



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Presentado por:

Norberto Fernández de la Higuera

Tutor:

Francisco José López Fernández

Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Curso académico 2020-2021

Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Norberto Fernández de la Higuera

Norberto Fernández de la Higuera *Estructuras diferenciales sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de
tutorización**

Francisco José López Fernández
Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro
*Departamento de Lenguajes y Sistemas
Informáticos*

Doble Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Norberto Fernández de la Higuera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 10 de julio de 2021

Fdo: Norberto Fernández de la Higuera

Índice general

Resumen	IX
Summary	XI
Introducción	XIII
Objetivos	XV
I. Teorema clásico de Munkres	1
1. Variedades topológicas	3
2. Estructuras diferenciales	5
2.1. Resultados previos	5
2.2. Hechos utilizados para los teoremas	7
3. Resultados principales	9
3.1. Enunciados	9
3.2. Demostración del Teorema A	9
3.3. Demostración del Teorema B	11
II. Visualización de superficies	13
4. Segundo capítulo	15
4.1. Primera sección	15
A. Instalación del software	17
B. Guía de uso del programa	19
Conclusiones	21
Glosario	23
Bibliografía	25

Resumen

Resumen en español (recomendado de 800 a 1500 palabras).

Fichero: preliminares/resumen.tex

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Objetivos

Objetivos propuestos junto con los métodos inicialmente previsto).

Objetivos alcanzados junto con los métodos usados finalmente.

Se pueden indicar los aspectos formativos previos más usados.

Parte I.

Teorema clásico de Munkres

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.

1. Variedades topológicas

Definición 1.1. Una **variedad topológica** es un espacio de Hausdorff localmente Euclídeo verificando el segundo axioma de numerabilidad, es decir, que su topología tiene una base numerable.

Un subconjunto abierto de una variedad es una variedad.

2. Estructuras diferenciales

2.1. Resultados previos

Teorema 2.1. (de “alisamiento de asas”) Sea S una variedad diferenciable, entonces:

1. Un embebimiento $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno al origen, quedando fijo fuera de un entorno mayor al anterior.
2. Un embebimiento $D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$ que es diferenciable entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno a $D^1 \times 0$, quedando fijo fuera de un entorno mayor al anterior y cercano a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.
3. Un embebimiento $D^2 \rightarrow S$ que es diferenciable entorno a ∂D^2 puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en todo D^2 , quedando fijo en un entorno pequeño de ∂D^2 .

Demostración. Voy a proceder a la demostración de cada uno de los apartados:

1. La idea de la demostración es inducir la estructura diferenciable de S (E_S) al Toro (T_S), obteniendo así un difeomorfismo de T_S a la estructura diferenciable estándar del Toro (por el **Hecho 4**), que nos ayudará a construir la isotopía deseada.

Vamos a utilizar el “truco del toro”, vemos el toro (T) como una variedad diferenciable y a su vez como el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, tomando el 0 como imagen del $0 \in \mathbb{R}^2$. Eliminamos un punto del toro distinto del 0, y a esta nueva variedad la llamamos T' .

Hacemos una inmersión $q : T' \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable manteniendo el 0 y viendo T' como el interior del disco unidad de \mathbb{R}^2 junto con dos 1-asas (las asas se embeben por separado ya que como se observa, se solapan en \mathbb{R}^2 y no es posible hacerlo junto).

Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ embebimiento, por el cual S induce una estructura diferenciable en \mathbb{R}^2 , que denotaremos E_1 . Por el mismo razonamiento (la inmersión definida para T'), \mathbb{R}^2 con la estructura E_1 induce una estructura diferenciable en T' , que llamaremos E_2 .

Sabemos por el **Hecho 3** que existe un conjunto compacto en T'_{E_2} cuyo complemento es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$, equivalentemente es difeomorfo a $D^2 - (0,0)$. Si lo vemos en el plano complejo, el 0 se puede añadir de forma natural puesto que la estructura diferenciable usada hasta el momento es la usual en el cilindro (que induce la usual en D^2 , en el plano complejo y en la esfera de Riemann). Esto nos permite extender la estructura diferenciable de T' a T , llamada E_2 .

2. Estructuras diferenciales

Por el **Hecho 4** sabemos que toda estructura diferenciable del toro $(S^1 \times S^1)$ es difeomorfa a la estándar. Por tanto, existe un difeomorfismo $g : T_{E_2} \rightarrow T$. Para poder utilizar el Teorema de Lavantamiento de aplicaciones necesitamos normalizar dicha función g :

- Aplicando rotaciones en el toro (lo vemos como $S^1 \times S^1$) podemos hacer que g lleve el 0 en el 0.
- Necesitamos que g_* sea la identidad para que al levantarla el $(0,0)$ de \mathbb{R}^2 vaya al $(0,0)$. Para ello, sabemos que existe un automorfismo diferenciable M tal que M_* pertenece a $GL_2(\mathbb{Z})$ y al componerlo con la actual g nos lleva los generadores usuales del grupo fundamental del toro en ellos mismos (ya que M_* lleva cualquier sistema de generadores en cualquier otro), es decir, la nueva g_* es la identidad y g sigue llevando el 0 en el 0.

Podemos tomar el difeomorfismo $\hat{g} : \mathbb{R}_{E_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como el levantamiento de la normalización de g , que por la teoría de recubridores es periódico.

Identificamos \mathbb{R}^2 con el interior del disco unidad de \mathbb{R}^2 mediante una reparametrización radial que es la identidad entorno al 0. Entonces aplicando esas identificaciones en el dominio y la imagen de \hat{g} obtenemos $G : D^2 \rightarrow D^2$ automorfismo diferenciable, que sigue siendo \hat{g} entorno al 0 y tiende a ser la identidad en el borde (por la periodicidad $\|\hat{g}(x) - x\|$ está acotado para todo x , y por consiguiente al tender x a infinito las variaciones tienden a 0 con la reparametrización, es decir, $G(x)$ tiende a x). Se puede extender a $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, siendo la identidad fuera del interior del disco.

Por el truco de Alexander, G es isotópica a la identidad. Se puede obtener la isotopía G_t variando el radio del disco de origen y destino ($G_t(x) = tG(\frac{x}{t})$ para $x \in D((0,0),t)$ y es la identidad fuera), por lo que G_0 es la identidad y $G_1 = G$.

Definimos la isotopía para h como $h_t = h \circ G_t^{-1}$, teniendo que $h_0 = h$ por ser G_0 la identidad. Además, h_t se queda fija fuera del disco unidad ya que G_t es la identidad en dicho conjunto. También tenemos que $h_t(0) = h(0)$ ya que para todo t , G_t es la identidad entorno al 0. Finalmente, h_1 es diferenciable entorno al 0 porque $G_1^{-1} = G^{-1}$ es \hat{g}^{-1} entorno al 0, que es un difeomorfismo de la estructura usual de \mathbb{R}^2 en la inducida por S mediante h .

2. La idea es, al igual que en el punto anterior, encontrar un automorfismo diferenciable del dominio de h con diferentes estructuras diferenciables y restringirlo para que esté fijo donde se solicite.

Tenemos $h : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$ embebimiento diferenciable entorno al borde del dominio. Dicho embebimiento induce una estructura diferenciable en $D^1 \times \mathbb{R}$ que al ser h diferenciable entorno al borde, la estructura inducida es igual que la estructura estándar entorno al borde.

Por el **Hecho 5** tenemos que existe un difeomorfismo g entre la estructura inducida y la estructura estándar de $D^1 \times \mathbb{R}$ que es la identidad entorno al borde del conjunto. Tomamos el homeomorfismo $q : D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ que es la identidad entorno $D^1 \times 0$.

Definimos $G : (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1) \rightarrow (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ por $G = q \circ g \circ q^{-1}$, que como es la identidad entorno al borde del dominio, se puede extender a $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (no hay problema en $0 \times \partial D^1$ ya que por como se define q , en ambos tiene límite y es la identidad). Su comportamiento entorno a $D^1 \times 0$ es igual que g (q es la identidad) y es la identidad fuera de $D^1 \times D^1$ y entorno a $\partial D \times \mathbb{R}$. Podemos tomar G_t la isotopía, de forma que t varía el tamaño del cuadrado $D^1 \times D^1$, de forma similar a como se hacía en el apartado anterior para el círculo, teniendo así que G es isotópica a la identidad.

Finalmente tomamos la isotopía $h_t = h \circ G_t^{-1}$, con $h_0 = h$ y h_1 tal que es h donde G es la identidad y es diferenciable en $D^1 \times 0$ por el mismo razonamiento que en anterior apartado (además de donde ya lo era h).

3. Tenemos $h : D^2 \rightarrow S$ embebimiento que es diferenciable entorno al borde del dominio. Este embebimiento induce una estructura diferenciable de S a D^2 que es igual que la estructura diferenciable estándar de D^2 entorno al borde, ya que h es diferenciable en dicha zona.

Por el **Hecho 6** existe un difeomorfismo g entre D^2 con la estructura estándar y la inducida, que además es la identidad entorno al borde. El truco de Alexander nos aporta la isotopía g_t donde t va variando el tamaño de los discos de dominio e imagen de g y extendiendo por la identidad, por lo que g_0 sería la identidad y $g_1 = g$. Tomando la isotopía $h_t = h \circ g_t$ tendríamos lo solicitado, ya que $h_0 = h$ y h_1 es igual que h en el borde y es diferenciable en todo el disco.

□

Corolario 2.1. *El primer apartado del teorema anterior sigue siendo cierto para un abierto W de \mathbb{R}^2 en vez de para todo \mathbb{R}^2 , con el objetivo de suavizarlo en un punto $p \in W$.*

Demostración. Se restringe h a una bola cerrada con centro p , la cual es difeomorfa a la bola cerrada unidad y se puede extender continuamente a \mathbb{R}^2 (a q se le asigna el mismo valor que al punto de intersección de la circunferencia con el segmento de 0 a q). Utilizamos el teorema anterior de manera que el entorno donde se altera h sea menor que la bola cerrada unidad, para así al deshacer el cambio con el primer difeomorfismo pegar bien con el resto del abierto W , ya que la nueva h queda fija fuera con respecto a la original. □

2.2. Hechos utilizados para los teoremas

3. Resultados principales

3.1. Enunciados

Teorema A. *Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable.*

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Suponiendo ciertos los teoremas anteriores, es directa la obtención del siguiente resultado, ya que por A tenemos que toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable y por B sabemos que es única salvo difeomorfismos:

Corolario 3.1. *(Teorema clásico de Munkres) Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una única estructura diferenciable salvo difeomorfismos.*

3.2. Demostración del Teorema A

Teorema A. *Toda variedad topológica tiene una estructura diferenciable.*

Demostración. Sea S una variedad topológica sin borde, podemos coger un sistema coordinado de cartas finito $\{(V_i, h_i) / 1 \leq i \leq N\}$. Vamos a construir por inducción una estructura diferenciable en el conjunto $U_n = \cup_{i \leq n} h_i(\mathbb{R}^2)$, que por ser un sistema coordinado su límite debe de ser S , probando así el resultado. Cabe destacar que cada U_i contiene a todos los anteriores.

La inducción empieza tomando una carta cualquiera del sistema, $U_1 = V_1$ por ejemplo. Si se considera la variedad U_1 con el atlas $\{(h_1, U_1)\}$ entonces h_1 es diferenciable para ésta de forma trivial (se compone con la inversa y queda la identidad en \mathbb{R}^2).

Una vez arrancada la inducción, suponiendo cierto para el paso $n - 1$ vamos a extender la diferenciabilidad de U_{n-1} a U_n . Sea la carta (V_n, h_n) , tomamos entonces $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) = h_n^{-1}(U_{n-1} \cap h_n(V_n))$, que es un abierto de \mathbb{R}^2 por ser h_n un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 a V_n .

Tenemos $W \subset V_n$ abierto en \mathbb{R}^2 , por el **Hecho 1** sabemos que existe una triangulación geométrica suya y que al ser abierto (no tiene borde) al ir acercándose al borde los triángulos tienden a ser puntos. Queremos aplicar el “Teorema de alisamiento de asas” en los vértices de los triángulos, seguidamente en los lados y finalmente en el interior de cada uno (aplicar los 3 apartados del teorema de forma consecutiva), pero para ello es necesario partir de un embebimiento de \mathbb{R}^2 :

1. Para cada vértice p , elegimos una bola abierta lo suficientemente pequeña de forma que sus cierres no se corten (lo hacemos para todos los vértices de una vez), $B(p, \varepsilon_p) \subset W$ que es difeomorfo a \mathbb{R}^2 ($f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow B$ difeomorfismo, con $f_p(0) = p$). Tomamos

3. Resultados principales

$g = h_n \circ f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow h_n(W)$, que es un embebimiento por serlo $h_n|_B : B \rightarrow h_n(W)$ y f_p (la composición de embebimientos es un embebimiento).

Aplicamos el apartado 1 del Teorema de alisamiento de asas y obtenemos una \widehat{g} isotópica a la primera, que es diferenciable en O_p (entorno abierto del origen, con $0 = f_p^{-1}(p)$) y además queda fija fuera de otro entorno un poco mayor $O'_p \supset O_p$, con $\overline{f_p(O_p)} \subset B$. Si tomamos la función a trozos $\widehat{h}_n|_B = \widehat{g} \circ f_p^{-1}$ y $\widehat{h}_n|_{W-B} = h_n$, está bien definida porque en $B - f_p(O_p)$ al aplicar f_p^{-1} nos lleva a $\mathbb{R}^2 - O_p$, que es donde $\widehat{g} = g$, es decir:

$$\widehat{h}_n|_{B-f_p(O_p)} = \widehat{g} \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = g \circ (f_p^{-1}|_{B-f_p(O_p)}) = h_n|_{B-f_p(O_p)}$$

por lo que la función a trozos está bien definida, es diferenciable entorno a p y no se altera fuera de B .

Éste paso se puede realizar de forma simultánea para todos los vértices, obteniendo así una \widehat{h}_n que es diferenciable entorno a todos los vértices y se mantiene h_n fuera de un entorno de cada vértice, algo mayor que el anterior (entornos con cierres disjuntos). Es por ello que para no cargar demasiado la notación se llamará a esa nueva función h_n .

2. Tenemos un h_n que es diferenciable entorno a los vértices de los triángulos y queremos usar el apartado 2 del Teorema de alisamiento de asas para extender la diferenciabilidad a un entorno tubular de los lados de los triángulos. Para ello, vemos que en cada lado, junto con los entornos de los vertices, podemos incluir un rectángulo abierto (conjunto abierto de W) que contenga a todo el segmento y cuyos segmentos laterales del rectángulo estén contenidos en ambas bolas. Este conjunto es difeomorfo a $D^1 \times \mathbb{R}$ y aplicando previamente dicho difeomorfismo cumplimos las hipótesis deseadas.

Al proseguir de forma semejante al apartado anterior, conseguimos una función h_n que es diferenciable en un entorno del conjunto de todos los lados, quedando fija fuera de un entorno algo más grande.

3. Buscamos finalmente una curva dentro del “esqueleto” de entornos de los lados de los triángulos que junto con su componente interior sea difeomorfa a la bola cerrada unidad, para aplicar el 3^{er} apartado del Teorema de alisamiento de asas y así obtener una h_n diferenciable en todo W .

La curva buscada debe ser diferenciable, cerrada y simple, para así decir que es una curva de Jordan y aplicar el Teorema de Carathéodory. Como consecuencia, sabemos que su componente interior es difeomorfa a la bola unidad de \mathbb{R}^2 (si el teorema de Análisis Complejo lo trasladamos a su equivalente en \mathbb{R}^2). Podemos reducir el problema a buscar dicha curva para el entorno tubular de un triángulo equilátero, ya que es difeomorfo al de un triángulo cualquiera. Además, podemos seguir simplificándolo, aportando únicamente una curva no cerrada cuyos extremos se puedan pegar consecutivamente, siendo infinitamente derivable en los puntos donde se unen.

Haciendo uso de una función meseta f que vale 0 en \mathbb{R}^- y 1 a partir de $\epsilon > 0$, si tomamos $g(x) = tg(\frac{\pi}{3})xf(x)$ en el intervalo $[-1, \epsilon]$, tenemos que $g(-1) = 0$ y $g(\epsilon) = tg(\frac{\pi}{3})\epsilon$ al igual que sus derivadas, por lo que si vamos alternando $g(x)$ y $g(-x)$ mediante rotaciones y traslaciones, tendremos una curva α diferenciable (suavización del triángulo equilátero).

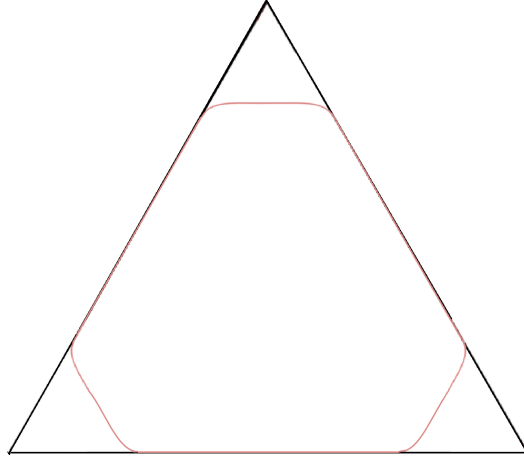


Figura 3.1.: Curva de Jordan cercana al triángulo

Se puede observar que es válido $\forall \epsilon > 0$ y que al hacer tender ϵ a 0, la curva será el propio triángulo equilátero. Es por ello que podemos tomar el ϵ lo suficientemente pequeño como para que la curva α quepa en el entorno tubular y siga siendo una curva de Jordan.

Ya tenemos un difeomorfismo entre la bola unidad y la componente interior de cada uno de los triángulos, que contienen un abierto conexo en el cual la función no es todavía diferenciable. Estamos en las condiciones del punto 3 del Teorema de alisamiento de asas, así que procediendo de igual forma que en los apartados anteriores obtenemos una h_n totalmente diferenciable en W .

Cabe destacar que en el borde de W la aplicación se queda intacta, ya que en todo momento se está trabajando en el interior de W (es abierto) y en todo paso de la "suavización" de h_n siempre se deja inalterado el espacio complemento de un entorno mayor al aquel donde se obtiene la diferenciable. Es por ello que se puede extender el h_n obtenido a todo \mathbb{R}^2 junto con el original, porque está bien definido, quedando intacta en $\mathbb{R}^2 - W$. \square

3.3. Demostración del Teorema B

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : S \rightarrow S'$ homeomorfismo entre variedades diferenciales 2-dimensionales, se pueden dar 2 casos:

3. Resultados principales

1. $\partial S = \phi$, por lo que podemos utilizar el **Hecho 2**, que nos aporta una triangulación diferenciable. Utilizamos el sistema coordenado que relaciona cada triángulo de S con un triángulo clásico de \mathbb{R}^2 , cuyos embebimientos llamaremos h_i . Si componemos f con h_i ($g_i = f \circ h_i$), tenemos un embebimiento $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$.

Aplicando los apartados del Teorema de alisamiento de asas de igual forma que en la demostración del Teorema A, para el triángulo T_i de S asociado a h_i , utilizando g_i obtenemos que f es primero isotópico a un homeomorfismo diferenciable en los vértices del triángulo, seguidamente también en las aristas y por último en todo el triángulo, dejando fijo el complementario. Esto lo hacemos para cada pareja (T_i, h_i) , para finalmente obtener una isotopía a un homeomorfismo diferenciable en toda la variedad.

2. $\partial S \neq \phi$, (PENDIENTE DE ESTUDIO) podemos considerar un collar diferenciable de ∂S en S e isotopar f a un homeomorfismo diferenciable en un collar más pequeño, independientemente del difeomorfismo elegido para el primer collar. Dicha isotopía se obtendrá utilizando el Teorema de alisamiento de asas, tal y como se ha hecho en el apartado anterior. La isotopía dejará fija a f fuera del collar.

Lo hacemos de igual forma para la inversa, obteniendo una isotopía que deja fija a f^{-1} fuera de un collar del borde de S' , siendo diferenciable en otro collar contenido en el anterior.

Ahora partimos de un homeomorfismo diferenciable en un entorno del borde de S , con inversa diferenciable en un entorno del borde de S' . Aplicando lo utilizado en el apartado anterior podemos obtener una isotopía a \hat{f} , que es un difeomorfismo de S a S' , ya que se puede tomar una triangulación en los interiores de las superficies (entendemos por interior a la superficie menos su borde).

□

Parte II.

Visualización de superficies

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.

4. Segundo capítulo

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reasons to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

(Leonard Euler)

4.1. Primera sección

A. Instalación del software

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_instalacion.tex`

B. Guía de uso del programa

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/guia_uso.tex`

Conclusiones

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/conclusiones.tex

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [Eul] Leonhard Euler. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Recurso online. Accedido el 14 de marzo de 2019. [No citado]
- [Eul82] Leonhard Euler. *Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes. Vol. III. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Secunda: Opera Mechanica et Astronomica, XVII.* Orell Füssli, Zürich, 1982. Edited and with a preface by Charles Blanc and Pierre de Haller. [No citado]
- [Eul84] Leonhard Euler. *Elements of algebra*. Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the German by John Hewlett, Reprint of the 1840 edition, With an introduction by C. Truesdell. [No citado]
- [Eul85] Leonhard Euler. An essay on continued fractions. *Math. Systems Theory*, 18(4):295–328, 1985. Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman. [No citado]

