



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Presentado por:

Norberto Fernández de la Higuera

Tutor:

Francisco José López Fernández

*Departamento de Geometría y Topología*

Carlos Ureña Almagro

*Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*

Curso académico 2020-2021



# Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Norberto Fernández de la Higuera

Norberto Fernández de la Higuera *Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de  
tutorización**

Francisco José López Fernández  
*Departamento de Geometría y Topología*

Carlos Ureña Almagro  
*Departamento de Lenguajes y Sistemas  
Informáticos*

Doble Grado en Ingeniería  
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Norberto Fernández de la Higuera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 3 de julio de 2021

Fdo: Norberto Fernández de la Higuera



# Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
Summary	XIII
Resumen	XV
Introducción	XVII
<b>I. Conocimientos previos</b>	<b>1</b>
1. Variedades topológicas	3
2. Estructuras diferenciales	5
2.1. Resultados previos . . . . .	5
2.2. Hechos utilizados para los teoremas . . . . .	7
<b>II. Teorema clásico de Munkres</b>	<b>9</b>
3. Resultados principales	11
3.1. Enunciados . . . . .	11
3.2. Demostración del Teorema A . . . . .	11
3.3. Demostración del Teorema B . . . . .	13
<b>III. Visualización de superficies</b>	<b>15</b>
4. Segundo capítulo	17
4.1. Primera sección . . . . .	17
A. Instalación del software	19
B. Guía de uso del programa	21
Conclusiones	23
Glosario	25





## Índice de figuras

3.1. Curva de Jordan cercana al triángulo . . . . .	13
---	----



## Índice de tablas



## Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex



## Resumen

Resumen en español (recomendado de 800 a 1500 palabras).

Fichero: preliminares/resumen.tex





## Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex



## **Parte I.**

### **Conocimientos previos**

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.



# 1. Variedades topológicas

**Definición 1.1.** Una **variedad topológica** es un espacio de Hausdorff localmente Euclídeo verificando el segundo axioma de numerabilidad, es decir, que su topología tiene una base numerable.

Un subconjunto abierto de una variedad es una variedad.



## 2. Estructuras diferenciales

### 2.1. Resultados previos

**Teorema 2.1.** (de “alisamiento de asas”) Sea  $S$  una variedad diferenciable, entonces:

1. Un embebimiento  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno al origen, quedando fijo fuera de un entorno mayor al anterior.
2. Un embebimiento  $D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$  que es diferenciable entorno a  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno a  $D^1 \times 0$ , quedando fijo fuera de un entorno mayor al anterior y cercano a  $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ .
3. Un embebimiento  $D^2 \rightarrow S$  que es diferenciable entorno a  $\partial D^2$  puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en todo  $D^2$ , quedando fijo en un entorno pequeño de  $\partial D^2$ .

*Demostración.* Voy a proceder a la demostración de cada uno de los apartados:

1. La idea de la demostración es inducir la estructura diferenciable de  $S$  ( $E_S$ ) al Toro ( $T_S$ ), obteniendo así un difeomorfismo de  $T_S$  a la estructura diferenciable estándar del Toro (por el **Hecho 4**), que nos ayudará a construir la isotopía deseada.

Vamos a utilizar el “truco del toro”, vemos el toro ( $T$ ) como el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , tomando el 0 como imagen del  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Eliminamos un punto del toro distinto del 0, y a esta nueva variedad la llamamos  $T'$ .

Hacemos una inmersión de  $T'$  en  $\mathbb{R}^2$  manteniendo el 0 y viendo  $T'$  como el interior del disco unidad de  $\mathbb{R}^2$  junto con dos 1-asas, que es un embebimiento en el disco (las asas se embeben por separado ya que como se observa, se solapan en  $\mathbb{R}^2$  y no es posible hacerlo junto).

Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  embebimiento, por el cual  $S$  induce una estructura diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , que denotaremos  $E_1$ . Por el mismo razonamiento (el embebimiento definido para  $T'$ ),  $\mathbb{R}^2$  con la estructura  $E_1$  induce una estructura diferenciable en  $T'$ , que llamaremos  $E_2$ .

Sabemos por el **Hecho 3** que existe un conjunto compacto en  $T'_{E_2}$  cuyo complemento es difeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ , lo que nos permite extender la estructura diferenciable de  $T'$  a  $T$ , llamada  $T_{E_2}$ .

Por el **Hecho 4** sabemos que toda estructura diferenciable del toro ( $S^1 \times S^1$ ) es difeomorfa a la estándar. Por tanto, existe un difeomorfismo  $g : T_{E_2} \rightarrow T$ . Podemos tomar el difeomorfismo  $\hat{g} : \mathbb{R}^2_{E_1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como el levantamiento de la normalización de  $g$  (llevar el 0 en el 0 y al verlo en  $\mathbb{R}^2$  que también deje fijo  $\mathbb{Z}^2$  para así poder levantarlo correctamente).

## 2. Estructuras diferenciales

Identificamos  $\mathbb{R}^2$  con el interior del disco unidad de  $\mathbb{R}^2$  mediante una reparametrización radial que es la identidad entorno al 0. Entonces tenemos  $G : D^2 \rightarrow D^2$  automorfismo en el interior del disco, que tiende a ser también la identidad en el borde (por la condición de que  $\|\hat{g}(x) - x\|$  está acotado para todo  $x$ , por lo que al tender a infinito las variaciones tienden a 0, y al reparametrizar  $\hat{g}(x)$  tiende a  $x$ ) y sigue siendo  $\hat{g}$  entorno al 0. Se puede extender a  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo la identidad fuera del interior del disco.

Por el truco de Alexander  $G$  es isotópica a la identidad. Se puede obtener la isotopía  $G_t$  variando el radio del disco, por lo que cuando el radio tiende a 0,  $G_t$  tiende a ser la identidad ( $G_0$ ). Para  $t = 1$ ,  $G_1 = G$ .

Definimos la isotopía para  $h$  como  $h_t = h \circ G_t^{-1}$ , teniendo que  $h_0 = h$  por ser  $G_0$  la identidad.  $h_t$  se queda fija fuera del disco unidad ya que  $G_t$  es la identidad en dicho conjunto. También tenemos que  $h_t(0) = h(0)$  ya que para todo  $t$ ,  $G_t$  es la identidad entorno al 0.  $h_1$  es diferenciable entorno al 0 respecto a la estructura diferenciable usual de  $\mathbb{R}^2$  porque  $G_1^{-1} = G^{-1}$  es un difeomorfismo de dicha estructura a  $E_1$  entorno al 0 y  $E_1$  es la estructura de  $S$  inducida por  $h$ .

2. La idea es, al igual que en el punto anterior, encontrar un difeomorfismo entre el dominio de  $h$  con diferentes estructuras diferenciables y restringirlo para que esté fijo donde se solicite.

Tenemos  $h : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$  embebimiento diferenciable entorno al borde del dominio. Dicho embebimiento induce una estructura diferenciable en  $D^1 \times \mathbb{R}$  que al ser  $h$  diferenciable entorno al borde, la estructura inducida es igual que la estructura estándar entorno al borde.

Por el **Hecho 5** tenemos que existe un difeomorfismo  $g$  entre la estructura inducida y la estructura estándar de  $D^1 \times \mathbb{R}$  que es la identidad entorno al borde del conjunto. Tomamos el homeomorfismo  $q : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$  que es la identidad entorno  $D^1 \times 0$ .

Definimos  $G : (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1) \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$  por  $G = q \circ g \circ q^{-1}$ , que como es la identidad entorno al borde del dominio, se puede extender a  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Su comportamiento entorno a  $D^1 \times 0$  es igual que  $g$  ( $q$  es la identidad) y es la identidad fuera de  $D^1 \times D^1$  y entorno a  $\partial D \times \mathbb{R}$ . Podemos tomar  $G_t$  la isotopía, de forma que  $t$  varía el tamaño del cuadrado  $D^1 \times D^1$ , de forma similar a como se hacía en el apartado anterior para el círculo, teniendo así que  $G$  es isotópica a la identidad.

Finalmente tomamos la isotopía  $h_t = h \circ G_t^{-1}$ , con  $h_0 = h$  y  $h_1$  tal que es  $h$  donde  $G$  es la identidad y es diferenciable en  $D^1 \times 0$  (además de donde ya lo era  $h$ ).

3. Tenemos  $h : D^2 \rightarrow S$  embebimiento que es diferenciable entorno al borde del dominio. Este embebimiento induce una estructura diferenciable de  $S$  a  $D^2$  que es igual que la estructura diferenciable estándar de  $D^2$  entorno al borde, ya que  $h$  es diferenciable en dicha zona.



Por el **Hecho 6** existe un difeomorfismo  $g$  entre  $D^2$  con la estructura estándar y la inducida, que además es la identidad entorno al borde. El truco de Alexander nos aporta la isotopía  $g_t$  donde  $t$  va variando el tamaño del disco imagen de  $g$  y extendiendo por la identidad, por lo que  $g_0$  sería la identidad y  $g_1 = g$ . Tomando la isotopía  $h_t = h \circ g_t^{-1}$  tendríamos lo solicitado, ya que  $h_0 = h$  y  $h_1$  es igual que  $h$  en el borde y es diferenciable en todo el disco.

□

**Corolario 2.1.** *El teorema anterior sigue siendo cierto para un abierto de  $\mathbb{R}^2$  en vez de para todo  $\mathbb{R}^2$ .*

## 2.2. Hechos utilizados para los teoremas



## **Parte II.**

### **Teorema clásico de Munkres**



## 3. Resultados principales

### 3.1. Enunciados

**Teorema A.** *Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable.*

**Teorema B.** *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Suponiendo ciertos los teoremas anteriores, es directa la obtención del siguiente resultado, ya que por A tenemos que toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable y por B sabemos que es única salvo difeomorfismos:

**Corolario 3.1.** *(Teorema clásico de Munkres) Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una única estructura diferenciable salvo difeomorfismos.*

### 3.2. Demostración del Teorema A

**Teorema A.** *Toda variedad topológica tiene una estructura diferenciable.*

*Demostración.* Sea  $S$  una variedad topológica sin borde, podemos coger un sistema coordinado de cartas finito  $\{(V_i, h_i) / 1 \leq i \leq N\}$ . Vamos a construir por inducción una estructura diferenciable en el conjunto  $U_n = \cup_{i \leq n} h_i(\mathbb{R}^2)$ , que por ser un sistema coordinado su límite debe de ser  $S$ , probando así el resultado. Cabe destacar que cada  $U_i$  contiene a todos los anteriores.

La inducción empieza tomando una carta cualquiera del sistema,  $U_1 = V_1$  por ejemplo. Si se considera la variedad  $U_1$  con el atlas  $\{(h_1, U_1)\}$  entonces  $h_1$  es diferenciable para ésta de forma trivial (se compone con la inversa y queda la identidad en  $\mathbb{R}^2$ ).

Una vez arrancada la inducción, suponiendo cierto para el paso  $n - 1$  vamos a extender la diferenciabilidad de  $U_{n-1}$  a  $U_n$ . Sea la carta  $(V_n, h_n)$ , tomamos entonces  $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) = h_n^{-1}(U_{n-1} \cap h_n(V_n))$ , que es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  por ser  $h_n$  un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  a  $V_n$ .

Tenemos  $W \subset V_n$  abierto en  $\mathbb{R}^2$ , por el **Hecho 1** sabemos que existe una triangulación geométrica suya y que al ser abierto (no tiene borde) al ir acercándose al borde los triángulos tienden a ser puntos. Queremos aplicar el “Teorema de alisamiento de asas” en los vértices de los triángulos, seguidamente en los lados y finalmente en el interior de cada uno (aplicar los 3 apartados del teorema de forma consecutiva), pero para ello es necesario partir de un embebimiento de  $\mathbb{R}^2$ :

1. Para cada vértice  $p$ , elegimos una bola abierta lo suficientemente pequeña de forma que sus cierres no se corten (lo hacemos para todos los vértices de una vez),  $B(p, \varepsilon_p) \subset W$  que es difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  ( $f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow B$  difeomorfismo, con  $f_p(0) = p$ ). Tomamos

### 3. Resultados principales

$g = h_n \circ f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(W)$ , que es un embebimiento por serlo  $h_n|_B : B \rightarrow h_n(W)$  y  $f_p$  (la composición de embebimientos es un embebimiento).

Aplicamos el apartado 1 del Teorema de alisamiento de asas y obtenemos una  $\widehat{g}$  isotópica a la primera, que es diferenciable en  $O_p$  (entorno abierto del origen, con  $0 = f_p^{-1}(p)$ ) y además queda fija fuera de otro entorno un poco mayor  $O'_p \supset O_p$ , con  $\overline{f_p(O_p)} \subset B$ . Si tomamos la función a trozos  $\widehat{h}_n|_B = \widehat{g} \circ f_p^{-1}$  y  $\widehat{h}_n|_{W-B} = h_n$ , está bien definida porque en  $B - f_p(O_p)$  al aplicar  $f_p^{-1}$  nos lleva a  $\mathbb{R}^2 - O_p$ , que es donde  $\widehat{g} = g$ , es decir:

$$\widehat{h}_n|_{B-f_p(O_p)} = \widehat{g} \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = g \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = h_n|_{B-f_p(O_p)}$$

por lo que la función a trozos está bien definida, es diferenciable entorno a  $p$  y no se altera fuera de  $B$ .

Éste paso se puede realizar de forma simultánea para todos los vértices, obteniendo así una  $\widehat{h}_n$  que es diferenciable entorno a todos los vértices y se mantiene  $h_n$  fuera de un entorno de cada vértice, algo mayor que el anterior (entornos con cierres disjuntos). Es por ello que para no cargar demasiado la notación se llamará a esa nueva función  $h_n$ .

2. Tenemos un  $h_n$  que es diferenciable entorno a los vértices de los triángulos y queremos usar el apartado 2 del Teorema de alisamiento de asas para extender la diferenciabilidad a un entorno tubular de los lados de los triángulos. Para ello, vemos que en cada lado, junto con los entornos de los vertices, podemos incluir un rectángulo abierto (conjunto abierto de  $W$ ) que contenga a todo el segmento y cuyos segmentos laterales del rectángulo estén contenidos en ambas bolas. Este conjunto es difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  y aplicando previamente dicho difeomorfismo cumplimos las hipótesis deseadas.

Al proseguir de forma semejante al apartado anterior, conseguimos una función  $h_n$  que es diferenciable en un entorno del conjunto de todos los lados, quedando fija fuera de un entorno algo más grande.

3. Buscamos finalmente una curva dentro del “esqueleto” de entornos de los lados de los triángulos que junto con su componente interior sea difeomorfa a la bola cerrada unidad, para aplicar el 3<sup>er</sup> apartado del Teorema de alisamiento de asas y así obtener una  $h_n$  diferenciable en todo  $W$ .

La curva buscada debe ser diferenciable, cerrada y simple, para así decir que es una curva de Jordan y aplicar el Teorema de Carathéodory. Como consecuencia, sabemos que su componente interior es difeomorfa a la bola unidad de  $\mathbb{R}^2$  (si el teorema de Análisis Complejo lo trasladamos a su equivalente en  $\mathbb{R}^2$ ). Podemos reducir el problema a buscar dicha curva para el entorno tubular de un triángulo equilátero, ya que es difeomorfo al de un triángulo cualquiera. Además, podemos seguir simplificándolo, aportando únicamente una curva no cerrada cuyos extremos se puedan pegar consecutivamente, siendo infinitamente derivable en los puntos donde se unen.

Haciendo uso de una función meseta  $f$  que vale 0 en  $\mathbb{R}^-$  y 1 a partir de  $\epsilon > 0$ , si tomamos  $g(x) = tg(\frac{\pi}{3})xf(x)$  en el intervalo  $[-1, \epsilon]$ , tenemos que  $g(-1) = 0$  y  $g(\epsilon) = tg(\frac{\pi}{3})\epsilon$  al igual que sus derivadas, por lo que si vamos alternando  $g(x)$  y  $g(-x)$  mediante rotaciones y traslaciones, tendremos una curva  $\alpha$  diferenciable (suavización del triángulo equilátero).

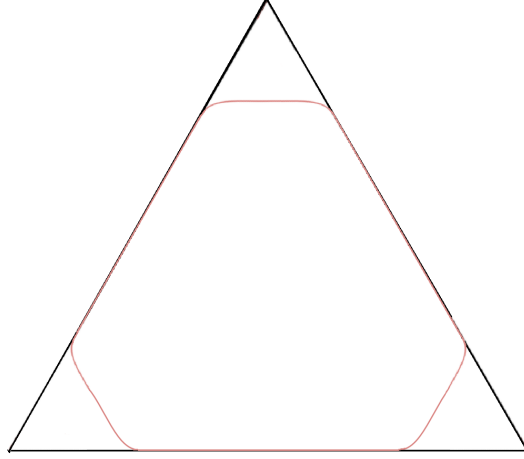


Figura 3.1.: Curva de Jordan cercana al triángulo

Se puede observar que es válido  $\forall \epsilon > 0$  y que al hacer tender  $\epsilon$  a 0, la curva será el propio triángulo equilátero. Es por ello que podemos tomar el  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño como para que la curva  $\alpha$  quepa en el entorno tubular y siga siendo una curva de Jordan.

Ya tenemos un difeomorfismo entre la bola unidad y la componente interior de cada uno de los triángulos, que contienen un abierto conexo en el cual la función no es todavía diferenciable. Estamos en las condiciones del punto 3 del Teorema de alisamiento de asas, así que procediendo de igual forma que en los apartados anteriores obtenemos una  $h_n$  totalmente diferenciable en  $W$ .

Cabe destacar que en el borde de  $W$  la aplicación se queda intacta, ya que en todo momento se está trabajando en el interior de  $W$  (es abierto) y en todo paso de la "suavización" de  $h_n$  siempre se deja inalterado el espacio complemento de un entorno mayor al aquel donde se obtiene la diferenciable. Es por ello que se puede extender el  $h_n$  obtenido a todo  $\mathbb{R}^2$  junto con el original, porque está bien definido, quedando intacta en  $\mathbb{R}^2 - W$ .  $\square$

### 3.3. Demostración del Teorema B

**Teorema B.** *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $f : S \rightarrow S'$  homeomorfismo entre variedades diferenciales 2-dimensionales, se pueden dar 2 casos:

### 3. Resultados principales

1.  $\partial S = \phi$ , por lo que podemos utilizar el **Hecho 2**, que nos aporta una triangulación diferenciable. Si utilizamos el mismo sistema coordenado que para la demostración del Teorema A, al aplicar  $h_i^{-1}$  a dicha triangulación diferenciable, por definición tenemos una triangulación clásica en  $\mathbb{R}^2$ . Si componemos  $f$  con  $h_i$  ( $g = f \circ h_i$ ), tenemos un embebimiento  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$ .

Aplicando los apartados del Teorema de alisamiento de asas conseguimos un embebimiento diferenciable  $\hat{g}$  isotópico a  $g$ , y tomando  $\hat{f} = \hat{g} \circ h_i^{-1}$  tenemos un homeomorfismo diferenciable isotópico a  $g \circ h_i^{-1} = f$ . De forma simétrica, aplicándolo a  $\hat{f}^{-1}$ , obtenemos que  $f$  es isotópico a un difeomorfismo.

2.  $\partial S \neq \phi$ , podemos considerar un collar diferenciable de  $\partial S$  en  $S$  e isotopar  $f$  a un homeomorfismo diferenciable en un collar más pequeño, independientemente del difeomorfismo elegido para el primer collar. Dicha isotopía se obtendrá utilizando el Teorema de alisamiento de asas, tal y como se ha hecho en el apartado anterior. La isotopía dejará fija a  $f$  fuera del collar.

Lo hacemos de igual forma para la inversa, obteniendo una isotopía que deja fija a  $f^{-1}$  fuera de un collar del borde de  $S'$ , siendo diferenciable en otro collar contenido en el anterior.

Ahora partimos de un homeomorfismo diferenciable en un entorno del borde de  $S$ , con inversa diferenciable en un entorno del borde de  $S'$ . Aplicando lo utilizado en el apartado anterior podemos obtener una isotopía a  $\hat{f}$ , que es un difeomorfismo de  $S$  a  $S'$ , ya que se puede tomar una triangulación en los interiores de las superficies (entendemos por interior a la superficie menos su borde).

□



# **Parte III.**

## **Visualización de superficies**



## 4. Segundo capítulo

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reasons to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

---

*(Leonard Euler)*

### 4.1. Primera sección



## A. Instalación del software

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_instalacion.tex`



## **B. Guía de uso del programa**

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_uso.tex`





## Conclusiones

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/conclusiones.tex



## Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$  Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$  Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$  Conjunto de números enteros.

