



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Presentado por:

Norberto Fernández de la Higuera

Tutor:

Francisco José López Fernández

*Departamento de Geometría y Topología*

Carlos Ureña Almagro

*Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*

Curso académico 2020-2021



# Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Norberto Fernández de la Higuera

Norberto Fernández de la Higuera *Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de  
tutorización**

Francisco José López Fernández  
*Departamento de Geometría y Topología*

Carlos Ureña Almagro  
*Departamento de Lenguajes y Sistemas  
Informáticos*

Doble Grado en Ingeniería  
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Norberto Fernández de la Higuera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 21 de julio de 2021

Fdo: Norberto Fernández de la Higuera



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Summary</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>Objetivos</b>	<b>XV</b>
<b>I. Teorema clásico de Munkres</b>	<b>1</b>
1. Conceptos previos	3
2. Resultados previos	5
2.1. Hechos utilizados para los teoremas . . . . .	5
2.2. Teorema de Alisamiento de Asas . . . . .	6
3. Resultados principales	11
3.1. Enunciados . . . . .	11
3.2. Demostración del Teorema A . . . . .	11
3.3. Demostración del Teorema B . . . . .	14
<b>II. Visualización de superficies</b>	<b>17</b>
4. Segundo capítulo	19
4.1. Primera sección . . . . .	19
A. Instalación del software	21
B. Guía de uso del programa	23
<b>Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>Glosario</b>	<b>27</b>





## Resumen

Resumen en español (recomendado de 800 a 1500 palabras).

Fichero: preliminares/resumen.tex



## Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex



## Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex



## Objetivos

Objetivos propuestos junto con los métodos inicialmente previsto).

Objetivos alcanzados junto con los métodos usados finalmente.

Se pueden indicar los aspectos formativos previos más usados.





## **Parte I.**

### **Teorema clásico de Munkres**

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.



# 1. Conceptos previos

**Definición 1.1.** Una **variedad topológica** 2-dimensional es un espacio de Hausdorff localmente Euclídeo que verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, su topología tiene una base numerable.

**Definición 1.2.** Un **embebimiento o encaje** es una aplicación continua e inyectiva de un espacio topológico en otro. La restricción de su imagen aporta un homeomorfismo.

**Definición 1.3.** Un **sistema coordenado** sobre  $S$  es un embebimiento  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ .

**Definición 1.4.** Sea  $S$  un espacio topológico Hausdorff, un **atlas 2 – dimensional** sobre  $S$  es una familia de cartas  $E = \{h_i\}_{i \in \Lambda}$  verificando:

1.  $\{h_i(\mathbb{R}^2)\}_{i \in \Lambda}$  es un recubrimiento abierto de  $S$ .
2. Si  $h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$  entonces  $h_j^{-1} \circ h_i : h_i^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2)) \rightarrow h_j^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2))$  es un difeomorfismo.

**Definición 1.5.** Sea  $S$  un espacio topológico Hausdorff, una **estructura diferenciable 2 – dimensional** sobre  $S$  es un atlas maximal.

**Definición 1.6.** Una **variedad diferenciable** 2-dimensional es una variedad topológica 2 – dimensional  $S$  junto con una estructura diferenciable  $E$ , es decir, el par  $(S, E)$ .

**Definición 1.7.** Una **inmersión** es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cuya derivada es inyectiva en todo punto.

**Definición 1.8.** Sean  $f$  y  $g$  homeomorfismos entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ . Una **isotopía** es una homotopía entre  $f$  y  $g$ ,  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , con:

1.  $H_0 = f$ .
2.  $H_1 = g$ .
3.  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $H_t$  es un homeomorfismo.

**Definición 1.9.** Sean  $f$  y  $g$  embebimientos entre las variedades  $N$  e  $M$ . Una **isotopía de embebimientos** es un homeomorfismo  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$  cumpliendo:

1.  $H(y, 0) = (y, 0) \forall y \in M$ .
2.  $H(f(x), 1) = (g(x), 1) \forall x \in N$ .
3.  $H(M \times \{t\}) = M \times \{t\} \forall t \in [0, 1]$ .

Equivalentemente podemos decir que  $H$  es la isotopía de  $Id_M$  en  $g \circ f^{-1}$  donde tenga sentido.



## 2. Resultados previos

### 2.1. Hechos utilizados para los teoremas

A continuación se enuncian los “hechos” utilizados para las demostraciones de los teoremas. Su demostración detallada en varios casos se escapa de los límites del proyecto, en cuyos casos se aportarán demostraciones que suponen ciertos aquellos elementos propios de la teoría de Morse.

**Hecho 2.1.** *Todo  $W \subset \mathbb{R}^2$  abierto tiene una triangulación clásica tal que el diámetro euclídeo de los triángulos se aproxima a 0 en la frontera topológica de  $W$ .*

*Demostración.* Tomamos la cuadrícula generada de forma natural por  $\mathbb{Z}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$ . Vamos a definir de forma incremental el conjunto de cuadrados que cubren todo  $W$ .

Tomamos primero todos los cuadrados (cerrados) que estén contenidos estrictamente en  $W$ . Vamos a llamar  $U$  a la parte cubierta por el conjunto de cuadrados actual.

Dado un  $p \in W$  y  $p \notin U$  entonces existe un cuadrado que lo contiene pero que no está contenido estrictamente en  $W$ . Por ser  $W$  abierto sabemos que para  $p$  existe una bola abierta  $B \subset W$  que lo contiene. De forma equivalente podemos subdividir el cuadrado inicial en 4 cuadrados iguales, 8 ... y así sucesivamente hasta encontrar una subdivisión en la que algún cuadrado contenga a  $p$  y sea lo suficientemente pequeño como para que esté contenido en la bola  $B \subset W$ . Añadimos al conjunto todos los cuadrados anteriores que estén contenidos en  $W$ . Realizamos esta operación de manera indefinida.

Una vez definido el conjunto de cuadrados, podemos definir la triangulación como los triángulos resultantes de dividir por la diagonal dichos cuadrados. De esta forma tenemos una triangulación  $T$  tal que la unión de sus triángulos,  $U$ , está contenida en  $W$  pero todo punto  $p \in W$  está en algún triángulo, por lo que  $U = W$ . Además, cuando tomamos  $p$  tendiendo a  $\partial W$ , la bola  $B \subset W$  que lo contiene tiene radio  $\epsilon$  tendiendo a 0, es decir, el cuadrado necesario para cubrirlo correctamente tiende a 0, y como consecuencia los dos triángulos de los que se compone también.  $\square$

**Hecho 2.2.** *Toda variedad diferenciable  $S$  tiene una triangulación diferenciable.*

*Demostración.* Vamos a contruir una malla de polígonos diferenciables, que nos dará paso de forma trivial a una malla de triángulos diferenciables.

Podemos tomar  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  función de Morse apropiada, es decir, los inversos de compactos son compactos y todos sus puntos críticos están a distintos niveles (es posible porque están aislados). Cortamos  $S$  por los niveles de puntos no críticos, para separar los puntos críticos entre sí, obteniendo así una descomposición de  $S$  en piezas difeomorfas a:

- Discos, tiene un punto crítico de orden 0 o 2.

## 2. Resultados previos

- Anillos, no tiene puntos críticos.
- “Pantalones”, o de forma equivalente, medio toro al que se le ha quitado un disco en el interior. Tiene un punto crítico de orden 1.
- “Pantalones cruzados”, o también se pueden ver como medio toro suma conexa con un espacio proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ . Por ello, se puede dividir en unos “pantalones” normales y una cinta de Möbius. Tiene un punto crítico de orden 1.

Por la teoría de Morse tenemos una división de  $S$  en conjuntos difeomorfos a alguno de los anteriores, todos ellos pegados por circunferencias (los bordes de los conjuntos descritos). Podemos obtener una malla añadiendo un vértice a cada circunferencia y seguidamente si es:

- Un disco, se toma el centro y se divide el disco en 3 partes, teniendo 3 sectores difeomorfos a un triángulo.
- Un anillo, se unen los 2 vértices (uno de cada circunferencia del borde) mediante un arco, obteniendo así un cuadrilátero.
- Unos “pantalones”, se unen los 3 vértices mediante 2 arcos (un vértice común a los 2 arcos), dando lugar a un heptágono.
- Una cinta de Möbius, se une el vértice con él mismo mediante un arco, el cual recorre la mitad de la cara de la cinta, obteniendo así un triángulo.

Finalmente tenemos la malla de polígonos diferenciables, la cual podemos convertir en una triangulación diferenciable dividiendo de forma adecuada los polígonos.  $\square$

**Hecho 2.3.** Para toda estructura diferenciable  $E$  del toro punteado  $T'_E$  existe un subconjunto compacto cuyo complemento es difeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$  con la estructura diferenciable usual.

**Hecho 2.4.** Toda estructura diferenciable  $E$  del toro  $(S^1 \times S^1)_E$  es difeomorfa a la estructura usual del toro  $S^1 \times S^1$ .

**Hecho 2.5.** Sea  $E$  una estructura diferenciable en  $D^1 \times \mathbb{R}$  tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo  $g : (D^1 \times \mathbb{R})_E \rightarrow (D^1 \times \mathbb{R})_U$ , con  $U$  la estructura usual, que además es la identidad entorno a  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ .

**Hecho 2.6.** Sea  $E$  una estructura diferenciable en  $D^2$  tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo  $g : D^2_E \rightarrow D^2_U$ , con  $U$  la estructura usual, que además es la identidad entorno a  $\partial D^2$ .

## 2.2. Teorema de Alisamiento de Asas

**Teorema 2.1.** (de “alisamiento de asas”) Sea  $S$  una variedad diferenciable, entonces:

1. Un embebimiento  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en un entorno compacto del origen. Además, la isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto que contiene al anterior.
2. Un embebimiento  $D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$  que es diferenciable entorno a  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno a  $D^1 \times 0$ . Dicha isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto de  $(D^1 \times 0) \cup (\partial D^1 \times \mathbb{R})$ .

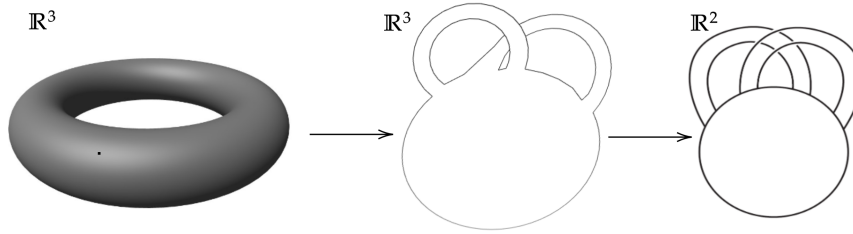
3. Un embebimiento  $D^2 \rightarrow S$  que es diferenciable entorno a  $\partial D^2$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en todo  $D^2$ . La isotopía coincide con la identidad en un entorno de  $\partial D^2$ .

*Demostración.* Voy a proceder a la demostración de cada uno de los apartados:

1. La idea de la demostración es arrastrar la estructura diferenciable de  $S$  ( $E_S$ ) a una estructura diferenciable sobre el Toro ( $T_S$ ), y aprovechar que en tales condiciones existe un difeomorfismo de  $T_S$  al Toro con la estructura diferenciable estándar (por el **Hecho 4**), que nos permitirá construir la isotopía deseada.

Vamos a utilizar el “truco del toro” de Kirby, para ello veremos el toro  $T$  como el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  con su estructura topológica y diferenciable estándar, tomando el 0 como imagen del  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Eliminamos un punto del toro distinto del 0, y a esta nueva variedad la llamamos  $T'$ .

Consideremos una inmersión  $q : T' \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciable que fija el 0. Dicha inmersión se puede construir partiendo del embebimiento del toro punteado  $T'$  en un disco con dos “1-asas” en  $\mathbb{R}^3$  y seguidamente “aplanando” la figura, es decir, llevar diferenciablemente el disco con asas a  $\mathbb{R}^2$ . Las asas se embeben por separado ya que como se observa, se solapan en  $\mathbb{R}^2$ .



Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  el embebimiento del enunciado, por el cual, haciendo “pull-back”,  $S$  induce una estructura diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , que denotaremos  $E_1$ . Por el mismo razonamiento pero para la inmersión  $q$ ,  $\mathbb{R}^2$  con la estructura  $E_1$  induce una estructura diferenciable en  $T'$  que llamaremos  $E_2$ .

Sabemos por el **Hecho 3** que existe un conjunto compacto en  $T'_{E_2}$  cuyo complemento es difeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$  con su estructura diferenciable estándar, equivalentemente es difeomorfo a  $D^2 - (0,0)$  como abierto de  $\mathbb{R}^2$  con su estructura diferenciable estándar. Si vemos el disco punteado como un subconjunto del plano complejo  $\mathbb{C}$ , el 0 se puede añadir de forma natural puesto que la estructura diferenciable usada hasta el momento es la usual en el cilindro (que induce la usual en  $D^2$ , en el plano complejo y en la esfera de Riemann). Esto nos permite extender la estructura diferenciable  $E_2$  de  $T'$  a  $T$ , la cual seguiremos llamando  $E_2$ .

Por el **Hecho 4** sabemos que toda estructura diferenciable del toro ( $T \equiv S^1 \times S^1$ ) es difeomorfa a la estándar. Por tanto, existe un difeomorfismo  $g : T_{E_2} \rightarrow T$ . Para po-

## 2. Resultados previos

der utilizar el Teorema de Levantamiento de aplicaciones de la teoría de recubridores, necesitamos normalizar dicha función  $g$ :

- Aplicando rotaciones en el toro  $T$  (lo vemos como  $S^1 \times S^1$ ) podemos hacer que  $g$  lleve el 0 en el 0.
- Necesitamos que el homomorfismo  $g_*$  sea la identidad a nivel de grupos fundamentales para que el difeomorfismo  $g$  pueda ser levantado a un difeomorfismo  $\hat{g} : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fijando el origen. Para ello basta con componer  $g$  con el automorfismo lineal  $L \in GL_2(\mathbb{Z})$  apropiado, es decir, aquel tal que al componerlo con  $g_*$  queden fijos los dos generadores del grupo fundamental del toro topológico. La nueva  $g$  sigue llevando el 0 en el 0 y  $g_*$  es la identidad.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)_{E_1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \\ \pi_1(0, T_{E_1}) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(0, T) & \xrightarrow{L} & \pi_1(0, T) \end{array}$$

De esta forma construimos un difeomorfismo  $\hat{g} : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como el levantamiento de  $g$  fijando el origen, que de forma natural es doblemente periódico.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & \searrow g \circ \pi & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)_{E_1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Identifiquemos  $\mathbb{R}^2$  con el interior del disco unidad de  $\mathbb{R}^2$  mediante una reparametrización radial que es la identidad entorno al 0, haciendo “pull-back” para cada disco de  $\mathbb{R}^2$  para así obtener la estructura diferenciable inducida por  $E_1$ , que llamaremos  $E$ . Entonces aplicando esta identificación en el dominio y la imagen de  $\hat{g}$  obtenemos  $G : D_E^2 \rightarrow D^2$  automorfismo diferenciable, que sigue siendo  $\hat{g}$  entorno al 0 y tiende a ser la identidad en el borde (por la periodicidad  $\|\hat{g}(x) - x\|$  está acotado para todo  $x$ , y por consiguiente al tender  $x$  a infinito las variaciones tienden a 0 con la reparametrización, es decir,  $G(x)$  tiende a  $x$ ). Podemos extender  $G$  a un homeomorfismo  $G : \mathbb{R}_E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo la identidad fuera del interior del disco.

Por el truco de Alexander,  $G$  es isotópica a la identidad. Se puede obtener la isotopía  $G_t$  variando el radio del disco de origen y destino ( $G_t(x) = tG(\frac{x}{t})$  para  $x \in D((0,0),t)$  y es la identidad fuera), por lo que  $G_0$  es la identidad y  $G_1 = G$ .

Definimos la isotopía que resuelva el problema como  $h_t = h \circ G_t^{-1}$ , teniendo que  $h_0 = h$  por ser  $G_0$  la identidad. Además,  $h_t$  se queda fija fuera del disco unidad ya que  $G_t$  es la identidad en dicho conjunto. También tenemos que  $h_t(0) = h(0) = 0$  ya que

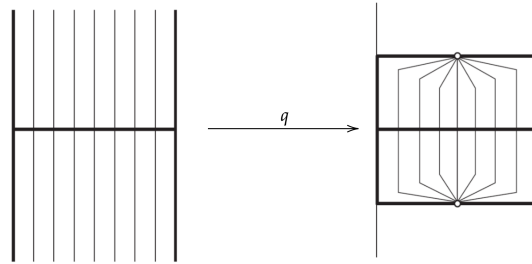


para todo  $t$ ,  $G_t^{-1} = \hat{g}^{-1}$  entorno al 0 y  $\hat{g}(0) = 0$ . Finalmente,  $h_1$  es diferenciable entorno al 0 porque  $G_1^{-1} = G^{-1} = \hat{g}^{-1}$  entorno al 0, que localmente es un difeomorfismo de la estructura usual de  $\mathbb{R}^2$  en la inducida por  $S$  mediante  $h$ , que habíamos denotado por  $E_1$ .

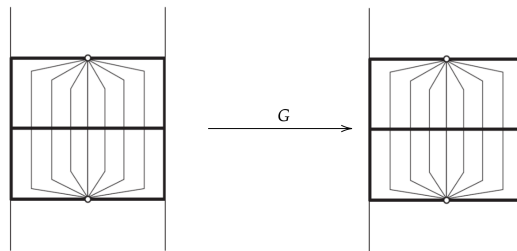
2. La idea es, al igual que en el punto anterior, encontrar un automorfismo diferenciable del dominio de  $h$  con diferentes estructuras diferenciables y restringirlo para que esté fijo donde lo solicite el enunciado.

Tenemos  $h : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$  embebimiento diferenciable en un entorno del borde del dominio. Dicho embebimiento induce una estructura diferenciable  $E_1$  en  $D^1 \times \mathbb{R}$  que coincidirá con la estructura diferenciable estándar de  $D^1 \times \mathbb{R}$  entorno al borde ya que  $h$  es diferenciable en el sentido usual ahí.

Por el **Hecho 5** tenemos que existe un difeomorfismo  $g$  entre la estructura inducida  $E_1$  y la estructura estándar de  $D^1 \times \mathbb{R}$  que es la identidad entorno al borde del conjunto. Tomamos el homeomorfismo  $q : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$  que es la identidad entorno  $D^1 \times 0$ . El comportamiento del homeomorfismo  $q$  se muestra en la siguiente figura:



Definimos  $G : ((D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1))_{E_1} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$  por  $G = q \circ g \circ q^{-1}$ , que como es la identidad entorno al borde del dominio, se puede extender a  $G : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . No hay problema en los dos puntos de  $0 \times \partial D^1$  ya que por como se define  $q$ , en ambos tiene límite y es la identidad. Su comportamiento entorno a  $D^1 \times 0$  es igual que el de  $g$  ( $q$  es la identidad) y es la identidad fuera de  $D^1 \times D^1$  y entorno a  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ .



Podemos adaptar el truco de Alexander definiendo una isotopía  $G_t$  de homomorfismos en  $\mathbb{R}^2$  rescalando el cuadrado  $D^1 \times D^1$  al igual que en el apartado anterior

## 2. Resultados previos

hicimos con el disco, de forma que  $G$  sea isotópica a la identidad en  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente basta con definir  $h_t = h \circ G_t^{-1}$ . Cumple claramente que  $h_0 = h$ ,  $h_1$  es diferenciable en un entorno de  $D^1 \times 0$  y  $h_t$  es la identidad en un entorno de  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ .

3. Tenemos  $h : D^2 \rightarrow S$  embebimiento que es diferenciable entorno al borde del dominio. Este embebimiento induce mediante “pull-back” la estructura diferenciable de  $S$  a  $D^2$  que coincide con la estructura diferenciable estándar de  $D^2$  en un entorno del borde, ya que  $h$  es diferenciable en dicha zona en el sentido usual.

Por el **Hecho 6** existe un difeomorfismo  $g$  entre  $D^2$  con la estructura estándar y la inducida, que además es la identidad entorno al borde. Una adaptación del truco de Alexander al disco nos aporta la isotopía  $g_t$  de homeomorfismos de  $D^2$ , donde  $t$  va variando el tamaño de los discos de dominio e imagen de  $g$  y extendiendo por la identidad, por lo que  $g_0$  sería la identidad y  $g_1 = g$ . Tomando la isotopía  $h_t = h \circ g_t$  tendríamos lo solicitado, ya que  $h_0 = h$  y  $h_1$  es igual que  $h$  en un entorno del borde y es diferenciable en todo el disco.

□

**Corolario 2.1.** *El primer apartado del teorema anterior sigue siendo cierto para un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^2$  en vez de para todo  $\mathbb{R}^2$ , con el objetivo de suavizarlo en un punto  $p \in W$ .*

*Demostración.* Se restringe  $h$  a  $B_p \subset W$ , una bola cerrada con centro  $p$ . Sabemos que existe  $f : D^2 \rightarrow B_p$  difeomorfismo y  $g = h \circ f$  se puede extender continuamente a  $\mathbb{R}^2$  (al punto  $q$  fuera de  $D^2$  se le asigna el mismo valor que al punto de intersección de la circunferencia con el segmento del origen a  $q$ ). Aplicamos el teorema anterior a  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de manera que el entorno del origen  $V$  donde se altera  $g$  sea menor que la bola cerrada unidad, obteniendo así una isotopía  $g_t$ .

Definimos la isotopía deseada como  $h_t(x) = (g_t|_{D^2} \circ f^{-1})(x)$  si  $x \in B_p$  y  $h_t(x) = h(x)$  si  $x \notin B_p$ . Está bien definida puesto que  $g_t|_{D^2} \circ f^{-1}$  es la identidad fuera de un entorno de  $p$  contenido en  $B_p$  y simplemente extendemos por la identidad. Además, de forma natural  $h_0 = h$  por ser  $g_0 = g$  y  $h_1$  es diferenciable en un entorno de  $p$  contenido en  $B_p$  por serlo  $g_1$  en un entorno del origen. □

## 3. Resultados principales

### 3.1. Enunciados

**Teorema A.** *Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable.*

**Teorema B.** *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Suponiendo ciertos los teoremas anteriores, es directa la obtención del siguiente resultado, ya que por A tenemos que toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable y por B sabemos que es única salvo difeomorfismos:

**Corolario 3.1.** *(Teorema clásico de Munkres) Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una única estructura diferenciable salvo difeomorfismos.*

### 3.2. Demostración del Teorema A

**Teorema A.** *Toda variedad topológica tiene una estructura diferenciable.*

*Demostración.* Sea  $S$  una variedad topológica, podemos coger un atlas  $\{h_i | 1 \leq i \leq N\}$  con  $N \in \mathbb{N}$  si es finito o  $N = \infty$  si no lo es. Vamos a construir por inducción una estructura diferenciable en el conjunto  $U_n = \cup_{i \leq n} h_i(\mathbb{R}^2)$ , que por ser un sistema coordinado su límite debe de ser  $S$ , probando así el resultado. Cabe destacar que cada  $U_i$  contiene a todos los anteriores.

La inducción empieza tomando una carta cualquiera del sistema,  $U_1 = h_1(\mathbb{R}^2)$  por ejemplo. Si se considera la variedad  $U_1$  con el atlas  $\{h_1\}$  entonces  $h_1$  es diferenciable para ésta de forma trivial (se compone con la inversa y queda la identidad en  $\mathbb{R}^2$ ).

Una vez arrancada la inducción, suponiendo cierto para el paso  $n - 1$  vamos a extender la diferenciabilidad de  $U_{n-1}$  a  $U_n$ . Sea la carta  $h_n$ , tomamos entonces  $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) = h_n^{-1}(U_{n-1} \cap h_n(\mathbb{R}^2))$ , que es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  por ser  $h_n$  continua.

Tenemos  $W \subset \mathbb{R}^2$  abierto, por el **Hecho 1** sabemos que existe una triangulación geométrica suya y al ir acercándose a la frontera topológica los triángulos convergen a puntos. Queremos aplicar el “Teorema de alisamiento de asas” en los vértices de los triángulos, seguidamente en los lados y finalmente en el interior de cada uno (aplicar los 3 apartados del teorema de forma consecutiva), pero para ello es necesario partir de un embebimiento de  $\mathbb{R}^2$ :

1. Para todos y cada uno de los vértices de la triangulación elegimos una bola  $B(p, \epsilon_p) \subset W$  cuyos cierres topológicos en  $\mathbb{R}^2$  no se corten mutuamente.  $B(p, \epsilon_p)$  es abierto y queremos obtener  $\hat{h}$  diferenciable entorno a  $p$ .

Podemos aplicar el Corolario del apartado 1 del Teorema de Alisamiento de Asas

### 3. Resultados principales

ya que cumplimos todas las hipótesis necesarias. Así obtenemos una  $\hat{h}$  isotópica a  $h$ , que es diferenciable en  $O_p$  entorno abierto de  $p$  y además queda fija fuera de otro entorno un poco mayor  $O'_p \supset O_p$ , con  $O'_p \subset B(p, \epsilon_p)$ .

De manera acumulativa, este procedimiento se puede realizar simultáneamente en todos los vértices  $p$  en la triangulación de  $W$ . Esto prueba que  $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  es isotópica a un homeomorfismo  $\hat{h}_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  que es diferenciable, como aplicación sobre la superficie diferenciable  $U_{n-1}$ , en un entorno  $O_p \subset W$  alrededor de cada vértice  $p$  de la triangulación de  $W$ . Además la isotopía coincide con  $h_n$  fuera de entornos  $O'_p \subset W$  mayores que  $O_p$  para cada  $p$ , disjuntos 2 a 2.

2. Tenemos por el paso anterior un  $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  isotópico al original en las condiciones explicadas, y que es diferenciable como aplicación  $W \rightarrow U_{n-1}$  entorno a los vértices de la triangulación de  $W$ . Queremos utilizar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas para generar otra isotopía que nos lleve  $h_n$  a otro homeomorfismo (al que le daremos el mismo nombre) cuya restricción a  $W \rightarrow U_{n-1}$  sea diferenciable además entorno a los lados de la triangulación anterior, coincidiendo con el  $h_n$  original fuera de un entorno del 1-esqueleto de esa triangulación. Para ello, consideramos para cada lado  $l$  de la triangulación de  $W$  un subconjunto  $R_l$  (rectángulo) dentro de  $W$  que sea difeomorfo a  $D^1 \times \mathbb{R}$ , cumpliendo:

- a)  $R_l$  corta a  $l$  en un segmento compacto y es disjunto con cualquier otro lado de la triangulación de  $W$ . En particular,  $R_l$  no contiene ningún vértice de la triangulación de  $W$ .
- b) Si  $p_1$  y  $p_2$  son los vértices extremos de  $l$ , una componente del borde de  $R_l$  está contenida en  $O_{p_1}$  y la otra en  $O_{p_2}$ , es decir,  $h_n$  es diferenciable en 2 componentes de  $\partial R_l$ .
- c) Los cierres de los rectángulos  $R_l$  en  $\mathbb{R}^2$  son disjuntos 2 a 2 y están contenidos en  $W$ .

Ahora es evidente como en el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas nos produce la isotopía deseada realizando el trabajo simultáneamente en todos los rectángulos  $R_l$ , generando el nuevo  $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  deseado.

3. El tercer paso es similar a los anteriores, pero ahora usando el apartado 3 del Teorema de Alisamiento de Asas. Lo que hacemos es considerar para cada triángulo  $T$  de la triangulación de  $W$  un dominio de Jordan  $D_T$  satisfaciendo:

- a)  $D_T \subset \hat{T}$ .
- b)  $h_n : W \rightarrow U_{n-1}$  es diferenciable sobre  $T - \mathring{D}_T$ .
- c) Los  $D_T$  son disjuntos dos a dos.

Aplicando el Teorema de Carathéodory obtenemos que es difeomorfo a la bola unidad y por tanto podemos proceder de manera similar a los apartados anteriores.

A continuación producimos otra isotopía que nos lleve el  $h_n$  generado en el apartado 2 a otro homeomorfismo (al que daremos el mismo nombre) cuya restricción  $W \rightarrow U_{n-1}$  sea diferenciable sobre  $D_T$ , coincidiendo en cada instante con la  $h_n$  anterior

en un entorno de  $\partial D_T$  y de hecho fuera de  $D_T$ , para cada triángulo  $T$ . Esto concluiría la prueba.

Para probar la existencia de  $D_T$  vamos a definir la curva de Jordan cuyo interior es de forma trivial un dominio de Jordan, que será dicho  $D_T$ . La curva debe ser diferenciable, cerrada y simple, que es la caracterización de una curva de Jordan. Reducimos el problema a buscar dicha curva para el entorno tubular de un triángulo equilátero, ya que es difeomorfo al de un triángulo cualquiera. Podemos simplificarlo más aportando únicamente una curva no cerrada cuyos extremos se puedan pegar consecutivamente, siendo infinitamente derivable en los puntos donde se unen.

Haciendo uso de una función meseta  $f$  que vale 0 en  $\mathbb{R}^-$  y 1 a partir de  $\epsilon > 0$ , si tomamos  $g(x) = tg(\frac{\pi}{3})xf(x)$  en el intervalo  $[-1, \epsilon]$ , tenemos que  $g(-1) = 0$  y  $g(\epsilon) = tg(\frac{\pi}{3})\epsilon$  al igual que sus derivadas, por lo que si vamos alternando  $g(x)$  y  $g(-x)$  mediante rotaciones y traslaciones, tendremos una curva  $\alpha$  diferenciable (suavización del triángulo equilátero).

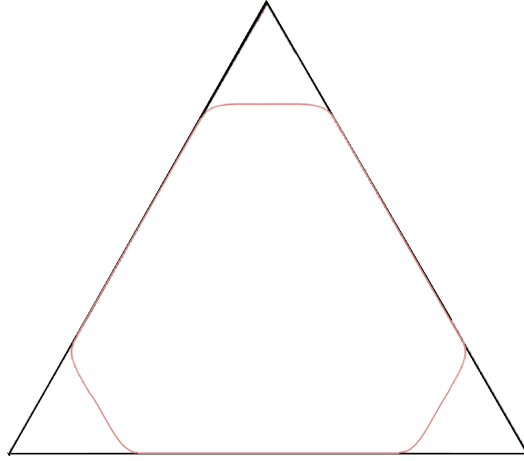


Figura 3.1.: Curva de Jordan cercana al triángulo

Se puede observar que es válido  $\forall \epsilon > 0$  y que al hacer tender  $\epsilon$  a 0, la curva será el propio triángulo equilátero. Es por ello que podemos tomar el  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño como para que la curva  $\alpha$  quepa en el entorno tubular y siga siendo una curva de Jordan. Como exigimos que  $D_T \subset \mathring{T}$  podemos aplicar a la curva un factor de escala para así no contener ningún punto del borde del triángulo  $T$ . Además, de forma evidente obtenemos que los dominios  $D_T$  son disjuntos 2 a 2.

Todas las isotopías de los pasos anteriores coinciden por extensión continua con el homeomorfismo  $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  original en la frontera de  $W$  en  $\mathbb{R}^2$  por construcción, ya que el diámetro de los triángulos en  $W$  tiende a 0 al acercarnos a la frontera. Por tanto pueden ser extendidas como isotopías de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow h(\mathbb{R}^2)$  coincidentes con  $h_n$  en  $\mathbb{R}^2 - W$ .

Como conclusión, el homeomorfismo  $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(\mathbb{R}^2)$  resultante es compatible con la

### 3. Resultados principales

estructura diferenciable en  $U_{n-1}$  y junto con  $h_1, \dots, h_{n-1}$ , nos define una estructura diferenciable sobre  $U_n$ . Esto cierra la inducción y prueba el teorema.  $\square$

### 3.3. Demostración del Teorema B

**Teorema B.** *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $f : S \rightarrow S'$  homeomorfismo entre variedades diferenciales 2-dimensionales, se puede utilizar el **Hecho 2**, que nos aporta una triangulación diferenciable de  $S$ . Por definición de triangulación diferenciable, tenemos que la aplicación celda  $\varphi_n$  es un difeomorfismo. Vamos a proseguir de forma similar a la demostración del Teorema A, pero esta vez la función a isotopar es  $g_n = f \circ \varphi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow f(\varphi(\mathbb{R}^2)) \subset S'$  homeomorfismo. Sea  $W_n = \varphi_n^{-1}(S) = \varphi_n^{-1}(S \cap \varphi_n(\mathbb{R}^2))$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , vamos a isotopar  $f$  en 3 etapas:

1. Para todos los vértices de la triangulación de  $S$ , vistos en  $W_n$  mediante  $\varphi_n^{-1}$ , tomamos una bola  $B(p, \epsilon)$  de tal forma que sus cierres no se corten 2 a 2 y estén contenidos en  $W_n$ . Acto seguido podemos proceder de forma idéntica al apartado 1 de la demostración del Teorema A, obteniendo como resultado un homeomorfismo  $\hat{g}_n : W_n \rightarrow g_n(W_n)$  isotópico a  $g_n$ , que es diferenciable en un entorno de cada vértice de la triangulación  $O_p \subset W_n$ , cuyos cierres no se cortan y quedan dentro de  $W_n$  y además  $\hat{g}_n$  coincide con  $g_n$  en un entorno de cada vértice mayor al anterior (cuyos cierres tampoco se cortan y están contenidos en  $W_n$ ).

Si deshacemos el cambio con  $\varphi_n$ , obtenemos que  $f : \hat{g}_n \circ \varphi_n : \varphi_n(W_n) \rightarrow g_n(W_n)$  homeomorfismo es isotópica a  $\hat{f} = \hat{g}_n \circ \varphi_n : \varphi_n(W_n) \rightarrow g_n(W_n)$  homeomorfismo, cumpliendo lo descrito pero para  $\varphi_n(W_n)$ , por ser  $\varphi_n$  un difeomorfismo. Como  $\hat{f}$  coincide con  $f$  en el borde de  $\varphi_n(W_n)$ , la isotopía se puede extender a  $S \rightarrow S'$ . Mantenemos el nombre  $f$  para la nueva  $\hat{f}$ .

Realizamos de forma incremental este proceso, hasta conseguir una isotopía a una función que sea diferenciable en un entorno de todos los vértices de la triangulación de  $S$  que además queda fija en un entorno mayor (cuyos cierres no se cortan).

2. Para todo lado  $l$  de la triangulación en  $W_n$  definimos un entorno  $R_l$  que es difeomorfo a un rectángulo, que a su vez es difeomorfo a  $D^1 \times \mathbb{R}$ , para así poder aplicar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas. Para ello debe cumplir:
  - a)  $R_l$  corta a  $l$  en una curva compacta y es disjunto con cualquier otro lado de la triangulación diferenciable. En particular  $R_l$  no contiene ningún vértice de la triangulación en  $W_n$ .
  - b) Si  $p_1$  y  $p_2$  son los vértices extremos de  $l$ , una componente del borde está contenida en  $O_{p_1}$  y otra en  $O_{p_2}$ , con  $O_p$  entorno de  $p$  donde es diferenciable  $g_n$ , es decir, definimos  $R_l$  de manera que  $g_n$  sea diferenciable en 2 componentes de su borde  $(\partial R_l)$ .
  - c) Los cierres de los  $R_l$  en  $\mathbb{R}^2$  son disjuntos 2 a 2 y están contenidos en  $W_n$ .

Estamos en las condiciones necesarias para aplicar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas, dando lugar a una isotopía a  $\hat{g} : W_n \rightarrow g(W_n)$  homeomorfismo diferenciable en un entorno de cada lado de la triangulación en  $W_n$  que coincide con  $g$  fuera de un entorno mayor al anterior. Procedemos de igual forma que en el apartado 1 de esta demostración, obteniendo una isotopía de  $f$  a  $\hat{f} : S \rightarrow S'$  homeomorfismo diferenciable en un entorno de cada lado de la triangulación diferenciable de  $S$ , que coincide con  $f$  fuera de un entorno mayor que el anterior.

3. En este último apartado queremos aplicar el punto 3 del Teorema de Alisamiento de Asas. Como la triangulación de  $S$  es diferenciable, sabemos que el interior de cada triángulo es difeomorfo al disco unidad de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que para utilizar un dominio de Jordan  $D_T$  para cada  $T$  triángulo de la triangulación de  $W_n$  de forma que no se corten 2 a 2, tomamos un conjunto más pequeño que el interior del triángulo (se puede tomar el mismo conjunto pero multiplicado por un factor de escala ligeramente menor que 1).

Tenemos que  $g_n$  es diferenciable en un entorno de  $\partial D_T$  y coincide con la  $g$  original fuera de un entorno del borde mayor que el anterior. De igual forma que en el apartado 3 de la demostración del Teorema B obtenemos una isotopía de  $g$  a  $\hat{g} : W_n \rightarrow g_n(W_n)$  homeomorfismo que es diferenciable en la triangulación de  $W_n$  (en los vértices, los lados y en el interior de cada triángulo). Siguiendo el esquema de los apartados anteriores obtenemos que  $f$  es isotópica a  $\hat{f} : S \rightarrow S'$  homeomorfismo diferenciable en toda la triangulación diferenciable de  $S$  (vértices, lados e interiores). Como consecuencia  $\hat{f}$  es, de forma natural, un difeomorfismo, concluyendo así la prueba.

□





## **Parte II.**

### **Visualización de superficies**

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.



## 4. Segundo capítulo

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reasons to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

---

*(Leonard Euler)*

### 4.1. Primera sección



## A. Instalación del software

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_instalacion.tex`



## **B. Guía de uso del programa**

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_uso.tex`





## Conclusiones

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/conclusiones.tex



## Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$  Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$  Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$  Conjunto de números enteros.

