UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Presentado por:
Norberto Fernández de la Higuera

Tutor:
Francisco José López Fernández
Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Curso académico 2020-2021

Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.

Norberto Fernández de la Higuera

Norberto Fernández de la Higuera *Estructuras diferenciables sobre una superficie topológica y la visualización computacional de superficies.*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

Responsable de tutorización

Francisco José López Fernández
Departamento de Geometría y Topología

Carlos Ureña Almagro
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Norberto Fernández de la Higuera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 26 de agosto de 2021

Fdo: Norberto Fernández de la Higuera

Índice general

Resumen

Resumen en español (recomendado de 800 a 1500 palabras).
Fichero: `preliminares/resumen.tex`

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).
File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

Objetivos

Objetivos propuestos junto con los métodos inicialmente previsto).
Objetivos alcanzados junto con los métodos usados finalmente.
Se pueden indicar los aspectos formativos previos más usados.

Parte I.

Teorema clásico de Moise

En esta parte se desarrollará una demostración más sencilla de un teorema clásico sobre variedades 2-dimensionales, haciendo uso de teoría de Morse.

No profundizaremos demasiado en dicha teoría, puesto que es un campo bastante amplio y no es el objetivo principal del proyecto.

1. Conceptos previos

Definición 1.1. Una **variedad topológica** 2-dimensional es un espacio de Hausdorff localmente Euclídeo que verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, su topología tiene una base numerable.

Definición 1.2. Un **embebimiento o encaje** es una aplicación continua e inyectiva de un espacio topológico en otro. La restricción de su imagen aporta un homeomorfismo.

Definición 1.3. Un **sistema coordenado** sobre S es un embebimiento $h : \mathbb{R}^2 \to S$.

Definición 1.4. Sea S un espacio topoógico Hausdorff, un **atlas** $2-$*dimensional* sobre S es una familia de cartas $E = \{h_i\}_{i\in\Lambda}$ verificando:

1. $\{h_i(\mathbb{R}^2)\}_{i\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de S.
2. Si $h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2) \neq \varnothing$ entonces $h_j^{-1} \circ h_i : h_i^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2)) \to h_j^{-1}(h_i(\mathbb{R}^2) \cap h_j(\mathbb{R}^2))$ es un difeomorfismo.

Definición 1.5. Sea S un espacio topoógico Hausdorff, una **estructura diferenciable** $2-$*dimensional* sobre S es un atlas maximal.

Definición 1.6. Una **variedad diferenciable** 2-dimensional es una variedad topológica $2-$*dimensional* S junto con una estructura diferenciable E, es decir, el par (S, E).

Definición 1.7. Una **inmersión** es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cuya derivada es inyectiva en todo punto.

Definición 1.8. Una **celda** C es un subconjunto abierto de un espacio topológico X tal que C homeomorfa a la bola unidad n-dimensional, que se puede extender de forma continua al borde. Dicho homeomorfismo se denomina **aplicación celda**. Si esta aplicación es diferenciable, se dice que la celda es diferenciable.

Definición 1.9. Una **triangulación diferenciable** de una variedad X es un conjunto de celdas diferenciables tal que la unión de todas ellas es X y cuyas intersecciones son únicamente los lados, es decir, los interiores son disjuntos 2 a 2.

Definición 1.10. Sean f y g homeomorfismos entre los espacios topológicos X e Y. Una **isotopía** es una homotopía entre f y g, $H : X \times [0,1] \to Y$, con:

1. $H_0 = f$.
2. $H_1 = g$.
3. $\forall t \in [0,1]$, H_t es un homeomorfismo.

Definición 1.11. Sean f y g embebimientos entre las variedades N e M. Una **isotopía de embebimientos** es un homeomorfismo $H : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ cumpliendo:

1. $H(y,0) = (y,0)\ \forall y \in M$.

2. $H(f(x),1) = (g(x),1)\ \forall x \in N$.
3. $H(M \times \{t\}) = M \times \{t\}\ \forall t \in [0,1]$.

Equivalentemente podemos decir que H es la isotopía de Id_M en $g \circ f^{-1}$ donde tenga sentido.

Definición 1.12. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en M. Un punto $p \in M$ se dice que es un **punto crítico** de f si $Df(p) = 0$ en T_pM. A su imagen por f, $f(p)$, se le dice **valor crítico** de f.

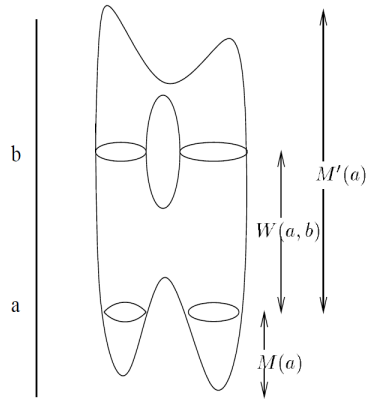
Definición 1.13. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en M. Un punto crítico $p \in M$ se dice que es **no degenerado** si $H_\phi(f)(p)$ es regular para cualquier parametrización ϕ centrada en p, donde $H_\phi(f) = H(f \circ \phi)$ la matriz Hessiana de $f \circ \phi$.

El **índice** de dicho punto es la dimensión del mayor subespacio de T_pM donde $H_\phi(f)$ es definida negativa. No depende de ϕ por la regla de Sylvester, ya que H para otra parametrización ψ cumple $H_\psi(f) = J^t(\theta)H_\phi(f)J(\theta)$, con θ el cambio de coordenadas y J la matriz Jacobiana.

Definición 1.14. Sea f una función diferencaible en una superficie S, se dice que es una **función de Morse** si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Definición 1.15. Sea f una función de Morse, dados $a < b$ valores regulares de f en $\mathbb{R}$ definimos:

- $V(a) = f^{-1}(a)$, se puede ver como una curva de nivel.
- $M(a) = f^{-1}((-\infty, a])$, el conjunto que hay "debajo" de la curva de nivel cuyo valor es a.
- $M'(a) = f^{-1}([a, \infty))$, el conjunto que hay "encima" de la curva de nivel cuyo valor es a.
- $W(a,b) = f^{-1}([a,b])$, el conjunto contenido entre 2 curvas de nivel.



2. Resultados previos

2.1. Teoría de recubridores

A continuación se enuncian los resultados utilizados de la Teoría de Recubridores.

Teorema 2.1 (de Levantamiento de aplicaciones)**.** *Sea $(\tilde{X}, \pi)$ recubrimiento de X, Y espacio topológico y $f : Y \to X$ aplicación continua. Sea $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0) \in X$ y $\tilde{x_0} \in \pi^{-1}(x_0)$ entonces son equivalentes:*

1. $\exists! \tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ *continua tal que* $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$ *y* $\pi \circ \tilde{f} = f$.
2. $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.

2.2. Teoría de Morse

A continuación se enuncian resultados de la Teoría de Morse, principalmente utilizados para la demostración de los Hechos.

Teorema 2.2. *Sea S superficie y $f : S \to \mathbb{R}$ función de Morse. Tomamos $a < b$ valores regulares tal que $W(a, b)$ no contiene ningún punto crítico de f. Entonces:*

- *$M(b)$ es difeomorfo a $M(a)$.*
- *$V(b)$ es difeomorfo a $V(a)$.*
- *$W(a, b)$ es difeomorfo a $V(a) \times [a, b]$, o de forma equivalente, cada componente conexa de $W(a, b)$ es difeomorfa a un anillo de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Se demuestra en el artículo "Clasification of Surface via Morse Theory", el teorema 8. □

Teorema 2.3. *Sea S superficie y $f : S \to \mathbb{R}$ función de Morse. Sea p un punto crítico y $a < b$ valores regulares tal que $W(a, b)$ no contiene ningún punto crítico de f aparte de p. Entonces:*

- *Si el índice de p es 0 o 2, $M(b)$ es difeomorfo a la unión disjunta de $M(a)$ con un disco D, es decir, $W(a, b)$ es difeomorfo a un disco D.*
- *Si el índice de p es 1, $M(b)$ es difeomorfo a $M(a)$ junto con un rectángulo pegado en dos segmentos disjnutos de $V(a)$, que se puede ver como unos "pantalones" si el pegado se realiza de acuerdo a la orientación, o unos "pantalones cruzados" en caso contrario.*

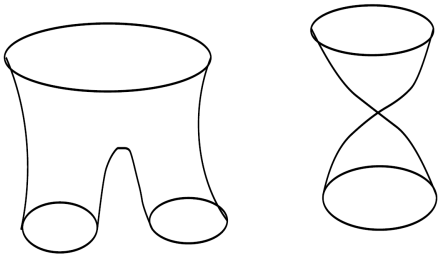


Figura 2.1.: Pantalones normales y cruzados

Demostración. El primer punto se demuestra en el artículo "Clasification of Surface via Morse Theory", el teorema 13. El punto siguiente se demuestra en el mismo artículo, el teorema 16. □

2.3. Hechos utilizados para los teoremas

A continuación se enuncian los "hechos" utilizados para las demostraciones de los teoremas. Su demostración detallada en varios casos se escapa de los límites del proyecto, en cuyos casos se aportarán demostraciones que suponen ciertos aquellos elementos propios de la teoría de Morse.

Hecho 2.1. *Todo $W \subset \mathbb{R}^2$ abierto tiene una triangulación clásica tal que el diámetro euclídeo de los triángulos se aproxima a 0 en la frontera topológica de W.*

Demostración. Tomamos la cuadrícula generada de forma natural por $\mathbb{Z}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Vamos a definir de forma incremental el conjunto de cuadrados que cubren todo W.

Tomamos primero todos los cuadrados (cerrados) que estén contenidos estrictamente en W. Vamos a llamar U a la parte cubierta por el conjunto de cuadrados actual.

Dado un $p \in W$ y $p \notin U$ entonces existe un cuadrado que lo contiene pero que no está contenido estrictamente en W. Por ser W abierto sabemos que para p existe una bola abierta $B \subset W$ que lo contiene. De forma equivalente podemos subdividir el cuadrado inicial en 4 cuadrados iguales, 8 ... y así sucesivamente hasta encontrar una subdivisión en la que algún cuadrado contenga a p y sea lo suficientemente pequeño como para que esté contenido en la bola $B \subset W$. Añadimos al conjunto todos los cuadrados anteriores que estén contenidos en W. Realizamos esta operación de manera indefinida.

Una vez definido el conjunto de cuadrados, podemos definir la triangulación como los triángulos resultantes de dividir por la diagonal dichos cuadrados. De esta forma tenemos una triangulación T tal que la unión de sus triángulos, U, está contenida en W pero todo punto $p \in W$ está en algún triángulo, por lo que $U = W$. Además, cuando tomamos p tendiendo a ∂W, la bola $B \subset W$ que lo contiene tiene radio ϵ tendiendo a 0, es decir, el cuadrado necesario para cubrirlo correctamente tiende a 0, y como consecuencia los dos triángulos de los que se compone también. □

Hecho 2.2. *Toda variedad diferenciable S tiene una triangulación diferenciable.*

Demostración. Vamos a contruir una malla de polígonos diferenciables, que nos dará paso de forma trivial a una malla de triángulos diferenciables.

Podemos tomar $f : S \to \mathbb{R}$ función de Morse apropiada, es decir, los inversos de compactos son compactos y todos sus puntos críticos están a distintos niveles (es posible porque están aislados). Cortamos S por los niveles de puntos no críticos, para separar los puntos críticos entre sí, obteniendo así una descomposición de S en piezas difeomorfas a:

- Discos, tiene un punto crítico de orden 0 o 2.
- Anillos, no tiene puntos críticos.
- "Pantalones", o de forma equivalente, medio toro al que se le ha quitado un disco en el interior. Tiene un punto crítico de orden 1.
- "Pantalones cruzados", o también se pueden ver como medio toro suma conexa con un espacio proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Por ello, se puede dividir en unos "pantalones" normales y una cinta de Möbius. Tiene un punto crítico de orden 1.

Por la teoría de Morse tenemos una división de S en conjuntos difeomorfos a alguno de los anteriores, todos ellos pegados por circunferencias (los bordes de los conjuntos descritos). Podemos obtener una malla añadiendo un vértice a cada circunferencia y seguidamente si es:

- Un disco, se toma el centro y se divide el disco en 3 partes, teniendo 3 sectores difeomorfos a un triángulo.
- Un anillo, se unen los 2 vértices (uno de cada circunferencia del borde) mediante un arco, obteniendo así un cuadrilátero.
- Unos "pantalones", se unen los 3 vértices mediante 2 arcos (un vértice común a los 2 arcos), dando lugar a un heptágono.
- Una cinta de Möbius, se une el vértice con él mismo mediante un arco, el cual recorre la mitad de la cara de la cinta, obteniendo así un triángulo.

Finalmente tenemos la malla de polígonos diferenciables, la cual podemos convertir en una triangulación diferenciable dividiendo de forma adecuada los polígonos. □

Hecho 2.3. *Para toda estructura diferenciable E del toro punteado T'_E existe un subconjunto compacto suyo cuyo complemento es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable usual.*

Demostración. Dividimos T'_S tal y como lo hicimos en el **Hecho 2.2**, obteniendo así que está formado por piezas P_j separadas por circunferencias C_j. Las piezas pueden ser discos, anillos o pantalones (cintas de Möbius no puesto que T'_S es orientable y la orientabilidad es una propiedad topológica).

La forma en la que se pegan esas piezas P_j, se asocia a un grafo G donde los vértices representan a cada P_j y las aristas indican adyacencia (existe un C_j entre las piezas que representan los vértices). Existe una aplicación cociente $q : T'_S \to G$ que lleva cada punto del entorno de una circunferencia C_j a la correspondiente proyección sobre el arco de G que representa a C_j. Por consiguiente, los C_j van a los vértices del grafo G.

La aplicación $q_* : \Pi_1(T'_S) \to \Pi_1(G)$ es un homomorfismo sobreyectivo con inversa a la izquierda, viendo q como una homotopía. Por tanto, $\Pi_1(G)$ es un cociente de $\Pi_1(T'_S)$, por lo que está finitamente generado. Esto implica que existe un subgrafo $G_0 \subset G$ tal que la clausura de $G - G_0$ consiste en un número finito de árboles (G se puede retraer a G_0). Sólo uno de esos árboles puede no ser compacto puesto que a T'_S le falta un único punto. Además, el no ser compacto implica que ese árbol está compuesto por un subárbol homeomorfo a $[0, \infty)$ junto con subárboles finitos pegados a él.

Podemos eliminar estos árboles finitos quitando las circunferencias que corresponden a dichos segmentos, cuyos vértices están asociados a discos P_j. Estas simplificaciones en G se pueden ver como simplificaciones en la función de Morse entendiendo los C_j como curvas de nivel, cancelando "sillines" con extremos locales (si es un disco que se adhiere a unos "pantalones") y anillos (si un C_j separa un anillo de un disco).

Finalmente tenemos que G tiene un subárbol no compacto G_f, homeomorfo a $[0, \infty)$ y la única posibilidad es que los segmentos correspondan a anillos, debido a que a T'_S sólo le falta

un punto, que se puede entender como el límite de dicha sucesión de P_j y C_j. Tenemos que existe un compacto (la unión de los P_j y C_j correspondientes a $G - G_f$) cuyo complementario (los correspondientes a G_f) es una sucesión de anillos "pegados" de forma diferenciable en el sentido usual y por tanto es difeomorfo al cilindro con la estructura usual. □

Hecho 2.4. *Toda estructura diferenciable E del toro $(S^1 \times S^1)_E$ es difeomorfa a la estructura usual del toro $S^1 \times S^1$.*

Demostración. Partiendo de la demostración del hecho anterior, el grafo asociado G ahora es finito con $\Pi_1(G)$ el cociente del grupo abeliano $\Pi_1(T_S)$, es decir, necesariamente $\Pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Podemos reducir G a una circunferencia, retrayendo los árboles finitos tal y como se hizo en la demostración anterior y haciendo los cambios necesarios en la función de *Morse*. La única posibilidad es que T_S sea una sucesión de anillos pegados diferenciablemente, así que T_S es difeomorfo a T con la estructura usual o a una botella de Klein, pero no puede ser éste último por ser $\Pi_1(T_S)$ abeliano (ya que el grupo fundamental de la botella de Klein no es abeliano y no es posible siquiera un homeomorfismo entre ellos). □

Hecho 2.5. *Sea E una estructura diferenciable en $D^1 \times \mathbb{R}$ tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo $g : (D^1 \times \mathbb{R})_E \to (D^1 \times \mathbb{R})_U$, con U la estructura usual, que además es la identidad entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.*

Demostración. Tomamos la proyección $\pi : (D^1 \times \mathbb{R})_S \to \mathbb{R}$ que ya es diferenciable en un entorno del borde. Si vemos $(D^1 \times \mathbb{R})_S$ como una variedad sabemos que existe una función de Morse $f : (D^1 \times \mathbb{R})_S \to \mathbb{R}$, a la que podemos obligar que coincida con $|\pi$ en un entorno del borde más pequeño que en el que es diferenciable π, donde no tendrá puntos críticos.

La función f es una función de Morse propia, con todos sus puntos críticos en distintos niveles. Los niveles de puntos no críticos están formados por un único arco y una o varias circunferencias. Al cortar por dichos niveles obtenemos discos, anillos, "pantalones", rectángulos y rectángulos con un "agujero" (un rectángulo menos un disco abierto). El grafo asociado G es un árbol debido a que $\Pi_1(D^1 \times \mathbb{R}) = 0$, y procedemos como en la demostración del hecho 2.3, alterando f de forma que el G asociado sea homeomorfo a $\mathbb{R}$.

La nueva función f no tiene puntos críticos, por lo que puede ser la segunda componente de un difeomorfismo $g : (D^1 \times \mathbb{R})_S \to D^1 \times \mathbb{R}$, que coincidirá con la identidad en un entorno del borde. La primera componente se puede obtener a partir del campo de vectores gradientes de f, de forma similar a como se prosigue en la demostración del teorema 2.2 de la teoría de Morse. □

Hecho 2.6. *Sea E una estructura diferenciable en D^2 tal que es la usual en un entorno del borde. Entonces existe un difeomorfismo $g : D^2_E \to D^2_U$, con U la estructura usual, que además es la identidad entorno a ∂D^2.*

Demostración. Tomamos la función que devuelve el radio (distancia al origen) en un entorno de ∂D^2_S y como es diferenciable, la extendemos a una función de Morse propia $f : D^2_S \to (0, 1]$, cuyos puntos críticos están en el interior y $f^{-1}(1) = \partial D^2_S$.

El grafo asociado G es un árbol por ser $\Pi_1(D^2) = 0$ y deformando f como se hizo anteriormente, podemos simplificar G a un único punto. Entonces, f sólo tiene un punto crítico p, que necesariamente debe de ser de índice 0 porque coincide con la función "radio" en el

borde (f decrece a medida que nos acercamos p, es decir, en p la matriz Hessiana es definida positiva y por tanto el índice es 0).

Construimos $g : D^2_S \to D^2$ difeomorfismo a partir de f de manera similar a como se hizo en el apartado anterior, reproduciendo parte de la demostración del teorema 2.2 (siguiendo el flujo del campo de vectores gradientes de f). En particular, tenemos que g es la identidad en un entorno de ∂D^2_S. □

2.4. Teorema de Alisamiento de Asas

Teorema 2.4. *(de "alisamiento de asas") Sea S una variedad diferenciable, entonces:*

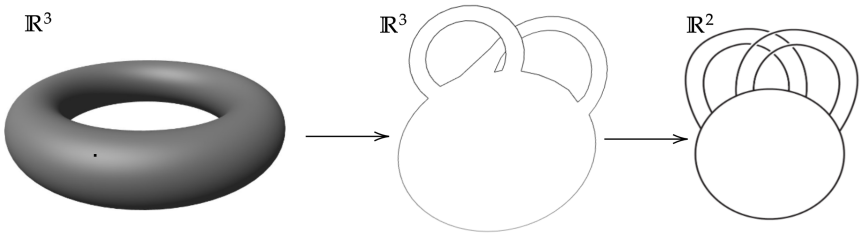
1. *Un embebimiento $\mathbb{R}^2 \to S$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en un entorno compacto del origen. Además, la isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto que contiene al anterior.*
2. *Un embebimiento $D^1 \times \mathbb{R} \to S$ que es diferenciable entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ puede isotoparse a un embebimiento diferenciable entorno a $D^1 \times 0$. Dicha isotopía coincide con la identidad fuera de un entorno compacto de $(D^1 \times 0) \cup (\partial D^1 \times \mathbb{R})$.*
3. *Un embebimiento $D^2 \to S$ que es diferenciable entorno a ∂D^2 puede isotoparse a un embebimiento diferenciable en todo D^2. La isotopía coincide con la identidad en un entorno de ∂D^2.*

Demostración. Voy a proceder a la demostración de cada uno de los apartados:

1. La idea de la demostración es arrastrar la estructura diferenciable de S (E_S) a una estructura diferenciable sobre el Toro (T_S) , y aprovechar que en tales condiciones existe un difeomorfismo de T_S al Toro con la estructura diferenciable estándar (por el **Hecho 4**), que nos permitirá construir la isotopía deseada.

   Vamos a utilizar el "truco del toro" de Kirby, para ello veremos el toro T como el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ con su estructura topológica y diferenciable estándar, tomando el 0 como imagen del $0 \in \mathbb{R}^2$. Eliminamos un punto del toro distinto del 0, y a esta nueva variedad la llamamos T'.

   Consideremos una inmersión $q : T' \to \mathbb{R}^2$ diferenciable que fija el 0. Dicha inmersión se puede construir partiendo del embebimiento del toro punteado T' en un disco con dos "1-asas" en $\mathbb{R}^3$ y seguidamente "aplanando" la figura, es decir, llevar diferenciablemente el disco con asas a $\mathbb{R}^2$. Las asas se embeben por separado ya que como se observa, se solapan en $\mathbb{R}^2$.



   Sea $h : \mathbb{R}^2 \to S$ el embebimiento del enunciado, por el cual, haciendo "pull-back", S induce una estructura diferenciable en $\mathbb{R}^2$, que denotaremos E_1. Por el mismo razonamiento pero para la inmersión q, $\mathbb{R}^2$ con la estructura E_1 induce una estructura diferenciable en T' que llamaremos E_2.

   Sabemos por el **Hecho 3** que existe un conjunto compacto en T'_{E_2} cuyo complemento

es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$ con su estructura diferenciable estándar, equivalentemente es difeomorfo a $D^2 - (0,0)$ como abierto de $\mathbb{R}^2$ con su estructura diferenciable estándar. Si vemos el disco punteado como un subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$, el 0 se puede añadir de forma natural puesto que la estructura diferenciable usada hasta el momento es la usual en el cilindro (que induce la usual en D^2, en el plano complejo y en la esfera de Riemann). Esto nos permite extender la estructura diferenciable E_2 de T' a T, la cual seguiremos llamando E_2.

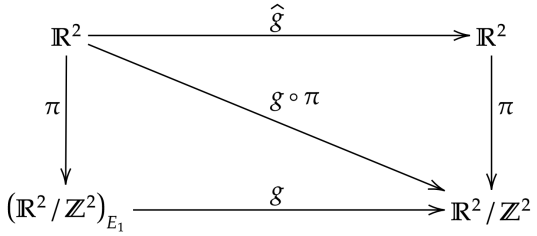
Por el **Hecho 4** sabemos que toda estructura diferenciable del toro ($T \equiv S^1 \times S^1$) es difeomorfa a la estándar. Por tanto, existe un difeomorfismo $g : T_{E_2} \to T$. Para poder utilizar el Teorema de Levantamiento de aplicaciones de la teoría de recubridores, necesitamos normalizar dicha función g:

- Aplicando rotaciones en el toro T (lo vemos como $S^1 \times S^1$) podemos hacer que g lleve el 0 en el 0.
- Necesitamos que el homomorfismo g_* sea la identidad a nivel de grupos fundamentales para que el difeomorfismo g pueda ser levantado a un difeomorfismo $\widehat{g} : \mathbb{R}^2_{E_1} \to \mathbb{R}^2$ fijando el origen. Para ello basta con componer g con el automorfismo lineal $L \in GL_2(\mathbb{Z})$ apropiado, es decir, aquel tal que al componerlo con g_* queden fijos los dos generadores del grupo fundamental del toro topológico. La nueva g sigue llevando el 0 en el 0 y g_* es la identidad.

$$\left(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\right)_{E_1} \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\ L\ } \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

$$\pi_1(0,\ T_{E_1}) \xrightarrow{\ g_*\ } \pi_1(0,\ T) \xrightarrow{\ L\ } \pi_1(0,\ T)$$

De esta forma construimos un difeomorfismo $\widehat{g} : \mathbb{R}^2_{E_1} \to \mathbb{R}^2$ como el levantamiento de g fijando el origen, que de forma natural es doblemente periódico.



Identifiquemos $\mathbb{R}^2$ con el interior del disco unidad de $\mathbb{R}^2$ mediante una reparametrización radial que es la identidad entorno al 0, haciendo "pull-back" para cada disco de $\mathbb{R}^2$ para así obtener la estructura diferenciable inducida por E_1, que llamaremos E. Entonces aplicando esta identificación en el dominio y la imagen de $\widehat{g}$ obtenemos $G : D^2_E \to D^2$ automorfismo diferenciable, que sigue siendo $\widehat{g}$ entorno al 0 y tiende a ser la identidad en el borde (por la periodicidad $\|\widehat{g}(x) - x\|$ está acotado para todo

x, y por consiguiente al tender x a infinito las variaciones tienden a 0 con la reparametrización, es decir, $G(x)$ tiende a x). Podemos extender G a un homeomorfismo $G : \mathbb{R}^2_E \to \mathbb{R}^2$, siendo la identidad fuera del interior del disco.

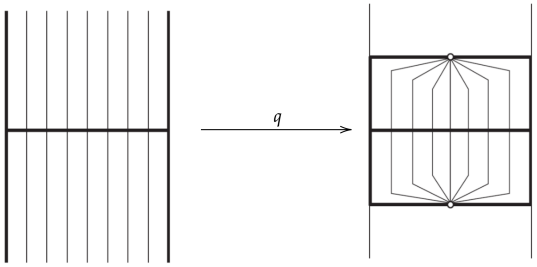
Por el truco de Alexander, G es isotópica a la identidad. Se puede obtener la isotopía G_t variando el radio del disco de origen y destino ($G_t(x) = tG(\frac{x}{t})$ para $x \in D((0,0),t)$ y es la identidad fuera), por lo que G_0 es la identidad y $G_1 = G$.

Definimos la isotopía que resuelva el problema como $h_t = h \circ G_t^{-1}$, teniendo que $h_0 = h$ por ser G_0 la identidad. Además, h_t se queda fija fuera del disco unidad ya que G_t es la identidad en dicho conjunto. También tenemos que $h_t(0) = h(0) = 0$ ya que para todo t, $G_t^{-1} = \widehat{g}^{-1}$ entorno al 0 y $\widehat{g}(0) = 0$. Finalmente, h_1 es diferenciable entorno al 0 porque $G_1^{-1} = G^{-1} = \widehat{g}^{-1}$ entorno al 0, que localmente es un difeomorfismo de la estructura usual de $\mathbb{R}^2$ en la inducida por S mediante h, que habíamos denotado por E_1.

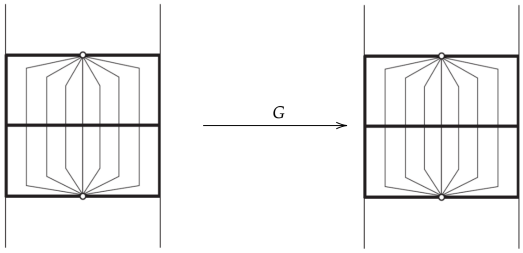
2. La idea es, al igual que en el punto anterior, encontrar un automorfismo diferenciable del dominio de h con diferentes estructuras diferenciables y restringirlo para que esté fijo donde lo solicite el enunciado.

   Tenemos $h : D^1 \times \mathbb{R} \to S$ embebimiento diferenciable en un entorno del borde del dominio. Dicho embebimiento induce una estructura diferenciable E_1 en $D^1 \times \mathbb{R}$ que coincidirá con la estructura diferenciable estándar de $D^1 \times \mathbb{R}$ entorno al borde ya que h es diferenciable en el sentido usual ahí.

   Por el **Hecho 5** tenemos que existe un difeomorfismo g entre la estructura inducida E_1 y la estructura estándar de $D^1 \times \mathbb{R}$ que es la identidad entorno al borde del conjunto. Tomamos el homeomorfismo $q : D^1 \times \mathbb{R} \to (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ que es la identidad entorno $D^1 \times 0$. El comportamiento del homeomorfismo q se muestra en la siguiente figura:



   Definimos $G : ((D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1))_{E_1} \to (D^1 \times D^1) - (0 \times \partial D^1)$ por $G = q \circ g \circ q^{-1}$, que como es la identidad entorno al borde del dominio, se puede extender a $G : \mathbb{R}^2_{E_1} \to \mathbb{R}^2$. No hay problema en los dos puntos de $0 \times \partial D^1$ ya que por como se define q, en ambos tiene límite y es la identidad. Su comportamiento entorno a $D^1 \times 0$ es igual que el de g (q es la identidad) y es la identidad fuera de $D^1 \times D^1$ y entorno a $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.



Podemos adaptar el truco de Alexander definiendo una isotopía G_t de homemomorfismos en $\mathbb{R}^2$ rescalando el cuadrado $D^1 \times D^1$ al igual que en el apartado anterior hicimos con el disco, de forma que G sea isotópica a la identidad en $\mathbb{R}^2$.

Finalmente basta con definir $h_t = h \circ G_t^{-1}$. Cumple claramente que $h_0 = h$, h_1 es diferenciable en un entorno de $D^1 \times 0$ y h_t es la identidad en un entorno de $\partial D^1 \times \mathbb{R}$.

3. Tenemos $h : D^2 \to S$ embebimiento que es diferenciable entorno al borde del dominio. Este embebimiento induce mediante "pull-back" la estructura diferenciable de S a D^2 que coincide con la estructura diferenciable estándar de D^2 en un entorno del borde, ya que h es diferenciable en dicha zona en el sentido usual.

   Por el **Hecho 6** existe un difeomorfismo g entre D^2 con la estructura estándar y la inducida, que además es la identidad entorno al borde. Una adaptación del truco de Alexander al disco nos aporta la isotopía g_t de homeomorfismos de D^2, donde t va variando el tamaño de los discos de dominio e imagen de g y extendiendo por la identidad, por lo que g_0 sería la identidad y $g_1 = g$. Tomando la isotopía $h_t = h \circ g_t$ tendríamos lo solicitado, ya que $h_0 = h$ y h_1 es igual que h en un entorno del borde y es diferenciable en todo el disco.

□

Corolario 2.1. *El primer apartado del teorema anterior sigue siendo cierto para un abierto W de $\mathbb{R}^2$ en vez de para todo $\mathbb{R}^2$, con el objetivo de suavizarlo en un punto $p \in W$.*

Demostración. Se restringe h a $B_p \subset W$, una bola cerrada con centro p. Sabemos que existe $f : D^2 \to B_p$ difeomorfismo y $g = h \circ f$ se puede extender continuamente a $\mathbb{R}^2$ (al punto q fuera de D^2 se le asigna el mismo valor que al punto de intersección de la circunferencia con el segmento del origen a q). Aplicamos el teorema anterior a $g : \mathbb{R}^2 \to S$ de manera que el entorno del origen V donde se altera g sea menor que la bola cerrada unidad, obteniendo así una isotopía g_t.

Definimos la isotopía deseada como $h_t(x) = (g_t|_{D^2} \circ f^{-1})(x)$ si $x \in B_p$ y $h_t(x) = h(x)$ si $x \notin B_p$. Está bien definida puesto que $g_t|_{D^2} \circ f^{-1}$ es la identidad fuera de un entorno de p contenido en B_p y simplemente extendemos por la identidad. Además, de forma natural $h_0 = h$ por ser $g_0 = g$ y h_1 es diferenciable en un entorno de p contenido en B_p por serlo g_1 en un entorno del origen. □

3. Resultados principales

3.1. Enunciados

Teorema A. *Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable.*

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Suponiendo ciertos los teoremas anteriores, es directa la obtención del siguiente resultado, ya que por A tenemos que toda variedad topológica 2-dimensional tiene una estructura diferenciable y por B sabemos que es única salvo difeomorfismos:

Corolario 3.1. *(Teorema clásico de Moise) Toda variedad topológica 2-dimensional tiene una única estructura diferenciable salvo difeomorfismos.*

3.2. Demostración del Teorema A

Teorema A. *Toda variedad topológica tiene una estructura diferenciable.*

Demostración. Sea S una variedad topológica, podemos coger un atlas $\{h_i | 1 \leq i \leq N\}$ con $N \in \mathbb{N}$ si es finito o $N = \infty$ si no lo es. Vamos a construir por inducción una estuctura diferenciable en el conjunto $U_n = \cup_{i \leq n} h_i(\mathbb{R}^2)$, que por ser un sistema coordenado su límite debe de ser S, probando así el resultado. Cabe destacar que cada U_i contiene a todos los anteriores.

La inducción empieza tomando una carta cualquiera del sistema, $U_1 = h_1(\mathbb{R}^2)$ por ejemplo. Si se considera la variedad U_1 con el atlas $\{h_1\}$ entonces h_1 es diferenciable para ésta de forma trivial (se compone con la inversa y queda la identidad en $\mathbb{R}^2$).

Una vez arrancada la inducción, suponiendo cierto para el paso $n-1$ vamos a extender la diferenciabilidad de U_{n-1} a U_n. Sea la carta h_n, tomamos entonces $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) = h_n^{-1}(U_{n-1} \cap h_n(\mathbb{R}^2))$, que es un abierto de $\mathbb{R}^2$ por ser h_n continua.

Tenemos $W \subset \mathbb{R}^2$ abierto, por el **Hecho 1** sabemos que existe una triangulación geométrica suya y al ir acercándose a la frontera topológica los triángulos convergen a puntos. Queremos aplicar el "Teorema de alisamiento de asas" en los vértices de los triángulos, seguidamente en los lados y finalmente en el interior de cada uno (aplicar los 3 apartados del teorema de forma consecutiva), pero para ello es necesario partir de un embebimiento de $\mathbb{R}^2$:

1. Para todos y cada uno de los vértices de la triangulación elegimos una bola $B(p, \epsilon_p) \subset W$ cuyos cierres topológicos en $\mathbb{R}^2$ no se corten mutuamente. $B(p, \varepsilon_p)$ es abierto y queremos obtener $\widehat{h}$ diferenciable entorno a p.

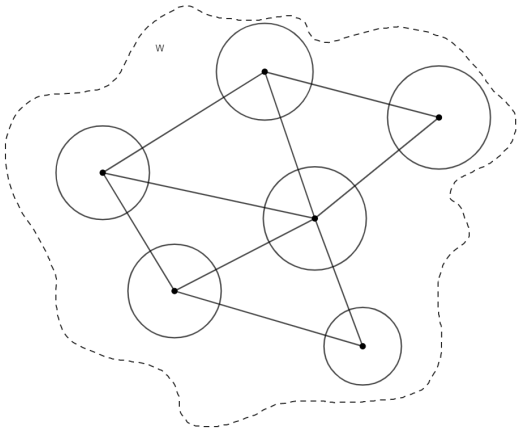


Figura 3.1.: $B(p, \epsilon_p)$ para cada vértice.

Podemos aplicar el Corolario del apartado 1 del Teorema de Alisamiento de Asas ya que cumplimos todas las hipótesis necesarias. Así obtenemos una $\widehat{h}$ isotópica a h, que es diferenciable en O_p entorno abierto de p y además queda fija fuera de otro entorno un poco mayor $O'_p \supset O_p$, con $O'_p \subset B(p, \epsilon_p)$.

De manera acumulativa, este procedimiento se puede realizar simultáneamente en todos los vértices p en la triangulación de W. Esto prueba que $h_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ es isotópica a un homeomorfismo $\widehat{h}_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ que es diferenciable, como aplicación sobre la superficie diferenciable U_{n-1}, en un entorno $O_p \subset W$ alrededor de cada vértice p de la triangulación de W. Además la isotopía coincide con h_n fuera de entornos $O'_p \subset W$ mayores que O_p para cada p, disjuntos 2 a 2.

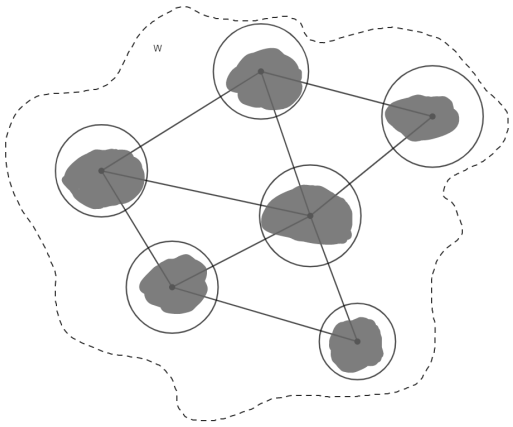


Figura 3.2.: O_p para cada vértice.

2. Tenemos por el paso anterior un $h_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ isotópico al original en las con-

diciones explicadas, y que es diferenciable como aplicación $W \to U_{n-1}$ entorno a los vértices de la triangulación de W. Queremos utilizar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas para generar otra isotopía que nos lleve h_n a otro homeomorfismo (al que le daremos el mismo nombre) cuya restricción a $W \to U_{n-1}$ sea diferenciable además entorno a los lados de la triangulación anterior, coincidiendo con el h_n original fuera de un entorno del 1-esqueleto de esa triangulación.

Para ello, consideramos para cada lado l de la triangulación de W un subconjunto R_l (rectángulo) dentro de W que sea difeomorfo a $D^1 \times \mathbb{R}$, cumpliendo:

a) R_l corta a l en un segmento compacto y es disjunto con cualquier otro lado de la triangulación de W. En particular, R_l no contiene ningún vértice de la triangulación de W.

b) Si p_1 y p_2 son los vértices extremos de l, una componente del borde de R_l está contenida en O_{p_1} y la otra en O_{p_2}, es decir, h_n es diferenciable en 2 componentes de ∂R_l.

c) Los cierres de los rectángulos R_l en $\mathbb{R}^2$ son disjuntos 2 a 2 y están contenidos en W.

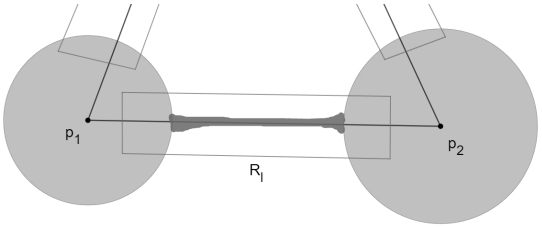


Figura 3.3.: Entorno de l donde h_n es diferenciable.

Ahora es evidente como en el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas nos produce la isotopía deseada realizando el trabajo simultáneamente en todos los rectángulos R_l, generando el nuevo $h_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ deseado.

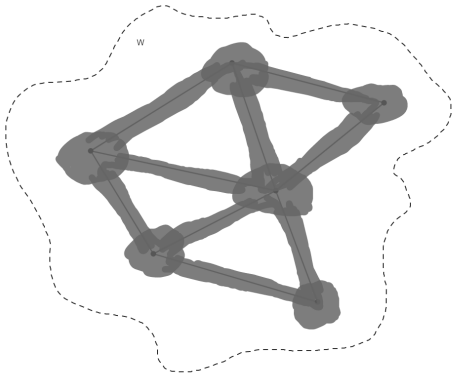


Figura 3.4.: Entorno del 1-esqueleto donde h_n es diferenciable.

3. El tercer paso es similar a los anteriores, pero ahora usando el apartado 3 del Teorema de Alisamiento de Asas. Lo que hacemos en considerar para cada triángulo T de la triangulación de W un dominio de Jordan D_T satisfaciendo:

   a) $D_T \subset \mathring{T}$.

   b) $h_n : W \to U_{n-1}$ es diferenciable sobre $T - \mathring{D}_T$.

   c) Los D_T son disjuntos dos a dos.

   Aplicando el Teorema de Carathéodory obtenemos que es difeomorfo a la bola unidad y por tanto podemos proceder de manera similar a los apartados anteriores.

   A continuación producimos otra isotopía que nos lleve el h_n generado en el apartado 2 a otro homeomorfismo (al que daremos el mismo nombre) cuya restricción $W \to U_{n-1}$ sea diferenciable sobre D_T, coincidiendo en cada instante con la h_n anterior en un entorno de ∂D_T y de hecho fuera de D_T, para cada triángulo T. Esto concluiría la prueba.

   Para probar la existencia de D_T vamos a definir la curva de Jordan cuyo interior es de forma trivial un dominio de Jordan, que será dicho D_T. La curva debe ser diferenciable, cerrada y simple, que es la caracterización de una curva de Jordan. Reducimos el problema a buscar dicha curva para el entorno tubular de un triángulo equilátero, ya que es difeomorfo al de un triángulo cualquiera. Podemos simplificarlo más aportando únicamente una curva no cerrada cuyos extremos se puedan pegar consecutivamente, siendo infinitamente derivable en los puntos donde se unen.

   Haciendo uso de una función meseta f que vale 0 en $\mathbb{R}^-$ y 1 a partir de $\epsilon > 0$, si tomamos $g(x) = tg(\frac{\pi}{3})xf(x)$ en el intervalo $[-1, \epsilon]$, tenemos que $g(-1) = 0$ y $g(\epsilon) = tg(\frac{\pi}{3})\epsilon$ al igual que sus derivadas, por lo que si vamos alternando $g(x)$ y $g(-x)$ mediante rotaciones y traslaciones, tendremos una curva α diferenciable (suavización del triángulo equilátero).

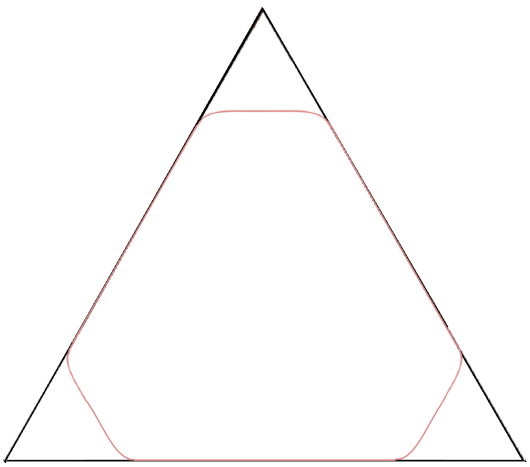


Figura 3.5.: Curva de Jordan cercana al triángulo

Se puede observar que es válido $\forall \epsilon > 0$ y que al hacer tender ϵ a 0, la curva será el propio triángulo equilátero. Es por ello que podemos tomar el ϵ lo suficientemente pequeño como para que la curva α quepa en el entorno tubular y siga siendo una curva de Jordan. Como exigimos que $D_T \subset \mathring{T}$ podemos aplicar a la curva un factor de escala para así no contener ningún punto del borde del triángulo T. Además, de forma evidente obtenemos que los dominos D_T son disjuntos 2 a 2.

Todas las isotopías de los pasos anteriores coinciden por extensión continua con el homeomorfismo $h_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ original en la frontera de W en $\mathbb{R}^2$ por construcción, ya que el diámetro de los triángulos en W tiende a 0 al acercarnos a la frontera. Por tanto pueden ser extendidas como isotopías de $\mathbb{R}^2 \to h(\mathbb{R}^2)$ coincidentes con h_n en $\mathbb{R}^2 - W$.

Como conclusión, el homeomorfismo $h_n : \mathbb{R}^2 \to h_n(\mathbb{R}^2)$ resultante es compatible con la estructura diferenciable en U_{n-1} y junto con $h_1, \ldots, h_{n-1}$, nos define una estructura diferenciable sobre U_n. Esto cierra la inducción y prueba el teorema.

□

3.3. Demostración del Teorema B

Teorema B. *Todo homeomorfismo entre variedades diferenciables 2-dimensionales es isotópico a un difeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : S \to S'$ homeomorfismo entre variedades diferenciales 2-dimensionales, se puede utilizar el **Hecho 2**, que nos aporta una triangulación diferenciable de S. Por definición de triangulación diferenciable, tenemos que la aplicación celda φ_n es un difeomorfismo. Vamos a proseguir de forma similar a la demostración del Teorema A, pero esta vez la función a isotopar es $g_n = f \circ \varphi_n : \mathbb{R}^2 \to f(\varphi(\mathbb{R}^2)) \subset S'$ homeomorfismo. Sea $W_n = \varphi_n^{-1}(S) = \varphi_n^{-1}(S \cap \varphi_n(\mathbb{R}^2))$ abierto de $\mathbb{R}^2$, vamos a isotopar f en 3 etapas:

1. Para todos los vértices de la triangulación de S, vistos en W_n mediante φ_n^{-1}, tomamos una bola $B(p, \epsilon)$ de tal forma que sus cierres no se corten 2 a 2 y estén contenidos en W_n. Acto seguido podemos proceder de forma idéntica al apartado 1 de la demostración del Teorema A, obteniendo como resultado un homeomorfismo $\widehat{g}_n : W_n \to g_n(W_n)$ isotópico a g_n, que es diferenciable en un entorno de cada vértice de la triangulación $O_p \subset W_n$, cuyos cierres no se cortan y quedan dentro de W_n y además $\widehat{g}_n$ coincide con g_n en un entorno de cada vértice mayor al anterior (cuyos cierres tampoco se cortan y están contenidos en W_n).

   Si deshacemos el cambio con φ_n, obtenemos que $f : \widehat{g} \circ \varphi_n : \varphi_n(W_n) \to g_n(W_n)$ homeomorfismo es isotópica a $\widehat{f} = \widehat{g} \circ \varphi_n : \varphi_n(W_n) \to g_n(W_n)$ homeomorfismo, cumpliendo lo descrito pero para $\varphi_n(W_n)$, por ser φ_n un difeomorfismo. Como $\widehat{f}$ coincide con f en el borde de $\varphi_n(W_n)$, la isotopía se puede extender a $S \to S'$. Mantenemos el nombre f para la nueva $\widehat{f}$.

   Realizamos de forma incremental este proceso, hasta conseguir una isotopía a una función que sea diferenciable en un entorno de todos los vértices de la triangulación de S que además queda fija en un entorno mayor (cuyos cierres no se cortan).

2. Para todo lado l de la triangulación en W_n definimos un entorno R_l que es difeomorfo a un rectángulo, que a su vez es difeomorfo a $D^1 \times \mathbb{R}$, para así poder aplicar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas. Para ello debe cumplir:

   a) R_l corta a l en una curva compacta y es disjunto con cualquier otro lado de la triangulación diferenciable. En particular R_l no contiene ningún vértice de la triangulación en W_n.

   b) Si p_1 y p_2 son los vértices extremos de l, una componente del borde está contenida en O_{p_1} y otra en O_{p_2}, con O_p entorno de p donde es diferenciable g_n, es decir, definimos R_l de manera que g_n sea diferenciable en 2 componentes de su borde (∂R_l).

   c) Los cierres de los R_l en $\mathbb{R}^2$ son disjuntos 2 a 2 y están contenidos en W_n.

   Estamos en las condiciones necesarias para aplicar el apartado 2 del Teorema de Alisamiento de Asas, dando lugar a una isotopía a $\widehat{g} : W_n \to g(W_n)$ homemomorfismo diferenciable en un entorno de cada lado de la triangulación en W_n que coincide con g fuera de un entorno mayor al anterior. Procedemos de igual forma que en el apartado 1 de esta demostración, obteniendo una isotopía de f a $\widehat{f} : S \to S'$ homeomorfismo diferenciable en un entorno de cada lado de la triangulación diferenciable de S, que coincide con f fuera de un entorno mayor que el anterior.

3. En este último apartado queremos aplicar el punto 3 del Teorema de Alisamiento de Asas. Como la triangulación de S es diferenciable, sabemos que el interior de cada triángulo es difeomorfo al disco unidad de $\mathbb{R}^2$, por lo que para utilizar un dominio de Jordan D_T para cada T triángulo de la triangulación de W_n de forma que no se corten 2 a 2, tomamos un conjunto más pequeño que el interior del triángulo (se puede tomar el mismo conjunto pero multiplicado por un factor de escala ligeramente menor que 1).

   Tenemos que g_n es diferenciable en un entorno de ∂D_T y coincide con la g original fuera de un entorno del borde mayor que el anterior. De igual forma que en el apartado 3 de la demostración del Teorema B obtenemos una isotopía de g a $\widehat{g} : W_n \to g_n(W_n)$ homemorfismo que es diferenciable en la triangulación de W_n (en los vértices, los lados y en el interior de cada triángulo). Siguiendo el esquema de los apartados anteriores obtenemos que f es isotópica a $\widehat{f} : S \to S'$ homeomorfismo diferenciable en toda la triangulación diferenciable de S (vértices, lados e interiores). Como consecuencia $\widehat{f}$ es, de forma natural, un difeomormismo, concluyendo así la prueba.

□

Parte II.

Visualización de superficies

Procederemos al estudio de la representación de una superficie dada las cartas que la definen. El estudio estará orientado al ajuste del nivel de subdivisión de la malla inicial, para alcanzar una cierta precisión en la representación.

Para ello será necesario elegir una definición de "buena aproximación" y tener en cuenta la percepción de la visión humana.

Además, se necesitará implementar un programa que extraiga los elementos relevantes de las cartas y lo ponga en práctica.

4. Conceptos básicos

Definición 4.1. Una **primitiva** es el objeto básico de visualización. Pueden ser puntos, segmentos, patrones de segmentos, polígonos y patrones de polígonos. En nuestro caso las primitivas a usar serán triángulos.

Definición 4.2. Entenderemos por **malla** una malla de triángulos, que es un conjunto de triángulos que aproximan a una cierta superficie. Cuando nos referimos a la malla inicial, hablamos de la aproximación del cuadrado $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ para un cierto número de triángulos (se calcula una cuadrícula y se dividen por las diagonales para obtener los triángulos).

Definición 4.3. La acción **teselar** consiste en subdividir una primitiva en primitivas más pequeñas, para así poder aproximar mejor la superficie que se quiere representar. En el caso de OpenGL, para realizar la teselación es necesario especificar los respectivos niveles de teselado.

Definición 4.4. El **nivel de teselado en un lado** (outer) es el número de partes en el que se dividirá el lado para el teselado de la primitiva. Por ejemplo, si el nivel es 3 para un cierto lado, dicho lado se dividirá en 3 partes iguales, que serán los lados de los nuevos triángulos.

Definición 4.5. El **nivel de teselado en el interior** (inner) es el número de partes en el que se dividirá la primitiva hacia el interior. Por ejemplo, si el nivel es 3 para una cierta primitiva, dicha primitiva se dividirá en 3 niveles hacia el baricentro.

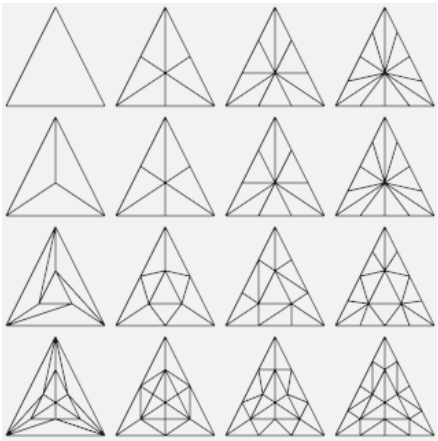


Figura 4.1.: Niveles de teselado del 1 al 4: outer en horizontal (todos los lados por igual) e inner en vertical.

Definición 4.6. Un **shader** es un tipo específico de programa informático que se ejecuta en la GPU. Su uso principal es el cálculo de gráficos. En OpenGL existen los siguientes tipos de shaders:

- Vertex shader: se ejecuta para cada vértice de entrada. Se utiliza para podificar cada vértice.
- Tessellation control shader: tiene de entrada una primitiva y devuelve un patch (conjunto de primitivas), según los niveles de teselado.
- Tessellation evaluation shader: similar al vertex shader pero diseñado para la salida del tessellation control shader.
- Geometry shader: tiene de entrada una primitiva y devuelve varias primitivas.
- Fragment shader: después del rasterizado (pasar de gráfico vectorial a píxels), se ejecuta para calcular el color de cada fragmento de triángulo.
- Compute shader: etapa utilizada para realizar cáculos en general. No suele usarse para el renderizado en sí (no se ha utilizado en el proyecto).

Definición 4.7. La **curvatura de Gauss** (K) es una función que a cada punto de una superficie S le asigna un valor de $\mathbb{R}$. Indica el tipo de geometría entorno al punto:

- $K_p = 0$, euclídea, localmente es $\mathbb{R}^2$.
- $K_p > 0$, esférica, localmente es una esfera de radio $R = \frac{1}{\sqrt{K_p}}$.
- $K_p < 0$, hiperbólica, localmente es un espacio hiperbólico de cruvatura K_p.

La curvatura de Gauss se ha calculado de la siguiente forma (CITAR WOLFRAM):

$$K_{x(u,v)} = \frac{det(x_{uu}, x_u, x_v)det(x_{vv}, x_u, x_v) - [det(x_{uv}, x_u, x_v)]^2}{[|x_u|^2|x_v|^2 - < x_u, x_v >^2]^2}(u, v)$$

que es la curvatura de Gauss en el punto $x(u, v)$, con x carta de la superficie S. Existen muchas maneras distintas de calcularla, pero esta es la que nos favorecerá para su correcta obtención mediante los árboles de expresión.

5. Estudio de la teselación

En este capítulo se describe el estudio realizado para teselar de manera eficiente un triángulo. Esta técnica se implementará en shaders, para poder ejecutarlo directamente en la GPU, que ofrece mayor rendimiento que la CPU para dicho problema. En un principio se iba a realizar en un Geometry Shader pero más tarde se observó que era más acertado el uso de un Tessellation Shader.

Cabe destacar antes que la idea inicial era desarrollar un algoritmo de división recursiva de los triángulos, el cuál se detiene en el nivel en el que se cree que representa correctamente a la porción de superficie. Sin embargo, el lenguaje Glsl no permite realizar llamadas recursivas, por lo que era necesario buscar alternativas.

5.1. Geometry shader

La ventaja de este tipo de shader es que es muy flexible a la hora de generar nuevas primitivas, ya que permite añadir primitivas totalmente disconexas.

En primer lugar opté por describir de forma explícita un cierto número de niveles de la función recursiva deseada, 3 niveles concretamente. Los resultados eran aceptables pero se podía exceder el límite de vértices, quedando así una superficie incompleta. Además, el tiempo de compilación crecía de forma exponencial a medida que se añadían más niveles (para 2 niveles era de 10-15s y para 3 no concluía).

Puesto que este método era costoso temporalmente y tenía muchas limitaciones, decidí implementar un algoritmo similar pero en un bucle, cuyo esquema es el siguiente:

1. Dado un lado, dividirlo en tantos segmentos como sea necesario, atendiendo a una cierta medida. Dicha medida sólo depende de las características del lado, para que el pegado sea el correcto con los triángulos adyacentes.

2. Se realiza una división hacia el baricentro, de forma similar al punto anterior.

3. Con los vértices de los dos puntos anteriores se genera una malla, es decir, para cada lado, se genera otro lado paralelo para cada subdivisión hacia el baricentro, manteniendo proporcionalmente las subdivisiones del lado original.

4. Se genera una tira de triángulos cuyos vértices sean los de la malla anterior.

Con este método los problemas anteriores se solventan en gran medida, pero dicho algoritmo es semejante al del Tessellation shader, por lo que era natural estudiar el funcionamiento en tal shader.

Finalmente, los inconvenientes observados han sido los siguientes:

- El número de vértices de salida está limitado por una constante predefinida, con valor GL_MAX_GEOMETRY_OUTPUT_VERTICES=256 (depende del hardware), es decir, como mucho se puede devolver una tira de 254 triángulos, independientemente del tamaño del triángulo original.
- El shader tarda en compilarse de media entre 3 y 5 segundos.

5.2. Tessellation shader

Este shader tiene un pequeño problema y es que la subdivisión está predefinida (equal, fractional_odd o fractional_even spacing), por lo que los vértices generados en la fase de control del Tessellation shader tienen un esquema fijo, para un número de subdivisiones dado. No es un gran inconveniente puesto que en la fase de evaluación se pueden variar libremente dichos vértices, siempre que se haga con cuidado (en esta fase los vértices se generan mediante coordenadas baricéntricas).

Las ventajas con respecto al Geometry shader son las siguientes:

- El shader tarda en compilarse de media menos de $1s$.
- El número de vértices de salida no está tan limitado (GL_MAX_PATCH_VERTICES= 36477 frente a 256).
- Está pensado para realizar directamente el algoritmo de teselación, por lo que no hay que implementarlo.

Al tener implementado el algoritmo de teselación, el estudio se reduce a encontrar una medida que nos indique cómo de buena es la representación de la superficie. Como la teselación de un triángulo se indica por cada lado (outer tessellation factor) y en el interior (inner tessellation), para cada tipo de medida hay que proporcionar una adicional para los lados, para que la teselación sólo dependa de lo que sucede en ellos y de esta forma pegue correctamente con el triángulo adyacente.

5.3. Medidas según la definición

A continuación se desglosan todas las medidas estudiadas, atendiendo a las diferentes definiciones de "buena aproximación a una superficie".

5.3.1. Medida basada en el volumen

Consiste en estimar el volumen de la diferencia entre el poliedro generado y la superficie original a nivel local. Esta medida está asociada al primer concepto de superficie bien representada:

Definición 5.1 (Superficie bien representada 1)**.** Dada una superficie S y un politopo P que la aproxima, se dice que la representa con una precisión de $\epsilon > 0$ si el volumen contenido entre ambos es menor que ϵ.

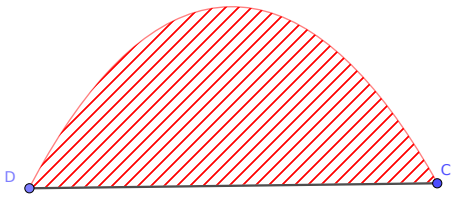


Figura 5.1.: Medida en un lado DC

La medida equivalente para los lados es el área de la sección cuya base es el lado del triángulo y el borde restante es la curva original a aproximar con dicho lado.

Sin embargo, para las superficies no compactas esta definición puede no permitir la existencia de un P que la aproxime con una precisión finita.

Además, aparece el problema de la no detección de picos, debido a que al estudiar el volumen, si la altura es grande y la base lo suficientemente pequeña se puede dar el caso de que el volumen quede por debajo de la precisión ϵ y no tesele, aun existiendo dicho pico.

Figura 5.2.: Pico no teselado

5.3.2. Medida basada en el área

Consiste en estimar el área de la superficie original localmente. Esta medida está asociada al segundo concepto de superficie bien representada:

Definición 5.2 (Superficie bien representada 2)**.** Dada una superficie S y un politopo P que

la aproxima, se dice que la representa con una precisión de $\epsilon > 0$ si el ratio de área $r = \frac{A(S)}{A(P)}$ cumple que $r - 1 < \epsilon$ (siempre se tiene que $r \geq 1$).

La medida equivalente para los lados es $r = \frac{L(\alpha)}{L(l)}$ donde L es la longitud, l el lado del triángulo y α la curva a estimar.

Es una buena alternativa para poder detectar dichos picos, ya que cuando hay uno o varios picos mal aproximados el área original entorno al pico es mucho mayor que la de la superficie generada (el ratio es grande). Además, de esta forma estamos evitando la aparición del problema del farolillo de Schwarz (–CITAR–) debido a que buscamos estimar con una cierta precisión el área original.

Sin embargo, al usar esta medida asumimos que la parametrización a nivel local funciona como una gráfica, como por ejemplo $p(u,v) = (p_x(u,v), p_y(u,v), p_z(u,v)) = (u, v, p_z(u,v))$. Esto no es cierto en la gran mayoría de casos y se puede ver fácilmente con la siguiente parametrización del plano $[0,1]x[0,1]$, embebido en $\mathbb{R}^3$:

$$p(u,v) = (cos(\frac{\pi}{2}u), sin(\frac{\pi}{2}v), 0)$$

Al ser un plano no debería de teselar, pero como detecta que la curva a estimar en el lado del triángulo no está bien aproximada, entonces subdivide:

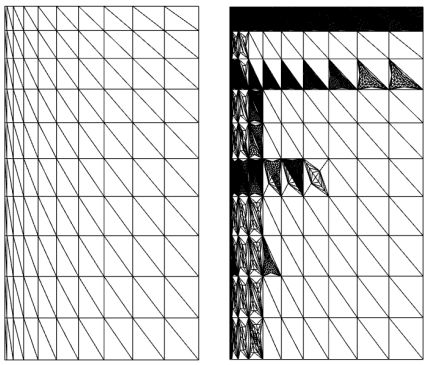


Figura 5.3.: Teselación innecesaria del plano

5.3.3. Medida basada en la curvatura

Consiste en estimar la curvatura de Gauss por área. Esta medida está asociada al tercer concepto de superficie bien representada:

Definición 5.3 (Superficie bien representada 3)**.** Dada una superficie S y un politopo P que la aproxima, se dice que la representa con una precisión de $\epsilon > 0$ si para todo triángulo T del politopo se cumple que $K_T A(T) < \epsilon$, donde K_T es el máximo valor de la curvatura de Gauss en valor absoluto en T.

La medida equivalente para los lados es $K_l L$ donde L es la longitud y l el lado del triángulo.

Si utilizamos como medida sólo la curvatura, que no depende de la parametrización de la superficie, teselaríamos de igual forma en un triángulo grande T_1 y en uno pequeño T_2 si $K_{T_1} = K_{T_2}$, obteniendo subtriángulos distintos. Esto se debe a que la parametrización elegida deforma la malla inicial cambiando de forma irregular el tamaño de los triángulos. Un claro ejemplo es la reducción de la base de los triángulos a medida que nos acercamos a los polos en una esfera con la parametrización usual. Se puede observar en la siguiente imágen, donde el color indica el área diferencial de la parametrización.

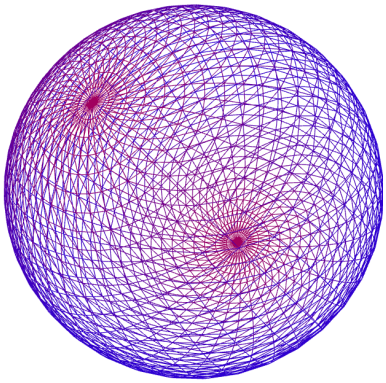


Figura 5.4.: Deformación heterogénea de la malla

Para evitarlo, multiplicamos por el área del triángulo, así que para el caso anterior el triángulo T_1 tendría un valor de dicha medida mayor que el triángulo T_2, por lo que sería necesario teselar más.

Puesto que la escena es dinámica y es posible mover el punto de visión, se puede utilizar el área relativa al "ojo" en vez del área real, es decir, variar la teselación necesaria según la distancia del ojo a la superficie. Esto permite que a medida que nos acerquemos a la superficie la teselación aumente, funcionando de manera similar a un gráfico vectorial escalable (SVG), pero en $\mathbb{R}^3$.

También tiene un punto negativo, y es que genera una excesiva teselación en zonas con una cruvatura de Gauss muy elevada (en valor absoluto), por lo que puede crear efectos antinaturales si hay zonas con poca curvatura cerca, ya que hay un cambio brusco de teselado:

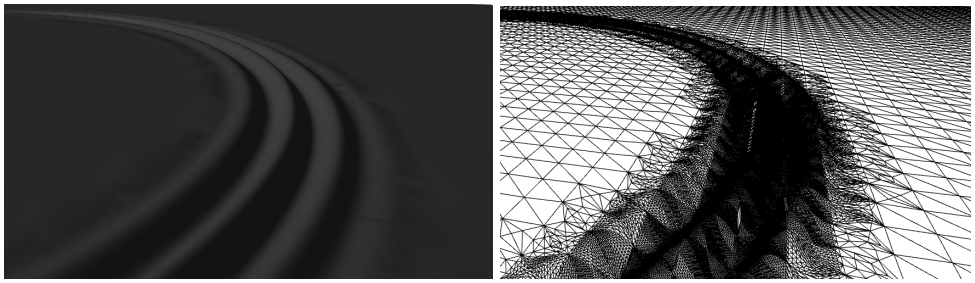


Figura 5.5.: Teselado basado en K.

Esto se puede corregir elevando el valor absoluto de la curvatura de Gauss a un exponente $\alpha > 0$, en el que si $\alpha < 1$ la teselación será más uniforme, manteniendo sin teselar las zonas planas, y si $\alpha \geq 1$ se le dará más inportancia a las zonas curvas. En la práctica se recomienda usar $0.1 < \alpha < 0.5$ para un buen equilibrio calidad/rendimiento.

Las siguientes imágenes muestran el uso de esta funcionalidad, requeriendo el mismo número de triángulos que en las figuras anteriores:

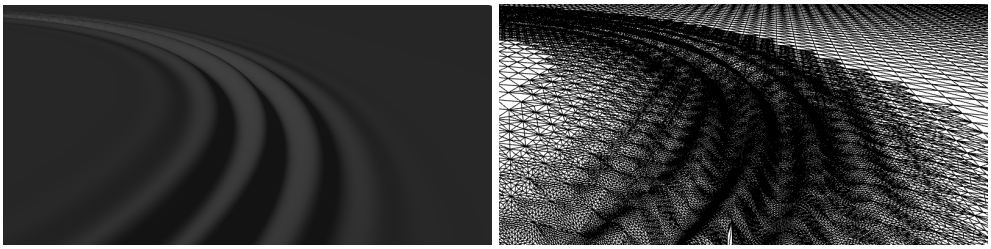


Figura 5.6.: Teselado con exponente α.

5.4. Mejora del teselado

En esta sección vamos a estudiar cómo mejorar el proceso de teselado para mostrar buenos resultados sin tener un gran impacto en el rendimiento. En general, nuestro cerebro reconstruye el objeto visualizado atendiendo a los bordes detectados y a las texturas, además de obviar los elementos que están fuera del campo de visión y aquellos ocultos. La siguiente comparación es un buen ejemplo para corroborarlo:

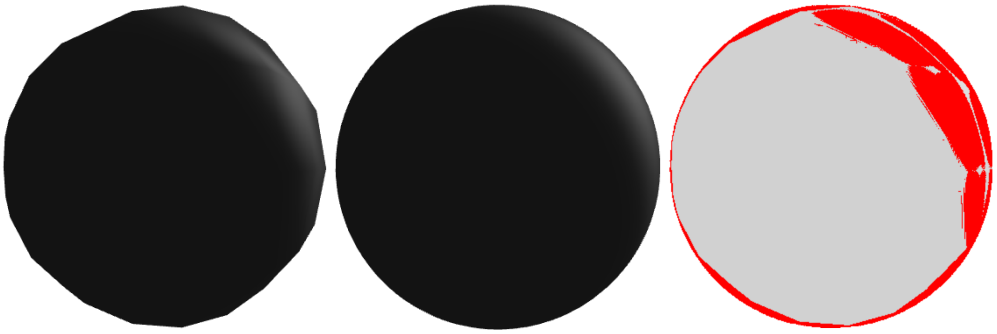


Figura 5.7.: Calidad visual según los bordes y texturas

La primera figura está aproximada con una cantidad muy inferior de primitivas con respecto a la segunda, y la última es la diferencia entre las dos primeras, para así ver la importancia de la correcta representación de bordes y texturas. Para el caso de la visualización de superficies tenemos que:

1. Visualizar una superficie a diferentes **distancias** equivale a visualizar la misma superficie pero con distinto tamaño, es por ello que el umbral utilizado para la definición de buena aproximación puede ser relativo a la distancia de la cámara al triángulo visualizado. De esta forma, para zonas con características similares y a diferentes distancias, el teselado será mayor en la que está más cerca de la cámara. Además, podemos complementarlo añadiendo una distancia máxima de teselado, para evitar teselar zonas alejadas en superficies no compactas.

2. Los únicos **bordes** posibles son aquellas zonas donde el vector de visualización del punto (con origen la cámara y destino el punto a comprobar, normalizado) es perpendicular a la normal en el punto. Si reducimos el nivel de teselado en zonas que no sean bordes, teniendo cuidado en las zonas con mayor iluminación, mantedremos la misma calidad visual reduciendo el número de primitivas usadas. En la práctica se ha utilizado un factor de reducción de $\frac{2}{3}$.

3. Ver la **textura** de una superficie equivale a ver cómo afecta la iluminación a la misma, por lo que en nuestro caso una zona con textura visible es aquella donde el factor de iluminación difusa es mayor que 0. Además, podemos reducir el nivel de teselado como en el apartado anterior en caso de que la iluminación sea tenue, es decir, mayor que 0 pero menor que un umbral $\alpha > 0$ (en la práctica se ha utilizado $\alpha = 0.5$). El factor de iluminación difusa se calcula de la siguiente forma:

$$< N(u,v), \frac{P_L - p(u,v)}{|P_L - p(u,v)|} >$$

Con p carta, $N(u,v)$ la normal en $p(u,v)$ y P_L la posición de la luz actual.

4. Un elemento está **fuera del campo de visión** si el vector frontal de la cámara y el vector de visualización del punto cumplen ciertas restricciones, cuya complejidad dependerá de la definición de campo de visión escogida. Simplificando el problema, podemos decir que esto sucede si su producto escalar es cercano al 0, bajo un cierto umbral $\delta > 0$ que definirá el campo de visión con forma de cono. Dado un ángulo de visión α, el umbral se puede calcular como $cos(\frac{\alpha}{2})$, obtenido a partir de la expresión del producto escalar:
$$< p, q >= |p||q|cos(\angle(p,q))$$
Para tener una visión de 75º sería necesario un umbral de 0.793 aproximadamente. En la prácitca se calcula automáticamente según el FoV en el eje X y el eje Y (se calcula el FoV de la diagonal, para encerrar la "pirámide de visión" en un "cono de visión" mayor).

5. Si la superficie es orientable y su complemento tiene 2 componentes conexas, entonces el punto p está **oculto por superposición** si el producto escalar del vector de visualización de p con la normal en p es mayor que 0. Para evitar el solapamiento con la definición de borde, se puede proporcionar un umbral $\epsilon > 0$, comprobando si dicho producto es mayor que ϵ en vez del 0.

Aplicando los cuatro primeros apartados podemos mejorar el rendimiento del programa para cualquier superficie, independientemente de sus características topológicas y geométricas.

En cuanto al último apartado, el aumento de rendimiento puede ser bastante grande según el tipo de superficie, pero se trata de una situación más específica y no siempre se va a poder utilizar. Es por ello que en el programa se da a elegir al usuario si quiere activar o no dicha funcionalidad (desactivada por defecto).

5.5. Estimación de las medidas

Debido al cálculo costoso que conlleva la obtención de dichas medidas en el interior del triángulo, el problema se ha reducido a calcular el nivel de teselado en las medianas del triángulo y posteriormente tomando el valor medio, para así evitar grandes diferencias de teselado con respecto a los lados del triángulo. Además, esto facilita compartir ciertos cálculos con los lados y así mejorar el rendimiento.

Para calcular la curvatura de Gauss por área y la iluminación en un segmento es necesaria una aproximación puesto que dichos valores normalmente no serán constantes. Para ello realizamos muestras equidistantes en el segmento a estudiar, de forma determinista para que triángulos adyacentes tengan el mismo nivel de teselado en el lado compartido.

Una vez tomadas las muestras, calculamos el valor de la curvatura de Gauss en valor absoluto y del producto escalar para la iluminación difusa y nos quedamos con el máximo para cada uno, contemplando así el peor caso posible. Se ha utilizado el máximo en vez de cualquier otra función para así detectar mejor la presencia de "picos" y otras zonas extremadamente curvadas con tamaño mucho menor que el del triángulo inicial.

6. Procesador

En este capítulo nos centramos en el diseño de un lenguaje sencillo para representar las cartas que definen a la superficie, que es un punto clave de la aplicación.

El procesador del lenguje tendrá como salida lenguaje GLSL para compilarlo como un shader y así transformar la malla inicial (triangulación del conjunto $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$), dando forma a la superficie. Paralelamente construirá el árbol de expresión de cada parametrización, permitiendo el cálculo de las derivadas parciales, necesarias para la obtención de las normales y la curvatura de Gauss.

A continuación se muestra un código de ejemplo que ilustrará la forma de una parametrización utilizando el lenguaje deseado:

```
//– Ejemplo para la parametrización de la esfera –//
// Definir las costantes (PI es una cte predefinida)
PI2 : real = 2*PI;

// Definir funciones adicionales (sin y cos están predefinidas)
compx(u, v : real) : real = cos(v*PI)*cos(u*PI2);
compy(u, v : real) : real = cos(v*PI)*sin(u*PI2);
compz(u, v : real) : real = sin(v*PI);

// Definir la función principal
f(u, v : real) : vec3 = vec3(compx(u,v), compy(u,v), compz(u,v));

// Usar otra función para redefinir el dominio, en vez del cuadrado [0,1] × [0,1]
g(u, v : real, t0, t1 : real) : vec3 = f(t0 * (u-0.5), t1 * (v-0.5));

// Para pintar 'g', debe devolver un tipo 'vec3' y los dos primeros argumentos
// deben ser reales (u y v). El resto serán parámetros de tiempo (para homotopías)
plot g;
```

6.1. Especificación BNF

Se describirá en esta sección de forma rigurosa el lenguaje que recibirá como entrada el programa "procesador":

```
<Programa>              ::=  <lista_sentecias><sentencia_plot>;

<lista_sentecias>       ::=  <lista_sentecias><sentencia>;
                          |  <sentencia>;

<sentencia>             ::=  <sentencia_declar_valor>
                          |  <sentencia_declar_fun>

<sentencia_declar_valor>::=  <identificador>: <identificador>= <expresion>

<sentencia_declar_fun>  ::=  <identificador>(<lista_param>) : <identificador>= <expresion>

<sentencia_plot>        ::=  plot <lista_ident>

<expresion>             ::=  (<expresion>)
                          |  if <expresion>then <expresion>else <expresion>
                          |  <expresion><op_binario><expresion>
                          |  <op_unario><expresion>
                          |  <identificador>(<lista_expresiones>)
                          |  <expresion>[<expresion>]
                          |  <identificador>
                          |  <constante>

<op_binario>            ::=  + | - | * | / | and | or | >| <| >= | <= | == | != | ^

<op_unario>             ::=  - | !

<lista_expresiones>     ::=  <lista_expresiones>,<expresion>
                          |  <expresion>

<lista_param>           ::=  <lista_param>, <lista_ident>: <identificador>
                          |  <lista_ident>: <identificador>

<lista_ident>           ::=  <lista_ident>, <identificador>
                          |  <identificador>

<identificador>         ::=  <letra><cadena>
                          |  <letra>

<cadena>                ::=  <cadena><letra>
                          |  <cadena><numero>
                          |  <letra>
                          |  <numero>
```

<constante>	::=	<numero_entero>
	|	<numero_real>
	|	<bool>
<numero_real>	::=	<numero_entero>
	|	<numero_entero>.<numero_entero>
<numero_entero>	::=	<numero_entero><numero>
	|	<numero>
<bool>	::=	true | false
<letra>	::=	a | ... | z | A | ... | Z
<numero>	::=	0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

7. Planificación y presupuesto

7.1. Planificación temporal inicial

<table>
<tr><td colspan="4">Planificación temporal en fases</td></tr>
<tr><td>Nº</td><td>Nombre</td><td colspan="2">Tareas</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Inicial</td><td colspan="2">- Estudio inicial del problema</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Implementación básica</td><td>Procesador:

- Definición del lenguaje (BNF)

- Implementar primera versión del procesador a partir del código de la asignatura Procesadores de Lenguajes, que sólo detecta errores.
- Complementar el procesador para traducir a código GLSL (generación de árbol sintáctico), para usarlo en el vertex shader.</td><td>Visualizador:

- Toma de contacto con OpenGL, el lenguaje GLSL e ImGui.
- Construir un programa de visualización a partir de código base, haciendo uso de los shaders básicos. La normal será la del triángulo.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Conexión inicial</td><td colspan="2">- Conectar apropiadamente los programas, para visualizar la superficie definida con la parametrización.
- Estudiar el correcto funcionamiento de ambas aplicaciones hasta ahora. Corregir en caso de ser necesario.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Completar procesador</td><td colspan="2">- Implementar los algoritmos que calculan los árboles de las derivadas parciales de las expresiones. Añadir seguidamente la generación de funciones típicas, como la normal, el área diferencial y la curvatura de Gauss.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Conexión avanzada</td><td colspan="2">- Utilizar la función normal en los puntos, en vez de las normales de los triángulos. Además, mostrar la normal como un segmento de color distinto al de la superficie.
- Mostrar mediante colores el valor del área diferencial y de la curvatura de Gauss en cada punto.
- Estudiar el correcto funcionamiento de ambas aplicaciones hasta ahora. Corregir en caso de ser necesario.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Implementación avanzada</td><td colspan="2">- Implementar la teselación uniforme mediante el uso del geometry shader.
- Completar con una gran variedad de ejemplos.
- Estudiar el correcto funcionamiento del teselado.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Estudio de la mejor medida</td><td colspan="2">- Elegir ciertas estadísticas del renderizado para comprobar si los resultados son buenos.
- Estudiar varias medidas para controlar el nivel de teselado.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Estética</td><td colspan="2">- Completar la interfaz del usuario.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Revisión</td><td colspan="2">- Estudiar el correcto funcionamiento de ambas aplicaciones hasta ahora. Corregir y añadir elementos si fuese necesario.</td></tr>
</table>

7.2. Diferencias con la planificación real

- Después de implementar el algoritmo de derivación (fase 4), fue necesario añadir un algoritmo de simplificación de expresiones, para evitar cálculos triviales (sumar/multiplicar 0 y multiplicar/dividir por 1).
- Tras el estudio del geometry shader (fase 6), se observó que no era tan adecuado para el proyecto como el propio tessellation shader, así que se inició una nueva fase de estudio para dicho shader.
- Durante la fase de estudio de la mejor medida (fase 7), por la naturaleza del procesador del lenguaje, este era fácilmente adaptable para permitir llamadas a derivadas parciales dentro del lenguaje (de funciones ya definidas). Es por ello que se desarrolló paralelamente esta funcionalidad.
- Finalmente fue necesario introducir una fase de optimización de código, en especial para los shaders (GLSL) para sacar el máximo partido al cáculo vectorial y evitar realizar cálculos repetitivos en la GPU.

7.3. Presupuesto

El presupuesto se ha calculado en base al sueldo medio de un ingeniero informático, junto con el coste de desarrollo temporal del proyecto. No se añaden gastos de licencias de software puesto que el software es libre en su totalidad (ImGui y Mesa, similar a OpenGL).

Sueldo medio	18000 €/año
Horas anuales	1800 h/año
Precio de la hora	10 €/h

Tiempo estimado	60 días
Horas al día	6 h/día
Total horas	360 h
Presupuesto horas	3600 €

Aunque el hardware usado estaba ya adquirido, se incluirá como posible gasto extra:

Precio actual Lenovo v110-15isk 80tl 8 GB RAM, 500 GB HDD	460 €
Gasto estimado de material (electricidad, desgaste, etc)	40 €
Total presupuesto	**4100** €

8. Análisis y diseño

En este capítulo se especificará toda aquella información referente a la estructura del programa y los requisitos del mismo, aunque está mayormente enfocado a la definición de los algoritmos desarrollados.

8.1. Especificación de requisitos

8.1.1. Requisitos funcionales

1. Se podrán visualizar varias parametrizaciones a la vez, donde cada una representará una carta de una superficie específica, con el objetivo de representar homotopías e isotopías entre superficies.
   a) El sistema debe permitir visualizar cualquier parametrización que se le indique, siempre que cumpla con la estructura del lenguaje definido.
   b) Cada parametrización podrá admitir parámetros de "tiempo", para así modificar la porción de superficie que representa y así poder visualizar homotopías e isotopías.
2. El programa contará con una interfaz clara, sencilla y completa.
   a) El usuario tendrá la posibilidad de indicar manualmente los parámetros adicionales de las cartas (t_i). Además se incluirá la opción de que cada t_i se mueva de forma automática, para así generar animaciones fluidas.
   b) El usuario podrá indicar ciertos parámetros del cálculo de la malla de la superficie, como:
      1) El tamaño de la malla inicial con la que se visualizará cada carta de la superficie.
      2) La precisión con la que se quiere representar la superficie actual.
   c) El usuario podrá indicar si quiere visualizar ciertos atributos de la superficie, como:
      1) La curvatura de Gauss, asignando un color para la curvatura negativa y otro para la positiva, dependiendo de un parámetro de escala para resaltar las zonas.
      2) El área diferencial de la parametrización, junto con un umbral y un factor de escala que se podrán modificar.
      3) Se podrán visualizar los vectores tangente, normal y binormal de cada vértice generado.
   d) El usuario tendrá la posibilidad de modificar los valores referentes a la iluminación.
      1) Los coeficientes del modelo de iluminación Phong.

2) El color del fondo de la escena y el color base del objeto visualizado.

3. El programa no renderizará nuevos frames si no se requieren nuevos cálculos, es decir, si no se detectan cambios en la entrada y la escena está estática.

8.1.2. Requisitos no funcionales

1. El programa debe renderizar las superficies con un tiempo de respuesta bajo, pensando en dispositivos con una GPU común, como por ejemplo una gráfica integrada.
   a) El programa adaptará su rendimiento según el estado del propio programa.

8.2. Metodología de desarrollo

8.3. Diagramas

8.4. Principales desarrollos algorítmicos

9. Implementación y pruebas

9.1. Optimización del código GLSL

Puesto que queremos que el programa renderice la escena en tiempo real, es necesario simplificar todo lo posible el código de los shaders, sobre todo del fragment shader (se va a ejecutar para cada vértice generado en el teselado). Para ello se han tenido en cuenta los siguientes hechos (FUENTE GLSL OPTIMIZATIONS):

- Evitar el uso de saltos condicionales y de bucles. En caso de ser necesario algún bucle, usar los de la forma "for(int i=0; i<n; i++)" con n entero constante, para permitir el desenrollado del bucle por el compilador.
- Utilizar "Swizzle" en vez de asignar vectores componente a componente.
- Utilizar "MAD", es decir, usar siempre que sea posible la multiplicación por el inverso en vez de la división (para aquellos valores "uniform" o constantes) y desarrollar las expresiones como una sumatoria de productos. Por ejemplo, utilizar $a * 0.5 + b * 0.5$ en vez de $(a + b)/2$.
- Utilizar "dot" para agrupar varias expresiones en 1. De igual forma utilizar todo el cálculo vectorial y matricial posible para resumir las operaciones.
- Si una expresión es común para un mismo frame, calcularlo en la CPU y asignarlo como otro "uniform" para quitarle carga a la GPU, ya que se ejecutaría para cada primitiva o vértice (dependiendo de en qué shader se realize el cálculo).

Es cierto que el compilador ya realiza de manera automática algunas de estas optimizaciones, pero su puesta en práctica reduce ligeramente el tiempo de compilación.

9.2. Generación de informes

Para medir el rendimiento de la aplicación se han medido los fotogramas generados por segundo y las primitivas que hay presentes en la escena, incluyendo las que son producto del teselado.

La medición del nº de primitivas se ha realizado mediante el uso de la estructura "query"de OpenGL, la cual se actualiza cada vez que renderiza la escena. El nº de fotogramas por segundo se ha calculado manualmente, a partir de la latencia entre fotogramas (cuando se acumula más de 1 segundo de latencia, devuelve el nº de fps en ese segundo).

Además, para mayor comodidad se ha añadido una opción para realizar dichas mediciones de forma automática y escribir los resultados en un archivo cuyo nombre dependerá de la parametrización actual y el modo de visualización. Por defecto realiza 22 medidas (22 segundos). Es ligeramente mayor que 20 para después quitar la primera y/o última medida,

ya que están influenciadas por la interacción del usuario con la interfaz.

Estas medidas son suficientes para observar si la aplicación está aprovechando correctamente los recursos para obtener una buena visualización de la superficie, ya que el objetivo es que funcione en tiempo real ofreciendo la mínima carga posible al sistema.

9.3. Resultados

En esta sección se mostrarán los datos medidos en la aplicación para comparar las técnicas usadas. Se han seleccionado 2 superficies de las disponibles como ejemplos, "gaussiana.in" y "waves.in". Los parámetros se han elegido de manera que la visualización sea similar entre los distintos modos de renderizado, minimizando el nº de triángulos de la escena para cada modo, que es el objetivo de estudio: ofrecer un nivel de aproximación específico, maximizando el rendimiento.

gaussiana.in					
	FPS				
Modo	Min	Max	Media	Mejora (fps)	Mejora (%)
No tess.	205	250	231,54	–	–
Normal tess.	253	278	267,63	+36,09	+15,58
Improve1	242	282	266,63	+35,09	+15,15
Improve2	**255**	**284**	**273,72**	**+42.18**	**+18,21**
	Triángulos				
Modo	Min	Max	Media	Mejora (tri.)	Mejora (%)
No tess.	20000	20000	20000,00	–	–
Normal tess.	10547	11802	11165,5	−8834,50	−44,17
Improve1	8267	10232	9100,00	−10900,00	−54,5
Improve2	**6642**	**10120**	**8212,68**	**−11787,31**	**−58,93**

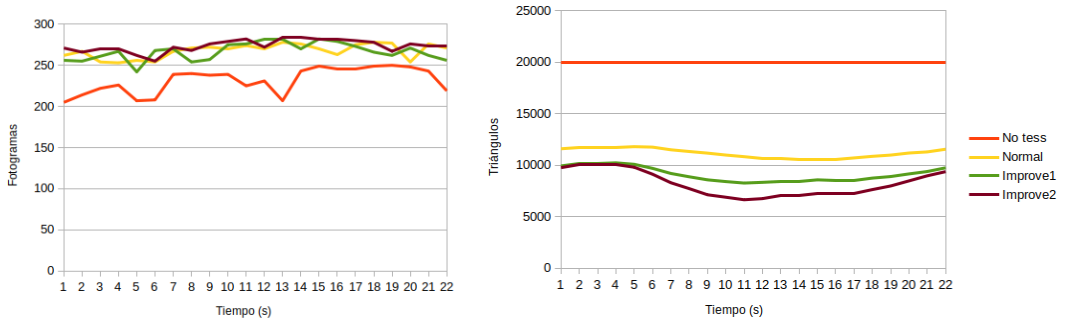


Figura 9.1.: Gráfica de la animación de rotación en gauss.in

waves.in					
	FPS				
Modo	Min	Max	Media	Mejora (fps)	Mejora (%)
No tess.	21	24	21,81	–	–
Normal tess.	53	63	58,27	+36,45	+167,08
Improve1	**63**	72	64,68	+42,86	+196,45
Improve2	62	**87**	**69,86**	**+48.04**	**+220,20**
	Triángulos				
Modo	Min	Max	Media	Mejora (tri.)	Mejora (%)
No tess.	1000000	1000000	1000000,00	–	–
Normal tess.	456480	637537	550527,77	−449472,22	−44,94
Improve1	197244	224222	212327,00	−787673,00	−78,76
Improve2	**194703**	**223824**	**210390,31**	**−789609,68**	**−78,96**

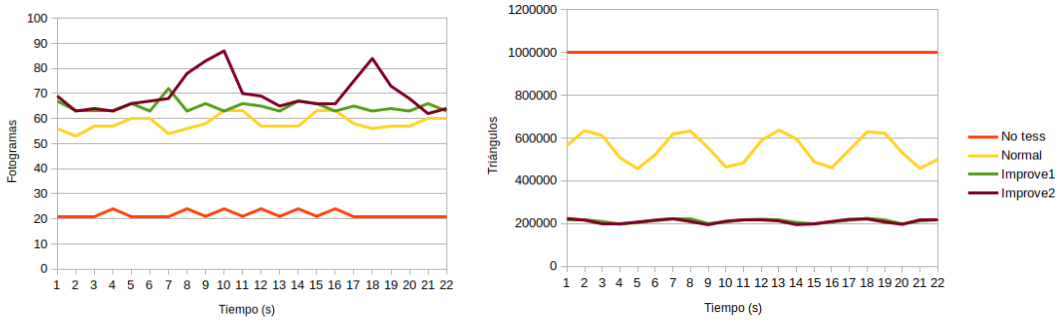


Figura 9.2.: Gráfica de la animación de rotación en waves.in

Las siguientes imágenes corresponden con la parametrización "gaussiana.in" con los distintos modos de visualización, donde para cada modo se ha buscado la configuración óptima, es decir, aquella en la que se ve visualmente bien y el nº de triángulos es mínimo. Por tanto, las 4 imágenes debería ser exactamente iguales:

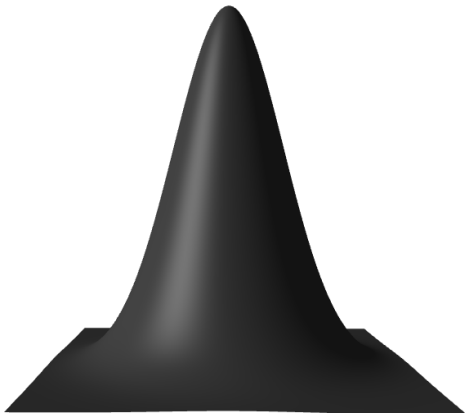


Figura 9.3.: gaussiana.in sin teselar

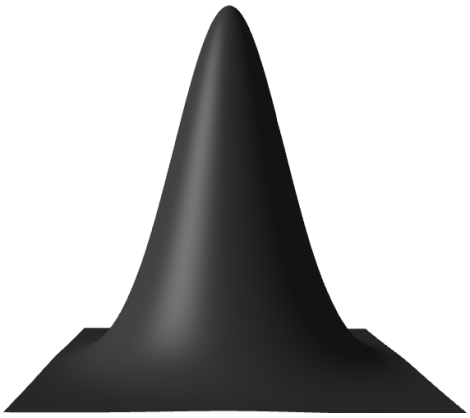


Figura 9.4.: gaussiana.in teselado normal

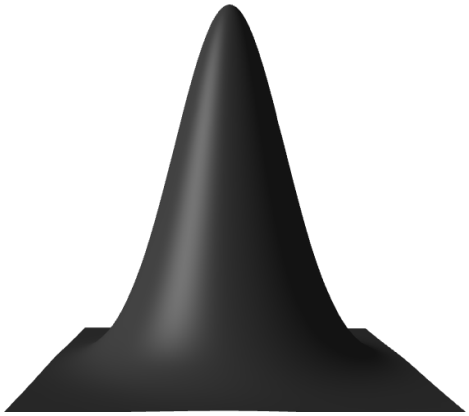


Figura 9.5.: gaussiana.in improve1

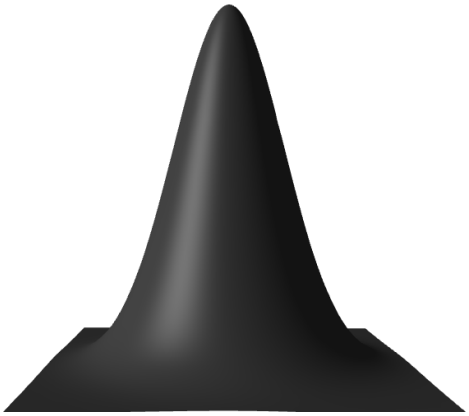


Figura 9.6.: gaussiana.in improve2

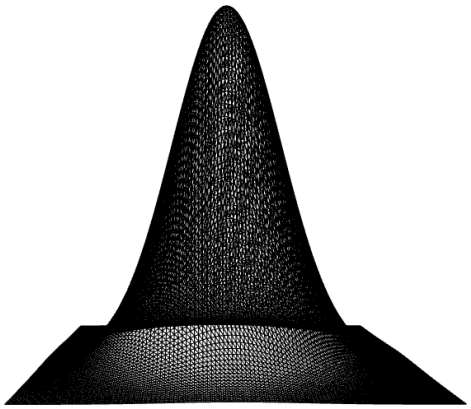


Figura 9.7.: gaussiana.in sin teselar

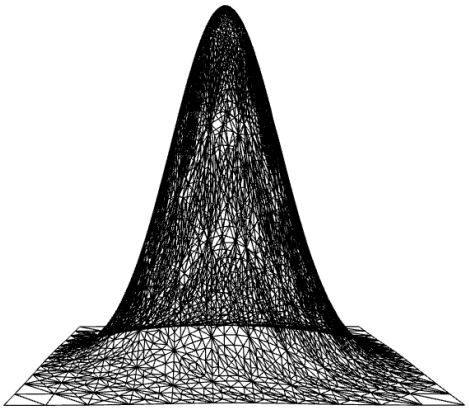


Figura 9.8.: gaussiana.in teselado normal

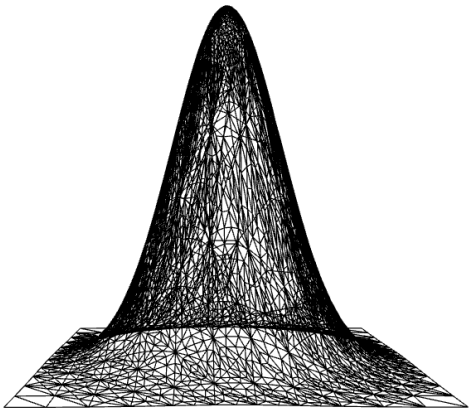


Figura 9.9.: gaussiana.in improve1

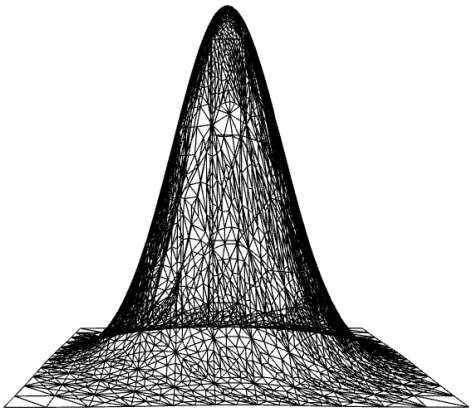


Figura 9.10.: gaussiana.in improve2

Seguidamente se muestran las imagenes correspondientes a la parametrización "waves.in". Sin embargo, debido a la complejidad de la superficie base (plano horizontal perturbado con un coseno), para el modo "sin teselado" es imposible llegar a una buena representación incluso utilizando una malla inicial de 1 millón de triángulos, debido a la aparición de efectos ópticos, por la uniformidad de la malla inicial (parece haber más de un foco mientras que sólo hay uno).

También es posible observar que al pasar de "improve1" a "improve2" puede aparecer algún segmento sin teselar. Se debe a que detecta que es un segmento oculto, mediante un cálculo basado en los extremos del segmento, pero como ya se comentó anteriormente esta funcionalidad está pensada para superficies específicas.

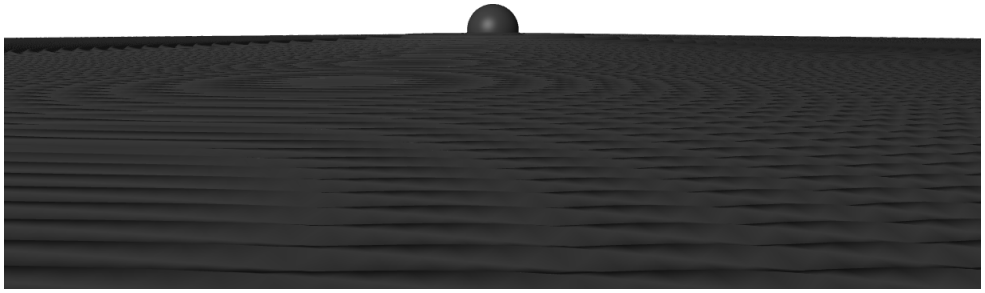


Figura 9.11.: waves.in sin teselar

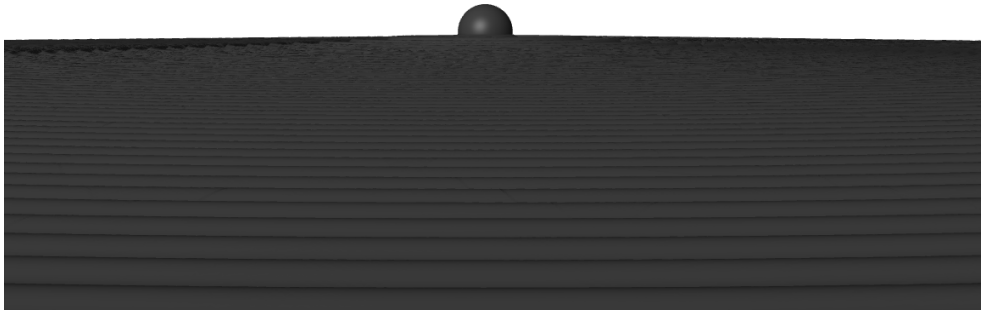


Figura 9.12.: waves.in teselado normal

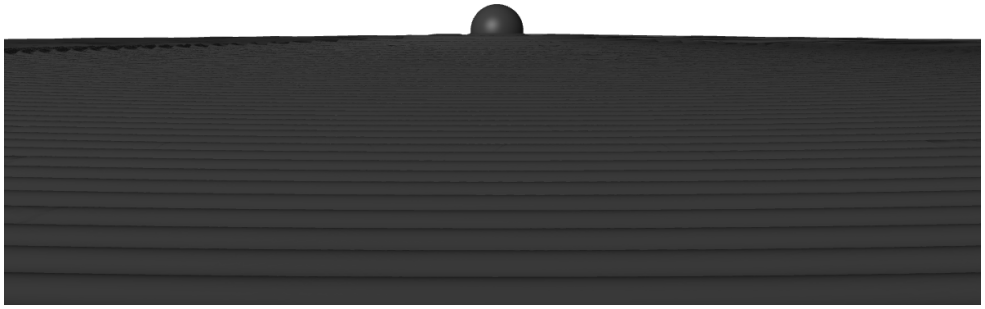


Figura 9.13.: waves.in improve1

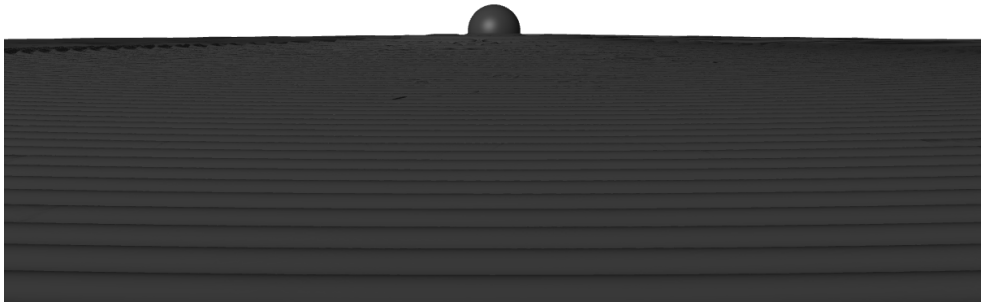


Figura 9.14.: waves.in improve2

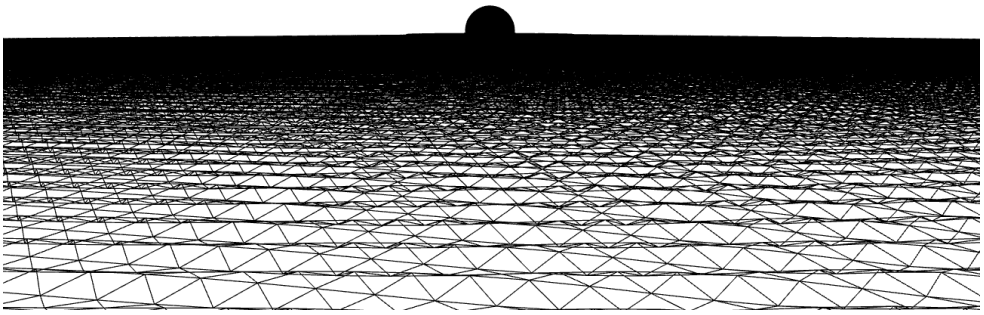


Figura 9.15.: waves.in sin teselar

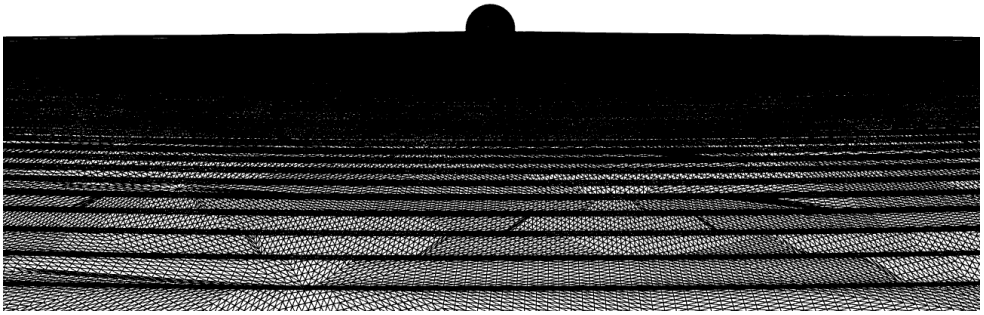


Figura 9.16.: waves.in teselado normal

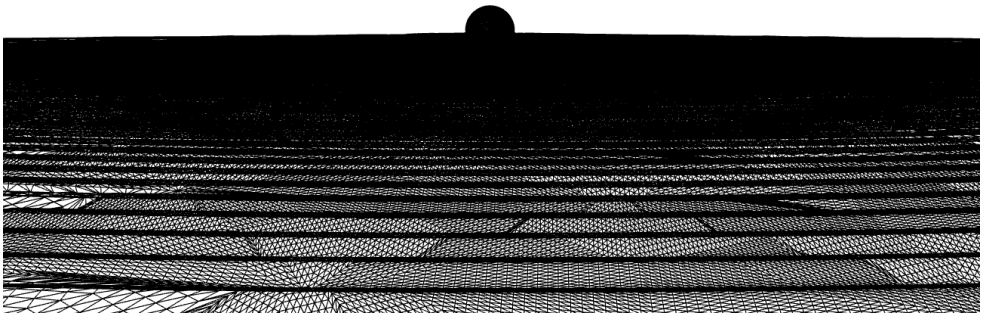


Figura 9.17.: waves.in improve1

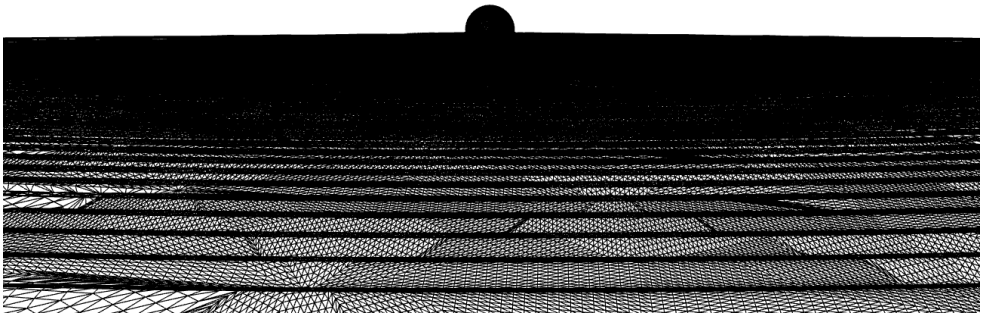


Figura 9.18.: waves.in improve2

A. Instalación del software

A.1. Requisitos previos

Los requisitos mínimos para poder compilar el proyecto son los siguientes:

- SO: Ubuntu 16.04 LTS o superior (o distribuciones similares).
- GPU: compatible con versión de OpenGL 4.4 o superior (para poder usar el tessellation shader, entre otros).
- Paquetes: "make", para poder usar el makefile, y "apt", para gestionar paquetes.

A continuación se muestran las dependencias del proyecto, aunque el propio makefile las comprobará y actualizará:

- Procesador:
  - gcc.
  - flex.
  - bison, versión 3.2 o superior (se recomienda la 3.5.1).
- Visualizador de Superficies (además de las de Procesador):
  - g++, versión 11 o superior.
  - mesa-utils y mesa-common-dev, que es una implementación de código abierto de OpenGL.
  - libglfw3 y libglfw3-dev, para que la aplicación pueda gestionar las ventanas del sistema.

A.2. Instalación

Para instalar el programa basta con clonar el repositorio de GitHub y ejecutar la orden "make install" desde la terminal, en el directorio raíz del programa. Realizará la comprobación de las dependencias de forma automática y en caso de no estar instaladas solicitará la confirmación de su instalación (a la última versión). Después compilará automáticamente el programa.

A.3. Errores de compilación

En caso de que aparezcan errores al compilar, compruebe detenidamente que se cumplen los **Requisitos previos**. Es posible que algunas dependencias no estén actualizadas para el comando "apt" y sea necesario instalarlo manualmente desde sus respectivas páginas oficiales.

B. Guía de uso del programa

En este capítulo se explicará brevemente cómo utilizar el programa. Aun así, la interfaz del programa se ha intentado diseñar lo más sencilla y clara posible, mostrando adicionalmente cuadros de texto si se mantiene el ratón sobre ciertos elementos.

Si sólo quiere hacer uso del programa "procesador", ejecute el comando:

make read FILE=<archivo>

pero desde el directorio "procesador". Esta acción devolverá la traducción de "<archivo>" al fichero "../shaders/functions.s" y la salida de error en "../error.log".

Si queremos utilizar el programa completo, primero instalaremos el programa tal y como se indica en el apéndice de **Instalación del software**. Una vez instalado, se abrirá siempre con el comando "make", "make execute" o equivalentemente "./bin/program". Teniendo abierto el programa se mostrará siempre la última parametrización compilada con éxito. En el lateral izquierdo aparecerá un elemento de la interfaz, el menú, donde se podrá:

- Parametrización:
  - Seleccionar una parametrización ya existente, crearla o compilarla. También se podrá editar la actual, en cuyo caso aparecerá una ventana de edición de la propia interfaz. Dicha ventana también aparecerá en caso de que hayan errores léxicos, sintácticos o semánticos en la parametrización, con la salida del error desplegada.
  - Cambiar el tamaño de la malla de partida, requeriendo su posterior actualización manual (botón contiguo).
  - Visualizar la ventana con los parámetros temporales, con un tick que indica si está activa la ventana o no. Estará semi-visible si la superficie no tiene parámetros temporales. Dicha ventana mostrará los parámetros temporales en orden, permitiendo moverlos manualmente o generar una animación:
    - Sin: movimiento sinusoidal entre el valor 0 y 1. Ideal para animaciones oscilantes.
    - Lineal: movimiento lineal del valor 0 al 1, volviendo instantáneamente al 0. Utilizado para movimientos lineales respecto al tiempo, que junto con el uso de funciones periódicas se puede generar la sensación de movimiento infinito (como los ejemplos wavesX.in).
- Visualización del objeto:
  - Invertir normales (si no se quiere modificar la parametrización).
  - Visualizar en modo malla ("Poligon mode").
  - Activar/desactivar la auto-rotación (rotación entorno al punto hacia el que mira la cámara).

    - Ver los vectores tangentes, bitangentes y normales a los puntos (ya sean los de la malla inicial o de todos los generados).
    - Cambiar modo del color de la superficie, ya sea el color base, la curvatura de Gauss, el área diferencial, la altura o los puntos críticos de ésta vista como función de Morse. Una vez seleccionado un modo, aparecerán coeficientes que permitirán ajustar correctamente la visualización a la superficie actual.
- Opciones del teselado:
    - Desactivar/activar el teselado.
    - Indicar la precisión a la que se desea llegar con el teselado.
    - Opciones avanzadas: modificar aquellos coeficientes específicos del teselado, como el tipo de mejora de rendimiento a usar ("improve" normal o específica), la distancia de teselado, el umbral para detectar bordes y el exponente aplicado a la curvatura de Gauss. Todos ellos se inician con un valor por defecto.
- Iluminación: es posible cambiar los coeficientes del modelo de iluminación "Phong" y ver el vector de dirección de la luz actualmente. La luz no es direccional, el vector indica la dirección de la luz con respecto al origen $(0, 0)$.
- Estadísticas: muestra los fotogramas por segundo y la latencia medias, junto con el número de primitivas generadas tras la fase del geometry shader (después del tessellation shader). Permite además grabar los datos y los almacena de manera automática tras 22 segundos (antes si pulsamos "Stop" y seguidamente "Save info") en un fichero en el directorio raíz, con nombre dependiente de la parametrización y configuración actual.

Para mayor comodidad, se han incorporado atajos de teclado para ciertas acciones:

- 'LCtrl' + 'R': activa/desactiva el modo de rotación automática.
- 'LCtrl' + 'P': cambia entre los modos de visualización malla y relleno.
- 'LCtrl' + 'N': activa/desactiva la visualización de normales.
- 'LCtrl' + 'L': ejecuta el "procesador" y compila los shaders.

Además, existen varios controles del ratón para manejar la cámara:

- Botón izquierdo: si se mantiene pulsado y arrastramos, la cámara realizará una traslación en la dirección contraria.
- Botón derecho: si se mantiene pulsado y arrastramos, la cámara realizará una rotación (cámara orbital) en la dirección contraria.
- Rueda: controla el zoom.
- Botón de la rueda: reinicia la posición de la cámara.

Conclusiones

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/conclusiones.tex`

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.
Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$ Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$ Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$ Conjunto de números enteros.