, e_{d-1}, e_d, e_{d+1})$ libre

(car $d+1 \leq n$)

$G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$

$H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{d-1}, e_{d+1})$

$\dim(G) = \dim(H) = d$

$G \cap H = F$

Or l'intersection de 2 espaces stables est stable.

Par H.R., u est une homothétie

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\chi_A = (X-1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 3 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\left((X-1)(X+2)+3\right)$$

$$= (X-1)(X^2+X+1)$$

$$Sp(A) = \{1\}$$

A n'est pas diable

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

que vaut $Sp(A)$?

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -2 & 2 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ X-1 & X-2 & 1 \\ 0 & 2 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 2 & X-2 \end{vmatrix} (X-1)$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2 (X-2) \qquad \boxed{Sp(A) = \{1;2\}}$$

<u>Pour 1 :</u>

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$AX = X \iff (A - I_3)X = 0$

$\iff (I_3 - A)X = 0$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Pour 2 :</u> $AX = 2X$

$\iff (2I_3 - A)X = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$$E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (X-1)^2(X-2)$

On a vu que $\dim(E_1(A)) = 1 < 2$

donc <u>A n'est pas diable</u>

10) $u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \exists n \in \mathbb{N}^* \,/\, u^n = 0$

S sev de E stable par u /

$E = S + \operatorname{Im}(u)$

Mq $S = E$

Soit $x \in E$, $\exists x_1, s_1 \in E \,/\, s_1 \in S$

$x = s_1 + u(x_1)$

de même, $\exists s_2, x_2 \in E \,/\, s_2 \in S$

$x = s_1 + u(s_2 + u(x_2))$

$\vdots$

$$x = \underbrace{s_1}_{\in S} + \underbrace{u(s_2)}_{\in S} + \dots + \overbrace{u^{n-1}(s_{n-1})}^{\in S} + \underbrace{u^n(x_n)}_{=0}$$

donc $x \in S$

$\boxed{\text{D'où } S = E}$

12.26) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

a) Mq $Sp(AB) = Sp(BA)$

b) Mq $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

a) Soit $\lambda \in Sp(AB)$

$\exists X \neq 0 \ / \ ABX = \lambda X$

$BABX = \lambda BX$

Si $BX \neq 0$, on a $\lambda \in Sp(BA)$

Si $BX = 0$, $\lambda X = 0$ donc $\lambda = 0$

donc AB n'est pas inversible

Or $\det(AB) = \det(BA)$ donc

BA n'est pas inversible donc

$0 \in Sp(BA)$

D'où $Sp(AB) \subset Sp(BA)$

Et par symétrie, $\boxed{Sp(AB) = Sp(BA)}$

<u>Rq</u>: Si B est inversible,

On a $AB = B^{-1}(BA)B$

et AB et BA sont semblables et

donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

b) Si $A = J_r$, $B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{r} & \xleftrightarrow{n-r} \end{array} & \end{array}$

$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad BJ_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{J_r B} = \chi_{B_1} X^{n-r}$

$\chi_{BJ_r} = \chi X^{n-r} = \chi_{J_r B}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K) \ / \ rg(A) = r$

$\exists P, Q \in GL_n(K) \ / \ A = PJ_rQ$

$\chi_{AB} = \chi_{PJ_rQB} = \chi_{J_rQBP}$

P est inversible

$= \chi_{QBPJ_r} = \chi_{BPJ_rQ} = \chi_{BA}$

Q inversible

<u>Rq</u>: pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on peut aussi conclure par densité de $GL_n(K)$

$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X] \\ M \mapsto \chi_M \end{cases} \in \mathcal{C}^0$

13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

a) $\mapsto$ cf exo $\boxed{23 \text{ TD8}}$

$\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé de deg n

mais on ne sait pas trouver ses racines exactes de manière général dès que $n \geq 5$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda \in Sp(A) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas à diag dominante

(th Hadamart (qu a)

$\Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!] \,/\, |a_{ii} - \lambda| \leq \underbrace{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{= R_i}$

$\Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!] \,/\, \lambda \in \overline{D}(a_{ii}, R_i)$

donc $\boxed{Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, R_i)}$

32) $A = \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$

$$A = bJ + (a-b) I_n$$

Or J diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ /

$$P^{-1} J P = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $P^{-1}AP = b P^{-1} J P + (a-b) P^{-1} P$

$$= b n E_{11} + (a-b) I_n$$

$$= \begin{pmatrix} nb + a - b & & & \\ & a-b & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a-b \end{pmatrix}$$

donc A est diagonalisable

34) Soit $n \geq 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Rq $A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A - I_n) = 2$

donc $1 \in Sp(A)$

et $\dim(E_1(A)) = n-2$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_3 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = (\lambda - 1) x_2 \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda-1) x_n \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$$

↳ espace de dim $(n-2)$

Base : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Si $\lambda \neq 1$

$$\iff \begin{cases} x_k = \dfrac{x_1}{\lambda - 1} \text{ pour } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \dfrac{n-1}{\lambda - 1} x_1 = \lambda x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_k = \dfrac{x_1}{\lambda - 1}, \ (2 \leq k \leq n) \\ \left(1 + \dfrac{n-1}{\lambda-1} - \lambda\right) x_1 = 0 \end{cases}$$

Pour avoir des solution non nulle, il faut et suffit que

$$\frac{n-1}{\lambda - 1} - \lambda + 1 = 0$$

$$n - 1 - \lambda^2 + \lambda + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 - n = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8 + 4n}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4n - 4}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{n-1}$$

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ $\quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$

$E_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi A est diagble et semblable à :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & a_n \\ & a_2 \diagup & \\ a_1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Condition A diag ?

Notons $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique

On a $\begin{cases} Ae_1 = a_1 e_n \\ Ae_n = a_n e_n \end{cases}$

donc $\mathrm{Vect}(e_1, e_n)$ est stable par A

De même,

$\mathrm{Vect}(e_2, e_{n-1})$ est stable

$\vdots$

Soit $\beta' = (e_1, e_n, e_2, e_{n-1}, \dots, e_p, e_{p+1})$ si $n = 2p$

$\beta' = (e_1, e_n, e_2, e_{n-1}, \dots, e_{p+1})$ si $n = 2p+1$ (vect propre)

On note u l'endo can ass à A.

On a $A' = \mathrm{Mat}_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & a_n \\ a_1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & a_{n-1} \\ a_2 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

Si u_{F_i} est diable pour tout i

ie : si $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ est diable

alors u est diag

Cas $n = 2$: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\chi_A = X^2 - ab$

si $ab < 0$: $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$ et A n'est pas diable

si $ab > 0$: $|\mathrm{Sp}(A)| = 2$ et A est diable

si $ab = 0$: $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

A diable $\iff (a, b) = 0$

Donc : $\begin{pmatrix} 0 & & a_n \\ & \diagup & \\ a_1 & & 0 \end{pmatrix}$ diable

$\iff \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ a_i a_{n+1-i} > 0 \text{ ou } a_i = a_{n+1-i} = 0 \right)$

$\Leftarrow$ La condition implique que chaque bloc $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ de la matrice A' est diable

et $\exists P_i \in GL_2(\mathbb{R}) \,/\, P_i^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix} P_i = D_i$ diagonale

(où $D_i = \begin{pmatrix} \sqrt{a_i a_{n+1-i}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a_i a_{n+1-i}} \end{pmatrix}$)

On pose $P = \begin{pmatrix} \boxed{P_1} & & 0 \\ & \boxed{P_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ 1 si n impair

$P \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$P^{-1} A'^{-1} P = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ est diable

$\forall i$ l'endo induit u_{F_i} dans le plan F_i est diable. On choisit une base $\mathcal{B}_i$ de vect propre dans chaque plan F_i et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots)$ est une base de vect propres de u $\quad e_{p+1}$ si $n = 2p+1$

$\boxed{\Rightarrow}$ On verra dans le chap 8.11 que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diable et si $F \subset E$ est un sev stable par u, alors u_F est diable

39) $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{2n}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \longmapsto (X^2-1)P' - 2nXP \end{cases}$

On a $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$,

$$\Phi(X^k) = (X^2-1)kX^{k-1} - 2nXX^k$$
$$= kX^{k+1} - 2nX^{k+1} - kX^{k-1}$$

$\forall a \in \mathbb{R}, \Phi(1) = -2nX$

$$\text{Mat}_{(1,X,\dots,X^{2n})}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ -2n & 0 & \ddots & & \\ & -2n+1 & \ddots & \ddots & -(2n-1) \\ & & \ddots & \ddots & -2n \\ 0 & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Étudions plutôt $\Phi(P) = \lambda P$

$$(X^2-1)P' = (2nX + \lambda)P$$

Prenons P unitaire,
on doit avoir $\deg(P) = 2n$

Soit z racine de P dans $\mathbb{C}$, de multiplicité $m \geq 1$, alors z est racine de P' de multiplicité $m-1$ et $(*)$ est impossible

donc P a seulement 1 et/ou -1 comme racine

$$P = (X-1)^k (X+1)^{2n-k} \text{ avec } 0 \leq k \leq 2n$$
$$= P_k$$

$$\Phi(P_k) = (X^2-1)\left(k(X-1)^{k-1}(X+1)^{2n-k} + (2n-k)(X-1)^k(X+1)^{2n-k-1}\right)$$
$$- 2nX(X-1)^k(X+1)^{2n-k}$$
$$= (X-1)^k (X+1)^{2n-k}$$
$$\left(k(X+1) + (2n-k)(X-1) - 2nX\right)$$
$$= (X-1)^k(X+1)^{2n-k}(k-2n+k)$$
$$= 2P_k(k-n)$$

Ainsi Φ est diag avec

$$\text{Sp}(\Phi) = (2(k-n))_{0 \leq k \leq 2n}$$

et $E_{2(k-n)} = \text{Vect}\left((X-1)^k(X+1)^{2n-k}\right)$

$$\text{Mat}_{(P_k)_{0 \leq k \leq 2n}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -2n & & & 0 \\ & 2-2n & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 2n \end{pmatrix}$$

44) a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix}$

$\Pi_B = ? \Pi_A$

$$B^2 = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^3 \\ 2A & 2A^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} A^2 & A^3 \\ A & A^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = 2\begin{pmatrix} A^2 & A^3 \\ A & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2A^3 & 2A^4 \\ 2A^2 & 2A^3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} A^3 & A^4 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$$

$$B^k = 2^{k-1}\begin{pmatrix} A^k & A^{k+1} \\ A^{k-1} & A^k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{N} a_k 2^{k-1}\begin{pmatrix} A^k & A^{k+1} \\ A^{k-1} & A^k \end{pmatrix} + a_0 Id_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2}\begin{pmatrix} (2A)^k & (2A)^k A \\ 2^k A^{k-1} & (2A)^k \end{pmatrix} + a_0 I_{2n}$$

$$P(B) = \begin{pmatrix} \frac{P(2A)}{2} + \frac{a_0}{2} I_n & A\frac{P(2A)}{2} - \frac{a_0}{2}A \\ Q(2A) & \frac{P(2A)}{2} + \frac{a_0}{2} I_n \end{pmatrix}$$

où $Q(X) = \dfrac{P(X) - P(0)}{X}$

$P(B) = 0$

$\iff \begin{pmatrix} P(2A) = -P(0) I_n \text{ et } A P(2A) = P(0) A \\ \text{et } Q(2A) = 0 \end{pmatrix}$

Si $A = 0$, $B = 0$ $\Pi_B = X^2$ ↳ non diable

Si $A \neq 0$, $AP(2A) + P(0)A - AP(2A) + P(0)A = 0$

donc $P(0) = 0$

donc $P(B) = 0 \iff P(2A) = 0$ et $Q(2A) = 0$

où $Q(X) = \frac{P(X)}{X}$

$\frac{P(X)}{X}$ annule $2A$ et $P(0) = 0$

$\frac{P(X)}{X} = \Pi_A\left(\frac{X}{2}\right)$ donc $\boxed{\Pi_B = X \Pi_A\left(\frac{X}{2}\right)}$

b) B diable $\iff ? A$

$\iff$ A diable et inversible

56) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ diable

Mq $\dim(C_v) = \sum_{\lambda \in Sp(v)} \dim(E_\lambda(v))^2$

Notons $Sp(v) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

et $\forall k \in [\![1, p]\!], n_k = \dim(E_{\lambda_k}(v))$

dans une base $\mathcal{B}$ idoine,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{n_1} & & & 0 \\ & \underbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_p \cdots \lambda_p}_{n_p} \end{pmatrix} = D$$

Soit $v \in C(v)$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$

D'après le lemme on a V stabilise les $E_{\lambda_k}(v)$

donc $V = \begin{pmatrix} \boxed{V_1} & & & 0 \\ & \boxed{V_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{V_p} \end{pmatrix}$

$\quad n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_p$

Toute matrice de cette forme commute avec D

Donc :

$\dim(C(v)) = \dim(C(D))$

$= n_1^2 + \dots + n_p^2$

$= \sum_{\lambda \in Sp(v)} \dim(E_\lambda(v))^2$

Ex : si $p = n$ ie : si χ_v scindé à racines simples

$\dim(C(v)) = n$

Rq :

Pour $V = (v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$VD = (v_{ij} d_{jj})_{1 \leq i,j \leq n}$

$DV = (d_{ii} v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

et $VD = DV \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,$
$v_{ij}(d_{ii} - d_{jj}) = 0$

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, v_{ij} = 0$ lorsque $d_{ii} \neq d_{jj}$

61) $u_1, \dots, u_p$ diable de E dim finie

Mq ($\exists \mathcal{B}$ base de E qui diable tous les u_k)

$\Leftrightarrow$ (u_k commutent 2 à 2)

($\Rightarrow$) les matrices diable commutent

($\Leftarrow$) $p=2$:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u_1)} E_\lambda(u_1)$$

or $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ donc $E_\lambda(u_1)$ est stable par u_2

et $u_{2 \mid E_\lambda(u_1)}$ est diable

Soit $\mathcal{B}_\lambda$ base de $E_\lambda(u_1)$ qui diable $u_{2 \mid E_\lambda(u_1)}$

$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in Sp(u_1)}$ est une base de E qui diable u_2

Supposons le résultat pour $p-1$, $p \geq 3$

Soit $k \in [\![2,n]\!]$

les se propres de u_1 sont stables par u_k

et les $(u_{k \mid E_\lambda(u_1)})_{k \geq 2}$ comutent donc $\exists \mathcal{B}_\lambda$ base de $E_\lambda(u_1)$

qui diable les $(u_{k \mid E_\lambda(u_1)})_{k \geq 2}$

Notons $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in Sp(u_1)}$ est une base de E

qui diable les $(u_k)_{k \geq 2}$ et u_1

De même pour une famille $(u_i)_{i \in I}$ quelconques diable

$Vect(u_i)_{i \in I}$ est un sev de dim finie de $\mathcal{L}(E)$

dont on peut extraire une base $(u_{i_1}, \dots, u_{i_p})$

Par le cas précédent, les u_{i_j} sont codiable

et donc une bas qui les codiables codiable tous

les $(u_i)_{i \in I}$

67)

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & n \end{pmatrix}$$

69) Mq $GL_n(\mathbb{C}) \sim GL_m(\mathbb{C}) \Leftrightarrow n = m$

$\Leftarrow$ OK

$\Rightarrow$

Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ sous groupe $/ \forall A \in G, A^2 = I_n$

G est commutatif car

$\forall (A,B) \in G^2, (AB)^2 = ABAB = I_n$

$$A^2 BAB^2 = AB = BA$$

On peut donc codiagonaliser les éléments de G :

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / \forall A \in G, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$

donc $|G| \leq 2^n$

Ce majorant est atteint avec

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\varphi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{C}) \to GL_m(\mathbb{C}) \\ M \mapsto \varphi(M) \end{cases} \text{ isomorphisme}$$

$H_0 = \varphi(G_0)$ est un sous groupe de $GL_m(\mathbb{C})$

formé de symétries et $|H_0| = 2^n \leq 2^m$

donc $n \leq m$

Par symétrie $n = m$ ■

72) Les éléments d'ordre fini du groupe $GL_2(\mathbb{Z})$

Mq $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) / \det(M) = \pm 1\}$

© Si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$

$\det(M) \in \mathbb{Z}$ et $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} \in \mathbb{Z}$

donc $\det(M) = \pm 1$

② Si $\det(M) = \pm 1$,

$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\mathrm{com}(M))^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{Z})$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$

ie : $A^p = I_2$

$X^p - 1$ annule A

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$,

$Sp(A) = \{$racine p-ième de l'unité$\}$

Si $A = I_2$, A est d'ordre 1

Si $A = -I_2$, A est d'ordre 2

On suppose A non scalaire

$\Pi_A = \chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A) X + \det(A)$

$= X^2 - \mathrm{Tr}(A) X \pm 1$

Si $Sp(A) \subset \mathbb{R}$, $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$

Soit $Sp(A) = \{1\}$ donc $A = Id$

Soit $Sp(A) = \{-1\}$ donc $A = -Id$

Soit $Sp(A) = \{\pm 1\}$ donc A est une symétrie semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $Sp(A) \not\subset \mathbb{R}$, $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$, $\theta \in]0, \pi[$

Or $\mathrm{Tr}(A) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$= 2\cos(\theta)$ donc $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$

$\underbrace{\mathrm{Tr}(A) \in \{-1, 0, 1\} \quad \det(A) \in \{1, -1\}}$

↳ 6 cas possibles

- $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $Sp(A) = \{i, -i\}$

$\chi_A = X^2 + 1$, $\cancel{X^2 - 1}$ ↳ déjà vu

$A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$A^4 = I_2$, $p = 4$ Ex: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{tr}(A) = -1$, $\det(A) = 1$

$\chi_A = X^2 + X + 1$ $Sp(A) = \{j, -j\}$

$A \sim \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{bmatrix}$ $p = 3$

Ex: $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{tr}(A) = -1$, $\det(A) = -1$

$\chi_A = X^2 + X - 1$

$\Delta = 5 > 0$ donc cas impossible

- $\mathrm{tr}(A) = 1$, $\det(A) = 1$

$X^2 - X + 1$ $\Delta = 1 - 4 = -3$

$Sp(A) = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\} = \{-j ; -j^2\}$

$p = 6$ Ex: $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{tr}(A) = 1$, $\det(A) = -1$

$\chi_A = X^2 - X - 1$

↳ impossible

76) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ / \ (AB)^2 = 0$

Mq $(BA)^2 = 0$

S1: On a $\chi_{BA} = \chi_{AB}$ (HP)

S2: $B(AB)^2A = BA\,BA\,BA = (BA)^3 = 0$

donc BA est nilpotente or $BA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

donc son indice de nilpotente est ≤ 2

donc $(BA)^2 = 0$

78) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Mq A est nilpotente

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \ Tr(A^k) = 0$

$(\Rightarrow)$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T$

$tr(T) = tr(A) = 0$

$\forall k \geq 1, \ A^k \sim T^k$

$Tr(T^k) = 0$

$(\Leftarrow)$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$

$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0$

$\vdots$

$\lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0$

Supposons $\exists \lambda_i \neq 0$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les v.p non nuls

et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leur multiplicité

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_p \lambda_p = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^p + \dots + \alpha_p \lambda_p^p = 0 \end{cases}$$

donc $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

A est inversible

Or $\alpha_1 \neq 0, \dots, \alpha_p \neq 0$

donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

D'où A Nilpotente

79) Soit $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^n \,/\, A_k^n = 0$

$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ A_i A_j = A_j A_i$

Mq $\prod_{k=1}^{n} A_k = 0$

<u>Avec 2 matrices:</u>

$\mathrm{Im}(A_1)$ stable par A_2

$\mathrm{Im}(A_2)$ stable par A_1

$\mathrm{Im}(A_1 A_2) = A_1(\mathrm{Im}(A_2)) \subset \mathrm{Im}(A_2)$

$\mathrm{rg}($

Si u est nilpotent et F stable par u,

$u_{|F}$ est nilpotent

Donc $A_1(\mathrm{Im}(A_2)) \subsetneq \mathrm{Im}(A_2)$

donc $\mathrm{rg}(A_1 A_2) < \mathrm{rg}(A_2) \leq n-1$

donc $\mathrm{rg}(A_1 A_2) \leq n-2$

$\mathrm{Im}(A_1 A_2 A_3) = \mathrm{Im}(A_3 A_1 A_2)$

$= A_3(\mathrm{Im}(A_1 A_2)) \subset \mathrm{Im}(A_1 A_2)$

et $A_3{}_{|\mathrm{Im}(A_1 A_2)}$ est nilpotent donc

$\mathrm{rg}(A_1 A_2 A_3) < \mathrm{rg}(A_1 A_2) \leq n-2$

donc $\mathrm{rg}(A_1 A_2 A_3) \leq n-3$

8 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$P \in \mathbb{C}[X]$

Condition pour que $P(A)$ nilpotente ?

Soit $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ /

$$Q^{-1} A Q = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P(A) = P(QTQ^{-1})$$
$$= Q P(T) Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$P(A)$ nilpotente $\Leftrightarrow$ $P(T)$ nilpotente

$\Leftrightarrow \forall i, \ P(\lambda_i) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\forall \lambda \in Sp(A), \ P(\lambda) = 0}$

97) Soit $A \in GL_n(K)$ Mq $A^{-1} \in K[A]$

Soit $f : \begin{cases} K[A] \mapsto K[A] \\ M \mapsto AM \end{cases} \in \mathcal{L}(K[A])$

et f est injectif car A est inversible

donc f est bijective car $\dim(K[X]) \leq n^2$

donc $\exists M \in K[A] \ / \ f(M) = I_n$

et ainsi $M = A^{-1}$ donc $\boxed{A^{-1} \in K[A]}$

98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diable et $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$

Mq $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, A = P(M)$

Rq : Si $B = Q^{-1}AQ$ semblable à A

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = Q^{-1}A^kQ$$

donc par linéarité, $\forall P \in K[X]$,

$$P(B) = Q^{-1}P(A)Q$$

ie : $\begin{cases} K[A] \longmapsto K[B] \\ M \longmapsto Q^{-1}MQ \end{cases}$

est un isomorphisme

Soit $Q \in Gl_n(\mathbb{C}) \,/$

$$Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On cherche $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/$

$P(N) = D$ et on aura alors

$$P(\underbrace{QNQ^{-1}}_{=M}) = Q\,P(N)\,Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$$

On cherche N diagonale :

$$N = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}$$

$P(N) = D \iff \forall i,\ P(z_i) = \lambda_i$

Comme $\deg(P) \geq 1$, $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C} \\ z \mapsto P(z) \end{array}$ est surjective

car $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $P(X) - \lambda$ admet au moins une racine

104) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Supposons $P(u)=0$ / $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$

i.e: 0 est racine simple de P

On a donc $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0)\neq 0$

Alors $X \wedge Q(X) = 1$

Par le lemme des noyaux :

$E = \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$

Mq $\mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Im}(u)$

On a $Q(u) \circ u = 0$

donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(Q(u))$

En dim finie, $\dim(\mathrm{Ker}(Q(u))) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(u))$

$= \mathrm{rg}(u)$

$= \dim(\mathrm{Im}(u))$

En dim infinie, il faut prouver $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(Q(u))$

$Q(0)\neq 0$ donc $a_0 \neq 0$

donc $Q(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + \dots + a_n u^n$

$Q(u)(x) = 0 = \underset{\neq 0}{a_0} x + \dots + a_n u^n(x)$

donc $x = -\frac{a_1}{a_0} u(x) - \dots - \frac{a_n}{a_0} u^n(x)$

donc $\underline{x \in \mathrm{Im}(u)}$ ■

107) $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$A(A^2 - I_n)(A^{-2} - I_n)^2 = 0$$

$A \neq 0$:

donc $(A^2 - I_n)(I_n - A^2)^2 = 0$

donc $(A^2 - I_n)^3 = 0$

$(X^2 - 1)^3 = (X-1)^3(X+1)^3$ annule A

P est scindé mais pas à racines simples

On a $Sp(A) \subset \{\pm 1\}$ et A diagble $\Leftrightarrow A^2 = I_n$

Contre ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A = (X-1)^2 = \Pi_A$$

$P(A) = 0$ mais non diagble

108) $A \in GL_6(\mathbb{C})$ / $\mathrm{Tr}(A) = 8$ et

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0$$

que vaut χ_A ?

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X \text{ annule } A$$

$$= X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$$

A est donc diagble avec

$$Sp(A) \subset \{0 ; 1 ; 2\}$$

Or $A \in GL_6(\mathbb{C})$ donc $0 \notin Sp(A)$

$$(A - I_6)(A - 2I_6) = 0$$

donc $(X-1)(X-2)$ annule A

$$A \sim \begin{pmatrix} \underbrace{1 \ddots 1}_{a} & \\ & \underbrace{2 \ddots 2}_{b} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a + 2b = 8$$

$$a + b = 6$$

$$b = 2$$

$$a = 4$$

$$\boxed{\chi_A = (X-1)^4 (X-2)^2}$$

109) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \;/\; 4A^3 + 2A^2 + A = 0$

$P = 4X^3 + 2X^2 + X$ annule A

$= X(4X^2 + 2X + 1)$ $\quad \Delta = 4 - 4\times 4 = -12$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$

$P = X\left(X + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(X + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

A est diagble dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \;/$

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4} & \\ & & & & & -\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & -\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{a} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{b} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{b}$

$\mathrm{Tr}(T) \in \mathbb{Z}$,

$b(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2}$ donc $\boxed{b \in 2\mathbb{Z}}$

$\left|-\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$

Donc $D^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc $A^k = PD^kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Or $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

donc $(A^k)_{k\geq 0}$ est stationnaire à 0

donc A est nilpotente

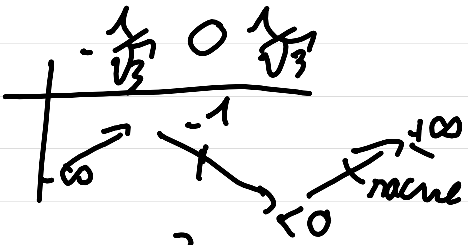
D'où $a = n$, $b = 0$

Donc $\boxed{A = 0}$

112) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $A^3 = A + I_n$ Mq $\det(A) > 0$

$P = X^3 - X - 1$ annule A

$P' = 3X^2 - 1$



$$P\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{1}{\sqrt3} - 1 - \left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^3$$

$$= \frac{\sqrt3 - 3}{3} - \frac{\sqrt3}{9}$$

$$= \frac{3\sqrt3 - \sqrt3 - 9}{9} = \frac{2\sqrt3 - 9}{9} \leq 0$$

Donc P a une unique racine dans $\mathbb{R}$

notée $\boxed{\alpha > \frac{\sqrt3}{3}}$

Dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = (X-\alpha)(X-\lambda)(X-\bar\lambda)$

$\lambda \notin \mathbb{R}$

A est donc diable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ /

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{a} & & 0 \\ & \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{b} & \\ 0 & & \underbrace{\bar\lambda \cdots \bar\lambda}_{c} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (X-\alpha)^a (X-\lambda)^b (X-\bar\lambda)^c \in \mathbb{R}_n[X]$$

donc $b = c$

Ainsi $\det(A) = \alpha^a \lambda^b \bar\lambda^b$

$= \alpha^a |\lambda|^{2b}$

or $\alpha > 0$ et $\lambda \neq 0$

donc $\boxed{\det(A) > 0}$

11 b) Soit $u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \dim(E) = n < +\infty$

Mq $\deg(\pi_u) \leq 1 + rg(u)$

On cherche $P \in K[X] \,/\, P(u) = 0$

et $\deg(P) = 1 + rg(u)$ On a alors $\deg(\pi_u) \leq \deg(P)$

Soit $\mathcal{B}$ base de E adaptée à $\ker(u)$:

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow n-r \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{n-r}{\leftrightarrow} & \underset{r}{\leftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$

On a $\pi_A = \pi_u$

Soit $P \in K[X]$,

$$P(A) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} a_0 I_r & ? \\ \hline 0 & P(C) \end{array}\right) & \updownarrow r \\ \qquad \underset{r}{\leftrightarrow} & \end{array}$$

Si $r = n$, l'inégalité est trivial car $\deg(\pi_u) \leq n$

Si $r < n$

donc $0 \in Sp(u)$

Prenons $P = X \pi_C(X)$ $\qquad \deg(P) = 1 + \deg(\pi_C)$
$\leq 1 + r$

$$P(A) = A\pi_C(A) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \pi_C(0) & ? \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = 0$$

1.16) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Comparer les polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\Pi_{A,\mathbb{R}}$ annule A et $\Pi_{A,\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

donc $\Pi_{A,\mathbb{C}} \mid \Pi_{A,\mathbb{R}}$

$\Pi_{A,\mathbb{C}}(A) = 0 = \overline{\Pi_{A,\mathbb{C}}(A)}$

$\Pi_{A,\mathbb{C}} \mid \overline{\Pi_{A,\mathbb{C}}}$

Ils sont unitaires et de m̂ degré

donc $\Pi_{A,\mathbb{C}} = \overline{\Pi_{A,\mathbb{C}}} \in \mathbb{R}[X$

11) On cherche $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \Pi_A = X^3 + 2X + 2$

de m̂ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$

$P = (X-\lambda)(X-z)(X-\bar{z})$

il faut $n \geqslant 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_A = X^3 + 2X + 2$$

Π_A s'annule sur les 3 valeurs propres de A, $\Pi_A = \chi_A$ (A diag sur $\mathbb{C}$)

En dim $n \geqslant 4$:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Mais $\lambda \notin \mathbb{Q}$: $\lambda = \frac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2\frac{p}{q} + 2 = 0$$

$$p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$$

$$p^3 = 0 \, [q]$$

donc $q \mid p^3$ donc $q = 1$ (car $q \wedge p = 1$)

donc $\lambda \in \mathbb{Z}^*$

$$2 = 2q^3 = 0 \, [p]$$

donc $p \mid 2$

donc $p \in \{1; -1; 2; -2\}$

Or $1, -1, -2$ et 2 ne sont pas racines,

voir fin parenthèses

118) $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \,/\, \forall P \in GL_n(\mathbb{C}),$

$$A \neq P^{-1}BP$$

et $\chi_A = \chi_B$ et $\pi_A = \pi_B$

Trouver A et B

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_B = \chi_A = (x-\lambda)^4$$

$$\pi_A = \pi_B = (x-\lambda)^2$$

A et B non semblables car

$$\text{rg}(A - \lambda I_4) = 1$$

et $\text{rg}(B - \lambda I_4) = 2$

120) $g \in \mathcal{L}(E)$ avec $\Pi_g = X^p Q(X)$ et $Q(0) \neq 0$
$p \geq 1$

(R_q : Q pas forcément scindé)

$X^p \wedge Q(X) = 1$ donc

$$E = \mathrm{Ker}(\Pi_g(g)) = \mathrm{Ker}(g^p) \oplus \mathrm{Ker}(Q(g))$$

stable par g

Dans $\mathrm{Ker}(g^p)$

g induit un endomorphisme nilpotent (d'indice p)

Et dans $\mathrm{Ker}(Q(g))$

g induit un endomorphisme inversible

(car $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^p)$ donc

$\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(Q(g)) = \{0\}$)

Dans une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}(g) = \left(\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

avec N nilpotente et B inversible

Mq $\mathrm{Ker}(Q(g)) = \mathrm{Im}(g^p)$

Les 2 espaces ont la même dimension donc il suffit d'avoir 1 inclusion

⊃ Soit $y \in \mathrm{Im}(g^p)$. $\exists x \in E$ /

$y = g^p(x)$

$$Q(g)(y) = Q(g) \circ g^p(x)$$
$$= \Pi_g(g)(x) = 0$$

On a $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(g) \subset \dots \subset \mathrm{Ker}(g^k) \subset \dots \subset E$

$d_k = \dim(\mathrm{Ker}(g^{k+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(g^k))$

Soit H_{k+1} supplémentaire de $\mathrm{Ker}(g^{k+1})$ dans $\mathrm{Ker}(g^{k+2})$: $\mathrm{Ker}(g^{k+2}) = \mathrm{Ker}(g^{k+1}) \oplus H_{k+1}$

$\dim(H_{k+1}) = d_{k+1}$

Si $x \in \mathrm{Ker}(g^{k+1})$, $g^{k+1}(x) = g^k(g(x)) = 0$ donc

$g(x) \in \mathrm{Ker}(g^k)$ donc

$$g(\mathrm{Ker}(g^{k+2})) \subset \mathrm{Ker}(g^{k+1})$$

$$g(\mathrm{Ker}(g^{k+1})) \subset \mathrm{Ker}(g^k)$$

Mq $g(H_{k+1}) \cap \mathrm{Ker}(g^k) = \{0\}$

et que $\dim(g(H_{k+1})) = \dim(H_{k+1}) = d_{k+1}$

$\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^{k+1})$ donc $g_{|H_{k+1}}$ est injective

et $\dim(g(H_{k+1})) = d_{k+1}$

Soit $y \in g(H_{k+1}) \cap \mathrm{Ker}(g^k)$

On a $x \in H_{k+1}$ / $y = g(x)$
et $g^k(y) = 0$

$g^{k+1}(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(g^{k+1})$

et $x \in H_{k+1} \cap \mathrm{Ker}(g^{k+1}) = \{0\}$

122) Soit G un sous groupe fini de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$

Mq toute matrice $A \in G$ est diable

Soit $A \in G$, l'ordre de A dans G est fini
égal à $N \geq 1$

$(N \mid |G|)$

<u>i.e.</u> $\langle A \rangle = \{ I_n, A, \dots, A^{N-1} \}$

et $A^N = Id$

$X^n - 1$ annule A

Or dans $\mathbb{C}$ $X^n - 1$ est scindé à racines simples

donc $\boxed{A \text{ est diable}}$

<u>Rq:</u> $\boxed{Sp(A) \subset \mathbb{U}_{|G|}}$

123) f, g, h_1, h_2 endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-e.v. de dim finie /

$\ker(h_1) \cap \ker(h_2) = \{0\}$, $f \circ h_1 = h_1 \circ g$

et $f \circ h_2 = h_2 \circ g$

Mq f diable $\Leftrightarrow$ g diable

$\Rightarrow$ π_f est scindé à racine simple

$$f^2 \circ h_1 = f \circ f \circ h_1 = f \circ h_1 \circ g$$
$$= h_1 \circ g \circ g$$
$$= h_1 \circ g^2$$

$P(f) \circ h_1 = h_1 \circ P(g)$

$P(f) \circ h_2 = h_2 \circ P(g)$

$h_1 \circ \pi_f(g) = 0$ et $h_2 \circ \pi_f(g) = 0$

$\mathrm{Im}(\pi_f(g)) = \ker(h_1) \cap \ker(h_2) = \{0\}$

donc <u>g est diable</u> ∎

12f) Mq (A diagble) $\Leftrightarrow$ ($\forall P \in \mathbb{C}[X]$,
$P(A)$ nilpotente $\Rightarrow P(A)=0$)

rem: A diagble $\Leftrightarrow \mathbb{C}[A] \cap \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$

$\Rightarrow$ Si A diagble,

$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) / Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

et $P(A) = Q P(D) Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$

$P(A)$ est donc diagble

Ainsi si $P(A)$ nilpotente, $P(A)=0$

$\Leftarrow$ Supposons A non diagble

et posons $\chi_A = (X-\lambda_1)^{n_1} \dots (X-\lambda_p)^{n_p}$

et $\Pi_A = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_p)^{m_p}$

$\exists i / m_i > 1$ quitte à permuter les vp.,

supposons $m_1 > 1$

Soit $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^{m_2} \dots (X-\lambda_p)^{m_p}$

$P(A) \neq 0$ car $\Pi_A \nmid P$

et $P(A)$ est nilpotent ■

130) Trouver les $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / A \sim A^2$

Si A convient alors toute matrice semblable à A convient aussi :

si $B = P^{-1}AP$ et si $A^2 = Q^{-1}AQ$

alors $B^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}Q^{-1}AQP$

$= P^{-1}Q^{-1}PBP^{-1}QP$

$= (P^{-1}QP)^{-1}B(P^{-1}QP)$

On cherche donc les classes de similitude qui conviennent i.e. : celles que le carré d'une matrice de la classe reste dans cette classe

Si $A = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$A \sim A^2 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^2$

$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} / \lambda_1 \neq \lambda_2$

$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 = \lambda_1^2 \\ \lambda_2 = \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 = \lambda_2^2 \\ \lambda_2 = \lambda_1^2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 1\}$ ou $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{j, j^2\}$

Donc : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$

Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = T$

$T^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$T^2 \sim T \Rightarrow \lambda = \lambda^2$

$\Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$

Si $\lambda = 1$, $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$

Si $\lambda = 0$, $T^2 = 0 \not\sim T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ccl : $(A \sim A^2)$

$\Leftrightarrow \left(A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

131) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / AB = 0$

Mq A et B sont cotrigonalisables

Soit X vecteur propre de A de valeur propre λ

$AX = \lambda X$

Si $\lambda \neq 0$, $X = \frac{AX}{\lambda}$

donc $BX = \frac{ABX}{\lambda} = 0$

d'où X vecteur propre de B

Si $\lambda = 0$,

Si $B = 0$:

donc en prenant un vecteur propre X de A

on a $BX = 0$

Si $B \neq 0$

$AB = 0$ donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$

Donc

$\exists X$ vecteur propre de $B_{|\mathrm{Im}(B)}$

donc $B_{|\mathrm{Im}(B)} X = 0$ donc $X \in \mathrm{Im}(B)$

donc $AX = 0$

Donc $\exists e_1' \in \mathbb{C}^n / Ae_1' = \alpha$, $Be_1' = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Posons $B' = (e_1', \dots, e_n')$ base de $\mathbb{C}^n$,

P matrice de passage de la base canonique dans B' :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & \\ | & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta & L_1' \\ 0 & \\ | & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

134) a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Justifier l'existence de $S(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} A(t^2 I_n + A^2)^{-1} dt$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) /$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

$$P^{-1}A^2P = T^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(t^2 I_n + A^2)P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + t^2 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 + t^2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(A(t^2 I_n + A^2)^{-1})P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{t^2+\lambda_1^2} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n}{t^2+\lambda_n^2} \end{pmatrix}$$

$$= T(t)$$

$$\int_0^x A(t^2 I_n + A^2)^{-1} dt = \int_0^x P\, T(t)\, P^{-1} dt$$

$$= P \int_0^x T(t) dt\, P^{-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} P \int_0^{+\infty} T(t) dt\, P^{-1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{t^2+\lambda^2} dt = \frac{|\lambda|}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$A^2 \frac{1}{t^2}\left(I_n + \frac{A^2}{t^2}\right)^{-1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{A^2}{t^2}$$

intégrable

donc $S(A)$ existe

b) valeurs propres $\boxed{-1 \text{ et } +1}$

135) Soit $n \geq 2$, l'ensemble des matrices diagonalisables est-il un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Prenons $\left(\frac{1}{k} J_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ nilpotente non diable

et $\frac{1}{k} J_n \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ qui est diable

donc l'ensemble des matrices diable n'est pas ouvert

137) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des matrices nilpotentes

Soit $A \in N_n(\mathbb{C})$, $Tr(A) = 0$

donc $N_n(\mathbb{C}) \subset Ker(Tr)$

Or $Ker(Tr)$ est un hyperplan donc d'intérieur vide

donc $\mathring{N_n}(\mathbb{C}) = \emptyset$

$A \in N_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow A^n = 0$

et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto M^n \end{cases} \in \mathcal{C}^0$

donc $N_n(\mathbb{C}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ donc $N_n(\mathbb{C})$ est fermé

144) a) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\cdot S(A) = \{P^{-1}AP / P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

Soit $\varepsilon > 0$

On peut choisir P /

$\forall i<j$, $|t_{ij}| \leq \varepsilon$

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

$$D^{-1}TD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{d_2}{d_1}t_{1,2} & \cdots & \cdots & \frac{d_n}{d_1}t_{1,n} \\ & \lambda_2 & \frac{d_3}{d_2}t_{2,3} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{d_n}{d_{n-1}}t_{n-1,n} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On prend $D = \begin{pmatrix} p^{n-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & p^2 & \\ 0 & & & p_1 \end{pmatrix}$

$$D_p^{-1}TD_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{t_{12}}{p} & \frac{t_{13}}{p^2} & \cdots & \frac{t_{1,n}}{p^{n-1}} \\ & \ddots & \ddots & & \frac{t_{n-2,n}}{p^2} \\ & & \ddots & & \frac{t_{n-1,n}}{p} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En prenant p assez grand,

les coefs diagonaux sont $\leq \varepsilon$ en module

donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \overline{S(A)}$

b) $\Leftarrow$ Si $S(A)$ est fermé, A est donc diable

c) $\Rightarrow$ Si A nilpotente, $0 \in \overline{S(A)}$

$\Leftarrow$ Soit $A \in M_n(\mathbb{C}) / 0 \in \overline{S(A)}$

$\exists (A_k)_{k\geq 0}$ suites de matrices semblables à A /

$A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Alors $\chi_{A_k} \to \chi_0 = X^n$

Or $\forall k$, $\chi_{A_k} = \chi_A$ car $A_k \sim A$

D'où $\chi_A = X^n$ et A est nilpotente