

Departamento de Matemáticas

Introducción Al Estudio De Las Estructuras Geométricas

por

Juan Guillermo Vélez C.

Trabajo presentado al Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes
en el cumplimiento parcial de los requisitos para optar el título de

Matemático

de la

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Julio 2007

© Juan Guillermo Vélez, 2007

El autor agradece a la Universidad de los Andes su permiso de poder
distribuir copias de este documento tesis completamente o parcialmente.

Firma del autor

Juan Guillermo Vélez C.
Julio 23, 2007

Aceptado por

Jean Carlos Cortisoz
Departamento de Matemáticas

Table of Contents

Table of Contents	3
Introducción	1
0. Preliminares	3
0.1. Variedades.	3
0.2. Derivada Covariante y Curvatura.	4
1. El Espacio Hiperbólico	9
1.1. Las inversiones y nuestro modelo inicial.	11
1.2. Otros dos modelos.	18
1.3. Las Isometrías.	21
2. Estructuras Geométricas y Superficies	31
2.1. Motivación: Estructuras y Pegamientos de Polígonos.	32
2.2. Clasificación de las Superficies.	37
Bibliography	50

Introducción

Para hablar de una geometría, desde la teoría, sería necesario establecer los aspectos formales que la componen. Por ejemplo, desde el punto de vista más clásico, una geometría consiste tan solo de un conjunto de líneas, un conjunto de puntos, y de axiomas que relacionan tales elementos. Desde un punto de vista más moderno se piensa en la geometría como un espacio equipado de la noción de métrica o de métrica Riemanniana y tal vez acompañado de la noción de congruencia (transformación de subconjuntos mediante isometrías). Un punto de vista más actual de una geometría, y el cual se desea adoptar con este trabajo, busca pensarla teniendo en mente todos los anteriores puntos de vista mencionados.

Para comenzar, se pensara en una geometría de dimensión 2 como una 2-variedad sobre la cual, un observador que esté sobre ella vea lo mismo sin importar en cual punto se pare ni hacia que dirección mire. Esas dos condiciones, llamadas homogeneidad e isotropía, obligan a la variedad a tener una métrica “chevere”. Una métrica con curvatura (Gaussiana) constante. Hay tres geometrías 2-dimensionales: el plano Euclideo E^2 , la esfera unitaria S^2 , que vive dentro del espacio Euclideo 3-dimensional, y el plano Hiperbólico H^2 .

El objetivo básico de este trabajo será ver de que manera, ciertas variedades cerradas¹ pueden adquirir localmente una misma geometría en todo punto; en tal caso diremos que

¹Una variedad (sin borde) compacta se llama en geometría variedad cerrada. No coincide con la definición de cerrado en topología general.

la variedad adquirió una estructura geométrica. Los principales objetos de estudio para ello serán los grupos discretos de isometrías de una geometría y los correspondientes espacios cociente de la geometría por ellos.

El capítulo 0, de preliminares, es un muy breve repaso de algunos conceptos de geometría diferencial, ilustrados por una serie de ejemplos sencillos. Todo esto, debido a que la geometría diferencial es la herramienta principal para trabajar sobre una geometría, tanto en aspectos locales como globales.

Dedicaré el capítulo 1 a tener una aproximación global a la geometría hiperbólica, que es probablemente la más alejada de nuestro entendimiento, entre las geometrías de dimensión 2. Uno de los objetivos de esto será el de crear una intuición para luego entender lo que son como tal las superficies (2-variedades Riemannianas) cerradas con una estructura hiperbólica. El otro objetivo, será dejar el terreno arado para un futuro estudio de las 3-variedades y sus estructuras, para las cuales la geometría hiperbólica en dimensión 3 juega de nuevo un papel importante.

Las superficies cerradas conexas, módulo la relación de “ser homeomorfa a”, conforman un conjunto enumerable. En la primera parte del capítulo 2, se exhibe una enumeración explícita que caracteriza estas superficies, en base a un invariante topológico: el Número (o Característica) de Euler. Luego, para finalizar, en base a esta caracterización topológica se les clasifica en 3 diferentes subconjuntos, en base a la estructura geométrica que ellas admitan.

Las ideas de este trabajo se siguen fundamentalmente de las lecturas de el libro de William P. Thurston en Geometría y Topología [7].

0. Preliminares

Geometría Diferencial

Comenzaremos presentando varias definiciones básicas de la geometría diferencial de las superficies (variedades Riemannianas de dimensión-2), intentando dar siempre generalizaciones para dimensiones mayores. Los conceptos estudiados durante este capítulo serán necesarios para el entendimiento posterior de nuestro estudio. El desarrollo formal se sigue del texto [2].

0.1. Variedades.

Sea M un espacio topológico. Un **Mapa Coordinado** es una pareja (U_i, φ_i) donde U_i es un abierto en M y $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre $\varphi_i(U_i)$ para algún entero n . Dos mapas $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ son **compatibles** si la función de transición

$$\gamma_{ij} : \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

es C^∞ (posee derivadas parciales continuas de todos los ordenes).

Un Atlas \mathcal{G} es una colección de mapas coordinados cuyos dominios cubren a M .

$\langle M, \mathcal{G} \rangle$ es una **n-variedad** de clase C^∞ (variedad suave).

Posteriormente será importante identificar variedades con una misma \mathcal{G} -estructura y las funciones que muestran que esta se preserva.

Definición 1. *Una Variedad Riemanniana es una variedad M de clase C^∞ , acompañada de una función bilineal real \langle, \rangle que es C^∞ , simétrica y definida positiva sobre parejas de vectores tangentes a un mismo punto de M . Más explícitamente, sea*

$\mathcal{Y} = \{(X, Y) \in TM : X, Y \in T_m M, m \in M\}$; sean X, Y, Z en $T_p M$. La aplicación $\langle, \rangle : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ debe satisfacer:

a) (simetría) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$

b) (bilinealidad) $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$

y $\langle tX, Y \rangle = t \langle X, Y \rangle \forall t \in \mathbb{R}$

c) (definida positiva) $\langle X, X \rangle > 0 \forall X \neq 0$

d) (C^∞) si X, Y son campos vectoriales C^∞ con dominio A , entonces $\langle X, Y \rangle : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\langle X, Y \rangle(p) = \langle X, Y \rangle_p = \langle X_p, Y_p \rangle$ es una función C^∞ . //

El funcional \langle, \rangle es llamado Tensor Métrico (Metrica Riemanniana) y nos permite definir longitudes y ángulos de la siguiente manera: Dados X, Y en $T_m M$,

$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ es la longitud de X .

$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta$ me define el ángulo θ entre X y Y , con $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para los casos en que trabajamos con vectores $Y = (y_1, \dots, y_n)$ y $Z = (z_1, \dots, z_n)$ en \mathbb{R}^n , el producto interno usual es $\langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i$. En este caso usaremos también la notación $X \cdot Y$ en vez de $\langle X, Y \rangle$

0.2. Derivada Covariante y Curvatura.

Ahora definiremos un concepto muy importante, con la finalidad de definir y entender algunas invariantes geométricas inmersas en cada punto de una subvariedad de \mathbb{R}^n .

Definición 2. Sea X un vector en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y sea $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ un campo vectorial C^∞ que tiene a p en su dominio. La **Derivada Covariante** del campo vectorial Y en la dirección del vector X es el vector $\overline{D}_X Y = (Xy_1, Xy_2, \dots, Xy_n) = (X \cdot \nabla y_1, X \cdot \nabla y_2, \dots, X \cdot \nabla y_n)$. Si X, Y son campos vectoriales C^∞ , con el mismo dominio A , entonces la **Derivada Covariante** del campo vectorial Y en la dirección del campo vectorial es el campo vectorial $\overline{D}_X Y$, que será un campo C^∞ con dominio A . //

Ejemplo: Sea $X = (xy, x + y, z)$ y $Y = (xy^2 + 2z, x^3 + z, z^2 - y - x)$, entonces

$$\overline{D}_X Y = [X \cdot (y^2, 2xy, 2), X \cdot (3x^2, 0, 1), X \cdot (-1, -1, 2z)] =$$

$$= [xy^3 + 2x^2y + 2xy^2 + 2z, 3x^3y + z, 2z^2 - xy - x - y].$$

Al operador \overline{D} se le conoce como la conexión estandar sobre \mathbb{R}^n en vista de que satisface las siguientes 4 propiedades:

Dados X, W vectores en $p \in \mathbb{R}^n$; Y, Z campos vectoriales C^∞ ; f una función real C^∞ sobre p .

- 1) $\overline{D}_X (X + Y) = \overline{D}_X Y + \overline{D}_X Z$.
- 2) $\overline{D}_{X+W} Y = \overline{D}_X Y + \overline{D}_W Y$.
- 3) $\overline{D}_{f(p)X} Y = f(p) \overline{D}_X Y$.
- 4) $\overline{D}_X f(p) Y = (X \cdot \nabla f) Y_p + f(p) \overline{D}_X Y$.

Una $n-1$ subvariedad en una n -variedad se llama **Hipersuperficie**.

Definición 3. Sea M una hipersuperficie de \mathbb{R}^n , sea \overline{D} la conexión estandar sobre \mathbb{R}^n . Sea N un campo vectorial Normal Unitario C^∞ sobre M (tal N siempre existe localmente). Luego $\forall p \in M$ y $\forall X \in T_p M$, $\langle N_p, N_p \rangle = 1$ y $\langle N_p, X \rangle = 0$
 La **Aplicación Weingarten**, es la Transformación Lineal

$$L : T_p M \longrightarrow T_p M$$

$$L(X) = \overline{D}_X N \quad //$$

Teniendo en cuenta que el producto interno usual para vectores $Y = (y_1, \dots, y_n)$ y $Z = (z_1, \dots, z_n)$ en \mathbb{R}^n , es $\langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i$. Si Y, Z son campos vectoriales C^∞ con dominio A , entonces $\langle Y, Z \rangle$ es una función C^∞ con dominio A . Y así, para el caso \mathbb{R}^n , \overline{D} cumple la siguiente propiedad que se prueba sin dificultades al expandir:

$$5) X_p \cdot \nabla \langle Y, Z \rangle = \langle \overline{D}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \overline{D}_X Z \rangle.$$

De esta manera podemos comprobar que efectivamente el vector $L(X)$ cae en $T_p M$, pues $X \cdot \nabla \langle N, N \rangle = 0$, pues $\langle N, N \rangle$ es un campo constante. Además $X \cdot \nabla \langle N, N \rangle = \langle \overline{D}_X N, N \rangle + \langle N, \overline{D}_X N \rangle = 2 \langle L(X), N \rangle$. Luego $\langle L(X), N \rangle = 0$ Haciendo uso de (5).

A partir de esta aplicación L de Weingarten, que es lineal por las propiedades (2) y (3) definimos varias de las invariantes geométricas de la hipersuperficie de la variedad \mathbb{R}^n en un punto p :

- (i) **Curvatura (de Gauss):** $K(p) = \det(L)$.
- (ii) **Curvatura Media:** $H(p) = \text{tr}(L)$ (la traza de L).
- (iii) **Curvaturas Principales:** Los valores propios de L .
- (iv) **Dirección de curvatura de las Curv. Principales:** Los vectores Propios de L .

Una línea en M es una **Línea de Curvatura** en cada uno de sus puntos, si su tangente es un vector principal (dirección de curvatura).

Ejemplo 1. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ la circunferencia de radio r , centrada en el origen, . C es una hipersuperficie de \mathbb{R}^2 . Sea $N = (x/r, y/r)$. N es campo vectorial, normal, unitario sobre C . Sea $p = (p_1, p_2) \in C$. Entonces el vector $(-p_2, p_1)$ genera todo $T_p M$. Un vector en $T_p M$ será de la forma $X = k(-p_2, p_1)$ para algún $k \in \mathbb{R}$.

Entonces, $L(X) = \overline{D}_X N = [X \cdot \nabla (f = x/r), X \cdot \nabla (g = y/r)] = \left(\frac{-kp_2}{r}, \frac{kp_1}{r} \right) = \frac{1}{r} X$.

Resulta entonces que L es la identidad en 1 dimensión por $\frac{1}{r}$; $L = \frac{1}{r}I_1$. Luego $K(p) = \det L = \frac{1}{r} = \text{tr}(L) = H(p)$; y esta es la única curvatura principal.

Ejemplo 2. Sea M un hiperplano $(n-1)$ dimensional en \mathbb{R}^n . Sea $N = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un campo normal constante unitario sobre M . Luego $L(X) = \overline{D}_X N = (X \cdot \nabla a_1, X \cdot \nabla a_2, \dots, X \cdot \nabla a_n) = (X \cdot \mathbf{0}, X \cdot \mathbf{0}, \dots, X \cdot \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \forall X \in T_p M$.

Por lo tanto $K(p) = 0 = H(p) \forall p \in M$, las curvaturas principales son cero y todo vector es dirección de curvatura.

Ejemplo 3. Sea $M = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 = 1 \right\}$; el cilindro en \mathbb{R}^n . Sea N la Normal " exterior " ; $N = (t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$. Luego para $X = e_n = (0, 0, \dots, 1)$ $L(X) = 0$. Ahora, si X es ortogonal a e_n y tangente a C , entonces $L(X) = X$. Luego una representación matricial de L en un punto t de M sería:

$$L = \begin{matrix} & n-1 \\ n-1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De lo cual se obtiene que $K(t) = 0 = \det(L)$; $H(t) = n-2 = \text{tr}(L)$; todas las curvaturas principales son 1, excepto una que es 0.

En el caso de \mathbb{R}^n , la aplicación de Weingarten L , está relacionada con la Aplicación de Gauss (aplicación Esfera); aplicación que contiene una aproximación geométrica, y nos muestra una forma de calcular las curvaturas. Explicaré a continuación:

Sea $N = (f_1, \dots, f_n)$ un campo normal unitario en M . Luego las f_i son funciones reales, C^∞ , sobre M tales que $\sum_{i=1}^n f_i^2 = 1$. Entonces, la aplicación de Gauss,

$$\eta : M \longrightarrow S^{n-1}$$

$$\eta(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$$

es C^∞ en la $(n-1)$ -esfera.

Si $X \in T_p M$ y $\sigma(t)$ es una curva que al pasar por p tiene a X tangente (denotamos estas dos cosas por: $\sigma(0) = p$ y $T_\sigma(0) = X$), entonces $\eta \circ \sigma(t) = (f_1 \circ \sigma(t), \dots, f_n \circ \sigma(t))$ y $\eta_*(X) = T_{\eta \circ \sigma}(0) = \left[\frac{d(f_1 \circ \sigma)}{dt}, \dots, \frac{d(f_n \circ \sigma)}{dt} \right] = [X \cdot \nabla(f_1), \dots, X \cdot \nabla(f_n)] = \overline{D}_X N = L(X)$

Ejemplo: Sea $M = S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea N la normal exterior de M , luego si $p = (a_1, \dots, a_n)$ entonces $N(p) = (a_1, \dots, a_n)$. Entonces, $\eta(p) = p \forall p \in M$. Lo que implica que $\eta_*(X) = T_{\eta \circ \sigma}(0) = X \forall X \in T_p M$. Por lo tanto $L = I_{n-1}$, de lo cual concluimos que: $K = 1 = \det(L)$, $H = n-1 = \text{tr}(L)$, todas las curvaturas principales son 1 y todo vector es dirección de curvatura.

Capítulo 1

El Espacio Hiperbólico

Acerca de la geometría.

En este capítulo estudiaremos Geometría a la manera clásica, con conceptos como líneas rectas o geodésicas, ángulos, planos, medida de distancia, etc. El propósito será tener una aproximación global a la geometría hiperbólica, que tiene un papel muy importante en el siguiente capítulo.

Nuestra manera de capturar la estructura será mediante la Métrica Riemanniana. Ya veremos en el siguiente capítulo, más precisamente, a que nos referimos con la estructura. Por el momento, sepamos que cualquier Variedad Riemanniana posee un grupo de isometrías: transformaciones del espacio que preservan distancias, líneas y ángulos. Este grupo, para muchas variedades consta solo de la identidad. Nosotros colocaremos dos restricciones a los espacios que harán que el anterior no sea el caso: Homogeneidad e Isotropía.

Las ideas que aquí desarrollo siguen esencialmente las ideas de Thurston, en [7].

Definición 4. *Si dados dos puntos en el espacio, siempre existe al menos una isometría que lleva uno al otro, diremos que el espacio es **homogéneo**.*//

Definición 5. *Un **r-marco** para un espacio vectorial V de dimensión n , es un conjunto ordenado de r vectores linealmente independientes en V . Un **marco** será un n -marco, es decir, una base ordenada de V . Si M es una n -variedad diferenciable, el conjunto de los r -marcos*

de vectores tangentes a x , para todo x en M forman el **Haz de r -marcos**, o simplemente el **Haz de marcos** en el caso en que r es igual a n .//

Definición 6. Si para cualquier dos marcos en un punto en el espacio, existe una isometría del espacio que fija el punto y lleva un marco al otro, diremos que el espacio es **isotrópico**.//

Intuitivamente, homogeneidad es que cualquier punto se vea como cualquier otro punto; e isotropía es que, estando en cualquier punto, se vea igual sin importar como se incline la cabeza.

Homogeneidad e isotropía juntas, son condiciones fuertes; en particular, ellas implican que las curvaturas seccionales son las mismas en cualquier punto, es decir, curvatura constante. Esencialmente hay solo tres geometrías distintas, simplemente conexas e isotrópicas, en cualquier dimensión: con curvatura seccional cero, negativa o positiva. Estas se llaman respectivamente, Euclidea, Hiperbólica y Esférica.

Hasta finales del siglo XVIII, el Axioma de las Paralelas de Euclides (o Quinto Axioma)-dada una línea y un punto afuera de ella, existe exactamente una paralela a través del punto- era pensado como una verdad indispensable. Pero alrededor del año 1820, tres personajes por independiente, vinieron a darse cuenta que existía una Geometría consistente (i.e. que tiene modelos) que no satisfacía el Axioma de las Paralelas. Estos tres personajes fueron, János Bolyai en Hungría, Carl F. Gauss en Alemania y Nicolai Ivanovich Lobachevskii en Rusia.

Bernhard Riemann exhibió una métrica para cualquier espacio de curvatura constante en su publicación "*Lecture on the hypotheses that lie at the foundation of the geometry*" de 1854. Más adelante Eugenio Beltrami, en 1868, construyó un modelo explícito del espacio hiperbólico.

En un comienzo, la geometría no euclidea se dio a conocer como geometría Lobachevskiiiana, hasta que años más tarde Felix Klein introdujo el término de geometría Hiperbólica, para

la que hoy conocemos como tal.

El mismo Klein, en 1872, estando en Erlangen, Alemania fué quien reenfocó el estudio de la geometría, proponiendo entonces que esta debía ser estudiada por el " grupo de movimientos que preservasen las figuras de la geometría ". Estas ideas están contenidas en lo que se llamó Programa Erlangen.

En la sección a continuación introduciremos un modelo n-dimensional de la geometría hiperbólica, el cual es la generalización del Modelo del Disco de Poincaré, que es un modelo 2-dimensional y se lo debemos a Henri Poincaré. Por razón de consistencia, usaremos siempre E^n para denotar \mathbb{R}^n con la métrica estandar.

1.1. Las inversiones y nuestro modelo inicial.

Debemos primero que todo, describir unas transformaciones muy especiales que nos serán indispensables en el desarrollo posterior.

Definición 7. Si $S \subset E^n$ es una $(n-1)$ -esfera en el espacio euclideo, la *inversión en S* (i_s), es la única aplicación desde el complemento del centro de S en sí mismo tal que intercambia el interior que encierra S con el exterior, lleva esferas ortogonales a S en ellas mismas, y fija todo punto de S .//

Ejemplo: (el caso n=2)

Sea C una 1-esfera en E^2 con centro O . Para un punto P que no está en C , $i_C(P) = P'$ será la intersección entre el rayo \overrightarrow{OP} y todas las circunferencias que comprendan a P y sean ortogonales a C .

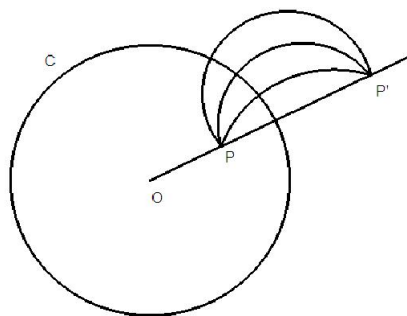


Figura 1-1: *Inversión.*

El hecho de que i_C esté bien definida lo podemos ver de la siguiente manera:

Tracemos un círculo perpendicular a C , que pase por P ; digamos C_1 . Sea T_1 un corte de C_1 con C ; y sea P' el otro corte de C_1 con el rayo euclideo \vec{OP} . En geometría euclídea las distancias OP , OP' y OT_1 están relacionadas por: $OP \times OP' = (OT_1)^2$. Ahora, sea C_2 cualquier círculo perpendicular a C que pase por P , sea T_2 un corte de C_2 con C y X un punto sobre \vec{OP} tal que $OP \times OX = (OT_2)^2$. Pero $(OT_1)^2 = (OT_2)^2$, luego $X=P'$.

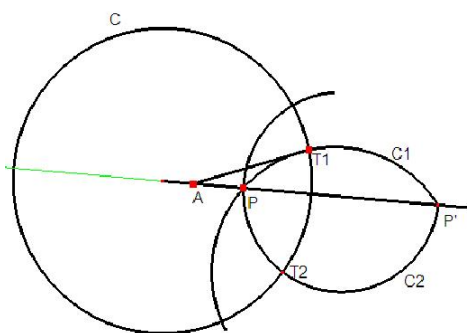


Figura 1-2: i_C está bien definida.

De esta manera vemos, que la imagen de P , $i_C(P) = P'$, es el punto sobre \vec{OP} tal que $OP \times OP' = r^2$, donde r es el radio de C . Lo cual es válido para inversiones i_S en general, en cualquier dimensión n .

Podemos remediar muy fácilmente el hecho de que la inversión i_S no mande el centro de S

a ningún lado, si consideramos la compactificación por un punto de E^n : $\widehat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$. Luego, la inversión i_S podemos extenderla para que se aplique el centro de S en ∞ y viceversa.

Las inversiones poseen excelentes propiedades, como por ejemplo las siguientes que nos darán permiso de continuar nuestro desarrollo.

Proposición 1. *Sea S una $(n-1)$ -esfera propia en E^n (homeomorfa a $E^{n-1} \cup \{\infty\}$). Entonces la inversión i_S es conforme (preserva ángulos), y lleva esferas, de cualquier dimensión, en esferas.*

Demostración. (i) Para ver conformidad, notemos que cualquier par de vectores \vec{u}, \vec{v} con base en un mismo punto P , son los vectores normales de dos $(n-1)$ -esferas ortogonales a S , las cuales se preservan por la inversión. Luego los ángulos formados entre las dos esferas en P deberán ser todos iguales a los formados en $i_S(P)$ y por ende el ángulo entre los dos vectores \vec{u} y \vec{v} debe ser igual al ángulo que se forma entre las dos imágenes de los vectores.

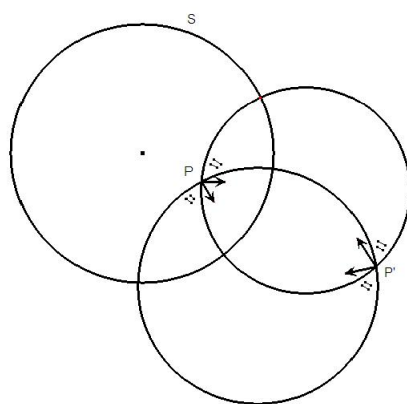


Figura 1-3: i_S es conforme.

(ii) Para ver la segunda propiedad, consideremos primero el caso plano, E^2 .

Sea $x \in S$. Sea \mathcal{F}_O la familia de circunferencias ortogonales a S que pasan por x . Similarmente, sea \mathcal{F}_T la familia de circunferencias tangentes a S en x .

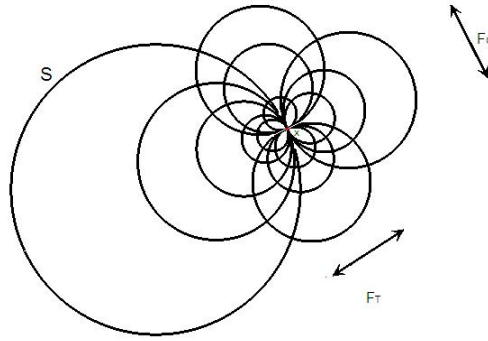


Figura 1-4: Las familias \mathcal{F}_T y \mathcal{F}_O .

Sabemos desde la definición de inversión, que \mathcal{F}_O se preserva por i_S . Luego, ya que la inversión es conformal, \mathcal{F}_T que forma el conjunto de trayectorias ortogonales a \mathcal{F}_O , se debe preservar también.

Ahora, si C es cualquier circunferencia en el espacio diferente de S , se le puede aplicar una homotecia (contraerla o expandirla), de tal modo que se convierta en una circunferencia tangente a S en algún punto u ortogonal a S pasando por algún punto de S (si tiene centro sobre S). En el primer caso, esta pertenece a \mathcal{F}_T y deberá entonces ir a alguna otra circunferencia tangente a S en el mismo punto. Luego aplicando la homotecia por el factor inverso, se obtiene la imagen de C , que es otra circunferencia. De igual forma funciona el argumento, si esta pertenece a \mathcal{F}_O .

En dimensiones mayores, para esferas de codimensión uno, se deben considerar las simetrías que hay alrededor de la línea que conecta el centro de la esfera que se va a invertir y el centro de S . Y para esferas de menor dimensión, basta notar que siempre son intersecciones de esferas de codimensión uno.

■

Definición 8. Dada una variedad Riemanniana X y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una curva $\gamma : I \longrightarrow X$ es una **geodésica** si, para todo $x, y \in I$, el camino más corto que conecta $\gamma(x)$ con $\gamma(y)$ en X , coincide con $\gamma([x, y])$. Normalmente se requiere también que γ esté parametrizada a velocidad constante. //

El **modelo bola de Poincaré** del espacio hiperbólico es el que obtenemos tomando la bola abierta D^n en E^n y declarando que sean geodésicas hiperbólicas (las líneas de la geometría), todos aquellos arcos de círculos ortogonales a la frontera de D^n (∂D^n). Además declaramos que las inversiones en $(n-1)$ -esferas ortogonales a ∂D^n son isometrías hiperbólicas, las cuales llamaremos **reflexiones** hiperbólicas (en particular, estando restringidas a D^n).

La palabra "reflexión" la vamos a justificar completamente, definiendo distancias adecuadamente. De tal forma que reflexiones preserven distancias, es decir, que sean isometrías.

Veamos la intuición de las ideas en dimensión $n=2$, que se generalizan directamente a dimensión n , y trabajemos sobre el modelo del disco de Poincaré D (de radio 1).

Consideremos dos líneas ortogonales en H^2 : L y M . Las vemos en el modelo como arcos euclídeos ortogonales a ∂D . Sea C otro círculo euclídeo que intersecte a ∂D en los mismos dos puntos que L .

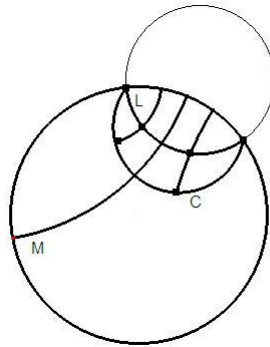


Figura 1-5:

C será también ortogonal a M . Luego, por definición, i_M deja a L y a C invariantes. Como queremos que la reflexión nos preserve distancias, entonces puntos correspondientes de C mediante la reflexión, deberán estar a igual distancia de L . Además, si variamos M a través de todas las líneas ortogonales a L , vemos que todo punto de C debe ser equidistante a L .

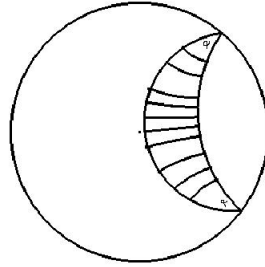


Figura 1-6: *Todos los segmentos de esta banana deben tener la misma longitud hiperbólica.*

Hemos ya visto que las inversiones preservan ángulos, luego si aplicamos una reflexión al dibujo completo, el ángulo α en las esquinas de la banana no cambia. Por ende, no deberá cambiar el ancho de la banana (la longitud hiperbólica de los segmentos transversales). Sea pues l la función de longitud hiperbólica. Entonces esta función va a depender exclusivamente de α .

Para facilitar la visualización de nuestras deducciones, observemos que a causa de la conformalidad, podemos asumir que un vector v cualquiera es ortogonal a un diámetro.

Ahora bien, en el límite cuando α tiende a cero, si observamos a qué tiende la longitud euclídea de uno de los segmentos en particular, veremos que es a algo proporcional a α .

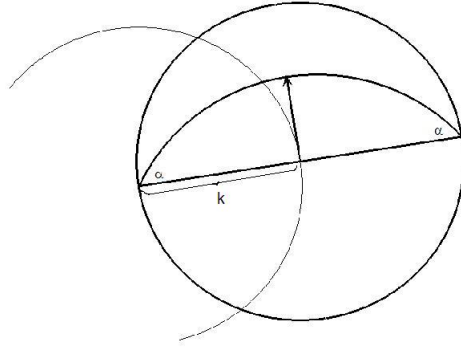


Figura 1-7: En el límite de cuando α se hace pequeño se tiene que: $k\alpha \approx l_E$.

Por la observación anterior, sabemos que la razón de cambio de la longitud euclídea con respecto a α , cuando $\alpha=0$ es finita (k). La razón de cambio euclídea (de un segmento hiperbólico en particular) y la razón hiperbólica deben ser proporcionales. Luego, $\frac{dl}{d\alpha}$ evaluada en $\alpha = 0$ debe ser también mayor que cero y finita pues $\frac{dl_E}{d\alpha}$ evaluada en $\alpha = 0$ es finita; y la tomaremos arbitrariamente $\frac{dl}{d\alpha} = 1$ cuando $\alpha = 0$. Esto es, que la velocidad con que varía la longitud hiperbólica cuando $\alpha = 0$ la tomamos como unidad.

Resumamos un poco el proceso aquí descrito:

¿CÓMO HALLAR LA LONGITUD DE UN VECTOR v , TANGENTE EN UN PUNTO DADO x ?

Dibujese una línea hiperbólica L , ortogonal a v y a través de x , y el círculo euclídeo C equidistante, a través de la cabeza de v y tendiendo a los mismos puntos que L en el infinito.

Si v no es ortogonal a ningún diámetro de D , dibujese un vector ortogonal a L , v' , con cola en L , cabeza en C y ortogonal a algún diámetro de D .

La longitud de v' , para v' pequeño, se aproxima a la distancia hiperbólica entre C y L , la cual se aproxima al ángulo euclídeo entre C y L en donde se encuentran. Un valor exacto, lo obtenemos considerando los ángulos $\alpha(t)$ de las bananas construidas sobre tv' ; la longitud de v es entonces $\frac{d\alpha_t}{dt}$ evaluada en $t=0$.

Un resultado de mediciones más exactas, nos dice que en el límite de v pequeño, el ángulo

de la banana es $\frac{2}{1-r^2}$ veces la longitud euclídea de v' , donde r es la distancia euclídea desde el centro de D hasta la base de v . De esta manera obtenemos la fórmula para la métrica hiperbólica en función de la métrica euclídea:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} dx^2 \quad (1.1.1)$$

En vista de que las métricas euclídea e hiperbólica son proporcionales, tenemos en particular, que el modelo de Poincaré es conformal, es decir ángulos euclídeos é hiperbólicos son iguales.

1.2. Otros dos modelos.

La geometría hiperbólica se muestra disfrazada en diversos lugares, y esos disfraces estan usualmente relacionados con alguno de los tantos modelos de ella.

Procederemos a desarrollar dos modelos nuevos, con la particularidad de que pueden ser obtenidos a partir del modelo Bola de Poincaré mediante inversiones. Comenzaremos por una construcción, que esta bastante relacionada con las inversiones.

Definición 9. *La **proyección estereográfica** de una esfera propia n -dimensional $S \subset E^{n+1}$ sobre un plano tangente a S en x , es la función que lleva todo punto $p \in S$ a la intersección q de la línea $\overset{\leftrightarrow}{px'}$ con el plano, donde x' es el punto opuesto a x en S .//*

El hecho que utilizaremos y se observa en el siguiente dibujo es: aplicar la proyección estereográfica a los puntos de la esfera es lo mismo que aplicarles la inversión sobre una esfera centrada en x' y de el doble de radio.

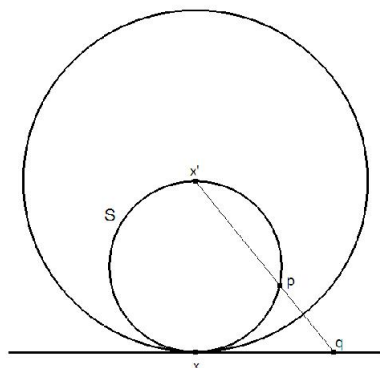


Figura 1-8: *Relación entre proyección estereográfica e inversión.*

El Modelo del Hemisferio

Coloquemos la bola de Poincaré D^n sobre el plano ecuatorial $\{x_{n+1} = 0\}$ de E^{n+1} , rodeada por la esfera unitaria $S^n \subset E^{n+1}$.

Proyectamos desde D^n hacia el hemisferio norte de S^n con centro en el polo sur, $(0, 0, \dots, -1)$. Esta proyección es una inversa de una proyección estereográfica, si consideramos una dilatación de D^n (ya que el plano de proyección es ecuatorial y no tangente). De esta manera hemos transferido la geometría desde el disco ecuatorial al hemisferio norte, obteniendo así el Modelo del Hemisferio.

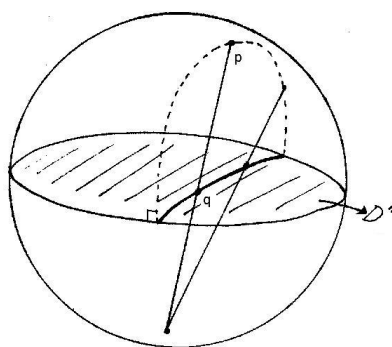


Figura 1-9: *En el modelo del hemisferio, las geodésicas son semicírculos ortogonales al ecuador $S^{n-1} = \partial D^n$; ya que la proy. estereográfica es conformal y lleva círculos en círculos.*

Como la proyección estereográfica es conformal y lleva círculos en círculos, este modelo es conformal y sus geodésicas son semicírculos ortogonales al ecuador $\partial D^n = S^{n-1}$.

El Modelo del Semiespacio Superior

Partimos ahora del modelo del hemisferio, el cual proyectamos desde un punto sobre el ecuador, digamos $(1, 0, \dots, 0)$, sobre un subespacio vertical, digamos $\{x_0 = 0\}$, el cual identificamos con E^n . Así, el hemisferio norte se aplica sobre el semiespacio superior $\{x_0 > 0\}$, y de la misma manera, podemos pensar en que el ecuador, es decir la esfera en el infinito del modelo del hemisferio, se aplica sobre el plano frontera $E^{n-1} = \{x_0 = 0\}$, exepctuando el centro de proyección, el cual se aplicara entonces en ∞ . En otras palabras, en este modelo, la esfera al infinito está dada por la compactificación por un punto del plano frontera: $S_\infty^{n-1} = E^{n-1} \cup \{\infty\}$.

Las geodésicas están dadas por semicírculos ortogonales al plano frontera, y claramente este modelo es también conformal.

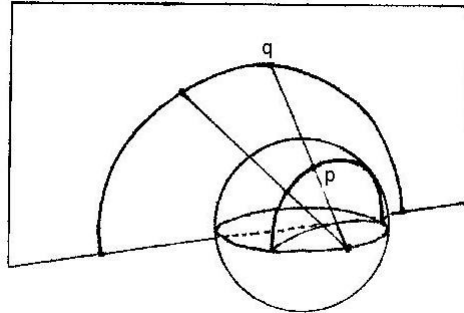


Figura 1-10: *Geodésicas en el modelo del semiespacio aparecen como semicírculos ortogonales al plano frontera o semirectas perpendiculares a este mismo.*

Para este modelo, la métrica tiene una forma especialmente simple. Si miramos la banana especial en la que uno de los vértices es precisamente ∞ , es claro que en el límite cuando el ángulo en el vertice y la longitud euclidea son pequeños, la longitud euclidea será justamente

x_0 veces el ángulo, donde x_0 es la distancia euclídea desde la base del vector hasta el plano frontera. Luego como esta aplicación que hicimos para obtener el modelo es conforme, entonces la relación que hallamos sirve para cualquier vector y así obtenemos la fórmula de la métrica para este modelo en terminos de la euclídea:

$$ds^2 = \frac{1}{x_0^2} dx^2 \quad (1.2.1)$$

Así por ejemplo, la distancia de dos puntos en el modelo del semiplano superior, $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_1, y_2)$, que esten sobre la misma recta vertical, pero con alturas diferentes y_1 y y_2 será:

$$\int_{\gamma} ds = \int_{y_2}^{y_1} \frac{1}{y} dy = \ln \left| \frac{y_1}{y_2} \right|; \text{ donde } \gamma \text{ es la geodésica que une } P_1 \text{ con } P_2.$$

1.3. Las Isometrías.

Reflexiones hiperbólicas en el modelo del semiespacio son las inversiones en las esferas ortogonales al plano frontera. Consideremos una reflexión de H^n , en este modelo, dada por la inversión en una $(n-1)$ -esfera S ortogonal a E^{n-1} .

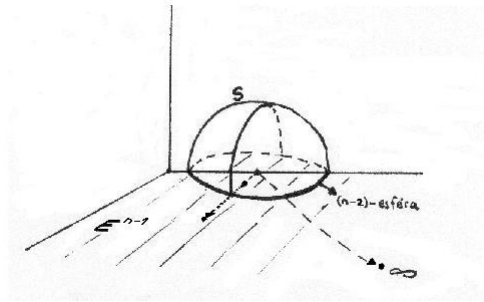


Figura 1-11:

La restricción de esta inversión a la esfera $S_{\infty}^{n-1} = E^{n-1} \cup \{\infty\}$, es la inversión en la $(n-2)$ -esfera $S \cap S_{\infty}^{n-1}$, y toda inversión de S_{∞}^{n-1} puede ser así expresada (por cada inversión

en S^{n-1} hay una inversión en H^n).

Definición 10. Una transformación de S_∞^{n-1} que puede ser expresada como una composición de inversiones, es conocida como una *Transformación de Möbius*. Las transformaciones de Möbius forman un grupo conocido como el *Grupo de Möbius*: $Möb_{n-1}$. //

Las isometrías hiperbólicas pueden ser generadas por reflexiones. En la proposición 5 se muestra esto para el caso $n=3$ (para una el resultado general, consultar el texto [7]). Se sigue entonces que el grupo de isometrías de H^n es isomorfo a $Möb_{n-1}$.

Ese es entonces, el grupo de isometrías del espacio hiperbólico n -dimensional; ahora nos enfocamos hacia hacer una mejor descripción de los elementos de este grupo, para ello comenzaremos por probar algunos resultados puntuales de la geometría hiperbólica.

Un **triángulo ideal** en H^n es aquel que tiene sus tres vértices en el infinito.

Proposición 2. Todos los triángulos ideales son congruentes y tienen area π .

Demostración. Partimos de un triángulo ideal BCD. Aplicandole una reflexión sobre una línea apropiada C (como se muestra en la figura siguiente) y luego una traslación y una contracción o expansión se obtiene un triángulo con vertices $(-1,0), (0,1), \infty$, si tomamos la línea frontera como eje x y como eje y el eje vertical del triángulo, a la manera euclídea.

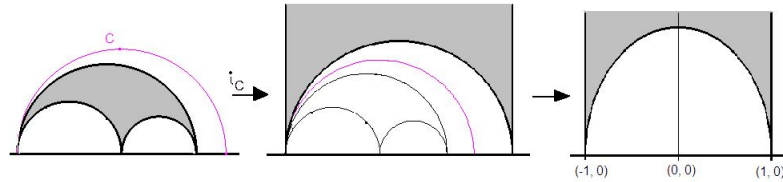


Figura 1-12: Podemos enviar un vértice del triángulo ideal a ∞ por i_C y aplicar una homotecia y una traslación, para obtener el triángulo a la derecha.

Esta región está dada por $-1 \leq x \leq 1$ y $y \geq \sqrt{1-x^2}$ con la relación hiperbólico-euclideo $\frac{1}{y^2}$ (en virtud de (0.0.2)).

Luego el área es:

$$\int_1^{-1} \int_{\infty}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \pi$$

■

Proposición 3. *El área de un triángulo hiperbólico es π menos la suma de los ángulos interiores (el ángulo en el infinito es cero).*

Demostración. El caso en el que todos los ángulos son cero es el caso del triángulo ideal (proposición anterior).

Miremos ahora los $2/3$ -ideales, es decir aquellos con dos vertices en el infinito. Sea $A(\theta)$ el área de un triángulo $2/3$ -ideal con ángulo $\pi - \theta$ en el vertice que no es infinito. Esta función está bien definida ya que si yo tengo un triángulo $2/3$ -ideal ABC, con ángulo $\pi - \theta$, en el vértice C, aplicandole la correcta reflexión y luego expandiendolo o contrayendolo según sea necesario obtenemos un triángulo $2/3$ -ideal con vertices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ sobre la frontera y ángulo θ en un vertice verticalmente arriba de $(0, 0)$.

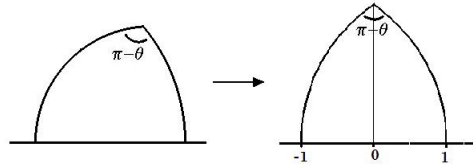


Figura 1-13: *Todos los triángulos $2/3$ -ideales con ángulo $\pi - \theta$ son congruentes.*

Luego todos los triángulos $2/3$ ideales a quienes corresponde área $A(\theta)$ son congruentes. Ahora, una observación clave, debida a Gauss y es que para $\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2 \in (0, \pi)$ se tiene

$A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$. Veamos porqué esto es cierto, mediante un dibujo.

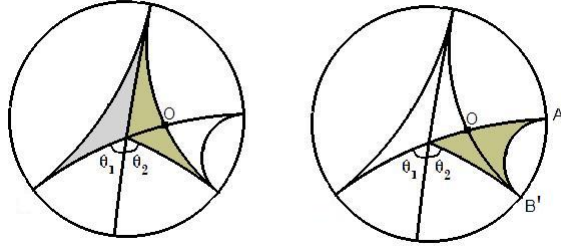


Figura 1-14: $A(\theta)$ es una función aditiva de θ .

Por definición, las áreas de los triángulos sombreados en el dibujo izquierdo son $A(\theta_1)$ y $A(\theta_2)$. De igual manera, el área del triángulo sombreado en el dibujo derecho es $A(\theta_1 + \theta_2)$. Pero los triángulos OAB y OA'B' son congruentes por la reflexión centrada en O. Luego $A(\theta)$ es una función aditiva de θ .

Ahora bien, $n\left(\frac{m}{n}\theta\right) = A(m\theta) = mA(\theta)$, luego $A(q\theta) = qA(\theta) \forall q \in \mathbb{Q}$. Esta función es también continua, luego debe ser \mathbb{R} -lineal. Y como sabemos por la proposición anterior que $A(\pi) = \pi$, pues es el área de un triángulo ideal, entonces por la linealidad tenemos que para cualquier θ , $A(\theta) = \theta = \pi - \alpha$, donde α es el ángulo interior.

Un triángulo con dos o tres vértices finitos siempre se puede ver como la diferencia entre un triángulo ideal y dos o tres triángulos 2/3-ideales.

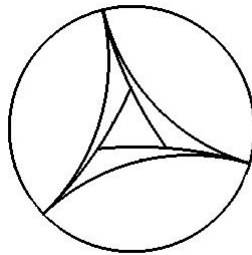


Figura 1-15: Si se subtrae un triángulo con vértices finitos, de otro triángulo dado se obtiene un triángulo 2/3-ideal. Sumando áreas y ángulos conseguimos la Proposición 3.

■

Un espacio vectorial, al que se le asocia una clase de equivalencia de bases ordenadas, que pueden ser llevadas unas en otras mediante transformaciones lineales con determinante positivo, se dice que se le está asignando una **orientación**. Una transformación lineal entre espacios vectoriales orientados **preserva orientación** o **reversa orientación** dependiendo de si el determinante es positivo o negativo.

Definición 11. Sea $g : H^3 \longrightarrow H^3$ diferente de la identidad, una isometría que preserva orientación. Un **eje de g** es cualquier línea L que sea invariante bajo g y sobre la cual g actúa como una traslación. //

Proposición 4. Si g es una isometría no trivial de H^3 que preserva orientación, entonces g tiene a lo sumo un eje.

Demostración. Supongamos L y M distintos ejes para g .

caso 1. Si g fija a L y a M puntualmente, es decir $\forall x \in L \forall x \in M, g(x) = x$. Sea $x \in M$ tq $x \notin L$, $y \in L$, $z \in L$, $y \neq z$.

Las líneas \overrightarrow{xz} , \overrightarrow{xy} también se fijan puntualmente; en efecto, sea $w \neq x, y$ en la línea \overrightarrow{xz} , entonces $d(x, w) = d(x, g(w))$, y ya que $d(x, g(w)) + d(g(w), z) = d(x, z)$, se tiene que $g(w) = w$. Y de igual manera para los puntos en la línea \overleftrightarrow{xy}

Ya sabemos que g fija el triángulo xyz . Si tomamos un punto p sobre el plano que pasa por x y L y por fuera del triángulo xyz , y un punto t sobre el triángulo xyz y trazamos la línea \overleftrightarrow{pt} , esta intersectará al triángulo en algún otro punto t_2 . Luego \overleftrightarrow{pt} se fija puntualmente y por ende $g(p) = p$ para todo p en el plano que pasa por x y L .

Ahora, ya que g preserva orientación, g debe ser la identidad.

caso 2. Si L se traslada por g .

$\forall x \in L, d(x, M) = d(g(x), M) = d(g(g(x)), M) = \dots$. Entonces la función $d(x, M)$ es

periódica, luego acotada. Pero dos líneas distintas no pueden mantener distancia acotada de la una a la otra en todo punto, pues esto implica que ellas tendrían los mismos puntos en el plano frontera, luego serían necesariamente la misma.

■

Las isometrías de E^3 que preservan orientación son o una traslación o una rotación sobre algún eje o un movimiento de rosca (screw), que no es más que una rotación seguida por una traslación en la dirección del eje de rotación.

En H^3 la situación es un poco más compleja y se tiene la necesidad de introducir nueva terminología.

Si g es una isometría no trivial en H^3 que preserva orientación en H^3 , clasificamos a g en una de tres clases que surgen a partir de la anterior proposición:

(i) Si g tiene un eje que se fija puntualmente, entonces g se llama **isometría elíptica** o **rotación** alrededor de su eje. En este caso la órbita de un punto p (es decir, el conjunto de puntos $g^k(p)$) por fuera del eje de g , cae sobre un círculo alrededor del eje.

(ii) Si g tiene un eje que es trasladado por una cantidad no trivial, entonces g se llama **isometría hiperbólica**. Y para este caso tenemos una subdivisión más:

a) Si la órbita de un punto p por fuera del eje de g cae sobre un plano, siempre al mismo lado del eje, g se llamará una traslación. b) Si la órbita de un punto p por fuera del eje de g son los vértices de una hélix poligonal, centrada alrededor del eje, g será un movimiento de rosca (en algunos textos a este último se le conoce como isometría loxodrómica).

(iii) Si g no tiene ejes, entonces g se llamará **parabólica**. Un ejemplo sencillo de esta

última es cualquier isometría de H^3 que se vea como una traslación euclídea paralela al plano frontera.

En la prueba de la siguiente proposición se describe una construcción geométrica para localizar el eje de una isometría no trivial de H^3 que preserve orientación.

Definición 12. *Dos líneas en H^3 serán llamadas **paralelas** si ellas van hacia un punto en común sobre el plano frontera, S_∞^2 . esto equivale a que la distancia entre ellas se aproxima a cero hacia alguno de sus finales. //*

Lemma 1. *Dos líneas distintas X, Y en H^3 , son paralelas o tienen una perpendicular común.*

Demostración. Consideremos la función distancia $d(x, y)$ entre puntos $x \in X$ y $y \in Y$. Sabemos que si las líneas no son paralelas, esta función se va a infinito cuando x o y se van a infinito.

Ahora, sean $\alpha \in X, \beta \in Y$; entonces en X existen puntos P, Q tales que $\forall x \in (\infty, P) \cup (Q, \infty), d(x, y) > d(\alpha, \beta) \forall y \in Y$ y en Y existen puntos P', Q' tales que $\forall y \in (\infty, P') \cup (Q', \infty), d(x, y) > d(\alpha, \beta) \forall x \in X$.

Luego la función $d(x, y)$ tiene un mínimo en algunos puntos dentro del compacto $[P, Q] \times [P', Q']$.

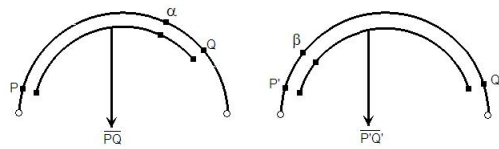


Figura 1-16: A la izquierda $[P, Q]$, a la derecha $[P', Q']$

Sean $x_0 \in X, y_0 \in Y$ puntos tales que $d(x_0, y_0) \leq d(x, y) \forall x \in X \forall y \in Y$.

caso 1. Si $d(x_0, y_0) = 0$, las líneas X, Y se cruzan, entonces cualquier línea perpendicular

común debe pasar por la intersección, pues de otra manera tendríamos un triángulo con dos ángulos rectos, lo cual es imposible por la Proposición 3. Por último notemos que en H^3 solo hay una línea ortogonal al plano que se genera por las líneas X, Y y que pase por el punto de intersección, con lo cual se consigue la tesis del lema.

caso 2. Si $d(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la línea que une x_0 con y_0 es perpendicular común, ya que si hubiese alguna otra perpendicular común obtendríamos un cuadrilátero sobre un plano con todos los ángulos rectos, con el cual, si lo dividimos por una diagonal, resulta que alguno de los triángulos que se obtiene, deberá tener ángulos interiores que sumen al menos π , lo cual es imposible.

■

Si L es una línea en H^3 , denotemos por r_L a la reflexión en L . Esta es la rotación de un ángulo π alrededor de L .

Proposición 5. *Cualquier isometría g en H^3 , que preserve orientación, puede ser escrita de la forma $g = r_L \circ r_M$, con L, M paralelas si g es parabólica o L, M secantes si g es elíptica o ni secantes ni paralelas si g es hiperbólica. El eje de g será la perpendicular común entre L y M , si esta existe.*

Demostración. Sea $p \in H^3$, tal que $g(p) \neq p$.

Caso 1. Supongamos $g^2(p) = p$. Entonces, $\forall h \in H^3$ $d_H(h, g(p)) = d_H(g(h), p)$. Entonces, si q es el punto medio del segmento $[p, g(p)]$, tenemos que $d_H(q, g(p)) = \frac{1}{2}d_H(p, g(p)) = d_H(g(q), p)$. Luego $g(q) = q$. Sea F el plano perpendicular al segmento $\overline{pg(p)}$ y que pasa por q (la unión de líneas perpendiculares a $\overline{pg(p)}$ y que pasan por q). Ahora, $\forall h \in F$, la distancia de $g(h)$ a la línea \overleftrightarrow{pq} debe ser igual que la distancia de $g(h)$ a q . Por lo tanto F invariante bajo g . Como g reversa la orientación de F , g debe actuar como reflexión sobre F , fijando alguna línea K . Entonces, $g = r_K$, y así g debe ser elíptica. Podemos tomar entonces

L y M ortogonales entre sí y ortogonales a K en algún punto $x \in K$.

Caso 2. Si $g^2(p) \neq p$ y $p, g(p)$ y $g^2(p)$ son colineales, se obtiene por casualidad a p sobre el eje de g , y a g hiperbolica. Para entender un poco más, podemos reemplazar a p por otro punto que no esté en el eje (por ende no colineal con su imagen y la imagen de su imagen), y analizar el Caso 3.

Caso 3. Si $g^2(p) \neq p$ y $p, g(p)$ y $g^2(p)$ no son colineales. Sea M la bisectriz del ángulo $pg(p)g^2(p)$. Entonces r_M fija a $g(p)$ e intercambia p con $g^2(p)$: $R_M(p) = g^2(p)$. Para definir a L, consideremos el dihedro con borde $g(p)g^2(p)$ cuyos lados contienen a p y a $g^3(p)$. Sea L la línea que bisecta este dihedro y que además es un bisector perpendicular del segmento $\overline{pg(p)}$, como se muestra en la Figura 1-17.

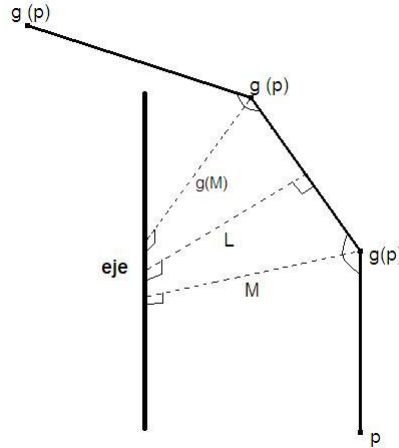


Figura 1-17:

Entonces, observando la simetría, vemos que r_L intercambia a $g(p)$ con $g^2(p)$ y a p con $g^3(p)$: $r_L(g(p)) = g^2(p)$ y $r_L(p) = g^3(p)$. Por lo tanto $r_L \circ r_M(p) = g(p)$, $r_L \circ r_M(g(p)) = g^2(p)$ y $r_L \circ r_M(g^2(p)) = g^3(p)$. Luego, ya que g coincide con $r_L \circ r_M$ en tres puntos distintos no colineales, g debe coincidir con $r_L \circ r_M$ en todo el plano que contiene a los tres puntos. Y ya que ambas preservan orientación, ellas deben coincidir en todo H^3 . Sabemos por el Lema 1, que L y M son paralelas o tienen una única perpendicular común. Si ellas

son paralelas, la isometría g es parabólica. Si la perpendicular común a L y a M existe, entonces ella es el eje de g , pues ella es invariante bajo $r_L \circ r_M$ que actúa sobre ella como una traslación.

■

Capítulo 2

Estructuras Geométricas y Superficies

Introducción (estructura).

Las variedades se nos muestran en la naturaleza y en las matemáticas de diversas formas. Muchas veces, ellas vienen equipadas naturalmente con un patrón o estructura, el cual quisieramos capturar para entender la variedad. Como ya dijimos en la introducción del capítulo 1, nuestra manera de capturar la estructura será mediante la métrica.

Por ejemplo, la métrica estandar euclidea en E^3 , induce una métrica, de una manera natural, sobre la esfera unitaria S^2 , que tiene curvatura constante: cada camino suave sobre S^2 tiene una longitud dada por la métrica de E^3 . Con esa información se puede recuperar la métrica Riemanniana. Asignamos una métrica sobre S^2 , tomando como distancia entre dos puntos, al ínfimo de las longitudes de todos los caminos entre ellos. Este breve ejemplo es tomado de Peter Scott, en [6].

He aquí un hecho clave del artículo, hacia el cual se dirigirá, a continuación, el desarrollo de la teoría: Toda superficie de dimensión 2 admite una métrica de curvatura constante. Esta, en la gran mayoría de los casos, no es la métrica que hereda naturalmente como superficie de E^3 .

Por ejemplo consideremos la superficie del Toro 2-dimensinal, T , que podemos obtener

rotando un círculo C que no intersecta al eje z , sobre el plano xz alrededor del eje z .

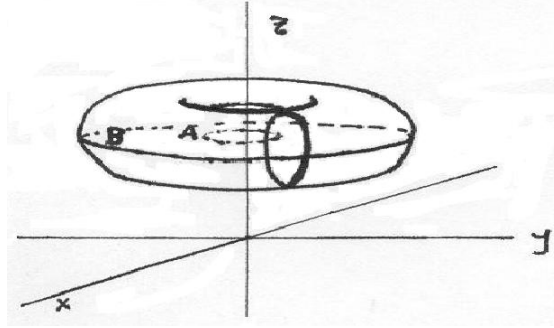


Figura 2-1: *El Toro de revolución.*

Entonces los meridianos generados por C , son geodésicas en la métrica heredada. Otras geodésicas son las dos líneas paralelas al plano xy A y B , que tienen mínima longitud y máxima longitud respectivamente. A lo largo de B , T tiene curvatura positiva, a lo largo de A la curvatura es negativa. De hecho, si r_1 es el radio de A y r_2 es el radio de B , entonces $a = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ es el radio de C y

$$K_B = \frac{1}{ar_2} = 2 \frac{1}{r_2(r_2 - r_1)}, \text{ sobre } B,$$

$$K_A = -\frac{1}{ar_1} = -2 \frac{1}{r_1(r_2 - r_1)}, \text{ sobre } A.$$

La curvatura (Gaussiana) es una medida de la geometría intrínseca de una superficie. De lo anterior es claro que como superficie de revolución en el espacio, el toro no tiene geometría euclídea, esférica o hiperbólica.

2.1. Motivación: Estructuras y Pegamientos de Polígonos.

Podemos describir topológicamente al Toro, pegando los lados del cuadrado relleno de una manera adecuada, como se muestra en la siguiente Figura:

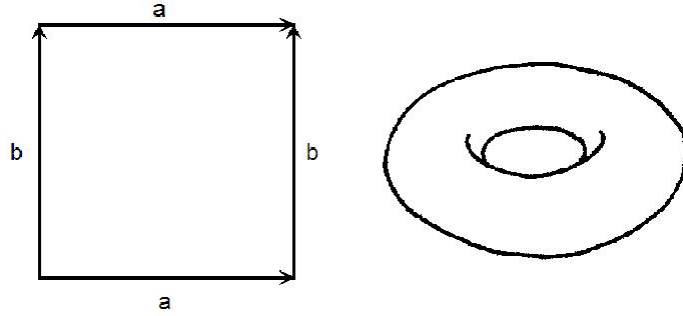


Figura 2-2: $aba^{-1}b^{-1}$: en la imagen de la derecha observamos la superficie del toro.

Definición 13. Una *teselación* de un espacio X (el termino en inglés usado por Thurston es: **Tiling**), consiste de un subconjunto compacto conexo $P \subset X$ de interior no vacío y un grupo de isometrías G de X , tal que la unión de imágenes de P bajo G sea X , y tal que, siempre que los interiores de dos imágenes de P se intersecten, entonces las dos imágenes coinciden.//

Tomemos una colección infinita de cuadrados idénticos, todos con bordes marcados igual que en la figura anterior. Comencemos con uno solo de ellos y empecemos a añadirlos paso por paso, identificando los bordes de los cuadrados que se van colocando con los bordes iguales correspondientes de los ya colocados, haciendolo en todas direcciones y manteniendo siempre la conexión del dibujo. El resultado es una enbaldosinada de E^2 mediante cuadrados congruentes, ilustrada en la parte izquierda de la Figura 2-3.

Definición 14. Una aplicación continua $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ entre espacios topológicos conexos por caminos, es una *aplicación recubridora*, si $\forall x \in X \exists \mathcal{V}$ vecindad de x tal que toda componente conexa de $p^{-1}[\mathcal{V}]$ se aplica homeomorfamente sobre \mathcal{V} por medio de p . En este caso \tilde{X} se llama *espacio recubridor* de X y $\langle \tilde{X}, p, X \rangle$ es una *covertura*.

La anterior enbaldosinada nos muestra una manera en la que el plano Euclideo es un

espacio recubridor para el Toro: con la aplicación recubridora p que identifica los puntos correspondientes en cada cuadrado y los lleva a todos al mismo punto en el toro obtenido de pegar los lados del polígono.

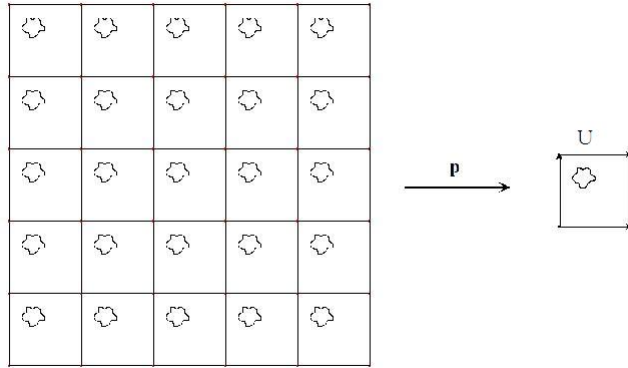


Figura 2-3: *LLevando la geometría desde el plano hasta el Toro.*

La aplicación recubridora, nos señala un grupo de homeomorfismos del plano: aquellos que llevan algún punto en otro que tenga la misma imagen bajo la aplicación recubridora. Más claramente veamos la definición:

Definición 15. Sea $\langle \tilde{X}, p, X \rangle$ una cobertura. Una aplicación $\psi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \psi = p$ es una **transformación recubridora** para esta cobertura.

Las transformaciones recubridoras forman un grupo llamado **Grupo Recubridor**. Si \tilde{X} es simplemente conexo, él se llamará la **cobertura universal** de X ; la cual es única, módulo homeomorfismos. //

Entonces las transformaciones recubridoras, para nuestro ejemplo del Toro, son isometrías Euclideas. Así, le podemos dar al toro una **Estructura Euclidea**, es decir, asignarle una métrica con la cual es localmente isométrico al espacio Euclideo. Hacemos eso de la siguiente forma: dado un punto x sobre el Toro, escogemos una variedad \mathcal{U} de x , suficientemente pequeña para que la imagen inversa de \mathcal{U} en el plano esté compuesta de

componentes conexas homeomorfas a \mathcal{U} bajo la aplicación recubridora p . Luego, escogemos cualquier componente conexa y declaramos a p como isometría entre ella y \mathcal{U} . Así estamos llevando localmente la geometría Euclídea al Toro, que claramente no es la misma que la que tiene como superficie de revolución en el espacio, pues esta nueva es plana en todo lugar (es decir, de curvatura cero). Además, las imágenes de líneas rectas serán las geodésicas sobre el Toro, que no son las geodésicas usuales en la geometría del toro de revolución.

Cambiamos ahora el objeto de estudio, enfoquemonos en el Toro de dos hoyos, llamado Superficie de genero-dos.

A este, topológicamente, podemos obtenerlo identificando los lados de un polígono, al igual que hicimos con el Toro. Esta vez mediante un octágono.

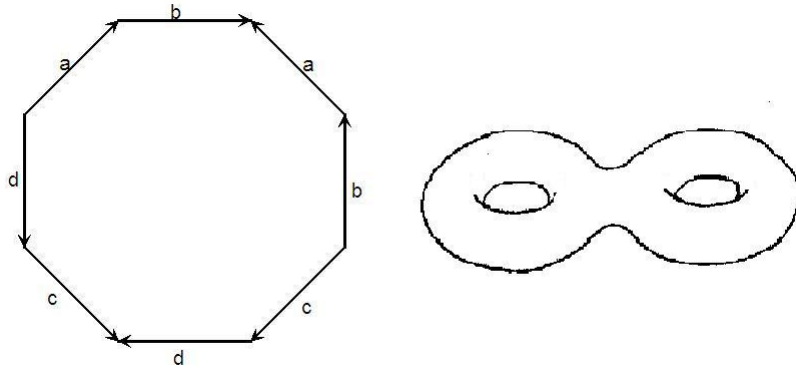


Figura 2-4: $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$: en la imagen de la derecha observamos la superficie de género-2.

La pregunta ahora es si existe una teselación del plano mediante octágonos regulares, que se haga a partir del patrón de pagamiento de la figura anterior.

En el plano E^2 , la respuesta es negativa, pues el ángulo interior en un vértice de un octágono regular es 135° , que no divide a 360° . La solución a esto, no la da entonces el hiperbólico; para que ocho baldosas poligonales regulares cacen alrededor de un vértice, las necesitamos con ángulos interiores iguales a $45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

En el disco de Poincaré, un pequeño octágono centrado en el origen, será muy parecido a

un octágono euclideo, y si alejamos bastante los vértices del origen, podemos conseguir un octágono con ángulos arbitrariamente pequeños, luego debe haber un octágono con ángulos exactamente $\frac{\pi}{4}$, pues la relación distancia de vértices al centro - ángulo interior de vértice es continua.

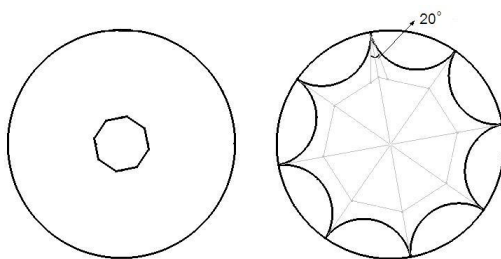


Figura 2-5: *Un octagonito, a la izquierda, semejante al octágono euclideo y un octágono grandote, a la derecha con ángulos internos pequeños.*

Podemos entonces, colocar infinitas copias de él , sobre el plano hiperbólico, sin que se sobrelapen y respetando la identificación de los lados marcados como la Figura 2-4.

Las copias se ven diferentes dependiendo, en que parte del modelo están; es decir, entre más lejos del origen están, se ven más pequeñas. Pero unas copias pueden ser obtenidas por otras, mediante isometrías hiperbólicas. Por ejemplo, en la siguiente figura, las dos copias del octágono que ahí aparecen, se aplican una en la otra haciendo una reflexión en L seguida de una reflexión en M (recordando además, la proposición.5 del capítulo 1).

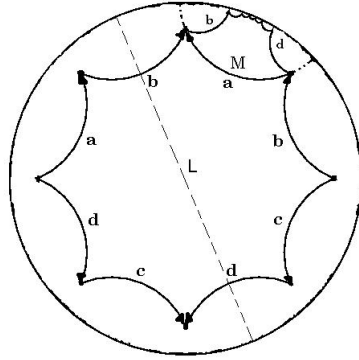


Figura 2-6: Se obtiene el pequeño octágono, reflejando el grande en L y luego en M .

Esta teselación del plano hiperbólico, nos muestra que a la superficie de género-dos, podemos asignarle una **estructura hiperbólica**, es decir una geometría tal que la superficie se ve localmente como el plano hiperbólico: igual que en el ejemplo del Toro, tenemos un espacio recubridor, H^2 , con la métrica que se preserva por las transformaciones recubridoras; luego llevamos esa métrica al espacio cociente, H^2/G , siendo G las transformaciones recubridoras.

2.2. Clasificación de las Superficies.

Comencemos por una definición técnica, como herramienta para formalizar conceptos.

Definición 16. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Una **celda** es un subconjunto $C \subset X$, tal que C es homeomorfo a alguna bola abierta D en alguna dimensión y con la condición de que dicho homeomorfismo puede extenderse a una aplicación continua de la bola cerrada en X . Tal homeomorfismo se llama **aplicación de celda**. Una **división en celdas** de X es una partición de X por celdas tal que para toda n -celda, su frontera esté incluida en la unión de todas las celdas de dimensión menor a n . //

Ahora, precisemos la manera en que conseguimos superficies, pegando polígonos, de la

manera en que lo hicimos en la sección 2.1:

Definición 17. Una *región poligonal* es un conjunto compacto del plano, con frontera igual a un polígono.

Sean F_1, F_2, \dots, F_k regiones poligonales orientadas, tales que la suma total de bordes (1-celdas) es par. A los bordes se les asignan las orientaciones inducidas por la orientación de las regiones (notese que para una región dada F_i , hay solo dos posibles configuraciones de orientación para su borde).

Un *patrón de pegamiento* consiste en formar pares de bordes de los polígonos, tales que la unión de estos pares sea igual al conjunto de todos los bordes de los polígonos F_i , y que cualquier dos pares sean disjuntos. A cada par debe haber asociado un signo $+$ o $-$ indicando si los dos bordes del par deben ser identificados por un homeomorfismo que preserve orientación o reverse orientación respectivamente. //

Un patrón de pegamiento siempre determina una única variedad 2-dimensional, que será orientada si todas las parejas de bordes pegados están asociados a un signo $-$, es decir que se pegaran mediante un homeomorfismo que reverse orientación, como es el caso de los pegamientos propuestos para lograr el Toro o la superficie de género-2.

El siguiente es un ejemplo mediante un dibujo:

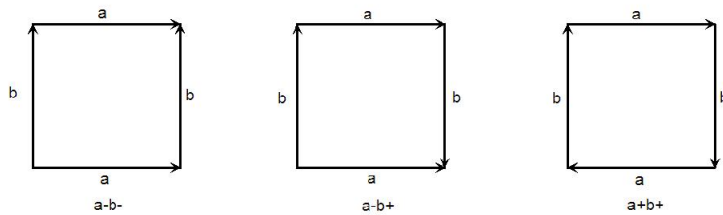


Figura 2-7: Esta ilustración codifica tres posibles patrones de pegamiento con lados opuestos a partir de una única región poligonal: el cuadrado (Las flechas expresan lo mismo que los signos).

Para ampliar la visión de la siguiente parte del texto, vale la pena consultar la sección

8 del libro de Hicks, [2], titulada Theoría de Gauss Bonnet.

¿Cómo podemos visualizar, topológicamente qué superficie estamos obteniendo cuando pegamos un polígono de muchos lados, o cuando pegamos muchos polígonos, bajo un patrón dado?

Existe un invariante numérico, fácil de calcular, que permite reconocer a las superficies, a saber:

Definición 18. *Sea X un espacio topológico, con una división en celdas finita. El **número de Euler** (o característica de Euler), es la suma de la cantidad de celdas de dimensión par, menos la cantidad de celdas de dimensión impar.//*

Para el caso de una superficie (es decir, en dimensión 2) obtenida por pegamiento, la situación es la siguiente:

Después de realizar el correspondiente pegamiento bajo un patrón dado, obtenemos una división en celdas de tal superficie. Resultan de ella, una cantidad F de 2-celdas (o caras), que son los polígonos que constituyen el pegamiento; una cantidad E de 1-celdas, que son los bordes; y una cantidad V de 0-celdas, que son los vértices. Entonces, el número de Euler, denotado por $\chi(S)$ será $F - E + V$.

Por ejemplo, cuando formamos el Toro pegando el cuadrado, como lo hicimos en la sección 2.1, obtenemos una cara, dos bordes y un vértice; luego, $\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$.

Otro ejemplo es dividir a la 2-esfera, en seis cuadrados, a la manera de un cubo redondeado. Se formarán doce bordes y ocho vértices para un resultado de $\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$.

Lo asombroso del número de Euler, es que es independiente de la división en celdas. Por ejemplo, podemos dividir la esfera en cuatro triángulos, a la manera de un tetraedro redondeado, formando seis bordes y cuatro vértices. Así, resulta que $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$: el mismo resultado que con la división anterior. Proharemos el hecho de la invarianza, para las superficies diferenciables. Para lograrlo, relacionaremos el número de Euler con algo que

no depende de ninguna división en celdas: campos vectoriales sobre la superficie.

Una **división en celdas diferenciable** será cuando para toda celda C , la aplicación de celda puede realizarse desde un polihedro (la generalización de un polígono; un objeto geométrico con caras planas y bordes rectos) convexo sobre la clausura de C diferenciablemente, y que C sea un rango maximal para esta.

Para comenzar, definamos un tipo de división en celdas especial, que viene a ser la formalización de dividir mediante triángulos:

Definición 19. *Una triangulación diferenciable, es una división en celdas diferenciable, donde todas las caras (2-celdas) son modeladas por triángulos, de tal forma que la aplicación celda es un embebimiento (inmersión + homeomorfismo) que lleva cada lado del triángulo modelo sobre un borde de la división en celdas y la aplicación celda para este borde es compatible con la aplicación celda para la cara correspondiente.*

Veamos esta condición por medio de un dibujo:

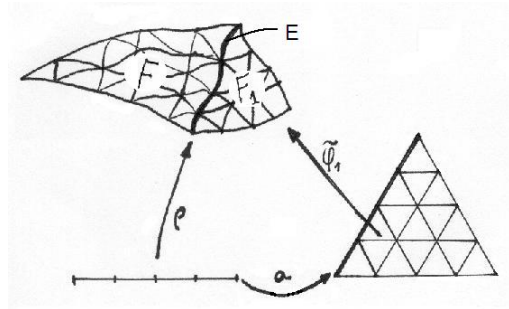


Figura 2-8: $\widetilde{\varphi}_1$ es la apl.celda desde el triángulo sobre la cara F_1 . ρ es la apl.celda desde el intervalo sobre el borde E . $a = \widetilde{\varphi}_1^{-1} \circ \rho$ es diferenciable.

Siempre que se tenga una división en celdas diferenciable, basta con subdividir bordes y caras hasta que cada cara quede modelada por un triángulo con lados embebidos, para conseguir una triangulación de la superficie. Mediante este proceso, el número de Euler no cambia, ya que si dividimos un borde en dos, colocando un vértice en la mitad, se agregan

un vértice y un borde, y si dividimos una 2-celda en dos, colocando un nuevo borde entre vértices ya existentes, se agregan un borde y una 2-celda; luego, siempre se agregan dos unidades de signos opuestos al momento de calcular el número de Euler.

Todo esto será de utilidad para trabajar con triangulaciones, envés de divisiones arbitrarias.

Proposición 6. *Si una superficie cerrada (sin borde y compacta) triangulada diferenciablemente, admite un campo vectorial tangente, no nulo en ningún punto, entonces su número de Euler es cero.*

Demostración. La condición de compatibilidad significa que una triangulación dada puede refinarse subdividiendo el triángulo y el intervalo modelos. Entonces podemos suponer que el campo vectorial es transversal a la triangulación en todo punto, es decir que no es tangente a un borde en ningún lado. Ahora, para cualquier $\epsilon > 0$, podemos lograr, subdividiendo, que la dirección del campo entre dos caras aledañas cambie a lo sumo ϵ y que se preserve transversal (para los detalles, revisar el texto [7] de Thurston). Luego normalizando y si es necesario dividiendo, obtendremos un campo cercano a ser constante en cada cara.

Ahora, coloquemos una unidad de carga $+$ en cada vértice, una unidad de carga $-$ en el centro de cada borde y una unidad de carga $+$ en el centro de cada cara. Movamos las cargas de vértices y bordes hacia las caras vecinas en la dirección dada por el campo vectorial.

Si la carga de un vértice se mueve hacia una cara determinada, entonces las cargas de los dos bordes aledaños que bordean la cara también se moverán hacia ella.

Entonces, las posibilidades para una cara son: que venga a ella exactamente la carga de un borde, o que vengan las cargas de dos bordes y la de un vértice.

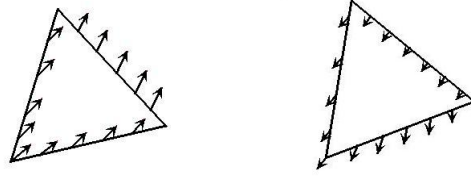


Figura 2-9: *Las dos posibilidades.*

En ambos casos la carga total en cada cara es cero. Luego, mediante esta manera de contar, concluimos que el número de Euler de la superficie es cero.

■

Ejemplo: Consideremos el Toro como lo obtuvimos en el ejemplo correspondiente a la Figura 2-3, es decir como el plano Euclideo partido por la acción de grupo de las traslaciones correspondientes a la enbaldosinada del plano por un cuadrado. Si tomamos un campo uniforme sobre E^2 , obtenemos entonces sobre el Toro un campo vectorial no nulo en ningún punto. Ratificamos entonces que $\chi(T) = 0$.

El resultado de la proposición 6, nos da una idea para indagar por el número de Euler de superficies que no admitan campos no nulos en todo punto. Se trata de encontrar un campo vectorial que sea cero en puntos aislados, pues la proposición sugiere que las cargas se cancelan en las regiones alejadas de tales ceros del campo. Nos enfocaremos en el comportamiento del campo cerca a esos ceros.

Definición 20. Sea X un campo vectorial sobre una superficie, con un cero aislado en un punto z . Construimos una pequeña región poligonal que comprenda a z en el interior y tenga los bordes transversales a X . Colocamos cargas $+$ sobre cada vértice y sobre el interior de la región poligonal, y cargas $-$ sobre cada borde. Hacemos fluir las cargas de la frontera de la

región (el polígono) mediante X . El *índice de X en z* , denotado por $i(X, z)$, es la suma de las cargas en el interior de la región después de la operación de flujo. //

Lemma 2. Si X es un campo vectorial con un cero aislado z , entonces el índice de X en z es independiente al polígono que encierra a z .

Para probar este lema se debe partir de un polígono arbitrario que encierre a z , con bordes transversales a X y mostrar que da el mismo índice que mediante un polígono mucho más pequeño con las mismas propiedades. La idea para hacer esto es subdividir en triángulos el anillo que queda entre los dos polígonos y mover un poco los vértices para mantener los bordes de la triangulación del anillo transversales a X ; la carga dejada en cada uno de esos triángulos del anillo es cero y la carga entrando por la frontera interna es igual a la que entraba por la frontera externa. Veamos una figura que puede ayudar a la comprensión.

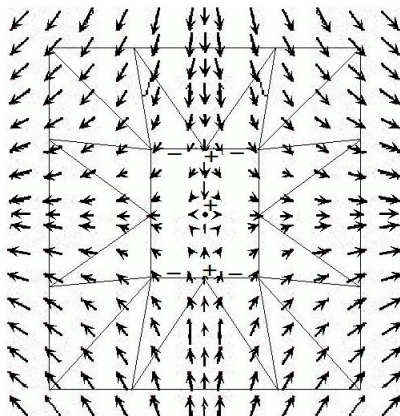


Figura 2-10: En este dibujo de ejemplo, el índice en el cero aislado es -1 .

En un campo vectorial lineal sobre el plano, obviamente el origen es un cero. Y es un cero aislado si y solo si la aplicación lineal tiene determinante diferente de cero.

Proposición 7. (Teorema del índice de Poincaré) Si S es una superficie suave y X

es un campo vectorial sobre S , con finitos ceros aislados, entonces el número de Euler de S es

$$\chi(S) = \sum_{z \in Ceros} i(X, z)$$

Luego, el número de Euler de una superficie, no depende de la división en celdas que se use para obtenerlo, es decir, es un invariante topológico.

Demostración. Dada una división en celdas arbitraria, comenzamos por reemplazarla por una triangulación diferenciable, al igual que en la proposición 6. Además, la manipulamos lo necesario, para que todos los ceros caigan dentro de caras y no más de uno por cara. Encerramos a cada cero en un polígono totalmente incluido en la cara correspondiente y que sea transversal al campo X . Se triangula luego el anillo formado entre el borde de la cara y el polígono. Finalmente se hace que el resto de la triangulación sea transversal al campo, al igual que se hizo en la proposición 6.

La contribución al número de Euler hecha por cada triángulo por fuera de los polígonos es cero. Y la contribución al número de Euler hecha por cada polígono es el índice del campo vectorial en el cero correspondiente.

■

La topología de una superficie cerrada, determina entonces su número de Euler. De manera increíble, el converso es casi verdad: conocer el número de Euler y saber si la superficie es orientable o no, es información suficiente para estar hablando de una superficie determinada. Relacionemonos entonces con este último hecho (Podemos encontrar más información acerca de esto en el texto [4]).

Consideremos una superficie (conexa) S obtenida por pegamiento de polígonos. Entonces:

(a) S se puede obtener pegando lados de un solo polígono. Basta con notar que, la superficie

se puede cortar siguiendo un camino continuo por bordes de polígonos, de tal forma que se regrese al punto de partida para cerrar la curva, y encerrando todas las caras a un mismo lado, formando así un polígono relleno.

(b) Podemos asumir que S tiene solo un vértice. Con una única excepción, en el caso en que S es la 2-esfera y proviene de un dígono, al cual le pegamos los lados reversando orientación (el dígono es posible en la geometría de la esfera de Riemann, es decir, la geometría que la esfera hereda de E^3).

(c) El número de bordes en S es E si y solo si el número de bordes del polígono es $2E$. Y aplicando (a) y (b), tenemos que $\chi(S) = 1 - E + 1 = 2 - E$; exepctuando, de nuevo el caso de la esfera, que al provenir de pegar los lados de un dígono resulta $\chi(S) = 1 - E + 2 = 3 - E = 3 - 1 = 2$.

En la Figura 2-7, en los dos primeros cuadrados de la imagen se proponen pegamientos que cumplen directamente con las condiciones propuestas en (a) y en (b). Luego, el número de Euler de ambas es cero. Siendo la primera orientable y la segunda no orientable; la primera, el Toro y la segunda la que se conoce como Botella de Klein. El tercer cuadrado , sigue el patrón de pegamiento que resulta en la superficie que se conoce por el nombre de Plano Proyectivo ($\mathbb{R}P^2$), el cual se puede definir como el cociente de la esfera por la acción del grupo $\{-1, 1\}$: $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \{\pm 1\}$. Otra manera de conseguir a $\mathbb{R}P^2$ por pegamiento de un polígono es mediante un dígono, pegando los bordes mediante un homeomorfismo que preseva orientación. Con esta última forma de conseguir el Plano Proyectivo, deducimos que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 2 - E = 2 - 1 = 1$.

Tenemos como resultado parcial, que $\chi(\text{La Esfera}) = 2$, $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, $\chi(T) = 0$ y $\chi(B. Klein) = 0$. De (c) y del hecho de que ya agotamos los pegamientos del cuadrado que satisfacen (a) y (b) y los pegamientos del dígono, se deduce que para cualquier otra superficie S , $\chi(S) < 0$.

(d) Si S es orientable distinta de la esfera, puede ser obtenida por un pegamiento de la forma

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

Entonces, toda superficie cerrada orientable está determinada, módulo homeomorfismos, por su número de Euler, que será cualquier entero par menor o igual a 2. El número g es llamado el **género** de la superficie, que es una superficie con g agujeros.

(e) Si S es no orientable, puede ser obtenida por medio de un pegamiento de la forma

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$$

Este número g se llama el **género no orientable** de la superficie.

Dos superficies orientables con el mismo género o dos superficies no orientables con el mismo género no orientable, son homeomorfas.

Ahora, que ya tenemos identificadas todas las superficies cerradas, llego el momento de clasificarlas. Como ya habíamos dicho en un principio, todas ellas van a poder tener una estructura geométrica de curvatura constante. Ya lo vimos, en la sección 2.1, para las dos superficies de número de Euler 0, a las cuales podemos obtener pegando lados de un cuadrado, de tal forma que todos los vértices se identifican juntos. Ellas tienen una estructura Euclidea.

Ya lo vimos también para la superficie de la esfera, que tiene curvatura constante positiva mediante la métrica heredada naturalmente de E^3 , como subvariedad. Decimos entonces

que S^2 tiene una estructura geométrica esférica o **Elíptica**.

Para el Plano Proyectivo, $\mathbb{R}P^2$, la situación es sencilla. Sea $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ la aplicación proyección, que lleva a cada elemento de S^2 en su órbita, que es el par conformado por él y su antipodal. La tripleta $\langle S^2, p, \mathbb{R}P^2 \rangle$ forma una covertura. Además, aparte de la identidad, solo hay una la transformación recubridora, que es la aplicación antipodal, $\psi : S^2 \longrightarrow S^2$, $\psi(s) = -s \forall s \in S^2$. Y ella es una isometría sobre la esfera. Entonces $\mathbb{R}P^2$ hereda fácilmente de S^2 una métrica que es localmente isométrica a la esfera: la longitud de cualquier pequeño camino en $\mathbb{R}P^2$ será igual a la longitud de cualquiera de las dos curvas que están desconectadas en la preimágen del camino sobre S^2 . Así $\mathbb{R}P^2$ tiene una estructura Elíptica.

En la sección 2.1, vimos también como la superficie de género dos, obtenida por el pegamiento de un octágono regular siguiendo el patrón $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$, que lleva todos los vértices a uno mismo, obtiene una estructura Hiperbólica. La superficie de género 2, tiene número de Euler igual a -2. Solo nos queda por saber que estructura admiten las demás superficies de número de Euler negativo. Como se dijo en (d) del párrafo precedente, las superficies cerradas orientables se pueden obtener mediante pegamiento de polígonos regulares, siguiendo el patrón $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}...a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, que nos lleva siempre todos los vértices a uno mismo. En la parte (e) del párrafo anterior dice que las superficies cerradas no orientables se pueden obtener mediante pegamiento de polígonos regulares, siguiendo el patrón $a_1a_1a_2a_2...a_ga_g$, con el cual también se llevan todos los vértices a uno mismo. Entonces, las superficies cerradas orientables, de número de Euler negativo, tienen género mayor o igual a 2. Y las superficies cerradas no orientables, de número de Euler negativo, tienen género no orientable mayor o igual a 3. Luego, todas las superficies cerradas, de número de Euler negativo, pueden obtenerse por pegamiento de polígonos regulares de 6 o más lados, que llevan todos los vértices a uno mismo. Ahora bien, si un polígono regular, en el Euclideo, tiene más de 5 lados, entonces sus ángulos interiores deben sumar más de 360° , y cada uno de esos ángulos debe estar entre 90° y 180° estrictamente, luego no dividen a

360° . Lo que quiere decir que no podemos teselar el plano Euclideo con ellos. Pero siguiendo un procedimiento análogo al del análisis de la superficie de género 2, podemos encontrar un polígono correspondiente, del tamaño adecuado, consiguiendo dar a todas las estructuras de número de Euler negativo una estructura Hiperbólica.

Observación. Hemos exhibido el hecho de que todas las superficies cerradas conexas son localmente isométricas a alguna de las 3 posibles geometrías modelo 2-dimensionales: Esférica, Euclidea o Hiperbólica. Este hecho se resume en la siguiente tabla.

Superficie S	Estructura Geométrica
$\chi(S) = 2$ (Esfera)	Esférica
$\chi(S) = 1$ (Plano Proyectivo)	Esférica
$\chi(S) = 0$ (Toro y B.Klein)	Euclidea
$\chi(S) < 0$	Hiperbólica

Bibliografía

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [2] Noel J. Hicks. *notes on Diferential Geometry*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1965.
- [3] Richard S. Millman y Geoge D. Parker. *Geometry. A metric approach with models*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] James Munkres. *Topology: A first course*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ, 1975.
- [5] I. M. Singer y J. A. Thorpe . *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1967.
- [6] Peter Scott. *The Geometries of 3-manifolds (Survey article invited by the Editor)*, Bull. London Math. Soc. 15, 1983.
- [7] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton, NJ, 1997.
- [8] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analisis*, McGraw-Hill, Third Edition, New York, 1976.