



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Presentado por:

Norberto Fernández de la Higuera

Tutor:

Francisco José López Fernández

Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Curso académico 2020-2021

Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Norberto Fernández de la Higuera

Norberto Fernández de la Higuera *Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de
tutorización**

Francisco José López Fernández
Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro
*Departamento de Lenguajes y Sistemas
Informáticos*

Doble Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Norberto Fernández de la Higuera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de julio de 2021

Fdo: Norberto Fernández de la Higuera

Índice general

Resumen	IX
Summary	XI
Introducción	XIII
Objetivos	XV
I. Teorema clásico de Munkres	1
1. Conceptos previos	3
2. Resultados previos	5
2.1. Hechos utilizados para los teoremas	5
2.2. Teorema de Alisamiento de Asas	6
3. Resultados principales	11
3.1. Enunciados	11
3.2. Demostración del Teorema A	11
3.3. Demostración del Teorema B	13
II. Visualización de superficies	15
4. Segundo capítulo	17
4.1. Primera sección	17
A. Instalación del software	19
B. Guía de uso del programa	21
Conclusiones	23
Glosario	25

Resumen

Resumen en español (recomendado de 800 a 1500 palabras).

Fichero: preliminares/resumen.tex

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Objetivos

Objetivos propuestos junto con los métodos inicialmente previsto).

Objetivos alcanzados junto con los métodos usados finalmente.

Se pueden indicar los aspectos formativos previos más usados.

Parte I.

Teorema clásico de Munkres

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.

1. Conceptos previos

Definición 1.1. Una **variedad topológica** 2-dimensional es un espacio de Hausdorff localmente Euclídeo que verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, su topología tiene una base numerable.

Definición 1.2. Un **embebimiento o encaje** es una aplicación continua e inyectiva de un espacio topológico en otro. La restricción de su imagen aporta un homeomorfismo.

Definición 1.3. Un **sistema coordenado** sobre S es un embebimiento $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

Definición 1.4. Sea S un espacio topológico Hausdorff, una **estructura diferenciable 2-dimensional** sobre S es una familia de conjuntos coordenados $E = \{h_i\}_{i \in \Lambda}$ verificando:

1. $\{h_i(\mathbb{R}^2)\}_{i \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de S .
2. Si $h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ entonces $h_j^{-1} \circ h_i : h_i^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2)) \rightarrow h_j^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2))$ es un difeomorfismo.
3. E es maximal entre todas las familias que cumplen los puntos anteriores.

Definición 1.5. Una **variedad diferenciable** 2-dimensional es una variedad topológica 2-dimensional S junto con una estructura diferenciable E , es decir, el par (S, E) .

Definición 1.6. Una **inmersión** es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cuya derivada es inyectiva en todo punto.

Definición 1.7. Sean f y g homeomorfismos entre los espacios topológicos X e Y . Una **isotopía** es una homotopía entre f y g , $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, con:

1. $H_0 = f$.
2. $H_1 = g$.
3. $\forall t \in [0, 1]$, H_t es un homeomorfismo.

Definición 1.8. Sean f y g embebimientos entre las variedades N e M . Una **isotopía de embebimientos** es un homeomorfismo $H : M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ cumpliendo:

1. $H(y, 0) = (y, 0) \forall y \in M$.
2. $H(f(x), 1) = (g(x), 1) \forall x \in N$.
3. $H(M \times \{t\}) = M \times \{t\} \forall t \in [0, 1]$.

Equivalentemente podemos decir que H es la isotopía de Id_M en $g \circ f^{-1}$ donde tenga sentido.

2. Resultados previos

2.1. Hechos utilizados para los teoremas

A continuación se enuncian los “hechos” utilizados para las demostraciones de los teoremas. Su demostración detallada en varios casos se escapa de los límites del proyecto, en cuyos casos se aportarán demostraciones que suponen ciertos aquellos elementos propios de la teoría de Morse.

Hecho 2.1. *Todo $W \subset \mathbb{R}^2$ abierto tiene una triangulación clásica tal que el tamaño de los triángulos se aproxima a 0 en la frontera de W .*

Demostración. Tomamos la cuadrícula generada de forma natural por \mathbb{Z}^2 sobre \mathbb{R}^2 . Vamos a definir de forma incremental el conjunto de cuadrados que cubren todo W .

Tomamos primero todos los cuadrados (cerrados) que estén contenidos estrictamente en W . Vamos a llamar U a la parte cubierta por el conjunto de cuadrados actual.

Dado un $p \in W$ y $p \notin U$ entonces existe un cuadrado que lo contiene pero que no está contenido estrictamente en W . Por ser W abierto sabemos que para p existe una bola abierta $B \subset W$ que lo contiene. De forma equivalente podemos subdividir el cuadrado inicial en 4 cuadrados iguales, 8 ... y así sucesivamente hasta encontrar una subdivisión en la que algún cuadrado contenga a p y sea lo suficientemente pequeño como para que esté contenido en la bola $B \subset W$. Añadimos al conjunto todos los cuadrados anteriores que estén contenidos en W . Realizamos esta operación de manera indefinida.

Una vez definido el conjunto de cuadrados, podemos definir la triangulación como los triángulos resultantes de dividir por la diagonal dichos cuadrados. De esta forma tenemos una triangulación T tal que la unión de sus triángulos, U , está contenida en W pero todo punto $p \in W$ está en algún triángulo, por lo que $U = W$. Además, cuando tomamos p tendiendo a ∂W , la bola $B \subset W$ que lo contiene tiene radio ϵ tendiendo a 0, es decir, el cuadrado necesario para cubrirlo correctamente tiende a 0, y como consecuencia los dos triángulos de los que se compone también. \square

Hecho 2.2. *Toda variedad diferenciable S tiene una triangulación diferenciable.*

Demostración. Vamos a contruir una malla de polígonos diferenciables, que nos dará paso de forma trivial a una malla de triángulos diferenciables.

Podemos tomar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse apropiada, es decir, los inversos de compactos son compactos y todos sus puntos críticos están a distintos niveles (es posible porque están aislados). Cortamos S por los niveles de puntos no críticos, para separar los puntos críticos entre sí, obteniendo así una descomposición de S en piezas difeomorfas a:

- Discos, tiene un punto crítico de orden 0 o 2.

2. Resultados previos

- Anillos, no tiene puntos críticos.
- “Pantalones”, o de forma equivalente, medio toro al que se le ha quitado un disco en el interior. Tiene un punto crítico de orden 1.
- “Pantalones cruzados”, o también se pueden ver como medio toro suma conexa con un espacio proyectivo \mathbb{RP}^2 . Por ello, se puede dividir en unos “pantalones” normales y una cinta de Möbius. Tiene un punto crítico de orden 1.

Por la teoría de Morse tenemos una división de S en conjuntos difeomorfos a alguno de los anteriores, todos ellos pegados por circunferencias (los bordes de los conjuntos descritos). Podemos obtener una malla añadiendo un vértice a cada circunferencia y seguidamente si es:

- Un disco, se toma el centro y se divide el disco en 3 partes, teniendo 3 sectores difeomorfos a un triángulo.
- Un anillo, se unen los 2 vértices (uno de cada circunferencia del borde) mediante un arco, obteniendo así un cuadrilátero.
- Unos “pantalones”, se unen los 3 vértices mediante 2 arcos (un vértice común a los 2 arcos), dando lugar a un heptágono.
- Una cinta de Möbius, se une el vértice con él mismo mediante un arco, el cual recorre la mitad de la cara de la cinta, obteniendo así un triángulo.

Finalmente tenemos la malla de polígonos diferenciables, la cual podemos convertir en una triangulación diferenciable dividiendo de forma adecuada los polígonos. \square

Hecho 2.3. Para toda estructura diferenciable E del toro punteado T'_E existe un subconjunto compacto cuyo complemento es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable usual.

Hecho 2.4. Toda estructura diferenciable E del toro $(S^1 \times S^1)_E$ es difeomorfa a la estructura usual del toro $S^1 \times S^1$.

Hecho 2.5. Sea E una estructura diferenciable en $D^1 \times \mathbb{R}$ tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo $g : (D^1 \times \mathbb{R})_E \rightarrow (D^1 \times \mathbb{R})_U$, con U la estructura usual, que además es la identidad entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.

Hecho 2.6. Sea E una estructura diferenciable en D^2 tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo $g : D^2_E \rightarrow D^2_U$, con U la estructura usual, que además es la identidad entorno a ∂D^2 .

2.2. Teorema de Alisamiento de Asas

Teorema 2.1. (de “alisamiento de asas”) Sea S una variedad diferenciable, entonces:

1. Un embebimiento $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en un entorno compacto del origen. Además, la isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto que contiene al anterior.
2. Un embebimiento $D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$ que es diferenciable entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno a $D^1 \times 0$. Dicha isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto de $(D^1 \times 0) \cup (\partial D^1 \times \mathbb{R})$.

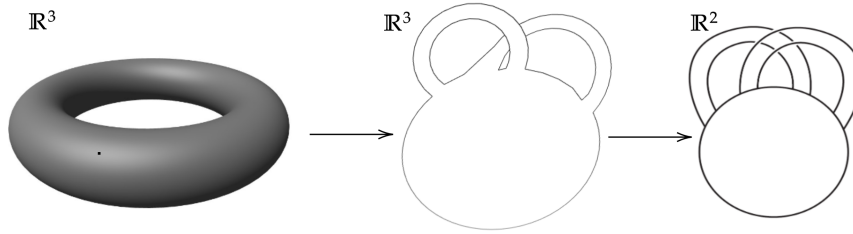
3. Un embebimiento $D^2 \rightarrow S$ que es diferenciable entorno a ∂D^2 puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en todo D^2 . La isotopía coincide con la identidad en un entorno de ∂D^2 .

Demostración. Voy a proceder a la demostración de cada uno de los apartados:

1. La idea de la demostración es arrastrar la estructura diferenciable de S (E_S) a una estructura diferenciable sobre el Toro (T_S), y aprovechar que en tales condiciones existe un difeomorfismo de T_S al Toro con la estructura diferenciable estándar (por el **Hecho 4**), que nos permitirá construir la isotopía deseada.

Vamos a utilizar el “truco del toro” de Kirby, para ello veremos el toro T como el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ con su estructura topológica y diferenciable estándar, tomando el 0 como imagen del $0 \in \mathbb{R}^2$. Eliminamos un punto del toro distinto del 0, y a esta nueva variedad la llamamos T' .

Consideremos una inmersión $q : T' \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable que fija el 0. Dicha inmersión se puede construir partiendo del embebimiento del toro punteado T' en un disco con dos “1-asas” en \mathbb{R}^3 y seguidamente “aplanando” la figura, es decir, llevar diferenciablemente el disco con asas a \mathbb{R}^2 . Las asas se embeben por separado ya que como se observa, se solapan en \mathbb{R}^2 .



Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ el embebimiento del enunciado, por el cual, haciendo “pull-back”, S induce una estructura diferenciable en \mathbb{R}^2 , que denotaremos E_1 . Por el mismo razonamiento pero para la inmersión q , \mathbb{R}^2 con la estructura E_1 induce una estructura diferenciable en T' que llamaremos E_2 .

Sabemos por el **Hecho 3** que existe un conjunto compacto en T'_{E_2} cuyo complemento es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$ con su estructura diferenciable estándar, equivalentemente es difeomorfo a $D^2 - (0,0)$ como abierto de \mathbb{R}^2 con su estructura diferenciable estándar. Si vemos el disco punteado como un subconjunto del plano complejo \mathbb{C} , el 0 se puede añadir de forma natural puesto que la estructura diferenciable usada hasta el momento es la usual en el cilindro (que induce la usual en D^2 , en el plano complejo y en la esfera de Riemann). Esto nos permite extender la estructura diferenciable E_2 de T' a T , la cual seguiremos llamando E_2 .

Por el **Hecho 4** sabemos que toda estructura diferenciable del toro ($T \equiv S^1 \times S^1$) es difeomorfa a la estándar. Por tanto, existe un difeomorfismo $g : T_{E_2} \rightarrow T$. Para po-

2. Resultados previos

der utilizar el Teorema de Levantamiento de aplicaciones de la teoría de recubridores, necesitamos normalizar dicha función g :

- Aplicando rotaciones en el toro T (lo vemos como $S^1 \times S^1$) podemos hacer que g lleve el 0 en el 0.
- Necesitamos que el homomorfismo g_* sea la identidad a nivel de grupos fundamentales para que el difeomorfismo g pueda ser levantado a un difeomorfismo $\hat{g} : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fijando el origen. Para ello basta con componer g con el automorfismo lineal $L \in GL_2(\mathbb{Z})$ apropiado, es decir, aquel tal que al componerlo con g_* queden fijos los dos generadores del grupo fundamental del toro topológico. La nueva g sigue llevando el 0 en el 0 y g_* es la identidad.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)_{E_1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \\ \pi_1(0, T_{E_1}) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(0, T) & \xrightarrow{L} & \pi_1(0, T) \end{array}$$

De esta forma construimos un difeomorfismo $\hat{g} : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como el levantamiento de g fijando el origen, que de forma natural es doblemente periódico.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & \searrow g \circ \pi & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)_{E_1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Identifiquemos \mathbb{R}^2 con el interior del disco unidad de \mathbb{R}^2 mediante una reparametrización radial que es la identidad entorno al 0, haciendo “pull-back” para cada disco de \mathbb{R}^2 para así obtener la estructura diferenciable inducida por E_1 , que llamaremos E . Entonces aplicando esta identificación en el dominio y la imagen de \hat{g} obtenemos $G : D_E^2 \rightarrow D^2$ automorfismo diferenciable, que sigue siendo \hat{g} entorno al 0 y tiende a ser la identidad en el borde (por la periodicidad $\|\hat{g}(x) - x\|$ está acotado para todo x , y por consiguiente al tender x a infinito las variaciones tienden a 0 con la reparametrización, es decir, $G(x)$ tiende a x). Podemos extender G a un homeomorfismo $G : \mathbb{R}_E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, siendo la identidad fuera del interior del disco.

Por el truco de Alexander, G es isotópica a la identidad. Se puede obtener la isotopía G_t variando el radio del disco de origen y destino ($G_t(x) = tG(\frac{x}{t})$ para $x \in D((0,0),t)$ y es la identidad fuera), por lo que G_0 es la identidad y $G_1 = G$.

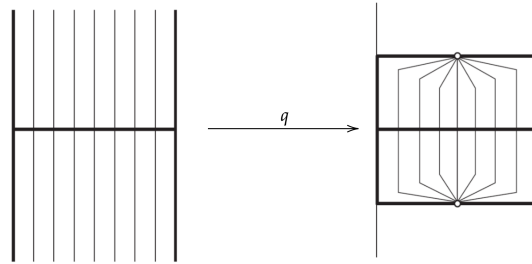
Definimos la isotopía que resuelva el problema como $h_t = h \circ G_t^{-1}$, teniendo que $h_0 = h$ por ser G_0 la identidad. Además, h_t se queda fija fuera del disco unidad ya que G_t es la identidad en dicho conjunto. También tenemos que $h_t(0) = h(0) = 0$ ya que

para todo t , $G_t^{-1} = \hat{g}^{-1}$ entorno al 0 y $\hat{g}(0) = 0$. Finalmente, h_1 es diferenciable entorno al 0 porque $G_1^{-1} = G^{-1} = \hat{g}^{-1}$ entorno al 0, que localmente es un difeomorfismo de la estructura usual de \mathbb{R}^2 en la inducida por S mediante h , que habíamos denotado por E_1 .

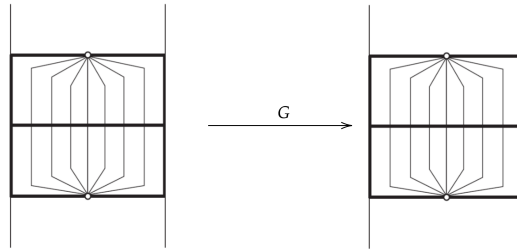
2. La idea es, al igual que en el punto anterior, encontrar un automorfismo diferenciable del dominio de h con diferentes estructuras diferenciables y restringirlo para que esté fijo donde lo solicite el enunciado.

Tenemos $h : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$ embebimiento diferenciable en un entorno del borde del dominio. Dicho embebimiento induce una estructura diferenciable E_1 en $D^1 \times \mathbb{R}$ que coincidirá con la estructura diferenciable estándar de $D^1 \times \mathbb{R}$ entorno al borde ya que h es diferenciable en el sentido usual ahí.

Por el **Hecho 5** tenemos que existe un difeomorfismo g entre la estructura inducida E_1 y la estructura estándar de $D^1 \times \mathbb{R}$ que es la identidad entorno al borde del conjunto. Tomamos el homeomorfismo $q : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ que es la identidad entorno $D^1 \times 0$. El comportamiento del homeomorfismo q se muestra en la siguiente figura:



Definimos $G : ((D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1))_{E_1} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ por $G = q \circ g \circ q^{-1}$, que como es la identidad entorno al borde del dominio, se puede extender a $G : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. No hay problema en los dos puntos de $0 \times \partial D^1$ ya que por como se define q , en ambos tiene límite y es la identidad. Su comportamiento entorno a $D^1 \times 0$ es igual que el de g (q es la identidad) y es la identidad fuera de $D^1 \times D^1$ y entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.



Podemos adaptar el truco de Alexander definiendo una isotopía G_t de homeomorfismos en \mathbb{R}^2 rescalando el cuadrado $D^1 \times D^1$ al igual que en el apartado anterior

2. Resultados previos

hicimos con el disco, de forma que G sea isotópica a la identidad en \mathbb{R}^2 .

Finalmente basta con definir $h_t = h \circ G_t^{-1}$. Cumple claramente que $h_0 = h$, h_1 es diferenciable en un entorno de $D^1 \times 0$ y h_t es la identidad en un entorno de $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.

3. Tenemos $h : D^2 \rightarrow S$ embebimiento que es diferenciable entorno al borde del dominio. Este embebimiento induce mediante “pull-back” la estructura diferenciable de S a D^2 que coincide con la estructura diferenciable estándar de D^2 en un entorno del borde, ya que h es diferenciable en dicha zona en el sentido usual.

Por el **Hecho 6** existe un difeomorfismo g entre D^2 con la estructura estándar y la inducida, que además es la identidad entorno al borde. Una adaptación del truco de Alexander al disco nos aporta la isotopía g_t de homeomorfismos de D^2 , donde t va variando el tamaño de los discos de dominio e imagen de g y extendiendo por la identidad, por lo que g_0 sería la identidad y $g_1 = g$. Tomando la isotopía $h_t = h \circ g_t$ tendríamos lo solicitado, ya que $h_0 = h$ y h_1 es igual que h en un entorno del borde y es diferenciable en todo el disco.

□

Corolario 2.1. *El primer apartado del teorema anterior sigue siendo cierto para un abierto W de \mathbb{R}^2 en vez de para todo \mathbb{R}^2 , con el objetivo de suavizarlo en un punto $p \in W$.*

Demostración. Se restringe h a $B_p \subset W$, una bola cerrada con centro p . Sabemos que existe $f : D^2 \rightarrow B_p$ difeomorfismo y $g = h \circ f$ se puede extender continuamente a \mathbb{R}^2 (al punto q fuera de D^2 se le asigna el mismo valor que al punto de intersección de la circunferencia con el segmento del origen a q). Aplicamos el teorema anterior a $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de manera que el entorno del origen V donde se altera g sea menor que la bola cerrada unidad, obteniendo así una isotopía g_t .

Definimos la isotopía deseada como $h_t(x) = (g_t|_{D^2} \circ f^{-1})(x)$ si $x \in B_p$ y $h_t(x) = h(x)$ si $x \notin B_p$. Está bien definida puesto que $g_t|_{D^2} \circ f^{-1}$ es la identidad fuera de un entorno de p contenido en B_p y simplemente extendemos por la identidad. Además, de forma natural $h_0 = h$ por ser $g_0 = g$ y h_1 es diferenciable en un entorno de p contenido en B_p por serlo g_1 en un entorno del origen. □

3. Resultados principales

3.1. Enunciados

Teorema A. *Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable.*

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Suponiendo ciertos los teoremas anteriores, es directa la obtención del siguiente resultado, ya que por A tenemos que toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable y por B sabemos que es única salvo difeomorfismos:

Corolario 3.1. *(Teorema clásico de Munkres) Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una única estructura diferenciable salvo difeomorfismos.*

3.2. Demostración del Teorema A

Teorema A. *Toda variedad topológica tiene una estructura diferenciable.*

Demostración. Sea S una variedad topológica sin borde, podemos coger un sistema coordinado de cartas finito $\{(V_i, h_i) / 1 \leq i \leq N\}$. Vamos a construir por inducción una estructura diferenciable en el conjunto $U_n = \cup_{i \leq n} h_i(\mathbb{R}^2)$, que por ser un sistema coordinado su límite debe de ser S , probando así el resultado. Cabe destacar que cada U_i contiene a todos los anteriores.

La inducción empieza tomando una carta cualquiera del sistema, $U_1 = V_1$ por ejemplo. Si se considera la variedad U_1 con el atlas $\{(h_1, U_1)\}$ entonces h_1 es diferenciable para ésta de forma trivial (se compone con la inversa y queda la identidad en \mathbb{R}^2).

Una vez arrancada la inducción, suponiendo cierto para el paso $n - 1$ vamos a extender la diferenciabilidad de U_{n-1} a U_n . Sea la carta (V_n, h_n) , tomamos entonces $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) = h_n^{-1}(U_{n-1} \cap h_n(V_n))$, que es un abierto de \mathbb{R}^2 por ser h_n un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 a V_n .

Tenemos $W \subset V_n$ abierto en \mathbb{R}^2 , por el **Hecho 1** sabemos que existe una triangulación geométrica suya y que al ser abierto (no tiene borde) al ir acercándose al borde los triángulos tienden a ser puntos. Queremos aplicar el “Teorema de alisamiento de asas” en los vértices de los triángulos, seguidamente en los lados y finalmente en el interior de cada uno (aplicar los 3 apartados del teorema de forma consecutiva), pero para ello es necesario partir de un embebimiento de \mathbb{R}^2 :

1. Para cada vértice p , elegimos una bola abierta lo suficientemente pequeña de forma que sus cierres no se corten (lo hacemos para todos los vértices de una vez), $B(p, \varepsilon_p) \subset W$ que es difeomorfo a \mathbb{R}^2 ($f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow B$ difeomorfismo, con $f_p(0) = p$). Tomamos

3. Resultados principales

$g = h_n \circ f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(W)$, que es un embebimiento por serlo $h_n|_B : B \rightarrow h_n(W)$ y f_p (la composición de embebimientos es un embebimiento).

Aplicamos el apartado 1 del Teorema de alisamiento de asas y obtenemos una \widehat{g} isotópica a la primera, que es diferenciable en O_p (entorno abierto del origen, con $0 = f_p^{-1}(p)$) y además queda fija fuera de otro entorno un poco mayor $O'_p \supset O_p$, con $\overline{f_p(O_p)} \subset B$. Si tomamos la función a trozos $\widehat{h}_n|_B = \widehat{g} \circ f_p^{-1}$ y $\widehat{h}_n|_{W-B} = h_n$, está bien definida porque en $B - f_p(O_p)$ al aplicar f_p^{-1} nos lleva a $\mathbb{R}^2 - O_p$, que es donde $\widehat{g} = g$, es decir:

$$\widehat{h}_n|_{B-f_p(O_p)} = \widehat{g} \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = g \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = h_n|_{B-f_p(O_p)}$$

por lo que la función a trozos está bien definida, es diferenciable entorno a p y no se altera fuera de B .

Éste paso se puede realizar de forma simultánea para todos los vértices, obteniendo así una \widehat{h}_n que es diferenciable entorno a todos los vértices y se mantiene h_n fuera de un entorno de cada vértice, algo mayor que el anterior (entornos con cierres disjuntos). Es por ello que para no cargar demasiado la notación se llamará a esa nueva función h_n .

2. Tenemos un h_n que es diferenciable entorno a los vértices de los triángulos y queremos usar el apartado 2 del Teorema de alisamiento de asas para extender la diferenciabilidad a un entorno tubular de los lados de los triángulos. Para ello, vemos que en cada lado, junto con los entornos de los vertices, podemos incluir un rectángulo abierto (conjunto abierto de W) que contenga a todo el segmento y cuyos segmentos laterales del rectángulo estén contenidos en ambas bolas. Este conjunto es difeomorfo a $D^1 \times \mathbb{R}$ y aplicando previamente dicho difeomorfismo cumplimos las hipótesis deseadas.

Al proseguir de forma semejante al apartado anterior, conseguimos una función h_n que es diferenciable en un entorno del conjunto de todos los lados, quedando fija fuera de un entorno algo más grande.

3. Buscamos finalmente una curva dentro del “esqueleto” de entornos de los lados de los triángulos que junto con su componente interior sea difeomorfa a la bola cerrada unidad, para aplicar el 3^{er} apartado del Teorema de alisamiento de asas y así obtener una h_n diferenciable en todo W .

La curva buscada debe ser diferenciable, cerrada y simple, para así decir que es una curva de Jordan y aplicar el Teorema de Carathéodory. Como consecuencia, sabemos que su componente interior es difeomorfa a la bola unidad de \mathbb{R}^2 (si el teorema de Análisis Complejo lo trasladamos a su equivalente en \mathbb{R}^2). Podemos reducir el problema a buscar dicha curva para el entorno tubular de un triángulo equilátero, ya que es difeomorfo al de un triángulo cualquiera. Además, podemos seguir simplificándolo, aportando únicamente una curva no cerrada cuyos extremos se puedan pegar consecutivamente, siendo infinitamente derivable en los puntos donde se unen.

Haciendo uso de una función meseta f que vale 0 en \mathbb{R}^- y 1 a partir de $\epsilon > 0$, si tomamos $g(x) = tg(\frac{\pi}{3})xf(x)$ en el intervalo $[-1, \epsilon]$, tenemos que $g(-1) = 0$ y $g(\epsilon) = tg(\frac{\pi}{3})\epsilon$ al igual que sus derivadas, por lo que si vamos alternando $g(x)$ y $g(-x)$ mediante rotaciones y traslaciones, tendremos una curva α diferenciable (suavización del triángulo equilátero).

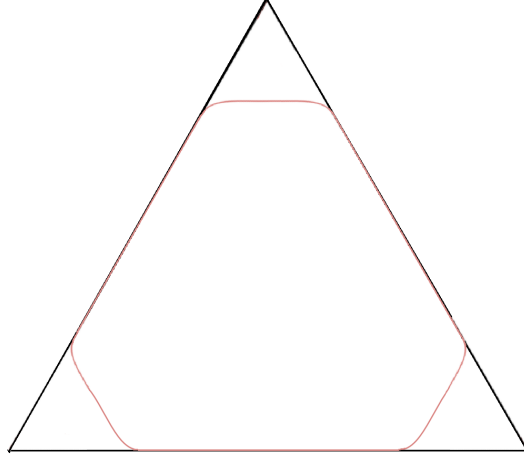


Figura 3.1.: Curva de Jordan cercana al triángulo

Se puede observar que es válido $\forall \epsilon > 0$ y que al hacer tender ϵ a 0, la curva será el propio triángulo equilátero. Es por ello que podemos tomar el ϵ lo suficientemente pequeño como para que la curva α quepa en el entorno tubular y siga siendo una curva de Jordan.

Ya tenemos un difeomorfismo entre la bola unidad y la componente interior de cada uno de los triángulos, que contienen un abierto conexo en el cual la función no es todavía diferenciable. Estamos en las condiciones del punto 3 del Teorema de alisamiento de asas, así que procediendo de igual forma que en los apartados anteriores obtenemos una h_n totalmente diferenciable en W .

Cabe destacar que en el borde de W la aplicación se queda intacta, ya que en todo momento se está trabajando en el interior de W (es abierto) y en todo paso de la "suavización" de h_n siempre se deja inalterado el espacio complemento de un entorno mayor al aquel donde se obtiene la diferenciable. Es por ello que se puede extender el h_n obtenido a todo \mathbb{R}^2 junto con el original, porque está bien definido, quedando intacta en $\mathbb{R}^2 - W$. \square

3.3. Demostración del Teorema B

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : S \rightarrow S'$ homeomorfismo entre variedades diferenciales 2-dimensionales, se pueden dar 2 casos:

3. Resultados principales

1. $\partial S = \phi$, por lo que podemos utilizar el **Hecho 2**, que nos aporta una triangulación diferenciable. Utilizamos el sistema coordenado que relaciona cada triángulo de S con un triángulo clásico de \mathbb{R}^2 , cuyos embebimientos llamaremos h_i . Si componemos f con h_i ($g_i = f \circ h_i$), tenemos un embebimiento $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$.

Aplicando los apartados del Teorema de alisamiento de asas de igual forma que en la demostración del Teorema A, para el triángulo T_i de S asociado a h_i , utilizando g_i obtenemos que f es primero isotópico a un homeomorfismo diferenciable en los vértices del triángulo, seguidamente también en las aristas y por último en todo el triángulo, dejando fijo el complementario. Esto lo hacemos para cada pareja (T_i, h_i) , para finalmente obtener una isotopía a un homeomorfismo diferenciable en toda la variedad.

2. $\partial S \neq \phi$, (PENDIENTE DE ESTUDIO) podemos considerar un collar diferenciable de ∂S en S e isotopar f a un homeomorfismo diferenciable en un collar más pequeño, independientemente del difeomorfismo elegido para el primer collar. Dicha isotopía se obtendrá utilizando el Teorema de alisamiento de asas, tal y como se ha hecho en el apartado anterior. La isotopía dejará fija a f fuera del collar.

Lo hacemos de igual forma para la inversa, obteniendo una isotopía que deja fija a f^{-1} fuera de un collar del borde de S' , siendo diferenciable en otro collar contenido en el anterior.

Ahora partimos de un homeomorfismo diferenciable en un entorno del borde de S , con inversa diferenciable en un entorno del borde de S' . Aplicando lo utilizado en el apartado anterior podemos obtener una isotopía a \hat{f} , que es un difeomorfismo de S a S' , ya que se puede tomar una triangulación en los interiores de las superficies (entendemos por interior a la superficie menos su borde).

□

Parte II.

Visualización de superficies

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.

4. Segundo capítulo

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reasons to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

(Leonard Euler)

4.1. Primera sección

A. Instalación del software

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_instalacion.tex`

B. Guía de uso del programa

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_uso.tex`

Conclusiones

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/conclusiones.tex

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

